5. เมตริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix)

นิยาม ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัส และ $AB = BA = I$ แล้วเราจะกล่าวว่า A เป็นอินเวอร์สของเมตริกซ์ B เขียนแทนด้วย $A = B^{-1}$ หรือ B เป็นอินเวอร์สของเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย $B = A^{-1}$

นั่นคือ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

ตัวอย่าง $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}6 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

ดังนั้น $B=A^{-1}$

$$BA=\begin{bmatrix}6 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

ดังนั้น $A=B^{-1}$

การหาอินเวอร์สเมตริกซ์ สามารถหาได้ 2 วิธี คือ

1. หาโดยอาศัยแอดจอยด์เมตริกซ์
2. หาโดยใช้การแปลงตามแถว

1. หาโดยอาศัยแอดจอยด์เมตริกซ์

แอดจอยด์เมตริกซ์ (Adjoint Matrix) คือเมตริกซ์สลับเปลี่ยนของเมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกเป็นโคแฟคเตอร์ของสมาชิกในเมตริกซ์จัตุรัส A ใช้สัญลักษณ์

$$Adj\ A = [Cof\ A]^T$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา $Adj\ A$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u>

$$Cof\ A = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$Adj\ A = [Cof\ A]^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

หลักการหาอินเวอร์สเมตริกซ์

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|} \qquad \text{เมื่อ} \qquad |A| \neq 0$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา A^{-1} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> $Cof\ A = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ $\quad Adj\ A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$|A| = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ตรวจสอบ

$$AA^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>หมายเหตุ</u>

1. เมตริกซ์จัตุรัสใดๆ อาจจะมีหรือไม่มีอินเวอร์สเมตริกซ์ก็ได้
2. ถ้าเมตริกซ์ A เป็น Singular Matrix จะไม่มีอินเวอร์ส เพราะ $|A| = 0$ และถ้าเมตริกซ์ A เป็น Non-Singular Matrix จะมีอินเวอร์ส เพราะ $|A| \neq 0$
3. เนื่องจากการหาอินเวอร์สเมตริกซ์ โดยอาศัยแอดจอยต์เมตริกซ์นี้ กรณีที่เมตริกซ์มีอันดับสูงจะใช้เวลาในการหามาก จึงไม่สะดวกในการทำ

บางกรณีอาจจะพบสัญลักษณ์เมตริกซ์ยกกำลังติดลบ ในที่นี้หมายถึงจำนวนเท่าของอินเวอร์สเมตริกซ์

เช่น $A^{-2} = (A^{-1})^2 = A^{-1}A^{-1}$

$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1}...A^{-1}$ เมื่อ $n \geq 2$

2. หาโดยใช้การแปลงเชิงแถว

<u>การแปลงเบื้องต้น</u> (Elementary Transform)

การแปลงเบื้องต้น หมายถึงการดำเนินการกับเมตริกซ์อย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้

1. การสลับที่ระหว่างแถวสองใดๆ หรือสองสดมภ์ใดๆ การสลับแถวที่ i กับแถวที่ j เขียนแทนด้วย $R(i, j)$ และการสลับสดมภ์ที่ i กับสดมภ์ที่ j เขียนแทนด้วย $C(i, j)$
2. การคูณแถวใดแถวหนึ่ง หรือสดมภ์ใดสดมภ์หนึ่งด้วยค่าคงที่ $k \neq 0$ การคูณสมาชิกทุกตัวในแถวที่ i เขียนแทนด้วย kR_i และการคูณสมาชิกทุกตัวในสดมภ์ที่ i เขียนแทนด้วย kC_i

3. การบวกแถวที่คูณกับแถวอื่น หรือสดมภ์ที่คูณกับสดมภ์อื่น การบวกแถวที่ i ด้วย k เท่าของแถวที่ j เขียนแทนด้วย $R_i + kR_j$ และการบวกสดมภ์ที่ i ด้วย k เท่าของสดมภ์ที่ j เขียนแทนด้วย $C_i + kC_j$

เรียกการแปลงที่ใช้แถว ว่า*การแปลงแถวเบื้องต้น* (Elementary Row Transformation) และเรียกการแปลงที่ใช้สดมภ์ ว่า*การแปลงสดมภ์เบื้องต้น* (Elementary Column Transformation)

<u>เมตริกซ์สมมูล</u> (Equivalent Matrix)

ถ้าเมตริกซ์ A ถูกเปลี่ยนรูปเป็นเมตริกซ์ B โดยการดำเนินการแปลงที่กล่าวมาแล้ว และใช้สัญลักษณ์ $A \approx B$ เรียกเมตริกซ์ A สมมูลกับเมตริกซ์ B

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

เปลี่ยนเมตริกซ์ให้อยู่ในรูปใหม่จะได้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{2R_1+R_2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{9}R_2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์เบื้องต้น หรือเมตริกซ์ธาตุมูล (Elementary Matrix)

เมตริกซ์เบื้องต้น หรือเมตริกซ์ธาตุมูล คือเมตริกซ์ที่ได้จากเมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยการใช้การดำเนินการเปลี่ยนเชิงแถว เรียกเมตริกซ์ที่ได้ว่าเมตริกซ์ธาตุมูลเชิงแถว (Elementary Row Matrix) ใช้สัญลักษณ์ E

ส่วนการใช้การดำเนินการเปลี่ยนเชิงสดมภ์ เรียกเมตริกซ์ที่ได้ว่าเมตริกซ์ธาตุมูลเชิงสดมภ์ (Elementary Column Matrix) ใช้สัญลักษณ์ T

<u>ตัวอย่าง</u> $E_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ หมายถึงเมตริกซ์ที่ได้จากเมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยการสลับแถวที่สามกับแถวที่หนึ่ง

$T_1(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ หมายถึงเมตริกซ์ที่ได้จากเมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยการคูณสดมภ์ที่หนึ่งด้วย 2

$E_{13}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ หมายถึงเมตริกซ์ที่ได้จากเมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยการนำแถวที่หนึ่งลบด้วย 2 เท่าของแถวที่สาม

<u>หมายเหตุ</u>

1. ทุกๆเมตริกซ์ธาตุมูลเป็นเมตริกซ์ ซึ่งมิใช่เอกฐาน (Non-Singular Matrix)
2. ถ้าใช้การดำเนินการเปลี่ยนเชิงแถวกับเมตริกซ์ A ก็ต้องนำเมตริกซ์ธาตุมูลที่สอดคล้องคูณข้างหน้าเมตริกซ์ A
3. ถ้าใช้การดำเนินการเปลี่ยนเชิงสดมภ์กับเมตริกซ์ A ก็ต้องเอาเมตริกซ์ธาตุมูลที่สอดคล้องคูณข้างหลังเมตริกซ์ A

ตัวอย่าง ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \underset{R(1,2)}{\approx} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = B$

ดังนั้น $E_{12}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = B$

หลักการหาอินเวอร์สเมตริกซ์

1. สร้างเมตริกซ์แต่งเติม $[A \vdots I]$ โดยที่ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ที่มีอันดับเท่ากับเมตริกซ์ A
2. ใช้การดำเนินการแบบแถวหรือสดมภ์กับเมตริกซ์แต่งเติม $[A \vdots I]$ จนได้เมตริกซ์ในรูป $[I \vdots B]$ นั่นคือ $[A \vdots I] \approx [I \vdots B]$ ดังนั้น $B = A^{-1}$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาอินเวอร์สเมตริกซ์ของเมตริกซ์ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> $\left[A\vdots I\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$

$$\approx R_2+R_1\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l}\approx R_3-R_2\\ \approx R_1-2R_2\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -3 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l}\approx R_2-2R_3\\ \approx R_1+3R_3\end{array}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -4 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right]=\left[I \vdots B\right]$$

ดังนั้น $A^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & -5 & 3\\ 3 & 3 & -2\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

<u>หมายเหตุ</u>

ถ้าไม่สามารถแปลงเมตริกซ์ $\left[A \vdots I\right]$ ให้เป็นเมตริกซ์ $\left[I \vdots B\right]$โดยวิธีการแปลงเชิงแถวได้ แสดงว่าเมตริกซ์ A ไม่มีอินเวอร์ส

คุณสมบัติของอินเวอร์สเมตริกซ์

ให้ เมตริกซ์ A เมตริกซ์ B และเมตริกซ์ C เป็นเมตริกซ์จัตุรัสอันดับ n

1. เมตริกซ์ใดๆจะมีอินเวอร์สเมตริกซ์เพียงเมตริกซ์เดียว

2. ถ้าผลคูณของสองเมตริกซ์จัตุรัสเท่ากับ I_n จะได้ว่าการคูณนั้นสลับที่กันได้ คือถ้า

   $AB = I_n$ จะได้ว่า $AB = BA$

3. ถ้าเมตริกซ์ A มีอินเวอร์ส จะได้ว่า $AB = AC$ นั่นก็คือ $B = C$

4. ถ้าเมตริกซ์ A และเมตริกซ์ B หาอินเวอร์สได้ จะได้ว่า $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

5. ถ้าเมตริกซ์ A มีอินเวอร์ส จะได้ $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

6. ถ้าเมตริกซ์ A มีอินเวอร์ส จะได้ $(A^{-1})^{-1} = A$

7. $AB = O$ จะได้ $A = O$ หรือ $B = O$ หรือทั้งเมตริกซ์ A และเมตริกซ์ B ไม่สามารถหาอินเวอร์สได้

8. ดีเทอร์มิแนนท์ของอินเวอร์สเมตริกซ์จะเป็นส่วนกลับกับดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์นั้น นั่นคือ $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

9. $(cA)^{-1} = \dfrac{1}{c} A^{-1}$ เมื่อ $c \neq 0$ เป็นสเกลล่าร์