



สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับครู Differential Equation for Teacher

ธนัชยศ จำปาหวาย

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

2561

MED2403

สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับครู

Differential Equation for Teacher

สารบัญ

1	สมการเชิงอนุพันธ์	5
1.1	สมการเชิงอนุพันธ์	5
1.2	สมการแยกตัวแปรได้	11
1.3	สมการเอกพันธ์	14
1.4	สมการแม่นตรง	18
1.5	ตัวประกอบอินทิกรัล	22
1.6	สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง	26
2	สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น	31
2.1	สมการเชิงเส้นทั่วไป	31
2.2	ความเป็นอิสระเชิงเส้น	36
2.3	ผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการเอกพันธ์	40
3	สมการเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว	45
3.1	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง	45
3.2	ผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการอันดับสูง	52
3.3	ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์	55
3.4	ผลเฉลยที่ได้จากตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์	60
4	สมการไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว	67
4.1	วิธีเทียบสัมประสิทธิ์	67
4.2	การหาปริพันธ์เฉพาะด้วยตัวดำเนินการผกผัน	75
4.3	การแปรพารามิเตอร์	86
5	ระบบสมการเชิงอนุพันธ์	91
5.1	การหาผลเฉลยโดยวิธีกำจัดตัวแปรตาม	92
5.2	การหาผลเฉลยโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์	96
6	สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร	103
6.1	สมการโคชี-ออยเลอร์	103
6.2	จุดสามัญและจุดเอกฐาน	110

6.3	ผลเฉลยรอบจุดสามัญ	113
6.4	ผลเฉลยรอบจุดเอกฐานปกติ	118
7	ฟังก์ชันพิเศษ	129
7.1	ฟังก์ชันแกมมา	129
7.2	ฟังก์ชันบีตา	135
7.3	พหุนามเลอจองด์	138
8	การแปลงลาปลาซ	141
8.1	ผลการแปลงลาปลาซ	141
8.2	สมบัติของผลการแปลงลาปลาซ	147
8.3	ทฤษฎีบทหลังวัตนาการ	165
8.4	ระบบสมการเชิงอนุพันธ์	168

สรุปสูตรเกี่ยวกับแคลคูลัส

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

1. $\sin x \csc x = 1$
2. $\cos x \sec x = 1$
3. $\cot x \tan x = 1$
4. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
5. $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$
6. $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$
7. $\sin(-x) = -\sin x$
8. $\cos(-x) = \cos x$
9. $\tan(-x) = -\tan x$
10. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
11. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
12. $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
13. $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$
14. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
 $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$
 $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$
15. $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
16. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
17. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
18. $\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$
19. $\tan x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$
20. $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$
21. $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
22. $\sin^3 x = \frac{1}{4}[3 \sin x - \sin 3x]$
23. $\cos^3 x = \frac{1}{4}[3 \cos x + \cos 3x]$
24. $\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$
25. $\sin x + \sin y = 2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)$
26. $\sin x - \sin y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right)$
27. $\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)$
28. $\cos x - \cos y = -2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right)$
29. $\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$
30. $\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)]$
31. $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
32. $\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

1. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
2. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
3. $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
4. $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$
5. $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$
6. $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\frac{d}{dx}C = 0$
2. $\frac{d}{dx}x = 1$
3. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
4. $(af)'(x) = af'(x)$
5. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
6. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
7. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
8. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$
9. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
10. $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$
11. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
12. $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
13. $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
14. $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
15. $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
16. $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
17. $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$
18. $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$
19. $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
20. $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
22. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$
23. $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
24. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
25. $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$
26. $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$
27. $\frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$
28. $\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$
29. $\frac{d}{dx} \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$
30. $\frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$

ค่าเชิงอนุพันธ์

1. $dC = 0$
2. $d(u+v) = du + dv$
3. $d(ku) = kdu$
4. $u'dx = du$
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$
6. $d(uv) = vdu + u dv$

ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$
2. $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int kdx = kx + C$
4. $\int vdu = uv - \int vdu$
5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
6. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
7. $\int e^x dx = e^x + C$
8. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
10. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
11. $\int \cos x dx = \sin x + C$
12. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
13. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
14. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
15. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
16. $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$
17. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
18. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$
19. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

$$20. \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

$$21. \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$$

$$22. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$23. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$24. \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C$$

$$25. \int \ell n x dx = x \ell n x - x + C$$

$$26. \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$27. \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$28. \int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$29. \int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$30. \int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ell n(1+x^2) + C$$

$$31. \int \operatorname{arccot} x dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ell n(1+x^2) + C$$

$$32. \int \operatorname{arcsec} x dx = x \operatorname{arcsec} x - \ell n|x + \sqrt{x^2-1}| + C$$

$$33. \int \operatorname{arccsc} x dx = x \operatorname{arccsc} x + \ell n|x + \sqrt{x^2-1}| + C$$

$$34. \int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$35. \int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$36. \int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C$$

$$37. \int \operatorname{sech} x \tanh x dx = -\operatorname{sech} x + C$$

$$38. \int \operatorname{csch}^2 x dx = -\coth x + C$$

$$39. \int \operatorname{csch} x \coth x dx = -\operatorname{csch} x + C$$

บทที่ 1

สมการเชิงอนุพันธ์

1.1 สมการเชิงอนุพันธ์

สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ฟังก์ชันกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)** ตัวอย่างเช่น

1. สมการการเคลื่อนที่ (Equation of motion)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

2. สมการการเติบโตของจำนวนประชากร (Population growth equation)

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

3. สมการคลื่นในหนึ่งมิติ (One-dimensional wave equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

บทนิยาม 1.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation : ODE)** ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันมากกว่าหนึ่งตัวแปรเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation : PDE)**

ตัวอย่าง 1.1.2 จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ เป็น ODE หรือ PDE

สมการเชิงอนุพันธ์	ODE	PDE
$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} = e^x$		
$\frac{d^3 x}{dt^3} - 2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{d^2 x}{dt^2}$		
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \sin x$		

บทนิยาม 1.1.3 อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คืออันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการนั้น **ดีกรี (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์** คือกำลังสูงสุดของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏที่ปรากฏในสมการนั้น เมื่อจัดทุก ๆ กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 1.1.4 จงบอกอันดับและดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์	อันดับ	ดีกรี
$\frac{dy}{dx} = x^3$		
$y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$		
$xu \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^3 = \cos t$		
$xy^2 = y' + \sqrt{1+y'}$		

บทนิยาม 1.1.5 เรียกสมการเชิงอนุพันธ์ว่า **สมการเชิงเส้น (linear equation)** ถ้า

1. ทุก ๆ ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็น 1
2. ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปรตาม และ/หรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ
3. ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิศัยของตัวแปรตามหรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

และเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้นว่า **สมการไม่เชิงเส้น (nonlinear equation)**

ตัวอย่าง 1.1.6 จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ เป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่

สมการเชิงอนุพันธ์	สมการเชิงเส้น	สมการไม่เชิงเส้น
$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 3x^2$		
$y \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = \tan x$		
$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^2 = \sin u$		
$xy^2 = y' + yy''$		
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$		
$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$		

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n เขียนในรูปทั่วไปได้เป็น

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

ในกรณีที่สมการ (1.1) เป็นสมการเชิงเส้น จะเขียนได้เป็น

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad (1.2)$$

เมื่อ $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x ที่นิยามบนช่วงหนึ่งของจำนวนจริง โดยที่ $a_n(x) \neq 0$ ทุก ๆ x ในช่วงนั้น ในกรณีที่ $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$ เป็นค่าคงตัว จะเรียกสมการ (1.2) ว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว (linear ordinary differential of order n with constant coefficients)

บทนิยาม 1.1.7 ผลเฉลย (solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือฟังก์ชันใด ๆ ไม่ว่าจะนิยามโดยชัดแจ้ง (explicit) หรือโดยปริยาย (implicit) ที่ปราศจากอนุพันธ์และสอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

ตัวอย่าง 1.1.8 จงแสดงว่า $y = Ae^{-3x} + Be^x$ เมื่อ A, B เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' + 2y' = 3y$

ตัวอย่าง 1.1.9 จงแสดงว่า $y = x - \frac{1}{x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $xy' + y = 2x$

ตัวอย่าง 1.1.10 จงแสดงว่า $x^2y - xy^2 = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง เป็นผลเฉลยของสมการ $(x^2 - 2xy)y' = y^2 - 2xy$

บทนิยาม 1.1.11 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ซึ่งประกอบด้วยค่าคงตัวไม่เจาะจง n ค่า เรียกว่า **ผลเฉลยทั่วไป (general solution)** ของสมการเชิงอนุพันธ์ แต่ถ้าค่าคงตัวไม่เจาะจงเหล่านั้นได้ถูกแทนค่าด้วยค่าคงตัวที่แน่นอนทั้ง n ค่า เรียก **ผลเฉลยเฉพาะ (particular solution)** และเรียกผลเฉลยที่ไม่สามารถหาได้จากการกำหนดค่าของค่าคงตัวไม่เจาะจงในผลเฉลยทั่วไปว่า **ผลเฉลยเอกฐาน (singular solution)**

ตัวอย่าง 1.1.12 จงแสดงว่า $y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ และหาผลเฉลยเฉพาะของสมการดังกล่าวเมื่อ $y(0) = 2$

ตัวอย่าง 1.1.13 จงแสดงว่า $y = cx + c^2$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(y')^2 + xy' - y = 0$ และแสดงว่า $y = -\frac{x^2}{4}$ เป็นผลเฉลยเอกฐานของสมการดังกล่าว

บทนิยาม 1.1.14 ปัญหาค่าเริ่มต้น (initial-value problem) คือปัญหาที่ประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ พร้อมด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) ที่จุด x_0 คือ

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

เมื่อ $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ เป็นค่าคงตัว และสนใจหาผลเฉลยที่ $x \geq x_0$

ตัวอย่าง 1.1.15 สมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = e^x$ เมื่อ $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 2$ เป็นปัญหาค่าเริ่มต้น

บทนิยาม 1.1.16 ปัญหาค่าขอบ (boundary-value problem) คือปัญหาที่ประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ พร้อมด้วยเงื่อนไขขอบ (boundary condition) ที่กำหนดค่าของ y และ/หรือ ค่าของอนุพันธ์ y ณ จุดของตัวแปรอิสระ x มากกว่า 1 จุด โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้ากำหนดค่า y และ ค่าของอนุพันธ์ y ที่จุด a และ b และสนใจหาผลเฉลย $y(x)$ โดย $x \in [a, b]$

ตัวอย่าง 1.1.17 สมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = e^x$ เมื่อ $y(0) = 1$ และ $y(5) = 3$ เป็นปัญหาค่าขอบ

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงบอกอันดับ ดีกรี รวมทั้งระบุว่าสมการใดเป็นสมการเชิงเส้น หรือเป็นสมการไม่เชิงเส้น

$$1.1 \quad \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$$

$$1.2 \quad y''' + 2y'' + 3y' + 4y = \cos x$$

$$1.3 \quad e^x \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y'}$$

$$1.4 \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + x \frac{d^2y}{dx^2} = \ln x$$

$$1.5 \quad (x^2 - 1)y' + xy^2 + 1 = 0$$

$$1.6 \quad u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

2. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2.1 \quad y = cx + \sqrt{1 - c^2} \quad \text{เป็นผลเฉลยทั่วไปของ} \quad xy' + \sqrt{1 - (y')^2} = y$$

$$2.2 \quad (x - c)^2 + y^2 = a^2 \quad \text{เป็นผลเฉลยทั่วไปของ} \quad y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a^2$$

$$2.3 \quad y^2 - x = 0 \quad \text{เป็นผลเฉลยเฉพาะของ} \quad y = 2x \frac{dy}{dx}$$

$$2.4 \quad y = 4 + \frac{4}{x} \quad \text{เป็นผลเฉลยเฉพาะของ} \quad x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = 0$$

ต่อไปจะพิจารณาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งใดกรหนึ่ง

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{หรือ} \quad M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

1.2 สมการแยกตัวแปรได้

บทนิยาม 1.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถเขียนในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \text{หรือ} \quad M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$$

เรียกว่าเป็น **สมการแบบแยกตัวแปรได้** (variable separable equation)

วิธีหาผลเฉลย ดังนั้นสมการแบบแยกตัวแปรได้ คือสมการที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = 0$$

การหาผลเฉลยของสมการแบบแยกตัวแปรได้คือการอินทิเกรตแต่ละส่วน

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

ตัวอย่าง 1.2.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1. \quad 3(1 - y^2) dx - 2xy dy = 0$$

$$2. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y - xy}{x^2 + 1}$$

ตัวอย่าง 1.2.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(\ln y)^2 y' = x^2 y$ เมื่อ $y(2) = 1$

2. $4\sin^2 x \, dy + \sec^2 y \, dx = 0$ เมื่อ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \quad \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$$

$$1.2 \quad (y^4 + y)y' = \sin x - \cos x$$

$$1.3 \quad x^3 \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - x^2 y^2} \quad \text{เมื่อ } x > 0$$

$$1.4 \quad 3(4y^2 + 1) dx = y(x - 1) dy$$

$$1.5 \quad \frac{1 + e^x}{1 - e^{-y}} dy + e^{x+y} dx = 0$$

$$1.6 \quad (x^2 y + x^2) dx = (xy^2 - y^2) dy$$

$$1.7 \quad (x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0$$

$$1.8 \quad (x^2 y^2 \sec x \tan x + xy^2 \sec x) dx + xy^3 dy = 0$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$2.1 \quad \cos^2 x \frac{dy}{dx} = \sin^2 y \quad \text{เมื่อ } y(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$2.2 \quad \sqrt{x^2 + 1} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \text{เมื่อ } y(\sqrt{3}) = 2$$

$$2.3 \quad dy = \frac{9e^x}{ey^2 + y^2 e^2} dx \quad \text{เมื่อ } y(1) = 3$$

$$2.4 \quad x dy = \frac{y}{x - x^3} dx \quad \text{เมื่อ } y(2) = -2$$

1.3 สมการเอกพันธ์

บทนิยาม 1.3.1 เรียกฟังก์ชัน $F(x, y)$ ว่าฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี n (homogeneous function of degree n) ถ้ามีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y) \quad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก } \lambda$$

ตัวอย่าง 1.3.2 จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์หรือไม่ ถ้าเป็นดีกรีเท่าใด

$$1. f(x, y) = x^3 + 2xy^2$$

$$3. f(x, y) = \frac{1}{y} \cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$2. f(x, y) = \frac{x^2 - 2y^2}{xy}$$

$$4. f(x, y) = x^2 \sin(xy)$$

บทนิยาม 1.3.3 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์ (homogeneous differential equation) ถ้า $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ที่มีดีกรีเท่ากัน หรือพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์ก็ต่อเมื่อ $F(x, y)$ เป็นสมการเอกพันธ์ดีกรี 0

วิธีหาผลเฉลย เนื่องจาก $F(x, y)$ เป็นสมการเอกพันธ์ดีกรี 0 ดังนั้น $F(x, y) = F(\lambda x, \lambda y)$ ให้ $\lambda = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x > 0$ และ $\lambda = -\frac{1}{x}$ เมื่อ $x < 0$ จะได้ว่า

$$F(x, y) = F(\lambda x, \lambda y) = F\left(1, \frac{y}{x}\right) = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์จะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

ให้ $v = \frac{y}{x}$ แล้ว $y = vx$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ ทำให้ได้ว่า

$$v + x \frac{dv}{dx} = G(v)$$

เห็นได้ชัดว่าเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ในพจน์ของ x และ v

ตัวอย่าง 1.3.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(y^2 - x^2) dx + xy dy = 0$

2. $x \frac{dy}{dx} - y = x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$

ตัวอย่าง 1.3.5 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$xyy' = x^2e^{-\frac{y}{x}} + y^2 \quad \text{เมื่อ } y(1) = 0$$

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

$$1.2 \quad x \, dy - \left(x \tan\left(\frac{y}{x}\right) + y \right) dx = 0$$

$$1.3 \quad (x^2y + y^3) dx + x^3 dy = 0$$

$$1.4 \quad 2xy \, dx + (x^2 + y^2) dy = 0$$

$$1.5 \quad xy' = x + y$$

$$1.6 \quad x \left(1 + \ln\left(\frac{y}{x}\right) \right) y' = y$$

$$1.7 \quad 2x \, dy - 2y \, dx = \sqrt{x^2 + 4y^2} \, dx \quad \text{เมื่อ } x > 0$$

$$1.8 \quad 2ye^{\frac{x}{y}} \, dx = (2xe^{\frac{x}{y}} - y) \, dy$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$2.1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \quad \text{เมื่อ } y(-1) = 0$$

$$2.2 \quad x^2y \, dx - (x^3 - y^3) \, dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(1) = 1$$

$$2.3 \quad 14xyy' = 6x^2 - 7y^2 \quad \text{เมื่อ } y(-2) = 1$$

$$2.4 \quad x^2y' = 3x^2 - 2xy + y^2 \quad \text{เมื่อ } y(1) = \frac{3}{2}$$

1.4 สมการแม่นตรง

บทนิยาม 1.4.1 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรง (exact differential equation) ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $F(x, y)$ ที่ทำให้

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$$

ทุก ๆ (x, y) ในอาณาบริเวณ R

วิธีหาผลเฉลย เนื่องจาก $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ ดังนั้น $dF(x, y) = 0$ นั่นคือ

$$\text{ผลเฉลยทั่วไปของสมการแม่นตรงคือ} \quad F(x, y) = c$$

จากสมบัติค่าเชิงอนุพันธ์จะได้ว่า

$$\begin{aligned} dF(x, y) &= M(x, y) dx + N(x, y) dy \\ \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy &= M(x, y) dx + N(x, y) dy \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$$

จะได้ว่า $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ และ $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ถ้า $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}$ และ $\frac{\partial N}{\partial x}$ ต่อเนื่องในอาณาบริเวณ R จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้น

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + C(y)$$

หา $C(y)$ ได้จาก $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$

ในทำนองเดียวกัน

$$F(x, y) = \int N(x, y) dy + C(x)$$

หา $C(x)$ ได้จาก $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$

ตัวอย่าง 1.4.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2xy^3 - ye^{-x}) dx + (3x^2y^2 + e^{-x} - 4) dy = 0$$

ตัวอย่าง 1.4.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{x + y^2}{xy^2} dy - \frac{y - 4}{x^2} dx = 0 \quad \text{เมื่อ } y(-2) = 1$$

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \quad 2x - y^3 - 3xy^2y' = 0$$

$$1.2 \quad (2x - 5y) dy = (6x - 2y) dx$$

$$1.3 \quad x(x\cos(x^2y) - 2y)y' + 2xy\cos(x^2y) = y^2$$

$$1.4 \quad (\sin xy + xy + \cos xy) \frac{dy}{dx} + y^2 \cos xy = 0$$

$$1.5 \quad \frac{3xy + 1}{y} dx + \frac{2y - x}{y^2} dy = 0$$

$$1.6 \quad \pi y + (\pi x + \arcsin y) \frac{dy}{dx} = \sin x$$

$$1.7 \quad \frac{\ln y}{x} dx + \left(\frac{\ln x}{y} + \sin y \right) dy = 0$$

$$1.8 \quad (2xye^{x^2} + \sin y) dx + (x^2e^{x^2y} + x\cos y - y) dy = 0$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$2.1 \quad (3x^2y + 2xy) dx + (x^3 + x^2 + 2y) dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(1) = 2$$

$$2.2 \quad (e^y + ye^x) dx - (e^x + xe^y) dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(1) = 0$$

$$2.3 \quad (\sin^2 x - 2y\cos x)y' - 2y\sin x\cos x + y^2\sin x = 0 \quad \text{เมื่อ } y(0) = -2$$

$$2.4 \quad \ln(1 + y^2) = \left(\frac{1}{y} - \frac{2xy}{1 + y^2} \right) \frac{dy}{dx} \quad \text{เมื่อ } y(2) = \sqrt{e - 1}$$

1.5 ตัวประกอบอินทิกรัล

ในกรณีที่ $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ เป็นไม่สมการแม่นตรงแต่มี $\mu(x, y)$ ที่ทำให้

$$\mu(x, y)(M(x, y) dx + N(x, y) dy) = 0$$

เป็นสมการแม่นตรง เราจะเรียกฟังก์ชัน $\mu(x, y)$ นี้ว่า **ตัวประกอบอินทิกรัล (integrating factor)** ของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ แล้ว

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} &= \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{\mu} \left(N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

กรณีที่ 1. μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงอย่างเดียว

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} N \frac{d\mu}{dx} &= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ N \frac{d}{dx} \ln|\mu| &= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{d}{dx} \ln|\mu| &= \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = f(x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int f(x) dx}$

กรณีที่ 2. μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงอย่างเดียว

$$\frac{d}{dy} \ln|\mu| = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = g(y)$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int g(y) dy}$

สรุปได้ว่า

1. สำหรับ $f(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$ มีตัวประกอบอินทิกรัลเป็น $\mu = e^{\int f(x) dx}$

2. สำหรับ $g(y) = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ มีตัวประกอบอินทิกรัลเป็น $\mu = e^{\int g(y) dy}$

ตัวอย่าง 1.5.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(3x + 2y^2) dx + 2xy dy = 0$

2. $(x^2 + y^2 + 1) dx + x(x - 2y) dy = 0$

ตัวอย่าง 1.5.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(1 + x \sin y)y' + \cos y = 0$$

ตัวอย่าง 1.5.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2y(x^2 - y + x) dx + (x^2 - 2y) dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(0) = -1$$

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $2xy \, dx + (x^3 + 2xy) \, dy = 0$

1.2 $(4xy - 3x - 3x^2) \, dy - (2xy - y^2 + y) \, dx = 0$

1.3 $(xy + y - 1) \, dx + x^3 x \, dy = 0$

1.4 $y(x + y^3) \, dx + x(y^3 - x) \, dy = 0$

1.5 $(xy - x^2)y' - xy + 1 = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $y(1 + x^2y) \, dx - x \, dy = 0$ เมื่อ $y(1) = -1$

2.2 $(x^2 + y) \, dx + (x^2 \cos y - x) \, dy = 0$ เมื่อ $y(2) = 0$

2.3 $1 + (x \tan y - 2 \sec y)y' = 0$ เมื่อ $y(-1) = \pi$

1.6 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

บทนิยาม 1.6.1 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง คือสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

วิธีหาผลเฉลย สามารถจัดรูปได้เป็น $[P(x)y - Q(x)] dx + dy = 0$

ดังนั้น $M(x, y) = P(x)y - Q(x)$ และ $N(x, y) = 1$ จะได้ว่า

$$P(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int P(x) dx}$

$$\mu \frac{dy}{dx} + \mu P(x)y = \mu Q(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu Q(x)$$

$$\mu y = \int \mu Q(x) dx + C$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu Q(x) dx + C \right)$$

ตัวอย่าง 1.6.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1. \quad \frac{dy}{dx} - 2xy = x$$

$$2. \quad (y \cot x - \sec^2 x) dx + dy = 0$$

ตัวอย่าง 1.6.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(xy + x + x^3) dx + (1 + x^2) dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(\sqrt{3}) = 1$$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งใดกรหนึ่งบางสมการไม่เป็นสมการเชิงเส้น เราอาจทำให้เป็นสมการเชิงเส้นโดยอาศัยการเปลี่ยนตัวแปรที่เหมาะสม เช่นสมการต่อไปนี้จะเรียกว่า **สมการแบร์นูลลี (Bernoulli's equation)**

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

เมื่อ n เป็นค่าคงตัว เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $z = y^{1-n}$ จะสมการแบร์นูลลีจะเปลี่ยนเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

จะได้ $\mu = e^{\int (1-n)P(x) dx}$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $z = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu(1-n)Q(x) dx + C \right)$ หรือ

$$y^{1-n} = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu(1-n)Q(x) dx + C \right)$$

ตัวอย่าง 1.6.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$

ตัวอย่าง 1.6.5 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3} \quad \text{เมื่อ } y(1) = 2$$

แบบฝึกหัด 1.6

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x}$$

$$1.2 \quad x^2 y' + 3xy + 2x^5 = 0$$

$$1.3 \quad (2y - 4) dx + dy = 0$$

$$1.4 \quad x \frac{dy}{dx} + 3y = \frac{\sin x}{x^2}$$

$$1.5 \quad y' - y = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

$$1.6 \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x \ln x} = x^2$$

$$1.7 \quad (3xy - 4y - 3x) dx + (x^2 - 3x + 2) dy = 0$$

$$1.8 \quad 2(y - 3 \sin x) \cos x dx + \sin x dy = 0$$

$$1.9 \quad (x^2 + y^2) dx - 2xy dy = 0$$

$$1.10 \quad (y + xy^2) dx - dy = 0$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$2.1 \quad (x - 1)^3 \frac{dy}{dx} + 4(x - 1)^2 y = x + 1 \quad \text{เมื่อ } y(3) = \frac{1}{2}$$

$$2.2 \quad (y - e^x \sin x) dx + dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(0) = -1$$

$$2.3 \quad (\cos x) y' + y = 1 \quad \text{เมื่อ } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$2.4 \quad \frac{dy}{dx} + \frac{x^3 y}{x^4 + 1} = x^7 \quad \text{เมื่อ } y(0) = 1$$

$$2.5 \quad xy' + y = y^2 x^2 e^x \quad \text{เมื่อ } y(1) = e$$

$$2.6 \quad x \frac{dy}{dx} + y + 3 = x^3 (y + 3)^3 \quad \text{เมื่อ } y\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

บทที่ 2

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น

2.1 สมการเชิงเส้นทั่วไป

บทนิยาม 2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n คือสมการที่สามารถเขียนในรูป

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad (2.1)$$

โดยที่ $a_n(x) \neq 0$ ทุก ๆ x ในช่วง I เรียก $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$ ว่าฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ (coefficient functions) ของสมการ (2.1) และเรียก $a_n(x) \neq 0$ ว่าฟังก์ชันสัมประสิทธิ์นำ (leading coefficient functions)

- ถ้า $f(x) = 0$ เรียกสมการ (2.1) ว่า **สมการเอกพันธ์** (homogeneous equation)
- ถ้า $f(x) \neq 0$ เรียกสมการ (2.1) ว่า **สมการไม่เอกพันธ์** (nonhomogeneous equation) และเรียก $f(x)$ ว่า **พจน์ไม่เอกพันธ์** (nonhomogeneous term) ของสมการ (2.1) และเรียกสมการ

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

ว่าเป็น **สมการเอกพันธ์สัมพันธ์** (related homogeneous equation) ของสมการ (2.1)

ตัวอย่างเช่น

1. $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - xy = 0$ เป็นสมการเชิงเส้นอันดับสองเอกพันธ์
2. $2 \frac{d^4 y}{dx^4} - x \frac{dy}{dx} + y = \cos x$ เป็นสมการเชิงเส้นอันดับสี่ไม่เอกพันธ์
3. $2 \frac{d^4 y}{dx^4} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$ เป็นสมการเอกพันธ์สัมพันธ์ของสมการ $2 \frac{d^4 y}{dx^4} - x \frac{dy}{dx} + y = \cos x$

บทนิยาม 2.1.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น (2.1) เป็น **ปกติ** (normal) บนช่วง I ก็ต่อเมื่อฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$ และฟังก์ชัน $f(x)$ มีความต่อเนื่องบนช่วง I และ $a_n(x) \neq 0$ ทุก ๆ x ในช่วง I

ตัวอย่าง 2.1.3 จงหาช่วงที่ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ เป็นปกติ

$$1. y'' + 2y' + xy = 0$$

$$2. (x^2 - 1) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = e^x$$

$$3. x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - y \cos x = \sin x$$

ทฤษฎีบท 2.1.4 ทฤษฎีบทการมีจริงของผลเฉลยและมีเพียงผลเฉลยเดียว

กำหนดให้สมการ

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad (2.2)$$

เป็นปกติบนช่วง I ให้ $x_0 \in I$ และ $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ เป็นจำนวนจริง แล้วจะมีฟังก์ชัน $y = y(x)$ ซึ่งนิยามบนช่วง I เป็นผลเฉลยเดียว (unique solution) ของสมการ (2.2) ที่สอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

บทแทรก 2.1.5 กำหนดให้สมการ

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad (2.3)$$

เป็นปกติบนช่วง I แล้วจะมีฟังก์ชัน $y \equiv 0$ ซึ่งนิยามบนช่วง I เป็นผลเฉลยเดียวของสมการ (2.3) ที่สอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

เมื่อ $x_0 \in I$

หมายเหตุ $y \equiv 0$ หมายถึง $y(x) = 0$ ทุก ๆ $x \in I$

บทนิยาม 2.1.6 ผลเฉลย $y \equiv 0$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ว่าเป็น **ผลเฉลยชัด** (trivial solution) ผลเฉลยที่เป็นอย่างอื่นเรียกว่า **ผลเฉลยไม่ชัด** (nontrivial solution)

ทฤษฎีบท 2.1.7 ให้ y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยของสมการ

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad (2.4)$$

แล้ว $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง เป็นผลเฉลยของสมการ (2.4)

ในทำนองเดียวกัน ให้ $y_1, y_2, \dots, y_m$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2.4) แล้ว

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m \quad (2.5)$$

เมื่อ $c_1, c_2, \dots, c_m$ เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง เป็นผลเฉลยของสมการ (2.4) และเรียกสมการ (2.5) ว่า **ผลรวมเชิงเส้น** (linear combination) ของฟังก์ชัน $y_1, y_2, \dots, y_m$

ทฤษฎีบท 2.1.8 หลักการซ้อนทับ (Superposition Principle)

ผลรวมเชิงเส้นใด ๆ ของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเอกพันธ์บนช่วง I ซึ่งสมการเป็นปรกติ จะเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเอกพันธ์นั้นบนช่วง I

บทแทรก 2.1.9 ผลคูณค่าคงตัวกับผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเอกพันธ์ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์นั้นด้วย

ตัวอย่าง 2.1.10 ให้ $y_1 = e^{-x}$ และ $y_2 = e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' - y' - 2y = 0$ จงแสดงว่า $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง เป็นผลเฉลยของสมการนั้นด้วย

ตัวอย่าง 2.1.11 จงแสดงว่า $y_1 = e^{-x}$ และ $y_2 = e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $yy'' - (y')^2 = 0$
จงตรวจสอบว่า $y = c_1y_1 + c_2y_2$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง เป็นผลเฉลยของสมการนั้นหรือไม่

ตัวอย่าง 2.1.12 จงหาผลเฉลยเดียวของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' + y = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad y(0) = 1 \quad \text{และ} \quad y'(0) = 1$$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาช่วงที่ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้เป็นปรกติ

$$1.1 \quad (x^2 - 4) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y \cos x = 5$$

$$1.2 \quad y''' + 3xy'' + \ln(x)y = 2x$$

$$1.3 \quad x \frac{d^3 y}{dx^3} + \sqrt{x}y = \frac{\sin x}{x^2}$$

$$1.4 \quad y'' - y = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

$$1.5 \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x \ln x} = x^2$$

2. จงแสดงว่า $y = \sin 2x$ เป็นผลเฉลยเดียวของสมการ $y'' + 4y = 0$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข $y(0) = 0$ และ $y'(0) = 2$

3. จงหาผลเฉลยเดียวของสมการ $y'' - 2y' + y = 0$ เมื่อ $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 2$ โดยที่ e^x และ xe^x เป็นผลเฉลยของสมการดังกล่าว

4. จงหาผลเฉลยเดียวของสมการ $x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0$ เมื่อ $y(1) = 4$ และ $y'(1) = 3$ โดยที่ x^3 และ x^{-4} เป็นผลเฉลยของสมการดังกล่าว

5. จงหาผลเฉลยเดียวของปัญหาค่าเริ่มต้น $y'' - 9y = 0$ เมื่อ $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 1$

2.2 ความเป็นอิสระเชิงเส้น

บทนิยาม 2.2.1 ฟังก์ชัน $f_1, f_2, \dots, f_n$ ซึ่งนิยามบนช่วง I เรียกว่า **เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน** (linearly independent) ก็ต่อเมื่อ ถ้า

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \quad \text{สำหรับทุก } x \text{ ค่า } x \text{ ใน } I$$

แล้วจะได้ว่า $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ กรณีเป็นอย่างอื่นเรียก $f_1, f_2, \dots, f_n$ ว่า **ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน** (linearly dependent)

ตัวอย่าง 2.2.2 จงตรวจสอบว่า

$$f_1(x) = 1, f_2(x) = x + 1, f_3(x) = x^2 + 1, f_4(x) = x^2 + x$$

ซึ่งนิยามบนช่วง $(-\infty, \infty)$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันหรือไม่

ตัวอย่าง 2.2.3 จงตรวจสอบว่า $\sin x$ และ $\cos x$ ซึ่งนิยามบนช่วง $(-\infty, \infty)$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันหรือไม่

สมมติว่า $f_1, f_2, \dots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้อย่างน้อยถึงอันดับ $n - 1$ บนช่วง I พิจารณา

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) &= 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \cdots + c_n f_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n f_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

นิยาม $W(f_1, f_2, \dots, f_n : x)$ เรียกว่า **รอนสเกียนอันดับ n (n th-order Wronskian)** คือดีเทอร์มิแนนท์ที่กำหนดโดย

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n : x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

ทฤษฎีบท 2.2.4 รอนสเกียน $W(f_1, f_2, \dots, f_n : x) \neq 0$ สำหรับบางค่า $x \in I$ แล้ว $f_1, f_2, \dots, f_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

ตัวอย่าง 2.2.5 จงตรวจสอบว่า $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = x^2 + 1$, $f_3(x) = x^2 + 2$, $f_4(x) = x^2 - 1$ บนช่วง $(-\infty, \infty)$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันหรือไม่

ตัวอย่าง 2.2.6 ฟังก์ชัน $\sin x$ และ $\cos x$ บนช่วง $(-\infty, \infty)$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันหรือไม่

ทฤษฎีบท 2.2.7 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์อันดับ n

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2.6)$$

ซึ่งเป็นปรกติบนช่วง I จะมีผลเฉลย $y_1, y_2, \dots, y_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

ตัวอย่าง 2.2.8 จงแสดงว่า $y_1 = e^x$ และ $y_2 = x$ เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันของสมการ $(1-x)y'' + xy' - y = 0$

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันหรือไม่ โดยใช้บทนิยาม

1.1 $f_1(x) = x^2 + 1, f_2(x) = 3x, f_3(x) = x^2 - 1, f_4(x) = x^2 + 4x - 1$

1.2 $f_1(x) = e^x, f_2(x) = e^{2x}, f_3(x) = e^{3x}$

1.3 $f_1(x) = \sin^2 x, f_2(x) = \cos^2 x$

1.4 $f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \sin x \cos x$

1.5 $f_1(x) = 1, f_2(x) = \sin^2 x, f_3(x) = \cos^2 x$

2. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันหรือไม่ โดยใช้รอนสเกียน

2.1 $f_1(x) = x^2 + 3, f_2(x) = x + 1, f_3(x) = x^2 - 1, f_4(x) = x^2 + x + 2$

2.2 $f_1(x) = e^x, f_2(x) = e^{2x}, f_3(x) = e^{3x}$

2.3 $f_1(x) = e^x, f_2(x) = xe^x, f_3(x) = x^2e^x$

2.4 $f_1(x) = \sin x, f_2(x) = x \sin x, f_3(x) = \cos x$

3. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันของสมการต่อไปนี้บนช่วงซึ่งเป็นปริกติ

3.1 $y'' - 2y' - 15y = 0$: $y_1 = e^{-3x}, y_2 = e^{5x}$

3.2 $y'' + 16y = 0$: $y_1 = \cos 4x, y_2 = \sin 4x$

3.3 $y'' + y' + 5y = 0$: $y_1 = e^{-x} \cos 2x, y_2 = e^{-x} \sin 2x$

3.4 $x^2 y'' + xy' - y = 0$: $y_1 = x, y_2 = x \ln x$

2.3 ผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการเอกพันธ์

ทฤษฎีบท 2.3.1 ให้ $y_1, y_2, \dots, y_n$ เป็นผลเฉลยเฉพาะใด ๆ ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์อันดับ n

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2.7)$$

ซึ่งสมการเป็นปรกติบนช่วง I แล้วจะได้ว่า ผลเฉลยทุก ๆ ผลเฉลยของสมการ (2.7) บนช่วง I จะเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $y_1, y_2, \dots, y_n$ นั่นคือ ทุก ๆ ผลเฉลย y ของสมการ (2.7) จะมีจำนวนจริง $c_1, c_2, \dots, c_n$ ซึ่งสำหรับทุกค่า $x \in I$

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

บทนิยาม 2.3.2 ผลเฉลยเฉพาะใด ๆ ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน $y_1, y_2, \dots, y_n$ ของสมการ (2.7) ซึ่งเป็นสมการปรกติอันดับ n บนช่วง I เรียกว่า **ผลเฉลยหลักมูล (fundamental solutions)** และผลรวมเชิงเส้น $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ เมื่อ $c_1, c_2, \dots, c_n$ เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง เรียกว่า **ผลเฉลยปริบูรณ์ (complete solution)** หรือ **ผลเฉลยทั่วไป (general solution)** ของสมการ (2.7)

ตัวอย่าง 2.3.3 จงใช้ฟังก์ชัน $y_1 = x^{-2}$ และ $y_2 = x^{-2}\ln x$ บนช่วง $(0, \infty)$ หาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$$

ทฤษฎีบท 2.3.4 ให้ Y เป็นผลเฉลยใด ๆ ที่เจาะจงของสมการไม่เอกพันธ์

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.8)$$

ถ้า $y_1, y_2, \dots, y_n$ เป็นผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ของสมการ (2.8)

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

แล้วจะได้ว่าผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ (2.8) คือ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n + Y$$

เมื่อ $c_1, c_2, \dots, c_n$ เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

บทนิยาม 2.3.5 Y ที่เป็นผลเฉลยใด ๆ ของสมการ (2.8) เรียกว่า **ปริพันธ์เฉพาะ (particular integral)** หรือ **ผลเฉลยเฉพาะ (particular solution)** ของสมการไม่เอกพันธ์ เขียนแทนด้วย y_p และเรียกผลรวมเชิงเส้น $c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ ซึ่งเป็นผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ของสมการ (2.8) ว่า **ฟังก์ชันเติมเต็ม (complement function)** ของสมการไม่เอกพันธ์ เขียนแทนด้วย y_c

ดังนั้นผลเฉลยปริบูรณ์หรือผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2.8) คือ $y = y_c + y_p$

ตัวอย่าง 2.3.6 ให้ $y = c_1e^x + c_2x$ เป็นผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $(1-x)y'' + xy' - y = 0$ จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $(1-x)y'' + xy' - y = 5$

ทฤษฎีบท 2.3.7 หลักการซ้อนทับสำหรับสมการไม่เอกพันธ์

ให้ $y_{p_1}, y_{p_2}, \dots, y_{p_m}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธ์ต่อไปนี้ตามลำดับ

$$\begin{aligned} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y &= f_1(x) \\ a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y &= f_2(x) \\ &\vdots \\ a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y &= f_m(x) \end{aligned}$$

แล้วจะได้ว่า $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)$$

ตัวอย่าง 2.3.8 จงใช้ฟังก์ชัน $\frac{1}{x-1}$, $\frac{\ln x}{x-1}$ และ x^2 หาผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 3x^2 - 2x$$

ตัวอย่าง 2.3.9 จงผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $y'' + 4y = e^x + \sin x$

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงใช้ฟังก์ชันที่กำหนดให้ หาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้

$$1.1 \quad x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0$$

$$: x^3, x^4, x^{-4}, x^{-3}$$

$$1.2 \quad y'' + 4y = 0$$

$$: 2\cos x, 2\sin x, \cos 2x, \sin 2x$$

$$1.3 \quad y'' - 2y' + y = 0$$

$$: e^{-x}, e^x, xe^{-x}, xe^x$$

$$1.4 \quad (2x + 1)y'' - (4x + 4)y' + 4y = 0$$

$$: e^{2x}, xe^x, x^2, x + 1$$

2. จงใช้ฟังก์ชันที่กำหนดให้ หาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้

$$2.1 \quad x^2 y'' - x(4 - x)2y' + (6 - 2x)y = 2x - x^2$$

$$: x^2, x^2 \ln x, x$$

$$2.2 \quad y'' - y' - 2y = 15e^{5x}$$

$$: e^{-x}, e^{2x}, e^{5x}$$

$$2.3 \quad x^2 y'' + xy' - y = x$$

$$: \frac{1}{x}, x, \frac{1}{2}x \ln x$$

3. จงผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $y'' + 9y = x^2 + \cos x$

4. จงผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $y'' + 4y = e^{-x} - \sin x$

บทที่ 3

สมการเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

3.1 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

พิจารณาสมการ

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (3.1)$$

เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว โดยที่ $a \neq 0$ จากการสังเกตสมมติว่า $y = e^{mx}$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (3.1) ต่อไปสนใจค่าคงตัว m ที่ทำให้เป็นผลเฉลยของสมการดังกล่าว นั่นคือ

$$\begin{aligned} a(e^{mx})'' + b(e^{mx})' + ce^{mx} &= 0 \\ am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} &= 0 \\ e^{mx}(am^2 + bm + c) &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $e^{mx} \neq 0$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ดังนั้นต้องเลือกค่า m ที่สอดคล้องสมการ

$$am^2 + bm + c = 0 \quad (3.2)$$

เรียกสมการ (3.2) ว่า **สมการช่วย (auxiliary equation)** ซึ่งมีรากคำตอบเป็น

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ทำให้พิจารณารากของสมการได้ 3 กรณีคือ

1. $b^2 - 4ac > 0$ รากเป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน
2. $b^2 - 4ac = 0$ รากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน
3. $b^2 - 4ac < 0$ รากเป็นจำนวนเชิงซ้อน

กรณีที่ 1 รากจำนวนจริงต่างกัน (Distinct real roots)

กรณีที่ $b^2 - 4ac > 0$ รากของสมการช่วย (3.2) คือจำนวนจริง m_1 และ m_2 โดยที่ $m_1 \neq m_2$ ดังนั้น $y_1 = e^{m_1 x}$ และ $y_2 = e^{m_2 x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (3.1) เมื่อพิจารณารอนสเกียน

$$W(y_1, y_2 : x) = \begin{vmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} \end{vmatrix} = (m_2 - m_1)e^{(m_1 + m_2)x}$$

เนื่องจาก $m_2 \neq m_1$ ดังนั้น $W(y_1, y_2 : x) \neq 0$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ สรุปได้ว่า y_1 และ y_2 เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ทำให้ได้ผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ (3.1) คือ

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

ตัวอย่าง 3.1.1 จงหาผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ

$$1. \quad y'' - y' - 2y = 0$$

$$3. \quad 2y'' - 5y' - 3y = 0$$

$$2. \quad y'' + 2y' - 15y = 0$$

$$4. \quad y'' - 2y' - 2y = 0$$

ตัวอย่าง 3.1.2 จงหาผลเฉลยของสมการ $\frac{d^2 x}{dt^2} - 4x = 0$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข $x = 1$ และ $\frac{dx}{dt} = 0$ เมื่อ $t = 0$

กรณีที่ 2 รากจำนวนจริงซ้ำ (Repeated real roots)

กรณีที่ $b^2 - 4ac = 0$ รากของสมการช่วย (3.2) มีรากซ้ำคือจำนวนจริง $m_1 = \frac{-b}{2a}$ ดังนั้นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (3.1) คือ $y_1 = e^{m_1 x}$ ต่อไปจะหาอีกผลเฉลยของสมการ (3.1) ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ให้เป็น y_2

ให้ $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ โดยที่ $v(x)$ ไม่ใช่ค่าคงตัวเนื่องจาก y_1 และ y_2 เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

$$y_2' = v y_1' + y_1 v'$$

$$y_2'' = v y_1'' + v' y_1' + y_1 v'' + y_1' v' = v y_1'' + 2v' y_1' + y_1 v''$$

เนื่องจาก y_2 เป็นผลเฉลยของสมการ (3.1) ดังนั้น

$$a(v y_1'' + 2v' y_1' + y_1 v'') + b(v y_1' + y_1 v') + c v y_1 = 0$$

$$a y_1 v'' + [2a y_1' + b y_1] v' + [a y_1'' + b y_1' + c y_1] v = 0$$

$$a y_1 v'' + [2a y_1' + b y_1] v' = 0$$

$$v'' + \left[2 \frac{y_1'}{y_1} + \frac{b}{a} \right] v' = 0$$

$$\frac{v''}{v'} = -2 \frac{y_1'}{y_1} - \frac{b}{a}$$

โดยการหาปริพันธ์จะได้ว่า

$$\ln|v'| = -2\ln|y_1| - \frac{b}{a}x + c$$

$$v' = e^{-2\ln|y_1| - \frac{b}{a}x + c} = \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\frac{b}{a}x} e^c$$

$$v' = \frac{1}{(e^{m_1 x})^2} \cdot e^{-\frac{b}{a}x} e^c = e^{-(2m_1 + \frac{b}{a})x} e^c$$

เนื่องจาก $m_1 = \frac{-b}{2a}$ จะได้ว่า

$$v' = e^c$$

$$v = x e^c + c_0$$

โดยการเลือก $e^c = 1$ และ $c_0 = 0$ จะได้ว่า $v(x) = x$ ดังนั้น $y_2 = x e^{m_1 x}$
สรุปได้ว่าผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ (3.1) คือ

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

ตัวอย่าง 3.1.3 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

1. $y'' - 2y' + y = 0$

3. $y'' - 4y' + 4y = 0$

2. $y'' + 6y' + 9y = 0$

4. $y'' = 0$

ตัวอย่าง 3.1.4 จงหาผลเฉลยของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 25y = 0$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข $y = 3$
และ $\frac{dy}{dx} = 4$ เมื่อ $x = 0$

กรณีที่ 3 รากเชิงซ้อนสังยุค (Conjugate complex roots)

กรณีที่ $b^2 - 4ac < 0$ รากของสมการช่วย (3.2) จะเป็นจำนวนเชิงซ้อน $p + qi$ และ $p - qi$ เมื่อ $p, q \in \mathbb{R}$ ซึ่งจะเหมือนกับกรณีที่ 1 ผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ (3.1) คือ

$$y = Ae^{(p+qi)x} + Be^{(p-qi)x} \quad (3.3)$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง จากสูตรของออยเลอร์ (Euler's formula)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y &= Ae^{px} \cdot e^{iqx} + Be^{px} \cdot e^{-iqx} \\ &= e^{px} [Ae^{iqx} + Be^{-iqx}] \\ &= e^{px} [A(\cos qx + i\sin qx) + B(\cos(-qx) + i\sin(-qx))] \\ &= e^{px} [A(\cos qx + i\sin qx) + B(\cos qx - i\sin qx)] \\ &= e^{px} [(A+B)\cos qx + (Ai - Bi)\sin qx] \end{aligned}$$

ให้ $c_1 = (A+B)$ และ $c_2 = Ai - Bi$ ทำให้ได้ว่า

$$y = e^{px} (c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)$$

เป็นผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ (3.1)

ตัวอย่าง 3.1.5 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$1. \quad y'' + y = 0$$

$$3. \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

$$2. \quad y'' + 2y' + 2y = 0$$

$$4. \quad 2y'' - y' + 5y = 0$$

ตัวอย่าง 3.1.6 จงหาผลเฉลยของสมการ $y'' + 4y' + 5y = 0$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข $y(0) = 0$ และ $y'(0) = 1$

ตัวอย่าง 3.1.7 จงหาผลเฉลยของสมการ $4\frac{d^2y}{dx^2} + 16\frac{dy}{dx} + 17y = 0$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข $y(0) = 0$ และ $y'(\pi) = 1$

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้

1.1 $y'' - 3y' + 2y = 0$

1.6 $y'' - 81y = 0$

1.2 $y'' - 4y' + 2y = 0$

1.7 $y'' + 6y' + 13y = 0$

1.3 $4y'' - 3y' + 2y = 0$

1.8 $4y'' - 10y' + 25y = 0$

1.4 $y'' + 9y = 0$

1.9 $9y'' + 6y' + y = 0$

1.5 $y'' - y' - 12y = 0$

1.10 $6y'' - 7y' - 20y = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการต่อไปนี้ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้

2.1 $y'' + 4y = 0$

: $y(0) = 2, y'(0) = 4$

2.2 $25y'' + 20y' + 4y = 0$

: $y(0) = y'(0) = 0$

2.3 $y'' - 6y' + 18y = 0$

: $y(0) = 0, y'(0) = 1$

2.4 $y'' + y' - 6y = 0$

: $y(0) = 1, y'(0) = -2$

2.5 $y'' + 4y = 0$

: $y(0) = 2, y'(0) = 4$

3.2 ผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการอันดับสูง

พิจารณาสมการ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (3.4)$$

เมื่อ a_i เป็นค่าคงตัว ทุก ๆ $i = 1, 2, \dots, n$ โดยที่ $a \neq 0$ และ $n > 2$ มีสมการช่วยคือ

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0 \quad (3.5)$$

อาศัยหลักการเดียวกับสมการกำลังสองจะได้ว่า

- กรณีที่ 1 รากของสมการช่วย (3.5) แตกต่างกัน n ราก คือ $m_1, m_2, \dots, m_n$ ผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ (3.4) คือ

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

- กรณีที่ 2 มีรากของสมการช่วย (3.5) y_j ซ้ำกัน k ครั้ง แล้ว $xy_j, x^2 y_j, \dots, x^{k-1} y_j$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (3.4) แล้วผลรวมเชิงเส้นใด ๆ ที่ได้จากจากรากที่แตกต่างกันทั้งหมดของสมการ (3.5) คือผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ (3.4)

ตัวอย่าง 3.2.1 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

1. $y''' - 5y'' + 6y' = 0$

3. $y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0$

2. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

4. $y^{(4)} - 2y''' + 6y'' - 8y' + 8y = 0$

ตัวอย่าง 3.2.2 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

1. $y^{(4)} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = 0$

2. $y^{(8)} + 6y^{(6)} - 32y'' = 0$

ตัวอย่าง 3.2.3 จงหาผลเฉลยของสมการ $y''' - 3y' + 2y = 0$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ และ $y''(0) = 0$

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้

$$1.1 \quad y''' - 3y'' + y' + 5y = 0$$

$$1.2 \quad y''' + 27y = 0$$

$$1.3 \quad y''' + y = 0$$

$$1.4 \quad 4y^{(4)} - 4y''' - 3y'' + 4y' - y = 0$$

$$1.5 \quad y''' - y'' - y' + y = 0$$

$$1.6 \quad y''' + 5y'' + 3y' - 9y = 0$$

$$1.7 \quad y^{(4)} + y = 0$$

$$1.8 \quad y^{(8)} - 2y^{(6)} + y^{(4)} = 0$$

$$1.9 \quad 2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$$

$$1.10 \quad y^{(4)} - 8y' = 0$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการต่อไปนี้ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้

$$2.1 \quad y''' - 3y'' + 4y = 0 \quad : y = 1, y' = -8, y'' = -4 \text{ เมื่อ } x = 0$$

$$2.2 \quad y''' + y'' = 0 \quad : y = 2, y' = 1, y'' = -1 \text{ เมื่อ } x = 0$$

$$2.3 \quad y^{(4)} - y''' = 0 \quad : y = y' = 1 \text{ เมื่อ } x = 0 \text{ และ } y'' = y''' = e \text{ เมื่อ } x = 1$$

$$2.4 \quad y''' + y' = 0 \quad : y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2$$

$$2.5 \quad y^{(4)} - y = 0 \quad : y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1, y'''(0) = 0$$

3.3 ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

ในหัวข้อนี้จะแนะนำสัญลักษณ์

$$D = \frac{d}{dx}$$

เรียกว่า **ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator)** เรียกสั้น ๆ ว่า **ตัวดำเนินการ** ดังนั้น $Dy = \frac{dy}{dx}$ ตัวอย่างเช่น $De^x = e^x$, $D\sin x = \cos x$ เป็นต้น ถ้าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์อย่างน้อยอันดับที่ n จะได้ว่า

$$D^n f = \frac{d^n f}{dx^n}$$

ตัวอย่างเช่น $D^2 \sin x = D(D\sin x) = D(\cos x) = -\sin x$

และนิยาม D^0 คือตัวดำเนินการที่มีสมบัติ $D^0 f = f$ เช่น $D^0 x^3 = x^3$ โดยจะไม่เขียน D^0 ในนิพจน์ของตัวดำเนินการ ให้ f, g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้สมบัติตัวดำเนินการดังต่อไปนี้

1. $Dc = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $D(cf) = cDf$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
3. $D(f + g) = Df + Dg$
4. $D(fg) = fDg + gDf$

ตัวอย่าง 3.3.1 จงหาค่าของนิพจน์ต่อไปนี้

1. $D(xe^x)$
2. $D(\cos x + x^2 + 3)$
3. $D^2(x \cos x)$
4. $D^3(\ln x)$

เมื่อกำหนดตัวดำเนินการทั่วไปคือ

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x) \quad (3.6)$$

เรียกว่า L ว่า **ตัวดำเนินการเชิงเส้น (linear operator)** แล้วจะได้ว่า L เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ถ้าฟังก์ชัน y มีอนุพันธ์อย่างน้อยอันดับที่ n จะได้ว่า

$$Ly = a_n(x)D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1(x)Dy + a_0(x)y \quad (3.7)$$

ให้ L_1, L_2 และ L_3 เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น จะได้ว่า

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1. $L_1 + L_2 = L_2 + L_1$ | กฎการสลับที่สำหรับการบวก |
| 2. $(L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3)$ | กฎการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวก |
| 3. $(L_1 L_2)L_3 = L_1(L_2 L_3)$ | กฎการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ |
| 4. $L_1(L_2 + L_3) = L_1 L_2 + L_1 L_3$ | กฎการแจกแจงทางซ้าย |
| 5. $(L_1 + L_2)L_3 = L_1 L_3 + L_2 L_3$ | กฎการแจกแจงทางขวา |

ตัวอย่าง 3.3.2 กำหนดให้ $L_1 = xD - 1$, $L_2 = D + 1$ และ $L_3 = 2D^2 + 1$ จงหา

1. $L_1 + L_2$

2. $L_1 L_2$ และ $L_2 L_1$

3. $L_2 L_3$ และ $L_3 L_2$

สำหรับ $L_1 L_2 = L_2 L_1$ ก็ต่อเมื่อ L_1 และ L_2 มีสัมประสิทธิ์ของเป็นค่าคงตัว
ต่อไปพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad (3.8)$$

เขียนในรูปตัวดำเนินการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} [a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)] y &= f(x) \\ Ly &= f(x) \end{aligned}$$

ในกรณีที่ L มีสัมประสิทธิ์ของเป็นค่าคงตัว จะได้ว่า L อยู่ในรูปพหุนามใน D เขียนแทนด้วย $P(D)$ นั่นคือ

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

เมื่อ $a_0, a_1, \dots, a_n$ เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 3.3.3 จงเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้โดยใช้ตัวดำเนินการ D

1. $xy'' + 2xy' + 6y = e^x$

3. $e^x y'' + 4y' - 3xy = 0$

2. $(1 + x^2)y'' - y' + y = x \sin x$

4. $\frac{d^2 y}{dx^2} + \sin x \frac{dy}{dx} = x \cos x$

ตัวอย่าง 3.3.4 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - \ln x + \sin x$ จงหา $(D - 3)(xD + 2x)f$

ตัวอย่าง 3.3.5 กำหนดให้ $P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$

จงแสดงว่า $P(D)e^{mx} = e^{mx}P(m)$ เมื่อ m เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 3.3.6 กำหนดให้ $P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$ จงแสดงว่า

$$1. (D - a)^n e^{ax} y = e^{ax} D^n y \quad \text{เมื่อ } a \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

$$2. e^{ax} P(D)y = P(D - a)[e^{ax} y] \quad \text{เมื่อ } a \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงหาผลคูณของตัวดำเนินการต่อไปนี้

$$1.1 \quad (xD + 2)(xD - 2)$$

$$1.4 \quad (xD - 1)(D + x)$$

$$1.2 \quad (D + 2)(D - x)$$

$$1.5 \quad D(D - 1)(D + 2)$$

$$1.3 \quad (xD + x^2)(D - e^x)$$

$$1.6 \quad (D + 1)(D + 2)(D + 3)$$

2. จงนิพจน์ต่อไปนี้

$$2.1 \quad (D^2 - 2D)(x^3 + 1)$$

$$2.2 \quad (D^2 - 1)(e^x + \cos x)$$

$$2.3 \quad (2D^2 + 3D - 1)(2x^3 - x)$$

$$2.4 \quad (xD + 3)(x^2 - 3)$$

$$2.5 \quad (D^2 + 3D + 2)(x^2 + x + e^x)$$

$$2.6 \quad (xD^3 - D^2 + xD + x)(e^x - x^2)$$

3. จงเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้โดยใช้ตัวดำเนินการ D

$$3.1 \quad xy'' + xy' + y' = 3$$

$$3.2 \quad (1 + x)y''' + xy' = \sin x$$

$$3.3 \quad e^x y'' + xy' - 3y' = x$$

$$3.4 \quad xy^{(4)} + xy''' - e^x y' + y = x^3$$

$$3.5 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^x$$

3.4 ผลเฉลยที่ได้จากตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

พิจารณา e^{ax} เมื่อ a เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\begin{aligned} De^{ax} &= ae^{ax} \\ De^{ax} - ae^{ax} &= 0 \\ (D - a)e^{ax} &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น e^{ax} เป็นผลเฉลยของสมการ $(D - a)y = 0$ ทำนองเดียวกัน e^{bx} เป็นผลเฉลยของสมการ $(D - b)y = 0$ แล้วสมการ

$$(D - a)(D - b)y = 0 \quad (3.9)$$

มีผลเฉลยเป็น e^{ax} และ e^{bx} ถ้า $a \neq b$ โดยรอนสเกี้ยนจะได้ว่า e^{ax} และ e^{bx} เป็นอิสระเชิงต่อกัน ดังนั้นผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ (3.9) คือ

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx}$$

โดยอาศัยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ถ้า $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทั้งหมดจะได้ว่าสมการ

$$(D - a_1)(D - a_2)(D - a_3) \cdots (D - a_n)y = 0 \quad (3.10)$$

มีผลเฉลยปริบูรณ์คือ

$$y = c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} + \cdots + c_n e^{a_n x}$$

ตัวอย่าง 3.4.1 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้

1. $(D - 1)(D + 2)y = 0$

3. $D(D^2 + 6D + 8)y = 0$

2. $(D^2 - D - 6)y = 0$

4. $y'' + y' - 20y = 0$

จะเห็นว่า $D1 = 0$ และ $D^n x^k = 0$ เมื่อ $k = 1, 2, \dots, n-1$ ดังนั้น $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$D^n y = 0 \quad (3.11)$$

โดยรอนสเกียนจะได้ว่า $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน จะได้ว่าผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ (3.11) คือ

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_n x^{n-1}$$

เนื่องจาก $(D - a)e^{ax} = 0$ ทำให้ได้ว่า $(D - a)^2 e^{ax} = 0$ และ

$$\begin{aligned} (D - a)^2 x e^{ax} &= (D - a)(D - a)x e^{ax} \\ &= (D - a)(x D e^{ax} + e^{ax} D x - a x e^{ax}) \\ &= (D - a)(a x e^{ax} + e^{ax} - a x e^{ax}) \\ &= (D - a)e^{ax} = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น e^{ax} และ $x e^{ax}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $(D - a)^2 y = 0$ ซึ่งผลเฉลยทั้งสองเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน สรุปได้ว่า $y = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax}$ ของสมการ $(D - a)^2 y = 0$ โดยอาศัยหลักการเดียวกันจะได้ว่าสมการ

$$(D - a)^n y = 0 \quad (3.12)$$

ผลเฉลยปริบูรณ์คือ

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_n x^{n-1}) e^{ax}$$

ตัวอย่าง 3.4.2 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้

1. $D^3 y = 0$

3. $(D^2 - D)(D^2 + D - 2)y = 0$

2. $D^2(D - 2)y = 0$

4. $y'' + 4y' + 4y = 0$

พิจารณาดำเนินการกับฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

$$\begin{aligned} D^2 \sin bx &= D(D \sin bx) = D(b \cos x) = -b^2 \sin x \\ D^2 \sin bx + b^2 \sin x &= 0 \\ (D^2 + b^2) \sin bx &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sin bx$ เป็นผลเฉลยของสมการ $(D^2 + b^2)y = 0$ เมื่อ $b > 0$ และ

$$\begin{aligned} D^2 \cos bx &= D(D \cos bx) = D(-b \sin x) = -b^2 \cos x \\ D^2 \cos bx + b^2 \cos x &= 0 \\ (D^2 + b^2) \cos bx &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\cos bx$ เป็นผลเฉลยของสมการ $(D^2 + b^2)y = 0$

เนื่องจาก $\sin bx$ และ $\cos bx$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ฉะนั้น $y = c_1 \cos bx + c_2 \sin bx$ เป็นผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$(D^2 + b^2)y = 0$$

และขยายแนวคิดไปยังกรณีทั่วไปได้ว่าสมการ

$$(D^2 + b^2)^n y = 0$$

มีผลเฉลยปริบูรณ์คือ

$$y = (c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1}) \cos bx + (c_{n+1} + c_{n+2} x + \cdots + c_{2n} x^{n-1}) \sin bx$$

ตัวอย่าง 3.4.3 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้

1. $(D^2 + 4)y = 0$

3. $(D^4 - 13D^2 + 36)y = 0$

2. $(D^4 - 16)^2 y = 0$

4. $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$

แสดงได้โดยง่ายว่า $[(D - a)^2 + b^2]e^{ax}\sin bx = 0$ และ $[(D - a)^2 + b^2]e^{ax}\cos bx = 0$

ดังนั้น $e^{ax}\sin bx$ และ $e^{ax}\cos bx$ เป็นผลเฉลยของสมการ $[(D - a)^2 + b^2]y = 0$ เมื่อ $b > 0$ เนื่องจาก $e^{ax}\sin bx$ และ $e^{ax}\cos bx$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ดังนั้น

$$y = e^{ax}[c_1\cos bx + c_2\sin bx]$$

เป็นผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$[(D - a)^2 + b^2]y = 0$$

และขยายแนวคิดไปยังกรณีทั่วไปได้ว่าสมการ

$$[(D - a)^2 + b^2]^n y = 0$$

มีผลเฉลยปริบูรณ์คือ

$$y = e^{ax}[(c_1 + c_2x + \cdots + c_nx^{n-1})\cos bx + (c_{n+1} + c_{n+2}x + \cdots + c_{2n}x^{n-1})\sin bx]$$

ตัวอย่าง 3.4.4 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้

1. $[(D - 1)^2 + 4]y = 0$

3. $(D - 1)(D^4 - 3D^2 - 4)^2y = 0$

2. $(D^2 + 2D + 2)^2y = 0$

4. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$

ผลเฉลยที่ได้จากตัวดำเนินการสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์	ผลเฉลยปริภูมิ
$(D - a_1)(D - a_2) \cdots (D - a_n)y = 0$	$y = c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} + \cdots + c_n e^{a_n x}$
$D^n y = 0$	$y = c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1}$
$(D - a)^n y = 0$	$y = (c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1})e^{ax}$
$(D^2 + b^2)y = 0$	$y = c_1 \cos bx + c_2 \sin bx$
$(D^2 + b^2)^n y = 0$	$y = (c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1})\cos bx$ $+ (c_{n+1} + c_{n+2} x + \cdots + c_{2n} x^{n-1})\sin bx$
$[(D - a)^2 + b^2]y = 0$	$y = e^{ax}[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]$
$[(D - a)^2 + b^2]^n y = 0$	$y = e^{ax}(c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1})\cos bx$ $+ e^{ax}(c_{n+1} + c_{n+2} x + \cdots + c_{2n} x^{n-1})\sin bx$

ตัวอย่าง 3.4.5 จงหาผลเฉลยปริภูมิของสมการ

$$D^3(D - 2)(D + 3)^2(D^2 + 4)(D^2 + 4D + 6)y = 0$$

ตัวอย่าง 3.4.6 จงหาผลเฉลยปริภูมิของสมการ

$$y^{(5)} - 9y' = 0$$

ตัวอย่าง 3.4.7 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$(D^2 - 4)^2(D^2 + 4)^3(D - 4)^2(D^2 - D - 12)y = 0$$

ตัวอย่าง 3.4.8 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$y''' + 2y'' + y' + 2y = 0$$

ตัวอย่าง 3.4.9 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$y''' + 4y'' + y' + 4y = 0$$

แบบฝึกหัด 3.4

จงหาผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้ โดยใช้ตัวดำเนินการ

1. $4y'' + y' = 0$

10. $y''' - 4y'' - 5y' = 0$

2. $y'' + 9y = 0$

11. $(D^3 - 5D^2 + 3D + 9)y = 0$

3. $12y'' - 5y' - 2y = 0$

12. $(16D^4 + 24D^2 + 9)y = 0$

4. $y'' + 8y' + 16y = 0$

13. $y''' + y'' - 2y = 0$

5. $y'' - 49y = 0$

14. $(D^5 - 16D)y = 0$

6. $y'' + 3y' - 5y = 0$

15. $D^2(D^2 + 4D + 13)^2y = 0$

7. $y'' + y' - 12y = 0$

16. $D(D^2 + 1)^2(D^2 - 1)y = 0$

8. $(3D^2 + 2D + 1)y = 0$

17. $(D^2 + 4)(D^2 - 4)y = 0$

9. $(D^3 - 1)y = 0$

18. $D^3(D^2 + 9)^2(D^2 - 9)^3y = 0$

บทที่ 4

สมการไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ในบทนี้จะกล่าวถึงการหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธ์

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

เมื่อ $a_0, a_1, \dots, a_n$ เป็นค่าคงตัว หรือเขียนได้เป็น

$$P(D)y = f(x)$$

โดยที่ $P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$ โดยบทที่ 2 ผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการคือ

$$y = y_c + y_p$$

เมื่อ y_c เป็นฟังก์ชันเดิมซึ่งคือผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $P(D)y = 0$ และ y_p คือปริพันธ์เฉพาะ การหา y_c สามารถทำได้โดยวิธีที่แสดงในบทที่ 3 ดังนั้นในบทนี้จะนำเสนอวิธีหา y_p คือ

1. วิธีเทียบสัมประสิทธิ์
2. การหาปริพันธ์เฉพาะด้วยตัวดำเนินการผกผัน
3. การแปรพารามิเตอร์

4.1 วิธีเทียบสัมประสิทธิ์

พิจารณาสมการ $y'' - y' - 2y = e^x$ เขียนในตัวดำเนินการ D ได้เป็น $(D^2 - D - 2)y = e^x = 0$ นั่นคือ

$$(D - 2)(D + 1)y = 0$$

ดังนั้น $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$ เมื่อพิจารณา $(D - 1)e^x$ ในที่นี้เรียก $D - 1$ ว่า**ลบล้าง** e^x จะได้ว่า

$$(D - 2)(D + 1)y = e^x$$

$$(D - 1)(D - 2)(D + 1)y = (D - 1)e^x$$

$$(D - 1)(D - 2)(D + 1)y = 0$$

ดังนั้นสมการ $y'' - y' - 2y = e^x$ มีผลเฉลยปฐมคือ

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^x = y_c + c_3 e^x$$

นั่นคือ $y_p = c_3 e^x$ เนื่องจาก c_3 ต้องเป็นค่า ๆ หนึ่ง ซึ่งจะได้โดยความจริงที่ว่า y_p เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' - y' - 2y = e^x$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}(y_p)'' - (y_p)' - 2y_p &= e^x \\ (c_3 e^x)'' - (c_3 e^x)' - 2c_3 e^x &= 0 \\ c_3 e^x - c_3 e^x - 2c_3 e^x &= e^x \\ -2c_3 e^x &= e^x \\ c_3 &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการ $y'' - y' - 2y = e^x$ มีผลเฉลยปฐมคือ

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} e^x$$

เรีกวิธีนี้ว่า **วิธีเทียบสัมประสิทธิ์** (the method of undetermined coefficients)

บทนิยาม 4.1.1 ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น L **ลบล้าง** (annihilate) ฟังก์ชัน f บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ $Lf \equiv 0$ บนช่วง I

ข้อสังเกต 4.1.2 ให้ $P(D)$ และ $Q(D)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น แล้ว

1. ถ้า $P(D)$ ลบล้าง $f(x)$ และ $g(x)$ จะได้ว่า $P(D)$ ลบล้าง $c_1 f(x) + c_2 g(x)$
2. ถ้า $P(D)$ และ $Q(D)$ ลบล้าง $f(x)$ จะได้ว่า $c_1 P(D) + c_2 Q(D)$ ลบล้าง $f(x)$
3. ถ้า $P(D)$ ลบล้าง $f(x)$ และ $Q(D)$ ลบล้าง $g(x)$ จะได้ว่า $P(D)Q(D)$ ลบล้าง $c_1 f(x) + c_2 g(x)$

จากบทที่ 3 สรุปได้ว่า

D	ลบล้าง	1
D^n	ลบล้าง	$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$
$(D - a)$	ลบล้าง	e^{ax}
$(D - a)^n$	ลบล้าง	$e^{ax}, x e^{ax}, \dots, x^{n-1} e^{ax}$
$(D^2 + b^2)$	ลบล้าง	$\cos bx, \sin bx$
$(D^2 + b^2)^n$	ลบล้าง	$\cos bx, x \cos bx, \dots, x^{n-1} \cos bx$ และ $\sin bx, x \sin bx, \dots, x^{n-1} \sin bx$
$(D - a)^2 + b^2$	ลบล้าง	$e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx$
$[(D - a)^2 + b^2]^n$	ลบล้าง	$e^{ax} \cos bx, x e^{ax} \cos bx, \dots, x^{n-1} e^{ax} \cos bx$ และ $e^{ax} \sin bx, x e^{ax} \sin bx, \dots, x^{n-1} e^{ax} \sin bx$

ตัวอย่าง 4.1.3 จงหาตัวดำเนินการที่สลับข้างฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $4e^{2x} - \sin x - 6$

3. $3xe^x + 4x\cos 3x + x^2 - x$

2. $3\cos 2x - x^2e^{-x} + 5$

4. $3xe^{-2x} + e^x\sin 4x + x^3 - 7xe^x\cos 5x$

ตัวอย่าง 4.1.4 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$y'' + 7y' + 12y = 24$$

ตัวอย่าง 4.1.5 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$y'' + y' - 6y = x^2 + x$$

ตัวอย่าง 4.1.6 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$y'' + 2y' - 8y = 4e^{2x}$$

ตัวอย่าง 4.1.7 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$y'' + y' = 3xe^{-x}$$

ตัวอย่าง 4.1.8 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$y'' + y' = 5\sin x$$

ตัวอย่าง 4.1.9 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$y'' + 2y' - 15y = e^x \cos x$$

ตัวอย่าง 4.1.10 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$y'' + 9y' = \sin^2 x$$

ตัวอย่าง 4.1.11 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$y'' - y' = x + xe^x$$

ตัวอย่าง 4.1.12 จงหารูปแบบปริพันธ์เฉพาะของสมการ

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x} + xe^{2x}\sin x$$

ตัวอย่าง 4.1.13 จงหารูปแบบปริพันธ์เฉพาะของสมการ

$$y''' + 9y' = 3x^2 - 5x + \cos 3x + x\sin 3x$$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาตัวดำเนินการที่ลบล้างฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $e^{-x} + e^{2x}$

1.2 $3x - 4 + xe^{3x}$

1.3 $-3x - \frac{1}{2}e^{4x}$

1.4 $x^2 - 3\cos 2x$

1.5 $x\sin 3x + \cos 3x$

1.6 $e^{2x}\cos 3x + \sin x$

1.7 $y^{(4)} + y = 0$

1.8 $e^{-x}\sin 2x - 3x^3 - 1$

1.9 $\cos x(x - e^x)$

1.10 $\sin^3 2x$

2. จงหาผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้

2.1 $(D^2 + 1)y = 7$

2.2 $(D^3 - 3D + 2)y = 15$

2.3 $(D^3 + 8D)y = 1 - x^2$

2.4 $(D^5 - D^2)y = 3e^x$

2.5 $(D^2 + 1)y = 5\sin 2x$

2.6 $(D^4 - 4D^2)^2 y = x$

2.7 $(D^2 + 4D)y = 6\sin x$

2.8 $(D^2 - 1)y = \cos 2x$

2.9 $(D^2 + 2D + 1)y = 6e^x$

2.10 $(D^3 - D)y = 5\sin 2x$

3. จงหาผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้

3.1 $y'' + 4y' + 4y = 2x - 1$

3.2 $y'' + 4y' + 5y = 2e^x$

3.3 $y'' + y = \cos x + 2\sin x$

3.4 $y'' + 3y' = \sin x + 2\cos x$

3.5 $y''' + y = \sin x$

3.6 $y'' + 2y' + y = \cos^2 x$

4. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการต่อไปนี้ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้

4.1 $y''' - 2y'' + 10y' = xe^x$: $y = -1, y' = 0, y'' = 1$ เมื่อ $x = 0$

4.2 $(D - 1)^3 y = 6e^x$: $y = 0, y' = 3e^{-1}, y'' = 0$ เมื่อ $x = -1$

4.3 $y^{(4)} - 4y'' = x^2$: $y = y' = 1, y'' = y''' = 0$ เมื่อ $x = 0$

4.4 $y'' + 2y' + 2y = \sin 3x$: $y(0) = 0, y'(0) = 0$

5. จงหารูปแบบปริพันธ์เฉพาะของสมการ

5.1 $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$

5.2 $y'' + 4y = 2x \cos 3x$

5.3 $y'' + 3y' + 2y = x(e^{-x} + e^{-2x})$

5.4 $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \sin x + \cos 2x$

5.5 $(D - 1)^3(D^2 - 4)y = xe^x + e^{2x} + e^{-2x}$

5.6 $y''' - y'' - 12y' = x - 2xe^{-3x}$

4.2 การหาปริพันธ์เฉพาะด้วยตัวดำเนินการผกผัน

พิจารณาสมการ $Dy = f(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ จะได้ว่า

$$y = \int f(x) dx$$

จาก $Dy = f(x)$ เขียนได้ว่า $y = \frac{1}{D}f(x)$ โดยนิยาม

$$\frac{1}{D}f(x) = \int f(x) dx$$

เรียก $\frac{1}{D}$ ว่า **ตัวดำเนินการเชิงปริพันธ์ (integral operator)** สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ นิยามโดย

$$\frac{1}{D^n}f(x) = \frac{1}{D^{n-1}} \left[\frac{1}{D}f(x) \right]$$

ตัวอย่าง 4.2.1 จงหาผลของตัวดำเนินการเชิงปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\frac{1}{D^2}x^2$

2. $\frac{1}{D^3}\sin x$

บทนิยาม 4.2.2 ให้ $P(D)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นแล้ว

$$\frac{1}{P(D)}f(x) = g(x) \text{ ก็ต่อเมื่อ } f(x) = P(D)g(x)$$

บทนิยาม 4.2.3 เรียกตัวดำเนินการ $\frac{1}{P(D)}$ ว่าเป็น **ตัวดำเนินการผกผัน (inverse operator)** ของ $P(D)$ ซึ่งมีสมบัติว่า

$$\frac{1}{P(D)}P(D)f(x) = f(x)$$

ข้อควรระวัง โดยทั่วไป $\frac{1}{P(D)}P(D) \neq P(D)\frac{1}{P(D)}$

ทฤษฎีบท 4.2.4 ให้ $P(D), Q(D)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น f, g เป็นฟังก์ชัน และ α, β เป็นค่าคงตัว แล้ว

1. $\frac{1}{P(D)} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \frac{1}{P(D)} f(x) + \beta \frac{1}{P(D)} g(x)$
2. $\frac{1}{P(D)Q(D)} f(x) = \alpha \frac{1}{P(D)} \left[\frac{1}{Q(D)} f(x) \right]$
3. $\left[\alpha \frac{1}{P(D)} + \beta \frac{1}{Q(D)} \right] f(x) = \alpha \frac{1}{P(D)} f(x) + \beta \frac{1}{Q(D)} f(x)$

ต่อไปพิจารณาสมการ $(D - a)y_p = f(x)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} e^{-ax}(D - a)y_p &= e^{-ax}f(x) \\ e^{-ax}Dy_p - ae^{-ax}y_p &= e^{-ax}f(x) \\ D(e^{-ax}y_p) &= e^{-ax}f(x) \\ e^{-ax}y_p &= \int e^{-ax}f(x) dx \\ y_p &= e^{ax} \int e^{-ax}f(x) dx \end{aligned}$$

จาก $(D - a)y_p = f(x)$ จะได้ว่า $y_p = \frac{1}{D - a}f(x)$ ดังนั้น

$$\frac{1}{D - a}f(x) = e^{ax} \int e^{-ax}f(x) dx$$

ในกรณีทั่วไป สำหรับ $k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{(D - a)^k}f(x) = \frac{1}{(D - a)^{k-1}} \left[\frac{1}{D - a}f(x) \right]$$

ตัวอย่าง 4.2.5 จงหาผลเฉลยปริพันธ์ของสมการ $y'' - 3y' = e^{2x}$

ตัวอย่าง 4.2.6 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $(D^3 + 3D^2 - 4)y = e^{5x}$

ตัวอย่าง 4.2.7 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $(D^2 + 4D + 4)y = (x + 1)e^{3x}$

ตัวอย่าง 4.2.8 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $(D^2 - 2D + 1)y = \sin x$

แบบที่ 1 $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม

ในกรณีที่ $f(x)$ เป็นพหุนามดีกรี m อาศัยอนุกรมเรขาคณิตคือ

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$$

เปลี่ยนตัวดำเนินการผกผันได้ในรูป

$$\frac{1}{P(D)} = A_0 + A_1 D + A_2 D^2 + \dots + A_m D^m + \dots$$

เนื่องจาก $D^k f(x) \equiv 0$ ทุก ๆ $k = m+1, m+2, \dots$ ดังนั้น

$$\frac{1}{P(D)} f(x) = (A_0 + A_1 D + A_2 D^2 + \dots + A_m D^m) f(x)$$

ตัวอย่าง 4.2.9 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ $(D^2 + 1)y = x^3 + 3x - 5$

ตัวอย่าง 4.2.10 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ $y'' - y' + 2y = x^2 + 1$

แบบที่ 2 $f(x) = e^{ax}$ และ $f(x) = e^{ax} F(x)$

จากตัวอย่าง 3.3.5 ที่ว่า $P(D)e^{ax} = P(a)e^{ax}$ เนื่องจาก $P(a)$ เป็นจำนวนจริง และ $P(a) \neq 0$ จะได้ว่า

$$P(D) \frac{e^{ax}}{P(a)} = \frac{1}{P(a)} P(D)e^{ax} = \frac{1}{P(a)} P(a)e^{ax} = e^{ax}$$

โดยบทนิยาม 4.2.2 สรุปได้ว่า

$$\frac{1}{P(D)} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{P(a)}$$

ตัวอย่าง 4.2.11 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการต่อไปนี้

1. $(D^2 + D + 1)y = 3e^x + 1$

2. $(D^2 + 3)y = e^x + 2e^{-x}$

3. $(D^3 + D + 1)y = e^{-2x} + e^{2x} + 3$

4. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{5x} - 1$

โดยตัวอย่าง 3.3.6 ที่ว่า $e^{ax}P(D)y = P(D-a)[e^{ax}y]$ แทน D ด้วย $D+a$ และ y ด้วย $g(x)$ จะได้ว่า

$$e^{ax}P(D+a)g(x) = P(D)[e^{ax}g(x)]$$

ให้ $g(x) = \frac{1}{P(D+a)}F(x)$ จะได้ว่า

$$P(D)\frac{1}{P(D+a)}F(x) = e^{ax}P(D+a)\frac{1}{P(D+a)}F(x) = e^{ax}F(x)$$

โดยบทนิยาม 4.2.2 สรุปได้ว่า

$$\frac{1}{P(D)}e^{ax}F(x) = e^{ax}\frac{1}{P(D+a)}F(x)$$

เรียกว่า **ทฤษฎีบทการเลื่อนของตัวดำเนินการ (operation shift theorem)**

ตัวอย่าง 4.2.12 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ $(D^2 - 5D + 8)y = e^{2x}(x^2 + 1)$

ตัวอย่าง 4.2.13 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $y'' - y' - 2y = e^{-x}$

แบบที่ 3 $f(x)$ อยู่ในรูป $\sin bx$ และ $\cos bx$ โดยที่ $b > 0$

สามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{1}{P(D^2)} \cos bx = \frac{1}{P(-b^2)} \cos bx \quad \text{เมื่อ } P(-b^2) \neq 0 \text{ และ } b > 0$$

ทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\frac{1}{P(D^2)} \sin bx = \frac{1}{P(-b^2)} \sin bx \quad \text{เมื่อ } P(-b^2) \neq 0 \text{ และ } b > 0$$

ตัวอย่าง 4.2.14 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ $(D^2 + 2D - 3)y = \sin 3x$

ตัวอย่าง 4.2.15 จงหาผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ $y'' - 2y' + 3y = \sin^2 x$

แบบที่ 4 $f(x)$ อยู่ในรูป $\sin bx$ และ $\cos bx$ โดยที่ $P(-b^2) = 0$

จากสูตรของออยเลอร์ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ดังนั้น

$$\cos\theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{และ} \quad \sin\theta = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(D)}\cos bx &= \frac{1}{P(D)}\operatorname{Re}(e^{ibx}) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{P(D)}e^{ibx} \cdot e^{0x}\right) \\ \frac{1}{P(D)}\sin bx &= \frac{1}{P(D)}\operatorname{Im}(e^{ibx}) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{P(D)}e^{ibx} \cdot e^{0x}\right) \end{aligned}$$

หาปริพันธ์เฉพาะโดยอาศัยทฤษฎีบทการเลื่อนของตัวดำเนินการ

ตัวอย่าง 4.2.16 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ $(D^3 + D)y = \sin x$

ตัวอย่าง 4.2.17 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $y''' + 2y'' + y' + 2y = \cos x$

แบบที่ 5 $f(x)$ อยู่ในรูป $x^m \sin bx$ และ $x^m \cos bx$

โดยหลักการเดียวกับแบบที่ 4 จะได้ว่า

$$x^m \cos \theta = \operatorname{Re}(x^m e^{i\theta}) \quad \text{และ} \quad x^m \sin \theta = \operatorname{Im}(x^m e^{i\theta})$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(D)} x^m \cos bx &= \frac{1}{P(D)} \operatorname{Re}(e^{ibx} x^m) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{P(D)} e^{ibx} \cdot x^m \right) \\ \frac{1}{P(D)} x^m \sin bx &= \frac{1}{P(D)} \operatorname{Im}(e^{ibx} x^m) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{P(D)} e^{ibx} \cdot x^m \right) \end{aligned}$$

หาปริพันธ์เฉพาะโดยอาศัยทฤษฎีบทการเลื่อนของตัวดำเนินการ

ตัวอย่าง 4.2.18 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ $(D^2 + 1)y = x^2 \sin 2x$

ตัวอย่าง 4.2.19 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ $(D^2 - 4D + 5)y = x e^{2x} \cos x$

ตัวอย่าง 4.2.20 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ $(D^3 + 5D^2 + 9D + 5)y = \sin x \cos x$

ตัวอย่าง 4.2.21 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $(D^2 - 4)y = x^2 e^{3x}$

ตัวอย่าง 4.2.22 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $(D^2 - 2D + 5)y = e^x \cos 2x$

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงหาผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้

1.1 $(D^2 - 3D + 2)y = x^2 - 3x + 1$

1.6 $y'' + 6y' + 13y = 60\cos x + 20$

1.2 $(D^2 + 3D - 4)y = 24e^{2x}$

1.7 $D^2(D - 2)^3y = 48e^{2x}$

1.3 $y'' + 16y = 48\sin 4x$

1.8 $(D^4 - 16)y = 4\sin^2 x$

1.4 $y'' - y = 8xe^{2x}$

1.9 $(D^2 + 25)y = 5\sin 5x$

1.5 $(D^3 - 5D^2 + 8D - 4)y = e^x + e^{2x}$

1.10 $y'' + 2y' + y = 10e^{-x}\cos 4x$

2. จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการต่อไปนี้

2.1 $(D^2 + 4D + 5)y = 4e^{-2x}\cos x$

2.9 $y^{(4)} - 4y'' = 4\sin x$

2.2 $(D^2 + 9)y = 10(e^x - \cos 3x)$

2.10 $y^{(4)} + y'' = 3x^2 + e^{-x}$

2.3 $(D^2 - D - 2)y = 4x^2 - 3e^{-x}$

2.11 $(D^2 - 2D + 10)y = e^x\cos 3x$

2.4 $(D^2 + 4)y = 4\sin x\cos x$

2.12 $(D^2 + 2)y = x^2\sin x$

2.5 $(D^2 + 2D + 2)y = xe^{-x}\sin x$

2.13 $(D^2 - 4D + 5)y = \sin x\cos 3x$

2.6 $y'' - 2y' + y = x^3e^x$

2.14 $y^{(4)} + y' = 3xe^x$

2.7 $y'' + 2y' - 3y = xe^x$

2.15 $(D^2 - D - 6)y = x^3 - x$

2.8 $y'' - 6y' + 13y = xe^{3x}\sin x$

2.16 $(D^3 + 1)y = xe^x + \sin x$

4.3 การแปรพารามิเตอร์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาปริพันธ์เฉพาะ โดยวิธี การแปรพารามิเตอร์ (variation of parameter) ซึ่งจะใช้ได้ทั้งกรณีที่สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร เริ่มต้นจากแนวคิดการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (4.1)$$

พิจารณาสมการ $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} \\ \ln|y| &= \int -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx + c \\ y &= c_1 e^{\int -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx} \end{aligned}$$

ให้ $y_c = c_1 e^{\int -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx} = c_1 y_1$ เมื่อ $y_1 = e^{\int -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx}$ จัดรูปสมการ $a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ ได้เป็น

$$y' + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{f(x)}{a_1(x)}$$

จากหัวข้อ 1.6 จะได้ผลเฉลยเป็น (โดยการตัดค่าคงตัวออก)

$$y_p = e^{\int -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx} \left(\int \frac{f(x)}{a_1(x)} e^{\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx} dx \right) = y_1 u_1(x)$$

เมื่อ $u_1(x) = \int \frac{f(x)}{a_1(x)} e^{\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx} dx$ เนื่องจาก $y_p = y_1 u_1$ เป็นผลเฉลยของสมการ (4.1) ดังนั้น

$$\begin{aligned} a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p &= f(x) \\ a_1(x)[y_1 u_1' + y_1' u_1] + a_0(x)y_1 u_1 &= f(x) \\ u_1[a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1] + a_1(x)y_1 u_1' &= f(x) \\ a_1(x)y_1 u_1' &= f(x) \\ u_1' &= \frac{f(x)}{a_1(x)y_1} \\ u_1(x) &= \int \frac{f(x)}{a_1(x)y_1} dx \end{aligned}$$

สรุปได้ว่าสมการ $a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ มีผลเฉลยปริพันธ์คือ

$$y = y_c + y_p = c_1 y_1 + y_1 u_1$$

เมื่อ $y_1 = e^{\int -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx}$ และ $u_1 = \int \frac{f(x)}{a_1(x)y_1} dx$

ตัวอย่าง 4.3.1 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $xy' - 2y = x^3 \sin x$

ตัวอย่าง 4.3.2 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $x \frac{dy}{dx} + 3y = \frac{\sin x}{x^2}$

ต่อไปพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (4.2)$$

ฟังก์ชันเพิ่มเติมของสมการ (4.2) คือ $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ ทำการแปรพารามิเตอร์จะได้ว่า

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

เป็นปริพันธ์เฉพาะของสมการ (4.2) โดยใช้เงื่อนไขที่ว่า y_p เป็นผลเฉลยของสมการ (4.2) ทำให้ได้ข้อสรุปว่า

$$u_1 = - \int \frac{y_2}{W(y_1, y_2 : x)} \frac{f(x)}{a_2(x)} dx \quad \text{และ} \quad u_2 = \int \frac{y_1}{W(y_1, y_2 : x)} \frac{f(x)}{a_2(x)} dx$$

เมื่อ $W(y_1, y_2; x)$ คือรอนสเกียนของ y_1, y_2

ตัวอย่าง 4.3.3 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $y'' + y = \sec x$

ตัวอย่าง 4.3.4 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $xy'' + 2y' = 6x$ กำหนดให้ $y_c = c_1 + c_2 \frac{1}{x}$

ตัวอย่าง 4.3.5 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$

ตัวอย่าง 4.3.6 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{x}$ เมื่อ $x > 0$

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้ โดยใช้การแปรพารามิเตอร์

$$1.1 \quad xy' + 3y = \tan x$$

$$1.2 \quad y' + xy = xe^{-x}$$

$$1.3 \quad y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$$

$$1.4 \quad y'' - y' - 2y = e^{-x}$$

$$1.5 \quad y'' + y = \sin x$$

$$1.6 \quad y'' + y = \tan x$$

$$1.7 \quad x^2y'' + xy' - y = x$$

$$1.8 \quad x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3e^x$$

$$1.9 \quad x^2y'' + xy' - y = \frac{1}{x+1}$$

$$1.10 \quad x^2y'' - 2xy' + 2y = x \ln x$$

$$1.11 \quad y'' - 3y' + 2y = -\frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

$$1.12 \quad xy'' - (2x^2 + 1)y' = x^5e^{x^2}$$

2. จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้

$$2.1 \quad y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{2e^x}{x^2}$$

$$2.2 \quad y''' + y' = \csc x$$

$$2.3 \quad y''' + y' = \cot x$$

บทที่ 5

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์

ในบทนี้จะกล่าวถึงการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว โดยมีสมการมากกว่า 1 สมการ เมื่อกำหนดให้ $x = x(t)$ และ $y = y(t)$ และตัวดำเนินการ $D = \frac{d}{dt}$ ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} 1. \quad & \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + 3y = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 3x + 2y = e^t \end{cases} & \text{หรือ} & \begin{cases} (D+2)x + 3y = 0 \\ 3x + (D+2)y = e^t \end{cases} \\ 2. \quad & \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 3y = \sin t \\ 2\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - y = e^{-t} \end{cases} & \text{หรือ} & \begin{cases} D^2x + (D+3)y = \sin t \\ 2Dx + (D^2-1)y = e^{-t} \end{cases} \end{aligned}$$

สำหรับ 2 สมการเขียนในรูปทั่วไปคือ

$$\begin{cases} P_1(D)x + Q_1(D)y = f_1(t) \\ P_2(D)x + Q_2(D)y = f_2(t) \end{cases}$$

สำหรับ 3 สมการเขียนในรูปทั่วไปคือ

$$\begin{cases} P_1(D)x + Q_1(D)y + R_1(D)z = f_1(t) \\ P_2(D)x + Q_2(D)y + R_2(D)z = f_2(t) \\ P_3(D)x + Q_3(D)y + R_3(D)z = f_3(t) \end{cases}$$

ตัวอย่าง 5.0.7 จงเขียนระบบสมการในรูป D

$$\begin{cases} x' + y' + x + y = t \\ x'' + 2y' - x + y = e^t \end{cases}$$

5.1 การหาผลเฉลยโดยวิธีกำจัดตัวแปรตาม

พิจารณาสมการ

$$(D + 17)x + (D - 1)y = e^t \quad (5.1)$$

$$(D - 3)x + y = 0 \quad (5.2)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (D - 1)(D - 3)x + (D - 1)y &= (D - 1)0 \\ (D^2 - 4D + 3)x + (D - 1)y &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

แล้ว (5.3)–(5.1) จะได้

$$\begin{aligned} (D^2 - 4D + 3)x - (D + 17)x &= -e^t \\ (D^2 - 5D - 14)x &= -e^t \\ (D - 7)(D + 2)x &= -e^t \end{aligned}$$

จะได้ $x_c = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{7t}$ และ

$$x_p = \frac{1}{(D - 7)(D + 2)}(-e^t) = -\frac{e^t}{(1 - 7)(1 + 2)} = \frac{1}{18}e^t$$

ดังนั้น $x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{7t} + \frac{1}{18}e^t$ แทน x ลงในสมการ (5.2) จะได้

$$\begin{aligned} y &= -(D - 3) \left(c_1 e^{-2t} + c_2 e^{7t} + \frac{1}{18}e^t \right) \\ &= 5c_1 e^{-2t} - 4c_2 e^{7t} + \frac{1}{9}e^t \end{aligned}$$

เรียกวิธีนี้ว่า การกำจัดตัวแปรตาม (eliminating dependent variables)

ตัวอย่าง 5.1.1 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned}(D - 1)x + (D + 2)y &= \sin t \\ (D + 1)x + Dy &= \cos t\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1.2 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned}(D-1)x + (D+2)y &= 1 + e^t \\ (D+2)y + (D+1)z &= 2 + e^t \\ (D-1)x + &+ (D+1)z = 3 + e^t\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 5.1

จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ โดยใช้วิธีกำจัดตัวแปรตาม

$$1. \begin{cases} Dx &= y \\ Dy &= x \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} Dx + (D + 2)y &= 0 \\ (D - 3)x - 2y &= 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x' &= 3x - y - 12 \\ y' &= x' + y + 4e^t \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} (D^2 - 1)x - y &= 0 \\ (D - 1)x + Dy &= 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} Dx + D^2y &= e^{3t} \\ (D + 1)x + (D - 1)y &= 4e^{3t} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} Dx &= y \\ Dy &= z \\ Dz &= x \end{cases}$$

5.2 การหาผลเฉลยโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์

พิจารณาระบบสมการ

$$P_1(D)x + Q_1(D)y = f_1(t)$$

$$P_2(D)x + Q_2(D)y = f_2(t)$$

จะได้ว่า

$$Q_2(D)P_1(D)x + Q_2(D)Q_1(D)y = Q_2(D)f_1(t) \quad (5.4)$$

$$Q_1(D)P_2(D)x + Q_1(D)Q_2(D)y = Q_1(D)f_2(t) \quad (5.5)$$

แล้ว (5.4)–(5.5) คือ

$$[Q_2(D)P_1(D) - Q_1(D)Q_2(D)]x = Q_2(D)f_1(t) - Q_1(D)f_2(t) \quad (5.6)$$

เขียนในรูปดีเทอร์มิแนนต์ได้ดังนี้

$$\begin{vmatrix} P_1(D) & Q_1(D) \\ P_2(D) & Q_2(D) \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} f_1(t) & Q_1(D) \\ f_2(t) & Q_2(D) \end{vmatrix}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{vmatrix} P_1(D) & Q_1(D) \\ P_2(D) & Q_2(D) \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} P_1(D) & f_1(t) \\ P_2(D) & f_2(t) \end{vmatrix}$$

สำหรับระบบสมการ

$$P_1(D)x + Q_1(D)y + R_1(D)z = f_1(t)$$

$$P_2(D)x + Q_2(D)y + R_2(D)z = f_2(t)$$

$$P_3(D)x + Q_3(D)y + R_3(D)z = f_3(t)$$

อาศัยหลักการเดียวกันจะได้ว่า

$$\begin{vmatrix} P_1(D) & Q_1(D) & R_1(D) \\ P_2(D) & Q_2(D) & R_2(D) \\ P_3(D) & Q_3(D) & R_3(D) \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} f_1(t) & Q_1(D) & R_1(D) \\ f_2(t) & Q_2(D) & R_2(D) \\ f_3(t) & Q_3(D) & R_3(D) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} P_1(D) & Q_1(D) & R_1(D) \\ P_2(D) & Q_2(D) & R_2(D) \\ P_3(D) & Q_3(D) & R_3(D) \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} P_1(D) & f_1(t) & R_1(D) \\ P_2(D) & f_2(t) & R_2(D) \\ P_3(D) & f_3(t) & R_3(D) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} P_1(D) & Q_1(D) & R_1(D) \\ P_2(D) & Q_2(D) & R_2(D) \\ P_3(D) & Q_3(D) & R_3(D) \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} P_1(t) & Q_1(D) & f_1(t) \\ P_2(t) & Q_2(D) & f_2(t) \\ P_3(t) & Q_3(D) & f_3(t) \end{vmatrix}$$

หาคำตอบของระบบสมการ

$$(D - 1)x + (D + 2)y = \sin t \quad (5.7)$$

$$(D + 1)x + Dy = \cos t \quad (5.8)$$

โดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} D-1 & D+2 \\ D+1 & D \end{vmatrix} x &= \begin{vmatrix} \sin t & D+2 \\ \cos t & D \end{vmatrix} \\ [D(D-1) - (D+1)(D+2)]x &= D\sin t - (D+2)\cos t \\ (D^2 - D - D^2 - 3D - 2)x &= \cos t + \sin t - 2\cos t \\ (-4D - 2)x &= \sin t - \cos t \\ (2D + 1)x &= \frac{1}{2}(\cos t - \sin t) \end{aligned}$$

จะได้ $x_c = c_1 e^{-\frac{1}{2}t}$ และ

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{1}{2D+1} \cdot \frac{1}{2}(\cos t - \sin t) = \frac{1}{2}(2D-1) \frac{1}{4D^2-1}(\cos t - \sin t) \\ &= \frac{1}{2}(2D-1) \frac{1}{4(-1)-1}(\cos t - \sin t) \\ &= \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t)$ แทน x ลงในสมการ (5.8) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Dy &= \cos t - (D+1) \left(c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t) \right) \\ &= -\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{5}(3\cos t + \sin t) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} y &= \int -\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{5}(3\cos t + \sin t) dt \\ &= c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{5}(3\sin t - \cos t) + c_2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $2D + 1$ มีดีกรีเป็น 1 ดังนั้นต้องมีค่าคงตัวเพียงตัวเดียว แทนค่า x และ y ในสมการ (5.7) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (D-1) \left(c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t) \right) + (D+2) \left(c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{5}(3\sin t - \cos t) + c_2 \right) &= \sin t \\ \sin t + 2c_2 &= \sin t \end{aligned}$$

ดังนั้น $c_2 = 0$ แล้ว $y = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{5}(3\sin t - \cos t)$

ตัวอย่าง 5.2.1 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.2.2 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned}(D^2 + 2D)x + 5y &= 0 \\ Dx - (D - 2)y &= 0\end{aligned}$$

ที่สอดคล้องเงื่อนไข $x(0) = 0, x'(0) = 0$ เมื่อ $y(0) = 1$

ตัวอย่าง 5.2.3 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned}(D-1)x + (D+2)y &= 1 + e^t \\ (D+2)y + (D+1)z &= 2 + e^t \\ (D-1)x + &+ (D+1)z = 3 + e^t\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.2.4 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{array}{rcl} Dx + (D+1)y & & = 1 \\ (D+1)x & - (D-1)z & = 1 \\ & (D+1)y + (D+2)z & = t \end{array}$$

ที่สอดคล้องเงื่อนไข $x = 0, y = 1, z = 0$ เมื่อ $t = 0$

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของระบบสมการต่อไปนี้

$$1.1 \quad \begin{cases} x'' - x - 5y' &= t \\ 2x' - y'' + 4y &= 2 \end{cases}$$

$$1.2 \quad \begin{cases} Dx - 6y &= 0 \\ x - Dy + z &= 0 \\ x + y - Dz &= 0 \end{cases}$$

$$1.3 \quad \begin{cases} (D-1)x + (D^2+1)y &= 1 \\ (D^2-1)x + (D+1)y &= 2 \end{cases}$$

$$1.4 \quad \begin{cases} x' - 2x + 2y' &= 2 - 4e^{2t} \\ 2x' - 3x + 3y' - y &= 0 \end{cases}$$

$$1.5 \quad \begin{cases} 2Dx + (D-1)y &= t \\ Dx + Dy &= t^2 \end{cases}$$

2. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ที่สอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้

$$2.1 \quad \begin{cases} Dx &= -5x - y \\ Dy &= 4x - y \end{cases} \quad : x(1) = 0, y(1) = 0$$

$$2.2 \quad \begin{cases} x'' - x + 5y' &= t \\ -2x' + y'' - 4y &= 2 \end{cases} \quad : x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$$

$$2.3 \quad \begin{cases} (D^2+1)x + 4(D-1)y &= 4e^t \\ (D-1)x + (D+9)y &= 0 \end{cases} \quad : x(0) = 5, x'(0) = 0, y(0) = \frac{1}{2}$$

$$2.4 \quad \begin{cases} (D^2-1)x + 5Dy &= t \\ -2Dx + (D^2-4)y &= -2 \end{cases} \quad : x(0) = 9, x'(0) = 2, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

บทที่ 6

สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

ในบทนี้จะกล่าวถึงการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร โดยเริ่มต้นจากสมการโคชี-ออยเลอร์ ซึ่งอาศัยการเปลี่ยนตัวแปร และสมการรูปแบบอื่นๆ ซึ่งคำตอบมักออกมาในรูปอนุกรมกำลัง

6.1 สมการโคชี-ออยเลอร์

ในหัวข้อนี้จะศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \quad (6.1)$$

เรียกว่า **สมการโคชี-ออยเลอร์ (Cauchy-Euler equation)** เมื่อ $a_0, a_1, \dots, a_n$ เป็นค่าคงตัว
พิจารณาสมการ

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0 \quad (6.2)$$

โดยให้ $x = e^z$ แล้วจะได้ว่า $z = \ln x$ และ $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x > 0$ โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dz} \\ y'' &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dz} \right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dz} \right) + \frac{dy}{dz} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dz} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right) \end{aligned}$$

แทน y, y' และ y'' ลงในสมการ (6.2) จะได้ว่า

$$ax^2 \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right) + bx \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dz} \right) + cy = 0$$

$$a \frac{d^2y}{dz^2} + (b-a) \frac{dy}{dz} + cy = 0$$

ดังนั้นสมการ (6.2) เปลี่ยนเป็นสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ซึ่งมีสมการช่วยคือ

$$am^2 + (b-a)m + c = 0 \quad \text{หรือ} \quad am(m-1) + bm + c = 0$$

ซึ่งหาผลเฉลยในรูป $y = y(z)$ จากนั้นแทน $z = \ln x$ แล้วจะได้คำตอบตามต้องการ ส่วนในกรณี $x < 0$ ทำได้ในทำนองเดียวกันโดยการแทนค่า $-x = e^z$ ดังนั้นโดยทั่วไปจะหาผลเฉลยของสมการโคชี-ออยเลอร์ในกรณี $x > 0$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 6.1.1 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$

ตัวอย่าง 6.1.2 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

ตัวอย่าง 6.1.3 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $3x^2y'' + 6xy' + y = 0$

สมการโคชี-ออยเลอร์เอกพันธ์อันดับ n

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \quad (6.3)$$

โดยการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เขียนในรูปตัวดำเนินการ $D = \frac{d}{dz}$ ได้เป็น

$$[a_n D(D-1) \cdots (D-n+1) + a_{n-1} D(D-1) \cdots (D-n+2) + \cdots + a_1 D + a_0] y = 0$$

สมการช่วยคือ

$$a_n m(m-1) \cdots (m-n+1) + a_{n-1} m(m-1) \cdots (m-n+2) + \cdots + a_1 m + a_0 = 0$$

ในกรณีที่ $n = 3$ สมการช่วยคือ

$$a_3 m(m-1)(m-2) + a_2 m(m-1) + a_1 m + a_0 = 0$$

ตัวอย่าง 6.1.4 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $x^3 y''' + 9x^2 y'' + 19y' + 8y = 0$

ตัวอย่าง 6.1.5 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $x^3 y''' - 2x^2 y'' - 2xy' + 8y = 0$

ตัวอย่าง 6.1.6 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $x^3y''' + 4x^2y'' - 5xy' - 15y = x^4$

ตัวอย่าง 6.1.7 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + 4y = \cos(\ln x) + \sin(\ln x)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบ

$$a_n(ax+b)^ny^{(n)} + a_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(ax+b)y' + a_0y = f(x) \quad (6.4)$$

อาศัยหลักการเดียวกับสมการโคชี-ออยเลอร์ โดยการเปลี่ยนตัวแปร $ax+b = e^z$ แล้ว $\ln(ax+b) = z$ เมื่อ $x > -\frac{b}{a}$ ตัวดำเนินการ $D = \frac{d}{dz}$ และกฎลูกโซ่แสดงได้ว่า

$$(ax+b)\frac{d^ny}{dx^n} = a^n D(D-1)\cdots(D-n+1)y$$

สมการ (6.4) จะเปลี่ยนเป็น

$$[a_n a^n D(D-1)\cdots(D-n+1) + a_{n-1} a^{n-1} D(D-1)\cdots(D-n+2) + \cdots + a_1 a D + a_0]y = f\left(\frac{e^z - b}{a}\right)$$

ตัวอย่าง 6.1.8 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $(3x+2)^2 y'' + 3(3x+2)y' - 36y = 3x^2 + 4x + 1$

แบบฝึกหัด 6.1

1. จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้

1.1 $x^2y'' + xy' - y = 0$

1.9 $x^3y''' + 5x^2y'' + 7xy' + 8y = 0$

1.2 $x^2y'' + xy' + 4y = 0$

1.10 $xy^{(4)} + 6y''' = 0$

1.3 $4x^2y'' + 8xy' + y = 0$

1.11 $2x^2y'' + 5xy' + y = 3x + 2$

1.4 $x^2y'' - 2y = 0$

1.12 $x^2y'' - xy' + y = x^5$

1.5 $25x^2y'' + 25xy' + y = 0$

1.13 $x^2y'' - 4xy' + 4y = x^2$

1.6 $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

1.14 $x^3y'' + x^2y' - xy = 3x^3$

1.7 $x^2y'' + xy' - y = 0$

1.15 $xy''' + y' = x$

1.8 $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$

1.16 $x^3y''' - x^2y'' - 7xy' + 16y = 9x - 16$

2. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ที่สอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้

2.1 $x^2y'' + xy' + y = 0$

: $y(1) = 1, y'(1) = 2$

2.2 $x^2y'' + 3xy' = 0$

: $y(1) = 0, y'(1) = 4$

2.3 $x^2y'' + 3xy' + 3y = 0$

: $y(1) = 1, y'(1) = -5$

2.4 $x^2y'' + xy' + y = 5x^2$

: $y(1) = 1, y'(1) = 2$

2.5 $x^2y''' + xy'' + 4y' = 4$

: $y(1) = \frac{4}{5}, y'(1) = y''(1) = 0$

3. จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้

3.1 $(x-1)^2y'' - 2(x-1)y' - 4y = 0$

3.2 $(x+2)^2y'' + (x+2)y' + y = 0$

3.3 $(x-3)^3y''' + 2(x-3)x^2y'' - (x-3)y' + y = 0$

3.4 $(2x+1)^2y'' - 2(2x+1)y' - 12y = 6x$

3.5 $(x+1)^2y'' + (x+1)y' - y = \ln^2(x+1) + x - 1$

4. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ที่สอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้

4.1 $(x-2)^2y'' + y = 0$

: $y(3) = 3, y'(3) = 3$

4.2 $(x+1)^2y'' - (x+1)y' + y = 0$

: $y(0) = 1, y'(0) = 0$

4.3 $(x-1)^2y'' - 5(x-1)y' + 9y = 0$

: $y(2) = y'(2) = 1$

4.4 $(x+1)^2y'' - 12y = 6$

: $y(0) = 1, y'(0) = -1$

6.2 จุดสามัญและจุดเอกฐาน

อนุกรมกำลัง (power series) รอบจุด $x = x_0$ คืออนุกรมอนันต์ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

เรียก x_0 ว่าจุดศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ อนุกรมกำลังมีลักษณะ 3 แบบ

1. อนุกรมลู่เข้าเฉพาะเพียงจุดเดียวที่จุดศูนย์กลาง x_0
2. อนุกรมลู่เข้าทุกค่า x ซึ่ง $|x - x_0| < R$ อนุกรมลู่ออกทุกค่า x ซึ่ง $|x - x_0| > R$ โดยที่ $R > 0$
3. อนุกรมลู่เข้าทุกค่า $x \in \mathbb{R}$

ให้ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ เป็นอนุกรมกำลังลู่เข้าเมื่อ $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ โดยที่ $R > 0$ จะได้ว่ามีฟังก์ชัน f นิยามบนช่วง $(x_0 - R, x_0 + R)$ ซึ่ง

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

มีสมบัติบางประการดังนี้

1. $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$
2. $\int f(x) dx = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = 0$ ทุกค่า $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ แล้ว $a_n = 0$ ทุก ๆ n

บทนิยาม 6.2.1 จะกล่าวว่า $f(x)$ เป็น ฟังก์ชันวิเคราะห์ (analytic function) ที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อ สามารถเขียน $f(x)$ ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) รอบจุด x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

สำหรับทุก ๆ $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ โดยที่ $R > 0$

ตัวอย่างฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x_0 = 0$ เช่น

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ต่อไปสนใจการผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์อันดับสอง

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

สามารถจัดรูปสมการได้เป็น

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (6.5)$$

บทนิยาม 6.2.2 เรียกจุด x_0 ว่า **จุดสามัญ (ordinary point)** ของสมการ (6.5) ถ้าฟังก์ชัน $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด x_0

บทนิยาม 6.2.3 เรียกจุด x_0 ว่าเป็น **จุดเอกฐานปกติ (regular singular point)** ของสมการ (6.5) ถ้าฟังก์ชัน $(x - x_0)P(x)$ และ $(x - x_0)^2Q(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด x_0 ถ้าเป็นอย่างอื่น เรียกว่า ว่าเป็น **จุดเอกฐานไม่ปกติ (irregular singular point)**

ตัวอย่าง 6.2.4 จงหาจุดสามัญ จุดเอกฐานปกติ และจุดเอกฐานไม่ปกติ ของสมการ

$$x(x-1)^3y'' + 2(x-1)^3y' + 3y = 0$$

ตัวอย่าง 6.2.5 จงหาจุดสามัญ จุดเอกฐานปกติ และจุดเอกฐานไม่ปกติ ของสมการ

$$x^2(x-3)^2y'' + 7(x-3)y' + (x+2)y = 0$$

แบบฝึกหัด 6.2

จงหาจุดสามัญ จุดเอกฐานปกติ และจุดเอกฐานไม่ปกติ ของสมการต่อไปนี้

1. $xy'' + y' + xy = 0$
2. $(x^2 + 1)y'' + xy = 0$
3. $y'' - xy = 0$
4. $(2x^2 - 3)y'' - 2xy' + y = 0$
5. $(x^2 - 4)^2y'' + (x - 2)y' + y = 0$
6. $x^2(x + 1)^2y'' + (x^2 - 1)y' + 5y = 0$
7. $8x^2y'' + 5xy' - (x - 1)y = 0$
8. $(1 - x^2)y'' - 2xy' - 9y = 0$
9. $x(1 - x^2)y'' - x(x - 1)y' - xy = 0$
10. $(x^2 - 9)y'' - (x - 3)^2y' - (x + 3)y = 0$

6.3 ผลเฉลยรอบจุดสามัญ

ทฤษฎีบท 6.3.1 ถ้า x_0 เป็นจุดสามัญของสมการ

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

จะได้ว่าสมการนี้มีผลเฉลย 2 ผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุด $x = x_0$ ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

ตัวอย่าง 6.3.2 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุด $x = 0$ ของสมการ $y'' + y' + xy = 0$

วิธีทำ เห็นได้ชัด $x = 0$ เป็นจุดสามัญของสมการ ให้ $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ เป็นผลเฉลยของสมการ จะได้

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{และ} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

ดังนั้น

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

ต่อไปทำให้แต่ละอนุกรมเป็น x^n โดยการเปลี่ยนค่า n ดังนี้

$$\sum_{n+2=2}^{\infty} (n+2)(n+2-1) a_{n+2} x^{n+2-2} + \sum_{n+1=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1-1} + \sum_{n-1=0}^{\infty} a_{(n-1)} x^{n-1+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{(n-1)} x^n = 0$$

จากนั้นทำให้อนุกรมเริ่มต้นที่จุดเดียวกันคือ $n = 1$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{(n-1)} x^n &= 0 \\ (2a_2 + a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_{n+1} + a_{n-1}] x^n &= 0 \end{aligned}$$

สมการดังกล่าวจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$$2a_2 + a_1 = 0$$

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \quad \text{เมื่อ } n \geq 1$$

จะได้ว่า $a_2 = -\frac{1}{2} a_1$ สำหรับ $n \geq 1$ จะได้ว่า **สูตรเวียนเกิด (recurrence formula)**

$$a_{n+2} = -\frac{(n+1) a_{n+1} + a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$$

เมื่อแทนค่า $n = 1, 2, 3, \dots$ จะได้ว่า

$$\begin{array}{lll}
 n = 1 : & a_3 = -\frac{2a_2 + a_0}{3 \cdot 2} & \text{หรือ} \quad a_3 = \frac{a_1}{6} - \frac{a_0}{6} \\
 n = 2 : & a_4 = -\frac{3a_2 + a_1}{4 \cdot 3} & \text{หรือ} \quad a_4 = -\frac{a_1}{8} + \frac{a_0}{24} \\
 n = 3 : & a_5 = -\frac{4a_2 + a_2}{5 \cdot 4} & \text{หรือ} \quad a_5 = \frac{a_1}{40} - \frac{a_0}{120} \\
 \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$\begin{aligned}
 y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots \\
 &= a_0 + a_1x - \frac{a_1}{2}x^2 + \left(\frac{a_1}{6} - \frac{a_0}{6}\right)x^3 + \left(-\frac{a_1}{8} + \frac{a_0}{24}\right)x^4 + \left(\frac{a_1}{40} - \frac{a_0}{120}\right)x^5 + \dots \\
 &= a_0 \left(1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \dots\right) + a_1 \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \dots\right)
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.3 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุดกำเนิดของสมการ $y'' + xy' + y = 0$

ตัวอย่าง 6.3.4 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุดกำเนิดของสมการ

$$(1 - x)y'' + xy' + y = 0$$

ตัวอย่าง 6.3.5 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุดกำเนิดของสมการ

$$y'' + xy' + (1 - x)y = 0 \text{ เมื่อ } y(0) = 3 \text{ และ } y'(0) = -2$$

แบบฝึกหัด 6.3

1. จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุดกำเนิดของสมการต่อไปนี้

1.1 $y'' - 3y' + 2y = 0$

1.6 $y'' - y' + (3x + 2)y = 0$

1.2 $(1 + x)y'' + y = 0$

1.7 $(1 - x^2)y'' + 2xy' + 5y = 0$

1.3 $y'' + x^2y = 0$

1.8 $y'' + xy' + (2x^2 + 1)y = 0$

1.4 $y'' + x^2y' + 3xy = 0$

1.9 $(x^2 + 1)y'' + xy' + xy = 0$

1.5 $(1 - x)y'' + (1 - x)y' + y = 0$

1.10 $xy'' - 2xy' + 2y = 0$

2. จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุดกำเนิดของสมการต่อไปนี้ ที่สอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้

2.1 $y'' - xy' + 2y = 0$

: $y(0) = 3, y'(0) = 3$

2.2 $y'' + x^2y' + x^2y = 0$

: $y(0) = 1, y'(0) = 4$

2.3 $y'' + xy' + 3xy = 0$

: $y(0) = 1, y'(0) = 5$

6.4 ผลเฉลยรอบจุดเอกฐานปกติ

ทฤษฎีบท 6.4.1 ทฤษฎีบทของโฟรเบเนียส (Frobenius' Theorem)

ถ้า x_0 เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

จะได้ว่าอย่างน้อยผลเฉลยหนึ่งของจะอยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r}, \quad a_0 \neq 0$$

สำหรับบางจำนวนจริง r และอนุกรมนี้ลู่เข้าอย่างง่ายสำหรับ $0 < x - x_0 < R$ โดย $R > 0$

อาศัยหลักการเช่นเดียวกับหัวข้อ 6.3 ในกรณีที่จุดเอกฐานปกติคือ $x = 0$ จะได้ค่า r_1 และ r_2 ทำให้ได้ผลเฉลย $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ ได้ 3 ลักษณะดังนี้

1. **กรณีที่ 1** $r_1 < r_2$ และ $r_2 - r_1$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม
ผลเฉลยอยู่ในรูปอนุกรม 2 ผลเฉลยที่อิสระเชิงเส้นต่อกัน

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^n \quad \text{และ} \quad y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) x^n$$

2. **กรณีที่ 2** $r_1 - r_0$ หรือ $r_1 = r_2$
จะได้ผลเฉลยหนึ่งคือ

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^n$$

และอีกผลเฉลยคือ

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx \quad \text{หรือ} \quad y_2 = y_1 \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

3. **กรณีที่ 3** $r_1 < r_2$ และ $r_2 - r_1$ เป็นจำนวนเต็ม

- (1) หาผลเฉลยโดยใช้รากที่น้อยคือ r_1
- (2) ถ้าผลเฉลยบรรทัดตามข้อ (1) ไม่ได้สามารถหาผลเฉลยบรรทัดได้จากรากที่มากคือ r_2 ได้
เป็น y_1 และหา y_2 จาก

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx \quad \text{หรือ} \quad y_2 = y_1 \ln x + x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

ตัวอย่าง 6.4.2 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมรอบจุดกำเนิดของสมการ $9x^2y'' + (x+2)y = 0$

วิธีทำ ให้ $P(x) = 0$ และ $Q(x) = \frac{x+2}{9x^2}$ เนื่องจาก $Q(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = 0$

ดังนั้น $x = 0$ แต่ $xP(x) = 0$ และ $x^2Q(x) = \frac{1}{9}(x+2)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = 0$

ดังนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติ สมมติให้ผลเฉลยในรูป

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_0 \neq 0$$

จะได้ว่า $y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$ และ $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$ ดังนั้น

$$9x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + (x+2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 9(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r} = 0$$

$$9r(r-1)a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} 9(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} + 2a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n x^{n+r} = 0$$

$$[9r(r-1) + 2]a_0 x^r + \sum_{n=0}^{\infty} 9(n+r+1)(n+r)a_{n+1} x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{n+1} x^{n+r+1} = 0$$

$$[9r(r-1) + 2]a_0 x^r + \sum_{n=0}^{\infty} \{9(n+r+1)(n+r) + 2\}a_{n+1} + a_n x^{n+r+1} = 0$$

ดังนั้น

$$9r(r-1) + 2 = 0$$

$$(3r-1)(3r-2) = 0$$

$$r = \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \quad (\text{กรณีที่ 1})$$

และสูตรเวียนเกิดคือ

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -\frac{a_n}{9(n+r+1)(n+r) + 2} \\ &= -\frac{a_n}{[3(n+r) + 1][3(n+r) + 2]}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

เมื่อ $r = r_1 = \frac{1}{3}$

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{(3n+2)(3n+3)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

แล้ว

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad & a_1 = -\frac{a_0}{2 \cdot 3} \\ n = 1 : \quad & a_2 = -\frac{a_1}{5 \cdot 6} = -\frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} \\ n = 2 : \quad & a_3 = -\frac{a_2}{8 \cdot 9} = -\frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \\ & \dots \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$y = a_0 x^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots \right)$$

จะได้

$$y_1 = x^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots \right)$$

ต่อไปกรณี $r = r_2 = \frac{2}{3}$

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{(3n+3)(3n+4)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

แล้ว

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad & a_1 = -\frac{a_0}{3 \cdot 4} \\ n = 1 : \quad & a_2 = -\frac{a_1}{6 \cdot 7} = \frac{a_0}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \\ n = 2 : \quad & a_3 = -\frac{a_2}{9 \cdot 10} = -\frac{a_0}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$y = a_0 x^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{x}{3 \cdot 4} + \frac{x^2}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{x^3}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} + \cdots \right)$$

จะได้

$$y_2 = x^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{x}{3 \cdot 4} + \frac{x^2}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{x^3}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} + \cdots \right)$$

ผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการนี้คือ

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 x^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \cdots \right) + c_2 x^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{x}{3 \cdot 4} + \frac{x^2}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \cdots \right) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.4.3 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมรอบจุดกำเนิดของสมการ $4x^2y'' + 2xy' - xy = 0$

ตัวอย่าง 6.4.4 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมรอบจุดกำเนิดของสมการ $2xy'' + 3y' - y = 0$

ตัวอย่าง 6.4.5 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมรอบจุดกำเนิดของสมการ

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$$

วิธีทำ ให้ $P(x) = \frac{3x-1}{x(x-1)}$ และ $Q(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ เนื่องจาก $P(x)$ และ $Q(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = 0$ ดังนั้น $x = 0$ แต่ $xP(x) = \frac{3x-1}{x-1}$ และ $x^2Q(x) = \frac{x}{x-1}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = 0$ ดังนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ สมมติให้ผลเฉลยในรูป

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_0 \neq 0$$

จะได้ว่า $y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$ และ $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} x(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + (3x-1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + & \\ \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1]a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + (n+r)]a_n x^{n+r-1} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r+2) + 1]a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 a_n x^{n+r-1} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r+2) + 1]a_n x^{n+r} - r^2 a_0 x^{r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)^2 a_n x^{n+r-1} &= 0 \\ -r^2 a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r+2) + 1]a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r+1)^2 a_{n+1} x^{n+r} &= 0 \\ -r^2 a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r+2) + 1]a_n - (n+r+1)^2 a_{n+1} x^{n+r} &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $-r^2 = 0$ นั่นคือ $r = 0, 0$ (กรณีที่ 2) และสูตรเวียนเกิดคือ

$$a_{n+1} = \frac{\{(n+r)(n+r+2) + 1\}a_n}{(n+r+1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

เมื่อ $r = r_1 = 0$

$$a_{n+1} = \frac{(n^2 + 2n + 1)a_n}{(n+1)^2} = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

แล้ว $a_0 = a_1 = a_2 = \dots$ ดังนั้น

$$y = a_0 x^0 (1 + x + x^2 + \dots) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{a_0}{1-x}$$

จะได้

$$y_1 = \frac{1}{1-x}$$

เนื่องจาก $P(x) = \frac{3x-1}{x(x-1)}$ และ

$$\begin{aligned} e^{-\int P(x)dx} &= e^{-\int \frac{3x-1}{x(x-1)}dx} = e^{-\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}\right)dx} \\ &= e^{-\ln x - 2\ln(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

หา y_2 จาก

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx \\ &= \frac{1}{1-x} \int \frac{(x-1)^2}{x(x-1)^2} dx \\ &= \frac{1}{1-x} \ln x \end{aligned}$$

ผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการนี้คือ

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= \frac{c_1}{1-x} + \frac{c_2}{1-x} \ln x \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.4.6 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมรอบจุดกำเนิดของสมการ $x^2y'' - (x^2 + x)y' + y = 0$

ตัวอย่าง 6.4.7 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมรอบจุดกำเนิดของสมการ $xy'' - (x+4)y' + 2y = 0$

วิธีทำ ให้ $P(x) = -\frac{x+4}{x}$ และ $Q(x) = \frac{2}{x}$ เนื่องจาก $P(x)$ และ $Q(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = 0$ ดังนั้น $x = 0$ แต่ $xP(x) = -(x+4)$ และ $x^2Q(x) = 2x$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = 0$ ดังนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติ สมมติให้ผลเฉลยในรูป

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_0 \neq 0$$

จะได้ว่า $y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$ และ $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} - (x+4) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) - 4(n+r)]a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r) - 2]a_n x^{n+r} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-5)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-2)a_n x^{n+r} &= 0 \\ r(r-5)a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-5)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-2)a_n x^{n+r} &= 0 \\ r(r-5)a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-5)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-3)a_{n-1} x^{n+r-1} &= 0 \\ r(r-5)a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r-5)a_n - (n+r-3)a_{n-1}]x^{n+r-1} &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $r(r-5) = 0$ นั่นคือ $r = 0, 5$ ให้ $r_1 = 0, r_2 = 5$ (กรณีที่ 3) และสูตรเวียนเกิดคือ

$$(n+r)(n+r-5)a_n = (n+r-3)a_{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

เมื่อ $r = r_1 = 0$ แล้ว $n(n-5)a_n = (n-3)a_{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \dots$

สำหรับ $n = 1, 2, 3, 4$ จะได้

$$a_1 = \frac{1}{2}a_0, a_2 = \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{12}a_0, a_3 = 0, a_4 = 0$$

เมื่อ $n = 5$ แล้ว a_5 เป็นจำนวนจริงใด ๆ และสำหรับ $n = 6, 7, 8, \dots$ จะได้

$$a_6 = \frac{1}{2}a_5, a_7 = \frac{2}{7}a_6 = \frac{1}{7}a_5, a_8 = \frac{5}{3 \cdot 8}a_7 = \frac{5}{3 \cdot 7 \cdot 8}a_5, \dots$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} y &= x^{r_1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \\ &= x^0 \left(a_0 + \frac{a_0}{2}x + \frac{a_0}{12}x^2 + a_5 x^5 + \frac{a_5}{2}x^6 + \frac{a_5}{7}x^7 + \dots \right) \\ &= a_0 \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 \right) + a_5 \left(x^5 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + \dots \right) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.4.8 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมรอบจุด $x = 0$ ของสมการ

$$x^2 y'' - x(4 - x)y' + (6 - 2x)y = 0$$

แบบฝึกหัด 6.4

จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุดกำเนิดของสมการต่อไปนี้

1. $9x^2y'' + 9(x^2 + x)y' + (12x - 1)y = 0$
2. $xy'' + y' + xy = 0$
3. $x^2y'' - 3xy' + (1 + x)y = 0$
4. $x^2y'' - 2xy' + (2 - x^3)y = 0$
5. $2x(x + 1)y'' + 3(x + 1)y' - y = 0$
6. $8x^2y'' + 10xy' - (1 + x)y = 0$
7. $x^2y'' + 3xy' - (1 - 2x)y = 0$
8. $x^2y'' + x^2y' - 2y = 0$
9. $x^2y'' + 2x(x - 2)y' + 2(2 - 3x)y = 0$
10. $x^2y'' + (x^2 - x)y' + y = 0$
11. $x^2y'' - x(4 - x)y' + (6 - 2x)y = 0$
12. $3x^2y'' - 2xy' + (x + 2)y = 0$
13. $2x^2(1 - x)y'' + 2(1 - x)y' + 2(2 - 3x)y = 0$
14. $2x^2(1 - x)y'' - x(1 + 7x)y' + y = 0$
15. $x^2y'' - x(1 + x)y' + y = 0$
16. $x(1 - x)y'' + 2(1 - x)y' + 2y = 0$

บทที่ 7

ฟังก์ชันพิเศษ

7.1 ฟังก์ชันแกมมา

บทนิยาม 7.1.1 ฟังก์ชันแกมมา (Gamma function) คือฟังก์ชันค่าจริงที่กำหนดโดย

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0$$

ทฤษฎีบท 7.1.2 สำหรับจำนวนจริง $x > 0$ จะได้ว่า

1. $\Gamma(1) = 1$

2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

บทพิสูจน์. จากบทนิยาม

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s e^{-t} dt \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^s = \lim_{s \rightarrow \infty} [-e^{-s} + 1] = 1\end{aligned}$$

สำหรับจำนวนจริง $x > 0$ จะได้

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s e^{-t} t^x dt \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left([-e^{-t} t^x]_0^s + x \int_0^s e^{-t} t^{x-1} dt \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} (-e^{-s} s^x - 0) + x \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= 0 + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

□

จากทฤษฎีบท 7.1.2 จะได้ว่า

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1 \cdot 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(1) = 2 \cdot 1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.1.3 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะได้ว่า

$$\Gamma(n+1) = n!$$

ตัวอย่าง 7.1.4 จงหาค่าของ

$$1. \int_0^\infty e^{-x} x^5 dx$$

$$2. \int_0^\infty e^{-2x} 4x^2 dx$$

ทฤษฎีบท 7.1.5 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

บทพิสูจน์. จากบทนิยาม

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปร $u = t^2$ จะได้

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du$$

แล้ว

$$\begin{aligned} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 4 \left[\int_0^\infty e^{-u^2} du\right] \left[\int_0^\infty e^{-v^2} dv\right] \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} dudv \end{aligned}$$

โดยการเปลี่ยนการอินทิเกรตในรูปเชิงขั้ว $u = r\cos\theta$ และ $v = r\sin\theta$ จะได้

$$\begin{aligned} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s e^{-r^2} r dr \right] d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\lim_{s \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^s \right] d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\lim_{s \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-s^2}}{2} + \frac{1}{2} \right] \right] d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi \end{aligned}$$

$$\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$



ตัวอย่าง 7.1.6 จงหาค่าของ

1. $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

2. $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$

3. $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$

4. $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$

ฟังก์ชันแกมมาในรูป

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

- เมื่อให้ $t = u^2$ จะได้

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du$$

- เมื่อให้ $t = \ln\left(\frac{1}{u}\right)$ จะได้

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{u}\right) \right]^{x-1} du$$

- เมื่อให้ $t = su$, $s > 0$ จะได้

$$\Gamma(x) = s^x \int_0^\infty e^{-su} u^{x-1} du$$

ตัวอย่าง 7.1.7 จงหาค่าของ

1. $\int_0^\infty e^{-t^2} t^2 dt$

2. $\int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{1.5} dx$

3. $\int_0^\infty e^{-2t} t^2 dt$

ทฤษฎีบท 7.1.8 สำหรับจำนวนจริงบวก x และ y จะได้ว่า

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$$

ตัวอย่าง 7.1.9 จงหาค่าของ

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \sin^7\theta \, d\theta$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \sin^2\theta \, d\theta$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \, d\theta$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin^6\theta \, d\theta$

ตัวอย่าง 7.1.10 จงหาค่าของ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\theta} \, d\theta$

ตัวอย่าง 7.1.11 จงหาค่าของ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sec\theta} \, d\theta$

ทฤษฎีบท 7.1.12 สูตรการซ้ำของเลอจองด์ (Legendre duplication formula)
 สำหรับจำนวนจริงบวก x จะได้ว่า

$$\Gamma(2x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

ตัวอย่าง 7.1.13 จงหาค่าของ

1. $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$

2. $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$

ตัวอย่าง 7.1.14 จงหาค่าของ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta} d\theta$

ตัวอย่าง 7.1.15 จงหาค่าของ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cot\theta} d\theta$

แบบฝึกหัด 7.1

1. จงหาค่าของปริพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \int_0^{\infty} e^{-x} x^{1.5} dx$$

$$1.2 \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$1.3 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$1.4 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$1.5 \int_0^{\infty} e^{-x^3} x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$1.6 \int_0^1 \left[\ln \left(\frac{1}{x} \right) \right]^7 dx$$

$$1.7 \int_0^1 \left[\ln \left(\frac{1}{x} \right) \right]^{\frac{5}{2}} dx$$

$$1.8 \int_0^{\infty} e^{-3x} x^3 dx$$

$$1.9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin^2 \theta d\theta$$

$$1.10 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\theta$$

$$1.11 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^6 \theta d\theta$$

$$1.12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sqrt{\sin \theta} d\theta$$

2. จงหาพิสัยของอินทิกรัลต่อไปนี้

$$2.1 \Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du \quad \text{เมื่อให้ } t = u^2$$

$$2.2 \Gamma(x) = \int_0^1 \left[\ln \left(\frac{1}{u} \right) \right]^{x-1} du \quad \text{เมื่อให้ } t = \ln \left(\frac{1}{u} \right)$$

$$2.3 \Gamma(x) = s^x \int_0^{\infty} e^{-su} u^{x-1} du \quad \text{เมื่อให้ } t = su, s > 0$$

$$2.4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \theta d\theta = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{สำหรับจำนวนเต็มบวก } n$$

7.2 ฟังก์ชันบีตา

บทนิยาม 7.2.1 ฟังก์ชันบีตา (Beta function) คือฟังก์ชันค่าจริงของ 2 ตัวแปร ที่กำหนดโดย

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad x > 0, y > 0$$

ตัวอย่าง 7.2.2 จงหาค่าของ

1. $B(1, 1)$

2. $B(1, 2)$

3. $B(2, 1)$

ทฤษฎีบท 7.2.3 สำหรับจำนวนจริง $x > 0$ และ $y > 0$ จะได้ว่า $B(x, y) = B(y, x)$

บทพิสูจน์. จากบทนิยาม

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1} (-du) && \text{แทน } t = 1-u \\ &= \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1} du \\ &= B(y, x) \end{aligned}$$

□

ฟังก์ชันบีตาในรูป

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

• เมื่อให้ $t = \frac{u}{u+1}$ จะได้

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$$

• เมื่อให้ $t = \cos^2 \theta$ จะได้

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta$$

ทฤษฎีบท 7.2.4 สำหรับจำนวนจริงบวก x และ y จะได้ว่า

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

ตัวอย่าง 7.2.5 จงหาค่าของ

1. $B(5, 3)$

2. $B\left(2, \frac{3}{2}\right)$

3. $\int_0^1 x^2(1-x)^{\frac{3}{2}} dx$

ตัวอย่าง 7.2.6 จงหาค่าของ $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

ตัวอย่าง 7.2.7 จงหาค่าของ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta} d\theta$

แบบฝึกหัด 7.2

1. จงหาค่าของปริพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx$

1.2 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}} \, dx$

1.3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\theta} \, d\theta$

1.4 $\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x)^9} \, dx$

1.5 $\int_0^3 x^4\sqrt{9-x^2} \, dx$

1.6 $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} \, dx$

1.7 $\int_0^1 x^4(1-x)^{10} \, dx$

1.8 $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{-1+x}{1-x}} \, dx$

1.9 $\int_0^\infty x^5(1-x)^{-10} \, dx$

1.10 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta \, d\theta$

1.11 $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^5} \, dx$

1.12 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\csc\theta} \, d\theta$

2. จงหาพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

2.1 $B(x, y+1) + B(x+1, y) = B(x, y) \quad \text{เมื่อ } x > 0, y > 0$

2.2 $B(x, x) = 2^{1-2x} B\left(x, \frac{1}{2}\right) \quad \text{เมื่อ } x > 0$

7.3 พหุนามเลอจองด์

บทนิยาม 7.3.1 สมการเชิงอนุพันธ์แบบเลอจองด์อันดับ n (Legendre's differential equation of order n) คือสมการที่อยู่ในรูป

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0 \quad (7.1)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ และเรียกผลเฉลยของสมการนี้ว่า **ฟังก์ชันเลอจองด์ (Legendre function)**

เนื่องจาก $x = 0$ เป็นจุดสามัญของสมการ (7.1) นั่นคือผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

อาศัยหลักการเดียวกับการหาผลเฉลยในหัวข้อ 6.3 จะได้ผลเฉลยดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.3.2 ผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเลอจองด์อันดับ n (7.1) คือ

$$y = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x) \quad (7.2)$$

เรียก $P_n(x)$ ว่า **พหุนามเลอจองด์อันดับ n (Legendre polynomial of order n)** ซึ่งหาได้จาก

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2n - 2k)!}{2^k k! (n - k)! (n - 2k)!} x^{n-2k}$$

โดยที่ $N = \frac{n}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ และ $N = \frac{n-1}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ และ

$$Q_n(x) = P_n(x) \int \frac{1}{(1 - x^2)P_n^2(x)} dx$$

นอกจากนี้พหุนามเลอจองด์สามารถหาได้จาก **สูตรของโรดริกซ์ (Rodrigues, formula)**

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

ตัวอย่าง 7.3.3 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

วิธีทำ จะได้ว่าสมการนี้เป็นสมการเลอจองด์อันดับ 1 ดังนั้น

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!} \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^1 = \frac{1}{2} (2x) = x$$

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= P_1(x) \int \frac{1}{(1 - x^2)P_1^2(x)} dx = x \int \frac{1}{(1 - x^2)x^2} dx = x \int \left[\frac{1}{1 - x^2} + \frac{1}{x^2} \right] dx \\ &= x \int \left[\frac{1}{(1 - x)(1 + x)} + \frac{1}{x^2} \right] dx = x \int \left[\frac{1}{2(1 - x)} + \frac{1}{2(1 + x)} + \frac{1}{x^2} \right] dx \\ &= \frac{x}{2} [\ln(1 - x) + \ln(1 + x)] - 1 = x \ln \sqrt{1 - x^2} - 1 \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการนี้คือ $y = c_1 x + c_2 (x \ln \sqrt{1 - x^2} - 1)$

ตัวอย่าง 7.3.4 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$

ตัวอย่าง 7.3.5 จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการ

$$\frac{d}{dx} \left[(x+3)(x+2) \frac{dy}{dx} \right] - 6y = 0$$

ให้ $x = -\frac{1}{2}(t+5)$

แบบฝึกหัด 7.3

1. จงหาผลเฉลยปริบูรณ์ของสมการต่อไปนี้

$$1.1 \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$$

$$1.2 \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 20y = 0$$

$$1.3 \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 30y = 0$$

$$1.4 \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 72y = 0$$

$$1.5 \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 110y = 0$$

$$1.6 \quad y'' - (\cot x)y' + 6y = 0 \quad \text{ให้ } t = -\cos x$$

$$1.7 \quad (e^{-2x} - 1)y'' - (e^{-2x} + 1)y' + 12y = 0 \quad \text{ให้ } t = e^x$$

$$1.8 \quad x(1 - x)y'' + (1 - 2x)y' + 12y = 0 \quad \text{ให้ } t = 1 - 2x$$

$$1.9 \quad (x + 3)(x - 2)y'' + (2x + 1)y' - 20y = 0 \quad \text{ให้ } t = 1 + 2x$$

$$1.10 \quad \frac{d}{dx} \left[(x - 2)(x - 3) \frac{dy}{dx} \right] - 6y = 0 \quad \text{ให้ } t = 2x - 5$$

$$1.11 \quad \frac{d}{dx} \left[(x + a)(x + b) \frac{dy}{dx} \right] - cy = 0 \quad \text{ให้ } x = \frac{1}{2}[(a - b)t + a + b]$$

2. ให้ a, b เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ $c = n(n + 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ จงแสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d}{dx} \left[(x + a)(x + b) \frac{dy}{dx} \right] - cy = 0 \quad (7.3)$$

2.1 จงแสดงว่าสมการ (7.3) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเลขของดีอันดับ n

2.2 จงหาผลเฉลยของสมการ (7.3) ในรูป a, b เมื่อ $c = 20$

บทที่ 8

การแปลงลาปลาซ

8.1 ผลการแปลงลาปลาซ

บทนิยาม 8.1.1 กำหนดให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบน $[0, \infty)$ และ S เป็นเซตที่ $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ ลู่เข้าทุกค่า $s \in S$ เรียกฟังก์ชัน นิยามโดย

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad s \in S$$

ว่าเป็น ผลการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) ของ $f(t)$ เขียนแทนด้วย $\mathcal{L}\{f(t)\}$

ตัวอย่าง 8.1.2 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(t) = 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 dt = \int_0^\infty e^{-st} dt \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-st} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-sr}}{s} + \frac{1}{s} \right] \\ &= \frac{1}{s} \quad \text{เมื่อ } s > 0\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad \text{เมื่อ } s > 0$$

ตัวอย่าง 8.1.3 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(t) = e^{at}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{(a-s)t} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(a-s)r}}{a-s} - \frac{1}{a-s} \right] \\ &= \frac{1}{s-a} \quad \text{เมื่อ } s > a\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad \text{เมื่อ } s > a$$

ตัวอย่าง 8.1.4 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(t) = \cos bt$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว
วิธีทำ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\cos bt\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos bt \, dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-st} \cos bt \, dt \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{D} e^{-st} \cos bt \right]_0^r \quad \text{เมื่อ } D = \frac{d}{dt} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[e^{-st} \frac{1}{D-s} \cos bt \right]_0^r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[e^{-st} (D+s) \frac{1}{D^2-s^2} \cos bt \right]_0^r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[e^{-st} (D+s) \frac{1}{-b^2-s^2} \cos bt \right]_0^r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s^2+b^2} (-b \sin bt + s \cos bt) \right]_0^r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-sr}}{s^2+b^2} (-b \sin br + s \cos br) + \frac{s}{s^2+b^2} \right] \\ &= \frac{s}{s^2+b^2} \quad \text{เมื่อ } s > 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2} \quad \text{เมื่อ } s > 0$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2} \quad \text{เมื่อ } s > 0$$

ตัวอย่าง 8.1.5 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(t) = t^x$
วิธีทำ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{t^x\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t^x \, dt \\ &= \frac{1}{s^{x+1}} \left(s^{x+1} \int_0^\infty e^{-st} \cdot t^{(x+1)-1} \, dt \right) \\ &= \frac{1}{s^{x+1}} \Gamma(x+1) \quad \text{เมื่อ } s > 0, x > -1 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\mathcal{L}\{t^x\} = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \quad \text{เมื่อ } s > 0, x > -1$$

ในกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{เมื่อ } s > 0$$

ตัวอย่าง 8.1.6 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(t) = \begin{cases} t & \text{เมื่อ } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } t > 1 \end{cases}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 e^{-st} f(t) dt + \int_1^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^1 e^{-st} t dt + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r e^{-st} \cdot 1 dt \\ &= \left[-\frac{e^{-st}}{s} t - \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^1 + \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_1^r \\ &= \left[-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s} \right] + \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-sr}}{s} + \frac{e^{-s}}{s} \right] \\ &= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s} \end{aligned} \quad \text{เมื่อ } s > 0$$

ตารางสรุปผลการแปลงลาปลาซ

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	เงื่อนไข
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$	$s > 0$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$	$s > 0$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว
t^x	$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$	$s > 0$ และ $x > -1$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$ และ $n = 1, 2, 3, \dots$

ตัวอย่าง 8.1.7 จงหาผลการแปลงลาปลาซต่อไปนี้

1. $\mathcal{L}\{t^2\}$

3. $\mathcal{L}\{e^{3t}\}$

5. $\mathcal{L}\{\sin 5t\}$

7. $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}$

2. $\mathcal{L}\{\sqrt{t}\}$

4. $\mathcal{L}\{e^{-2t}\}$

6. $\mathcal{L}\{\cos 7t\}$

8. $\mathcal{L}\{\sqrt{e^t}\}$

การมีอยู่จริงของผลการแปลงลาปลาซ

บทนิยาม 8.1.8 เรียกฟังก์ชัน $f(t)$ ว่า **อันดับเลขชี้กำลัง** (exponential order) ถ้ามีค่าคงตัว α และค่าคงตัว $M > 0$ และ $t_0 > 0$ ที่ทำให้

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \quad \text{สำหรับทุก } t \geq t_0$$

และเขียนแทนด้วย $f(t) = O(e^{\alpha t})$

ทฤษฎีบท 8.1.9 ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง

1. ถ้า $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} |f(t)| < \infty$ สำหรับบางค่าคงตัว α แล้ว $f(t)$ เป็นอันดับเลขชี้กำลัง
2. ถ้า $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} |f(t)| = \infty$ ทุกค่าคงตัว α แล้ว $f(t)$ ไม่เป็นอันดับเลขชี้กำลัง

ตัวอย่าง 8.1.10 จงแสดงว่า

$$1. f(t) = \frac{e^{2t}}{2+t} \text{ เป็นอันดับเลขชี้กำลัง}$$

$$2. f(t) = e^{t^2} \text{ ไม่เป็นอันดับเลขชี้กำลัง}$$

ทฤษฎีบท 8.1.11 การมีอยู่จริงของผลการแปลงลาปลาซ (Existence of Laplace transform)

ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่ง $\int_0^{t_0} e^{-st} f(t) dt$ มีค่า ทุก ๆ จำนวนจริงบวก t_0 และ $f(t) = O(e^{\alpha t})$

สำหรับบางค่าคงตัว α แล้วผลการแปลงลาปลาซ $\mathcal{L}\{f(t)\}$ จะมีอยู่จริงเสมอเมื่อ $s > \alpha$

บทนิยาม 8.1.12 จะกล่าวว่าฟังก์ชัน $f(t)$ **ต่อเนื่องเป็นช่วง** (piecewise continuous) บน $[a, b]$

ก็ต่อเมื่อ $f(t)$ ต่อเนื่องทุก ๆ ช่วงย่อยของ $[a, b]$

ทฤษฎีบท 8.1.13 ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0, T]$ เมื่อ $T > 0$

และ $f(t) = O(e^{\alpha t})$ สำหรับบางค่าคงตัว α แล้ว

$$1. \text{ ผลการแปลงลาปลาซ } \mathcal{L}\{f(t)\} \text{ จะมีอยู่จริงเสมอเมื่อ } s > \alpha$$

$$2. \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{f(t)\} = 0 \quad \text{เมื่อ } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

บทนิยาม 8.1.14 เรียก $f(t)$ ว่า **ฟังก์ชันของชั้นเอ (function of class A)** ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0, T]$ เมื่อ $T > 0$ และ $f(t) = O(e^{\alpha t})$ สำหรับบางค่าคงตัว α

ทฤษฎีบท 8.1.15 ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันของชั้นเอ แล้ว

1. ผลการแปลงลาปลาซ $\mathcal{L}\{f(t)\}$ จะมีอยู่จริงเสมอ
2. $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ เมื่อ $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

ตัวอย่าง 8.1.16 จงแสดงว่า $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ ไม่เป็นฟังก์ชันของชั้นเอ แต่ผลการแปลงลาปลาซมีอยู่จริง

โดยทฤษฎีบท 8.1.15 ถ้า $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \neq 0$ จะไม่สามารถหาฟังก์ชันชั้นเอที่ทำให้ $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ เช่น $F(s) = \frac{s}{s+1}$ ไม่มีฟังก์ชันของชั้นเอซึ่ง $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s}{s+1}$

ทฤษฎีบท 8.1.17 ถ้า $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0, T]$ เมื่อ $T > 0$ และ $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$ เมื่อ $s > s_0$ สำหรับบางค่าคงตัว s_0 แล้วจะได้ว่า $f(t_0) = g(t_0)$ เมื่อ $t_0 \in [0, \infty)$ ซึ่ง $f(t)$ และ $g(t)$ มีความต่อเนื่อง โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $f(t)$ และ $g(t)$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[0, \infty)$ แล้ว $f(t) = g(t)$ สำหรับทุกค่า $t \geq 0$

จากทฤษฎีบท 8.1.15 และ 8.1.17 จะได้ว่าถ้านิยาม $F(s)$ บนช่วง (s_0, ∞) สำหรับบางค่าคงตัว s_0 และ $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ จะได้ว่ามีฟังก์ชัน $f(t)$ เพียงฟังก์ชันเดียวเท่านั้นที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0, \infty)$ และเป็นอันดับเลขชี้กำลังซึ่ง $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ และเรียก $f(t)$ ว่า **ผลการแปลงลาปลาซผกผัน (inverse Laplace transform)** ของ $f(t)$ เขียนแทนด้วย $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$ เมื่อ $s > 0$
2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$ เมื่อ $s > a$
3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+b^2}\right\} = \cos bt$ เมื่อ $s > 0$
4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{s^2+b^2}\right\} = \sin bt$ เมื่อ $s > 0$
5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$ เมื่อ $s > 0, n \in \mathbb{N}$
6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}\right\} = t^x$ เมื่อ $s > 0, x > -1$

แบบฝึกหัด 8.1

1. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1.1 \quad f(t) = 2x + 1$$

$$1.2 \quad f(t) = at^2$$

$$1.3 \quad f(t) = \sin 7t$$

$$1.4 \quad f(t) = \cos(-3t)$$

$$1.5 \quad f(t) = e^{-5t}$$

$$1.6 \quad f(t) = t^6$$

$$1.7 \quad f(t) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } 0 < t < 2 \\ t & \text{เมื่อ } t > 2 \end{cases}$$

$$1.8 \quad f(t) = \begin{cases} t & \text{เมื่อ } 0 < t < 3 \\ 2 & \text{เมื่อ } t > 3 \end{cases}$$

$$1.9 \quad f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{เมื่อ } 0 < t < \pi \\ \sin t & \text{เมื่อ } t > \pi \end{cases}$$

$$1.10 \quad f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{เมื่อ } 0 < t < 5 \\ 0 & \text{เมื่อ } t > 5 \end{cases}$$

2. จงแสดงว่า $f(t) = e^{t^3}$ ไม่มีผลการแปลงลาปลาซ

3. จงแสดงว่า $f(t) = t^x$ เป็นอันดับเลขชี้กำลัง ทุกจำนวนจริง x

4. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันของชั้นเอ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ และ k เป็นจำนวนจริง

$$4.1 \quad \sin kt$$

$$4.4 \quad t^n \sin kt$$

$$4.2 \quad \cos kt$$

$$4.5 \quad \frac{\cos kt}{t}$$

$$4.3 \quad t^n \cos kt$$

$$4.6 \quad \frac{\sin kt}{t}$$

8.2 สมบัติของผลการแปลงลาปลาซ

1. สมบัติเชิงเส้น (Linearity)

ทฤษฎีบท 8.2.1 ให้ a, b เป็นค่าคงตัว กำหนดให้ $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาผลการแปลงลาปลาซได้โดยที่ $\mathcal{L}\{f(t)\}$ และ $\mathcal{L}\{g(t)\}$ เมื่อ $s > \alpha$ และ $s > \beta$ ตามลำดับ แล้ว

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} \quad \text{เมื่อ } s > \max\{\alpha, \beta\}$$

เรียกสมบัตินี้ว่า **สมบัติเชิงเส้น** หรือกล่าวได้ว่า $\mathcal{L}$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น (linear operator)

ตัวอย่าง 8.2.2 จงหา $\mathcal{L}\{2 + t + 2t^2 + \sqrt{t} - 3\cos 3t + 2\sin 5t + e^{-2t}\}$

ตัวอย่าง 8.2.3 จงหาผลการแปลงลาปลาซ

1. $\mathcal{L}\{\cos^2 2t\}$

3. $\mathcal{L}\{\sin^3 3t\}$

2. $\mathcal{L}\{\cos 3t \sin 2t\}$

4. $\mathcal{L}\{\cos^4 t\}$

ตัวอย่าง 8.2.4 นิยาม $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ และ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ จงหา

1. $\mathcal{L}\{\cosh bt\}$
2. $\mathcal{L}\{\sinh bt\}$

ทฤษฎีบท 8.2.5 ให้ a, b เป็นค่าคงตัว กำหนดให้ $F(s)$ และ $G(s)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาผล
การแปลงลาปลาซผกผันได้ แล้ว

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

หรือกล่าวได้ว่า $\mathcal{L}^{-1}$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

ตัวอย่าง 8.2.6 จงหา

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$
4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{4s^2 + 9}\right\}$

2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\frac{3}{2}}\right\}$
5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s + 1}\right\}$

3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2 + 16}\right\}$
6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - 3s}\right\}$

ตัวอย่าง 8.2.7 จงหา

1. $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 - 1} \right\}$

2. $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^4 - 1} \right\}$

3. $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s^2 - 3s + 2}{(s + 2)(s^2 + 4)} \right\}$

2. สมบัติเชิงการเลื่อน (Shifting)

ทฤษฎีบท 8.2.8 ทฤษฎีบทการเลื่อนบทที่หนึ่ง (The first shifting theorem)

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีผลการแปลงลาปลาซคือ $F(s)$ และ โดยที่ $s > \alpha$ เมื่อ α เป็นค่าคงตัวแล้ว

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s)|_{s \rightarrow s-a} = F(s-a) \quad \text{เมื่อ } s > \alpha + a$$

ตัวอย่าง 8.2.9 จงหาผลการแปลงลาปลาซ

1. $\mathcal{L}\{e^{3t}t^4\}$

3. $\mathcal{L}\{e^{5t}\sin 2t\}$

2. $\mathcal{L}\{e^{-t}\cos 3t\}$

4. $\mathcal{L}\{e^{2t}\cos^2 t\}$

ตัวอย่าง 8.2.10 จงหาผลการแปลงลาปลาซ

1. $\mathcal{L}\{e^{at}\cosh bt\}$

2. $\mathcal{L}\{e^{at}\sinh bt\}$

ทฤษฎีบท 8.2.11 ให้ $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ แล้ว

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)|_{s \rightarrow s-a}\} = e^{at}f(t)$$

ตัวอย่าง 8.2.12 จงหา

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\}$

3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2+9}\right\}$

2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+4}\right\}$

4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2+4s+9}\right\}$

ตัวอย่าง 8.2.13 จงหา

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s+1}\right\}$

2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-6s+13}\right\}$

3. สมบัติการคูณด้วย t^n

ทฤษฎีบท 8.2.14 สมมติว่า $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ แล้ว

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad \text{เมื่อ } n \in \mathbb{N}$$

ตัวอย่าง 8.2.15 จงหาผลการแปลงลาปลาซ

1. $\mathcal{L}\{e^{3t}t^4\}$

3. $\mathcal{L}\{t^2 \sin 2t\}$

2. $\mathcal{L}\{t \cos 3t\}$

4. $\mathcal{L}\{t^3 \cos^2 t\}$

ตัวอย่าง 8.2.16 ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงหาผลการแปลงลาปลาซ

1. $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}$

2. $\mathcal{L}\{t^n \sin bt\}$

ทฤษฎีบท 8.2.17 ให้ $P(t)$ เป็นพหุนาม และ $D = \frac{d}{ds}$ แล้ว

$$\mathcal{L}\{P(t)f(t)\} = P(-D)F(s)$$

โดยที่ $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

ตัวอย่าง 8.2.18 จงหา

$$1. \mathcal{L}\{(1+t-t^2)e^t\}$$

$$2. \mathcal{L}\{(t^3 - 2t - 4)\cos 2t\}$$

$$3. \mathcal{L}\{(t^5 + t^2 - t)\sin 3t\}$$

$$4. \mathcal{L}\{(1+t+t^2)te^t \cosh 2t\}$$

ทฤษฎีบท 8.2.19 ให้ $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ แล้ว

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)\right\} = t^n f(t)$$

ตัวอย่าง 8.2.20 จงหา

$$1. \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\}$$

$$2. \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$$

ตัวอย่าง 8.2.21 จงหา $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \ln \left(1 + \frac{c^2}{s^2} \right) \right\}$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 8.2.22 จงหา $\int_0^\infty te^{-2t} \sin t \, dt$ ใช้เสนอแนะ $F(s) = \mathcal{L}\{t \sin t\}$ เมื่อ $s = 2$

4. ผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 8.2.23 ถ้า $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0, \infty)$ และเป็นอันดับเลขชี้กำลัง และถ้า $f^{(n)}(t)$ เป็นฟังก์ชันเอ แล้ว

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

และกรณีทั่วไปคือ

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

ตัวอย่าง 8.2.24 จงหา $\mathcal{L}\{\cos^2 t\}$ โดยใช้ $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ เมื่อ $f(t) = \cos^2 t$

ตัวอย่าง 8.2.25 จงหาผลเฉลยของของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

ตัวอย่าง 8.2.26 จงหาสมการการเคลื่อนที่ $x(t)$ กับเวลา t ของมวลสปริงที่แขวนไว้ในแนวดิ่ง โดยมีปลายด้านหนึ่งติดกับเพดาน ซึ่งสอดคล้อง

$$x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = 0$$

เมื่อกำหนดให้ $x(0) = 2$ และ $x'(0) = -4$

ตัวอย่าง 8.2.27 จงหาผลเฉลยของของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' + 4y = \cos 2t \quad \text{เมื่อ} \quad y(0) = 1, y'(0) = -6$$

ตัวอย่าง 8.2.28 จงหาผลเฉลยของของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' + 2y' - 8y = e^t \quad \text{เมื่อ} \quad y(0) = 1, y'(0) = 4$$

ตัวอย่าง 8.2.29 จงหาผลเฉลยของของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' + y = 2t \quad \text{เมื่อ} \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{2}$$

5. ผลการแปลงลาปลาซของปริพันธ์

ทฤษฎีบท 8.2.30 ถ้า $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ จะได้ว่า

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(x) dx\right\} = \frac{1}{s}F(s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(x) dx$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x) dx\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

ในกรณีลาปลาซผกผันคือ

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}_{t \rightarrow x} dx$$

ตัวอย่าง 8.2.31 จงหา $\mathcal{L}\left\{\int_0^t x \cos 2x dx\right\}$

ตัวอย่าง 8.2.32 จงหา $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^x \sin x dx\right\}$

ตัวอย่าง 8.2.33 จงหา $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right\}$

ตัวอย่าง 8.2.34 จงหา $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^4 - s^2} \right\}$

6. ผลการแปลงลาปลาซของ $\frac{f(t)}{t}$

ทฤษฎีบท 8.2.35 ถ้า $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ และ $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ หาค่าได้ แล้วจะได้ว่า

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(r) dr$$

ในกรณีลาปลาซผกผันคือ

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(r) dr\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

ตัวอย่าง 8.2.36 จงหา

1. $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$

2. $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$

3. $\int_0^\infty e^{-t} \frac{\sin t}{t} dt$

ตัวอย่าง 8.2.37 จงหา $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + 1)^2} \right\}$

โดยให้ $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$ แล้วพิจารณา $\mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}$

แบบฝึกหัด 8.2

1. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1.1 \quad f(t) = \cos(3t + 4)$$

$$1.2 \quad f(t) = 3te^t$$

$$1.3 \quad f(t) = e^{3x-1} - 3$$

$$1.4 \quad f(t) = e^{-t}(t^3 - 2)$$

$$1.5 \quad f(t) = \sin^3 t$$

$$1.6 \quad f(t) = (t \cos t)^3$$

$$1.7 \quad f(t) = \sin 4 \cos 6t$$

$$1.8 \quad f(t) = \sin^2 3t \cos^3 5t$$

$$1.9 \quad f(t) = e^{2t}(\cos t + \sin t)$$

$$1.10 \quad f(t) = \frac{3}{2}e^{-t}$$

$$1.11 \quad f(t) = te^t \sin t$$

$$1.12 \quad f(t) = (1 + t + 2t^2)e^{-3t}$$

$$1.13 \quad f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}$$

$$1.14 \quad f(t) = 2e^{4t} - 3 \sin t \cos 2t$$

$$1.15 \quad f(t) = e^{4t}t^2$$

$$1.16 \quad f(t) = \int_0^t e^{3x} \sin 2x \, dx$$

$$1.17 \quad f(t) = \int_0^t x^3 \cos 2x \, dx$$

$$1.18 \quad f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}$$

$$1.19 \quad f(t) = \frac{1 - e^t}{t}$$

$$1.20 \quad f(t) = \frac{e^t \sin 2t}{t}$$

2. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$2.1 \quad F(s) = \frac{1}{(1+s)^2}$$

$$2.2 \quad F(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$2.3 \quad F(s) = \frac{s}{(1+s)^2}$$

$$2.4 \quad F(s) = \frac{3}{s^2 + 4s + 9}$$

$$2.5 \quad F(s) = \frac{s+1}{(9s^2 + 6s + 5)}$$

$$2.6 \quad F(s) = \frac{s^2 + 2s - 2}{s^2(s-1)}$$

$$2.7 \quad F(s) = \frac{2s}{(s^2 - 4)^2}$$

$$2.8 \quad F(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)}$$

$$2.9 \quad F(s) = \frac{s+12}{s^2 + 4s}$$

$$2.10 \quad F(s) = \frac{3s^2 - 2s - 1}{(s-3)(s^2 + 1)}$$

$$2.11 \quad F(s) = \frac{s^3 + 3s^2 - s - 3}{(s^2 + 2s + 5)^2}$$

$$2.12 \quad F(s) = \frac{s^2 - 4}{(s^2 + 4)^2}$$

$$2.13 \quad F(s) = \arctan \left(\frac{2}{s+3} \right)$$

$$2.14 \quad F(s) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{s^2} \right)$$

3. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นของ

$$3.1 \quad y'' - 4y = e^{-t} \cos t$$

$$: y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$3.2 \quad y'' + 7y' + 10y = 4te^{-3t}$$

$$: y(0) = 0, y'(0) = -1$$

$$3.3 \quad y'' + y = e^{-t} \sinh 2t$$

$$: y(0) = 0, y'(0) = 1$$

$$3.4 \quad y'' - 6y' + 9y = 6t^2 e^{3t}$$

$$: y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$3.5 \quad y'' + 2y' + y = f(t)$$

$$: y(0) = 0, y'(0) = 0$$

8.3 ทฤษฎีบทสังวัตนาการ

บทนิยาม 8.3.1 ให้ $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วงบนช่วง $[0, T]$ ใด ๆ และเป็นอันดับเลขชี้กำลัง **สังวัตนาการ (convolution)** ของฟังก์ชัน $f(t)$ และ $g(t)$ เขียนแทนด้วย $f(t) * g(t)$ นิยามโดย

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x)g(t-x) dx$$

ข้อสังเกต $f * g = g * f$

ตัวอย่าง 8.3.2 จงหาสังวัตนาการ

1. $e^t * \sin t$

2. $t * e^t$

3. $t * \sin t$

ตัวอย่าง 8.3.3 จงหา

1. $\mathcal{L}\{e^t * \sin t\}$

2. $\mathcal{L}\{t * e^t\}$

3. $\mathcal{L}\{t * \sin t\}$

ทฤษฎีบท 8.3.4 ทฤษฎีบทสังวัตนาการ

ให้ $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วงบนช่วง $[0, T]$ ใด ๆ และเป็นอันดับเลขชี้กำลัง ถ้า $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ และ $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ แล้วจะได้ว่า

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$

และลาปลาซผกผันคือ

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} * \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = f(t) * g(t)$$

ตัวอย่าง 8.3.5 จงหา $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\}$

ตัวอย่าง 8.3.6 จงหา $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+4)^2}\right\}$

แบบฝึกหัด 8.3

1. จงหาสังวัตนาการ

1.1 $t^2 * \cos t$

1.4 $e^{at} * \cos bt$

1.2 $\cos^2 t * e^t$

1.5 $t^3 * e^{-3t}$

1.3 $t * \sin 3t$

1.6 $\sinh t * t$

2. จงหาผลการแปลงลาปลาซต่อไปนี้

2.1 $\mathcal{L}\{t^2 * \cos t\}$

2.5 $\mathcal{L}\{t^3 * e^{-3t}\}$

2.2 $\mathcal{L}\{\cos^2 t * e^t\}$

2.6 $\mathcal{L}\{\sinh t * t\}$

2.3 $\mathcal{L}\{t * \sin 3t\}$

2.7 $\mathcal{L}\{\sin t * \sin t\}$

2.4 $\mathcal{L}\{e^{at} * \cos bt\}$

2.8 $\mathcal{L}\{\cos t * \cos t\}$

3. จงหาผลของการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้สังวัตนาการ

3.1 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$

3.2 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}$

3.3 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)^2}\right\}$

3.4 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$

8.4 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathcal{L}\{D^2x\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) \text{ และ } \mathcal{L}\{Dx\} = sX(s) - x(0)$$

จากนั้นระบบสมการจะอยู่ในรูปฟังก์ชัน s แล้วแก้ระบบสมการเพื่อหา $X(s)$ และ $Y(s)$ สุดท้ายหาการแปลงลาปลาซผกผันจะได้ผลเฉลยของระบบสมการดังกล่าว

ตัวอย่าง 8.4.1 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$(D^2 + 2D)x + 5y = 0$$

$$Dx - (D - 2)y = 0$$

เมื่อ $x(0) = x'(0) = 0$ และ $y(0) = 1$

ตัวอย่าง 8.4.2 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$(D - 1)x + (D + 2)y = \sin t$$

$$(D + 1)x + Dy = \cos t$$

เมื่อ $x(0) = 0$ และ $y(0) = -\frac{1}{2}$

แบบฝึกหัด 8.4

จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases} \quad : x(0) = 0, y(0) = 1$$
2.
$$\begin{cases} (D^2 + 1)x + 4(D - 1)y = 4e^t \\ (D - 1)x + (D + 9)y = 0 \end{cases} \quad : x(0) = x'(0) = 0, y(0) = \frac{1}{2}$$
3.
$$\begin{cases} x'' - x + y' = t \\ -2x' + y'' - 4y = -2 \end{cases} \quad : x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$$
4.
$$\begin{cases} (D^2 + 2)x - Dy = 2t + 5 \\ (D - 1)x + (D + 1)y = -2t - 1 \end{cases} \quad : x(0) = 3, x'(0) = 0, y(0) = -3$$
5.
$$\begin{cases} 2x' + 2x + y' - y = 3t \\ x' + x + y' + y = 1 \end{cases} \quad : x(0) = 1, y(0) = 3$$
6.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} \quad : x(0) = 2, y(0) = 3$$
7.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 8y \\ \frac{dy}{dt} = x + 6y \end{cases} \quad : x(0) = 4, y(0) = 1$$
8.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases} \quad : x(0) = 1, y(0) = z(0) = 0$$
9.
$$\begin{cases} x'' + y' - y = 0 \\ 2x' - x + z' - z = 0 \\ x' + 3x + y' - 4y + 3z = 0 \end{cases} \quad : x(0) = 1, x'(0) = 1, y(0) = z(0) = 0$$

ตารางผลการแปลงลาปลาซ

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
t^x เมื่อ $x > -1$	$\frac{\Gamma(x)}{s^{x+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$\cosh bt$	$\frac{s}{s^2 - b^2}$
$\sinh bt$	$\frac{b}{s^2 - b^2}$
$t \cos bt$	$\frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$
$t \sin bt$	$\frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$
$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d}{ds^n} F(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(r) dr$
$\int_0^t f(x) dx$	$\frac{F(s)}{s}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$

บรรณานุกรม

วิมลรัตน์ งามอร่ามวรารุง. (2559). **สมการเชิงอนุพันธ์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

พรชัย สาตราหา. (2550). **สมการเชิงอนุพันธ์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สำเร็จ ชื่นรังสิกุล. (2559). **สมการเชิงอนุพันธ์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ประวัติผู้เขียน



นายธนัชศ จำปาวาย

- ปริญญาเอก วิทยาศาสตร์ดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2557
Ph.D. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2014
- ปริญญาโท วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2552
M.Sc. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2009
- ปริญญาตรี วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์, เกียรตินิยมอันดับสอง), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549
B.Sc. (Mathematics, 2nd class honours), Chulalongkorn University, 2006
- ปัจจุบันดำรงตำแหน่งผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

Email: thanatyod_ja@ssru.ac.th

Office: 1145

Facebook: www.facebook.com/Jampawai

Block: www.eledu.ssru.ac.th/thanatyod_ja

ผลงานทางวิชาการ

1. เอกสารประกอบการสอนวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู, 2559
2. ตำราวิชาทฤษฎีจำนวน, 2559
3. หนังสือความจริงที่ต้องพิสูจน์, 2560