

ตัวกำหนด

โดย ผศ.ดร.ชนวัฒน์ ศรีศิริวัฒน์



1. การเรียงสับเปลี่ยน



บทนิยามที่ 1 ให้ $S = \{1, 2, \dots, n\}$ การเรียงสับเปลี่ยน (Permutations) สมาชิกในเซต S เขียนแทนด้วย $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ โดยที่ j_k เป็นจำนวนเต็มบวกลำดับที่ k ของการเรียงสับเปลี่ยนและจะเรียก $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ ว่าการเรียงสับเปลี่ยนของสมาชิกใน S



ให้ $S = \{1, 2, 3\}$ สามารถเรียงสับเปลี่ยนได้ 6 แบบคือ $(1, 2, 3)(1, 3, 2)(2, 1, 3)(2, 3, 1)(3, 1, 2)(3, 2, 1)$
แต่ละแบบเรียกว่าตัวเรียงสับเปลี่ยน

ถ้าให้ S_n เป็นเซตของการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยนสมาชิกใน $S = \{1, 2, \dots, n\}$ แล้วจะได้จำนวนใน S_n เท่ากับ $n!$ แบบ

เช่น $S_3 = \{1, 2, 3\}$ มีการเรียงสับเปลี่ยน $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ แบบ

$S_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ มีการเรียงสับเปลี่ยน $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ แบบ

$S_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ มีการเรียงสับเปลี่ยน $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ แบบ



บทนิยามที่ 2 การหาการผกผันหรืออินเวอร์ชัน (Inversion) ในการเรียงสับเปลี่ยน $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ เกิดเมื่อจำนวนเต็มที่มากกว่าอยู่หน้าจำนวนเต็มที่น้อยกว่า



จำนวนการผกผันใช้สัญลักษณ์ $t(j)$ แทนจำนวนการผกผันในการเรียงสับเปลี่ยน
เช่น $j_1 = (1, 3, 2)$ การผกผันของ j_1 คือ $(3, 2)$ จะได้การผกผันใน j_1 คือ 1 ดังนั้น $t(1, 3, 2) = 1$
 $j_2 = (5, 4, 2, 3, 1)$ การผกผันของ j_2 คือ $(5, 4)(5, 2)(5, 3)(5, 1)(4, 2)(4, 3)(4, 1)(2, 1)(3, 1)$
จะได้การผกผันใน j_2 คือ 9 ดังนั้น $t(5, 4, 2, 3, 1) = 9$
 $j_3 = (1, 2, 5, 3, 4)$ การผกผันของ j_3 คือ $(5, 3)(5, 4)$ จะได้การผกผันใน j_3 คือ 2
ดังนั้น $t(1, 2, 5, 3, 4) = 2$



บทนิยามที่ 3

การเรียงสับเปลี่ยนที่มีจำนวนการผกผันทั้งหมดเป็นจำนวนคู่เรียกว่า การเรียงสับเปลี่ยนคู่
การเรียงสับเปลี่ยนที่มีจำนวนการผกผันทั้งหมดเป็นจำนวนคี่เรียกว่า การเรียงสับเปลี่ยนคี่





ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $j_1 = (3, 1, 2, 5, 4)$, $j_2 = (4, 1, 3, 2)$ และ $j_3 = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ จงหาว่า j_1, j_2, j_3 เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่หรือคี่

วิธีทำ $j_1 = (3, 1, 2, 5, 4)$ การผกผันของ j_1 คือ $(3, 1)(3, 2)(5, 4)$ จะได้การผกผันใน j_1 คือ 3 หรือ $t(3, 1, 2, 5, 4) = 3$ ดังนั้นเป็นการเรียงสับเปลี่ยนคี่

$j_2 = (4, 1, 3, 2)$ การผกผันของ j_2 คือ $(4, 1)(4, 2)(4, 3)(3, 2)$ จะได้การผกผันใน j_2 คือ 4 หรือ $t(4, 1, 3, 2) = 4$ ดังนั้นเป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่

$j_3 = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ไม่มีการผกผัน $t(1, 2, 3, 4, 5, 6) = 0$ ดังนั้นเป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่
จะเห็นว่า j_2, j_3 เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่ แต่ j_1 เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคี่



2. ตัวกำหนด



2. ตัวกำหนด

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ สามารถเขียน

ตัวกำหนด (Determinant) ของ A ด้วยสัญลักษณ์ $\det A$ หรือ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n \times n}$



บทนิยามที่ 4 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ตัวกำหนดของ A หาได้จาก $\det A = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ ซึ่งเป็นผลบวกของจำนวนจริงในการเรียงสับเปลี่ยนจำนวน $n!$ จำนวน โดยที่ $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ $S = \{1, 2, \dots, n\}$

ถ้าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนคี่ จะใช้เครื่องหมาย $-$

ถ้าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่ จะใช้เครื่องหมาย $+$



1. กำหนดให้ $A = [a_{11}]_{1 \times 1}$ จะหาตัวกำหนดได้จาก พิจารณา $S_1 = \{1\}$ มีวิธีเรียงสับเปลี่ยน $1! = 1$ แบบ $t(1=0)$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่ จะใช้เครื่องหมาย +
จะได้ $\boxed{\det A = \sum a_{11} = |a| = a_{11}}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = [5]_{1 \times 1}$ และ $B = \left[\frac{1}{2} \right]_{1 \times 1}$ จงหาตัวกำหนดของ A และ B

วิธีทำ

$$\det A = \sum a_{11}$$

$$= a_{11}$$

$$= \dots\dots$$

$$\det B = b_{11}$$

$$= \dots\dots$$

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ จะหาตัวกำหนดได้จาก พิจารณา $S_2 = \{1, 2\}$ มีวิธีเรียงสับเปลี่ยน

$2! = 2$ แบบ คือ $(1, 2)(2, 1)$

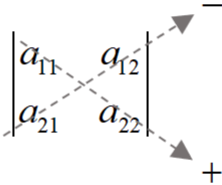
$t(1, 2) = 0$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่ ใช้เครื่องหมาย +

$t(2, 1) = 1$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคี่ ใช้เครื่องหมาย -



$$\text{จะได้ } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + (-1)a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

หรือพิจารณา $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$



$$= (\text{ผลคูณทแยงลง}) - (\text{ผลคูณทแยงขึ้น})$$

ดังนั้น $\boxed{\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ จงหา $\det A$ และ $\det B$

3. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ จะหาตัวกำหนดได้จาก พิจารณา $S_3 = \{1, 2, 3\}$ มีวิธีเรียงสับเปลี่ยน

$3! = 6$ แบบ คือ $(1, 2, 3)(1, 3, 2)(2, 1, 3)(2, 3, 1)(3, 1, 2)(3, 2, 1)$



การเรียงสับเปลี่ยน	จำนวนการผกผัน	ประเภท	เครื่องหมาย
(1,2,3)	0	คู่ -	+
(1,3,2)	1	คี่ -	-
(2,1,3)	1	คี่ -	-
(2,3,1)	2	คู่ -	+
(3,1,2)	2	คู่ -	+
(3,2,1)	3	คี่ -	-



จะได้ $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

$$\det A = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}] - [a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}]$$

หรือ พิสูจน์ว่า

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \searrow & \searrow & \searrow \end{matrix} \begin{matrix} - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ + & + & + \end{matrix}$$

$$= (\text{ผลคูณทแยงลง}) - (\text{ผลคูณทแยงขึ้น})$$





ดังนั้น $\det A = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}] - [a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}]$

หรือ พิจารณา $\det A = + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

จะได้ $\det A = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}] - [a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}]$



ตัวอย่างที่ 2.4 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ จงหา $\det A$ และ $\det B$

3. คุณสมบัติของตัวกำหนด



ทฤษฎีบทที่ 1 ตัวกำหนดของเมทริกซ์ทรานสโพสิที $n \times n$ ใด ๆ จะเท่ากับตัวกำหนดของเมทริกซ์นั้น
 $\det A^T = \det A$

พิสูจน์ กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A
นั่นคือ $b_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad \det A^T &= \det B \\ &= \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n} \\ &= \sum (\pm) a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}\end{aligned}$$

จำนวนการผกผันของการเรียงสับเปลี่ยน $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ และ $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ เท่ากัน นั่นคือ

$$\det A^T = \det B = \sum (\pm) a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$$

ยกตัวอย่างเช่น

$$b_{15}b_{24}b_{31}b_{42}b_{53} = a_{51}a_{42}a_{13}a_{24}a_{35} = a_{13}a_{24}a_{35}a_{42}a_{51}$$

จะเห็นว่าจำนวนการผกผันของ $(5,4,1,2,3)$ เท่ากับ 7 และจำนวนการผกผันของ $(3,4,5,2,1)$ เท่ากับ 7 ซึ่ง
เป็นจำนวนคี่ทั้งสอง ดังนั้นพจน์และเครื่องหมายจะเหมือนกัน ดังนั้น

$$\det A^T = \det A$$



ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ จงหา $\det A^T = \det A$ และ $\det B^T = \det B$



ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้าเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการสลับที่ของ 2 แถว (หลัก) ใด ๆ ของเมทริกซ์ A แล้ว $\det B = -\det A$

พิสูจน์ กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากเมทริกซ์ A สลับแถวที่ p และแถวที่ q ของ A สมมติให้ $p < q$ ดังนั้น $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับแถวที่ไม่เท่ากับแถว p และ q

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $b_{pj} = a_{qj}, b_{qj} = a_{pj}$ และ $b_{ij} = a_{ij}$ สำหรับ $j=1,2,\dots,n$ และ $i \neq p, i \neq q$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น} \quad \det B &= \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{pj_p} \dots b_{qj_q} \dots b_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{qj_q} \dots a_{pj_p} \dots a_{nj_n}\end{aligned}$$

จะพบว่า การเรียงสับเปลี่ยน $j_1 j_2 \dots j_q \dots j_p \dots j_n$ การเรียงสับเปลี่ยนที่เกิดจากการสลับที่ระหว่าง j_q และ j_p ที่อยู่ในการเรียงสับเปลี่ยน $j_1 j_2 \dots j_q \dots j_p \dots j_n$ จะส่งผลทำให้เครื่องหมายของ $\det B$ ตรงกันข้ามกับเครื่องหมายของ $\det A$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น} \quad \det B &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{qj_q} \dots a_{pj_p} \dots a_{nj_n} \\ &= -\sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{pj_p} \dots a_{qj_q} \dots a_{nj_n} \\ &= -\det A\end{aligned}$$



ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

ถ้าเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการสลับที่แถวที่ 1 และแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ A จงแสดงว่า $\det B = -\det A$ และถ้าเมทริกซ์ D เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการสลับที่หลักที่ 1 และหลักที่ 3 ของเมทริกซ์ C จงแสดงว่า $\det D = -\det C$



ทฤษฎีบทที่ 3 ถ้าสมาชิก 2 แถว (หลัก) ใด ๆ ของเมทริกซ์ A เหมือนกันแล้ว $\det A = 0$

พิสูจน์ กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ มีแถวที่ p และแถวที่ q เท่ากัน และ $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการสลับที่แถวที่ p กับแถวที่ q ของ A

จากทฤษฎีบทที่ 2.2 จะได้ว่า $\det B = -\det A$

แต่เนื่องจาก $B = A$ ดังนั้น $\det B = \det A$ นั่นคือ $\det A = -\det A$ จะได้ว่า $2\det A = 0$

เนื่องจาก $\det A$ เป็นจำนวนจริง และจะเป็นจริงเมื่อ $\det A = 0$



ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -8 \\ 3 & 3 & -10 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$,

$C = \begin{bmatrix} -8 & -2 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 9 & -5 & -8 & -5 \\ 10 & 7 & 9 & 7 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ -8 & -7 & 5 & 11 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$ จงหา $\det A, \det B, \det C$ และ $\det D$

ทฤษฎีบทที่ 4 ถ้าสมาชิกแถว (หลัก) ใด ๆ ของเมทริกซ์ A เป็น 0 ทั้งแถวแล้ว $\det A = 0$

พิสูจน์ กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ และสมาชิกแถวที่ p ของ A เป็นศูนย์ทั้งหมด

จาก
$$\det A = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{pj_p} \dots a_{nj_n}$$

เมื่อ a_{pj_p} คือสมาชิกที่มาจากแถวที่ p ของ A และ $a_{pj_p} = 0$

เนื่องจากแต่ละเทอมของ $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{pj_p} \dots a_{nj_n}$ ประกอบด้วยสมาชิกที่มาจากแถวที่ p ของ A

จะได้
$$a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{pj_p} \dots a_{nj_n} = 0$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \det A &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{pj_p} \dots a_{nj_n} a_{pj_p} \\ &= 0 \end{aligned}$$



ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 100 \\ 36 & 0 & 63 \\ -2 & 0 & -55 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & -8 \\ 9 & -10 & 11 & 12 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$

จงหา $\det A$, $\det B$ และ $\det C$



ทฤษฎีบทที่ 5 ถ้าเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการคูณแถว (หลัก) ใด ๆ ของเมทริกซ์ A ด้วยจำนวนจริงใด ๆ $c \neq 0$ แล้ว $\det B = c \det A$

พิสูจน์ กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำจำนวนจริง $c \neq 0$ ไปคูณกับแถวที่ p ของ A

จะได้ว่า $b_{ij} = a_{ij}$ เมื่อ $i \neq p$ และ $b_{ij} = ca_{ij}$ เมื่อ $i = p$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\det A &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{pj_p} \dots a_{nj_n} \\ \det B &= \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{pj_p} \dots b_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{pj_p} \dots a_{nj_n} \\ &= c \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{pj_p} \dots a_{nj_n} \\ &= c \det A\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

ถ้าเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากนำ $c_1 = -3$ คูณเข้าแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ A จงแสดงว่า

$\det B = c_1 \det A$ และถ้าเมทริกซ์ D เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากนำ $c_2 = 2$ คูณไขว้หลักที่ 3 ของเมทริกซ์ C

จงแสดงว่า $\det D = c_2 \det C$

ทฤษฎีบทที่ 6 ถ้าเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำ $c \neq 0$ เท่าของแถว (หลัก) ที่ p ไปบวกกับแถว (หลัก) ที่ q ของเมทริกซ์ A แล้ว $\det B = \det A$

พิสูจน์ กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำจำนวนจริง $c \neq 0$ ไปคูณกับแถวที่ p และบวกเข้ากับแถวที่ q ของ A โดยที่ $p \neq q$

สมมติให้ $p < q$ สำหรับ $j = 1, 2, \dots, n$

จะได้ว่า $b_{ij} = a_{ij}$ เมื่อ $i \neq q$ และ $b_{qi} = a_{qi} + ca_{pi}$ เมื่อ $i = q$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \det A &= \sum (\pm) a_{1j_1} \dots a_{pj_p} \dots a_{qj_q} \dots a_{nj_n} \\ \det B &= \sum (\pm) b_{1j_1} \dots b_{pj_p} \dots b_{qj_q} \dots b_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} \dots a_{pj_p} \dots a_{qj_q} + ca_{pj_p} \dots a_{nj_n} \\ &= \left[\sum (\pm) a_{1j_1} \dots a_{pj_p} \dots a_{qj_q} \dots a_{nj_n} \right] \left[\sum (\pm) a_{1j_1} \dots a_{pj_p} \dots a_{pj_p} \dots a_{nj_n} \right] \end{aligned}$$

แต่เนื่องจาก $\sum (\pm) a_{1j_1} \dots a_{pj_p} \dots a_{pj_p} \dots a_{nj_n} = 0$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \det B &= \sum (\pm) a_{1j_1} \dots a_{pj_p} \dots a_{qj_q} \dots a_{nj_n} \\ &= \det A \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ และเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการ

$R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2$ ของเมทริกซ์ A จงแสดงว่า $\det B = \det A$

วิธีทำ จากทฤษฎีบทที่ 2.6

$$\begin{aligned} \text{จาก } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \det A &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\ &= [-32 - 6 + 0] - [0 - 10 + 0] \\ &= -38 + 10 \\ &= -28 \end{aligned}$$



เมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการ $R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2$ ของเมทริกซ์ A จะได้

$$\text{จาก } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \xrightarrow[\sim]{R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -6 & 13 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = B$$

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -6 & 13 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\ &= [-104 - 6 + 0] - [0 - 10 - 72] \\ &= -110 + 82 \\ &= -28 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\det B = \det A$



ทฤษฎีบทที่ 7 ถ้าเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (ล่าง) มิติ $n \times n$ แล้ว $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$

พิสูจน์ กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนนั่นคือ $a_{ij} = 0$ สำหรับทุก ๆ $i > j$

ดังนั้น $\det A = \sum (\pm) a_{1j_1} \dots a_{pj_p} \dots a_{qj_q} \dots a_{nj_n}$

ถ้าพิจารณาเทอม $a_{1j_1} \dots a_{pj_p} \dots a_{qj_q} \dots a_{nj_n}$ จะเห็นว่าเทอมเหล่านี้จะไม่เท่ากับศูนย์เมื่อ $1 \leq j_1, 2 \leq j_2, \dots, n \leq j_n$ ทุกตัว ซึ่งจะมีทางเป็นไปได้เมื่อ $1 = j_1, 2 = j_2, \dots, n = j_n$ เนื่องจาก $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ เป็นตัวเลขที่ไม่ซ้ำกันและสลับกันอยู่ภายใน $1, 2, \dots, n$ เท่านั้น ดังนั้นเทอมอื่น ๆ จะมีค่าเท่ากับ 0 ยกเว้นเทอม $a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ และเครื่องหมายหน้าเทอมนี้เป็นบวก

ดังนั้น $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$



ตัวอย่างที่ 11 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

จงหา $\det A$, $\det B$, $\det C$ และ $\det D$



ตัวอย่างที่ 12 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 9 \\ 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ จงใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวเปลี่ยนตัว กำหนด
ของเมทริกซ์ให้อยู่ในรูปสามเหลี่ยมบน พร้อมทั้งหาค่า



ทฤษฎีบทที่ 8 ถ้าเมทริกซ์ E, A เป็นเมทริกซ์ มีดี $n \times n$ โดยที่ E เป็นเมทริกซ์เบื้องต้น แล้ว

$$\det EA = \det E \det A \text{ และ } \det AE = \det E \det A$$

พิสูจน์ ถ้ากำหนดให้ E เป็นเมทริกซ์เบื้องต้นแบบที่ 1 ดังนั้น EA จะเป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการสลับแถวสองแถวของเมทริกซ์ A

จะได้เห็น $\det EA = -\det A = \det E \det A$ เนื่องจาก $\det E = -1$

ถ้ากำหนดให้ E เป็นเมทริกซ์เบื้องต้นแบบที่ 2 และ E จะเป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำ $c \neq 0$ คูณเข้าแถวหนึ่งของ I_n ดังนั้น EA จะเป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำ $c \neq 0$ คูณเข้าแถวนั้นของเมทริกซ์ A

จะได้ $\det EA = c \det A = \det E \det A$ เนื่องจาก $\det E = c$

ถ้ากำหนดให้ E เป็นเมทริกซ์เบื้องต้นแบบที่ 3 และ E จะเป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการคูณแถวที่ p ของ I_n ด้วย $c \neq 0$ แล้วบวกเข้ากับแถวที่ q ของ I_n เมื่อ $p \neq q$ ดังนั้น EA จะเป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำ $c \neq 0$ คูณเข้าแถวที่ p ของ A แล้วบวกเข้ากับแถวที่ q ของ A

จะได้ $\det EA = \det A = \det E \det A$ เนื่องจาก $\det E = 1$

จากทั้งสามกรณี สรุปได้ว่า $\det EA = \det E \det A$

สามารถพิสูจน์ทำนองเดียวกัน ได้ว่า $\det AE = \det E \det A$

จากทฤษฎีนี้ สามารถสรุปได้อีกว่า ถ้า $E_1, E_2, \dots, E_p$ เป็นเมทริกซ์เบื้องต้น และถ้า

$B = E_p, E_{p-1}, E_{p-2}, \dots, E_1 A$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det B &= \det E_p (E_{p-1}, E_{p-2}, \dots, E_1 A) \\ &= \det E_p \det (E_{p-1}, E_{p-2}, \dots, E_1 A) \\ &= \det E_p \det E_{p-1} \dots \det E_1 \det A \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 9 ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ A เป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน (Nonsingular Matrix) ก็ต่อเมื่อ $\det A \neq 0$

พิสูจน์ ($\rightarrow$) กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน จะได้ว่า A เป็นผลคูณของเมทริกซ์เบื้องต้นแบบแถว
นั่นคือ $A = E_1 E_2 \dots E_{p-1} E_p$

จะได้

$$\begin{aligned}\det A &= \det(E_1 E_2 \dots E_{p-1} E_p) \\ &= \det E_1 \det E_2 \dots \det E_{p-1} \det E_p\end{aligned}$$

เนื่องจาก $E_i, i=1, 2, \dots, p$ เป็นเมทริกซ์เบื้องต้น จะได้ว่า

$$\det E_i \neq 0, i=1, 2, \dots, p \text{ ดังนั้น } \det A \neq 0$$



($\leftarrow$) กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน จะได้ว่า A สมมูลกับเมทริกซ์ลดรูปเป็นขั้นแบบแถว B เมื่อ $B \neq I_n$ ดังนั้น B จะมีแถวซึ่งสมาชิกทุกตัวในแถวเป็นศูนย์ จะได้ว่า $\det B = 0$ เนื่องจาก $A \sim B$ จะได้ว่าจะมีเมทริกซ์เบื้องต้น $E_1 E_2 \dots E_{p-1} E_p$ ซึ่งทำให้ $A = E_1 E_2 \dots E_{p-1} E_p B$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น} \quad \det A &= \det(E_1 E_2 \dots E_{p-1} E_p B) \\ &= \det E_1 \det E_2 \dots \det E_{p-1} \det E_p \det B \\ &= 0\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\det B = 0$

สรุปได้ว่า A เป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน



ตัวอย่างที่ 13 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

จงหาว่า A, B เป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐานหรือไม่



ทฤษฎีบทที่ 10 ถ้าเมทริกซ์ A, B เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ แล้ว $\det AB = \det A \det B$

พิสูจน์ ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐานแล้วจะได้ $A \sim^R I_n$ นั่นคือ $A = E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 I_n = E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1$
เมื่อ $E_1, E_2, \dots, E_{p-1}, E_p$ เป็นเมทริกซ์เบื้องต้นแบบแถว

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\det A &= \det(E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1) \\ &= \det E_p \det E_{p-1} \dots \det E_2 \det E_1\end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned}\det AB &= \det(E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 B) \\ &= \det E_p \det E_{p-1} \dots \det E_2 \det E_1 \det B \\ &= \det A \det B\end{aligned}$$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน แล้ว $\det A = 0$ จะได้นั่นคือ A สมมูลแถวกับเมทริกซ์ลดรูปเป็น
ขั้นแบบแถว C ซึ่งมีแถวที่มีสมาชิกเป็นศูนย์ทั้งหมด ดังนั้น

$C = E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 A$ ทำให้ $CB = E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 AB$ จะได้ว่า $AB \stackrel{R}{\sim} CB$ เมื่อ C มีแถวที่เป็นศูนย์ทั้งหมด
จึงทำให้ CB มีแถวที่เป็นศูนย์ทั้งหมดด้วย และทำให้ $\det CB = 0$ เพราะว่า

$$\begin{aligned}\det CB &= \det(E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 AB) \\ &= \det E_p \det E_{p-1} \dots \det E_2 \det E_1 \det A \det B \\ &= 0\end{aligned}$$

จาก $\det E_i \neq 0, i=1,2,\dots,p$

จะได้ $\det AB = 0$

จาก $\det A = 0$ $\det A \det B = 0$

จะสรุปได้ว่า $\det AB = \det A \det B$

ตัวอย่างที่ 14 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

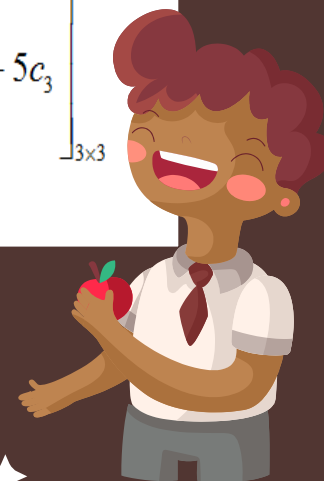
จงแสดงว่า $\det AB = \det A \det B$



ตัวอย่างที่ 15 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ มีค่า $\det A = -9$ และกำหนดให้

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, C = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, D = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -3a_1 + b_1 + 5c_1 & -3a_2 + b_2 + 5c_2 & -3a_3 + b_3 + 5c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

จงหา $\det B, \det C$ และ $\det D$



วิธีทำ เมทริกซ์ B มีสมาชิก แถวที่ 1 กับแถวที่ 3 เหมือนกันดังนั้น

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

เมทริกซ์ C เกิดจากการสลับที่หลักที่ 1 กับหลักที่ 2 ของ A จะได้ $\det C = -\det A$

เนื่องจาก $\det A = -9$ ดังนั้น

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} = -(-9) \\ = 9$$

เมทริกซ์ D เกิดจากการนำ -3 คูณเข้าแถวที่ 1 และ 5 คูณเข้าแถวที่ 3 แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 2 ของ A จะได้ $\det D = \det A$

ดังนั้น

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -3a_1 + b_1 + 5c_1 & -3a_2 + b_2 + 5c_2 & -3a_3 + b_3 + 5c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -9$$

4. การกระจายโคแฟคเตอร์



4 การกระจายโคแฟกเตอร์

การหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ด้วยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ (Cofactor Expansion) นี้ จะช่วยให้การหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ หาได้สะดวกมากยิ่งขึ้นและเป็นระบบที่แน่นอน ก่อนอื่นต้องทำความเข้าใจกับคำว่า ไมเนอร์ (Minor) และ โคแฟกเตอร์ (Cofactor) ก่อน

บทนิยามที่ 5 ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ และให้ M_{ij} เป็นตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยของ A ที่เกิดจากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ออกเรียกว่า ไมเนอร์ (Minor) ของ a_{ij} และ $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ เรียกว่า โคแฟกเตอร์ (Cofactor) ของ a_{ij}

ตัวอย่างที่ 16 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ จงหา M_{11}, M_{21} และ C_{11}, C_{21}

ตัวอย่างที่ 17 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ จงหา M_{12}, M_{22}, M_{33} และ C_{12}, C_{22}, C_{33}

ตัวอย่างที่ 18 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \\ -3 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$ จงหา C_{13}, C_{32} และ C_{43}



ทฤษฎีบทที่ 11 $A = [a_{ij}]_{n \times n}, n \geq 2$ ดังนั้น

เมื่อกระจายตามแถวที่ i ของ A ($1 \leq i \leq n$)

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}C_{ij}$$

หรือ เมื่อกระจายตามหลักที่ j ของ A ($1 \leq j \leq n$)

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}C_{ij}$$

พิสูจน์ จะพิสูจน์กรณี $n=3$

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ จะได้

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}|M_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|M_{12}| + a_{13}(-1)^{1+3}|M_{13}| \end{aligned}$$

ดังนั้น $\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$ เป็นการกระจาย $\det A$ ตามแถวที่ 1

หรือ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\&= a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\&= a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\&= a_{13}(-1)^{1+3}|M_{13}| + a_{23}(-1)^{2+3}|M_{23}| + a_{33}(-1)^{3+3}|M_{33}| \end{aligned}$$

ดังนั้น $\det A = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}$ เป็นการกระจาย $\det A$ ตามหลักที่ 3

ตัวอย่างที่ 19 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ จงหา $\det A$ โดยการกระจายโคแฟกเตอร์

หมายเหตุ การหาตัวกำหนดโดยการกระจายโดยโคแฟกเตอร์ ควรเลือกกระจายตามแถวหรือหลักที่มี 0 มาก ๆ

ตัวอย่างที่ 20 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$ จงหา $\det A$ โดยการกระจายโคแฟกเตอร์





ตัวอย่างที่ 21 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & -5 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$ จงหา $\det A$ โดยการกระจายโคแฟกเตอร์

ตัวอย่างที่ 2.22 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$ จงหา $\det A$ โดยการกระจายโคแฟกเตอร์



ทฤษฎีบทที่ 12 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}, n \geq 2$ จะได้ว่า

$$(1) \ a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in} = 0 \quad , i \neq j$$

$$(2) \ a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj} = 0 \quad , j \neq i$$

พิกัด พิกัดข้อ (1) เมื่อ $i \neq j$ กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{แถวที่ } i \\ \leftarrow \text{แถวที่ } j \end{array}$$

เมทริกซ์ B เกิดจาก A โดยการแทนที่แถวที่ j ด้วยแถวที่ i จะได้

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \leftarrow \text{แถวที่ } i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \leftarrow \text{แถวที่ } j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า B เป็นเมทริกซ์ที่มีแถวสองแถวเท่ากัน ดังนั้น $\det B = 0$ เนื่องจากสมาชิกในแถวที่ j ของ B คือ $a_{i1}a_{i2}\dots a_{in}$ ซึ่งมีโคแฟกเตอร์เป็น $C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jn}$ ตามลำดับ

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\det B &= a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn} \\ &= 0\end{aligned}$$

จึงสรุปได้ว่า $a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn} = 0$

ตัวอย่างที่ 23 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ จงแสดงว่า $a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} + a_{23}C_{13} = 0$

$$\begin{aligned} &= -132 + 80 + 52 \\ &= 0 \end{aligned}$$





อ้างอิง

นิศากร สึงวาระนที .(2558).ตำรารายวิชาพืชคณิตเชิงเส้น.คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.

พรพิศ ยิ้มประยูร .(2557). พืชคณิตเชิงเส้น.กรุงเทพฯ:สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.