คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 10
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ริงย่อย และไอดีล และฟังก์ชันสมสัณฐานของริง **สัปดาห์ที่** 11 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงตรวจสอบว่า I ต่อไปนี้เป็น **ริงย่อย (subring)** หรือ **ไอดีล (ideal)** ของ R หรือไม่

   (a) $I = \{(0,x) : x \in \mathbb{Z}\}$ และ $R = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
   วิธีทำ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$(0,x)-(0,y) = (0,x-y) \in I$$
$$(0,x)\cdot(0,y) = (0,xy) \in I$$

   ดังนั้น I เป็นริงย่อยของ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
   ให้ $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ และ $(0,x) \in I$ จะได้ว่า

$$(a,b)\cdot(0,x) = (0,bx) \in S$$
$$(0,x)\cdot(a,b) = (0,xb) \in S$$

   ดังนั้น I เป็นไอดีลของ R

   (b) $I = \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0\end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\}$ และ $R = M_{22}(\mathbb{R})$
   วิธีทำ ให้ $\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0\end{bmatrix}$ เป็นสมมาชิกใน I จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-a & 0 \\ y-b & 0\end{bmatrix} \in I$$
$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa & 0 \\ yb & 0\end{bmatrix} \in I$$

   ดังนั้น I เป็นริงย่อยของ $M_{22}(\mathbb{R})$
   ให้ $\begin{bmatrix} x & z \\ y & w\end{bmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R})$ และ $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0\end{bmatrix} \in I$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x & z \\ y & w\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa+zb & 0 \\ ya+wb & 0\end{bmatrix} \in I$$

   ดังนั้น I เป็นไอดีลซ้ายของ $M_{22}(\mathbb{R})$ แต่

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix} \notin I$$

   นั่นคือ I เป็นไอดีลขวาของ $M_{22}(\mathbb{R})$ ดังนั้น I เป็นไอดีลของ $M_{22}(\mathbb{R})$

(c) $I = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & w \end{bmatrix} : x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$ และ $R = M_{33}(\mathbb{R})$

วิธีทำ ให้ $\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & w \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน I จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a & 0 & y+b \\ 0 & 0 & 0 \\ z+c & 0 & w+d \end{bmatrix} \in I$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa+yc & 0 & xb+yd \\ 0 & 0 & 0 \\ za+wc & 0 & zb+wd \end{bmatrix} \in I$$

ดังนั้น I เป็นริงย่อยของ $M_{33}(\mathbb{R})$
จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \notin I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \notin I$$

นั่นคือ I ไม่เป็นไอดีลขวา และไอดีลซ้าย $M_{33}(\mathbb{R})$ ดังนั้น I ไม่เป็นไอดีลของ $M_{33}(\mathbb{R})$

2. ให้ I, J, K เป็นไอดีลของริง R โดยที่ I เป็นเซตย่อยของ J และ K จงพิสูจน์ว่า

$$K/I = J/I \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad K = J$$

บทพิสูจน์ . ให้ I, J, K เป็นไอดีลของริง R โดยที่ I เป็นเซตย่อยของ J และ K
ถ้า $K = J$ เห็นได้ชัดว่า $K/I = J/I$ ในทางกลับกันสมมติว่า $K/I = J/I$ ให้ $a \in K$ จะได้ว่า $I + a \in K/I$ ดังนั้นมี $b \in J$ ซึ่ง $I + a = I + b$ แล้ว $a - b \in I \subseteq J$ จะได้ว่า

$$I + a = (I + b) + (I + (a - b)) \in J/I$$

ดังนั้น $a \in J$ นั่นคือ $K \subseteq J$ การพิสูจน์ $J \subseteq K$ ในทำนองเดียวกัน ดังนั้น $K = J$ □

3. ให้ R และ S เป็นริง โดยที่ φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง จาก R ไป S จงแสดงว่า

(a) Ker(φ) เป็นริงย่อยของ R

บทพิสูจน์ . ให้ $a, b \in \text{Ker}(\varphi)$ จะได้ว่า $\varphi(a) = 0_S$ และ $\varphi(b) = 0_S$ แล้ว

$$\varphi(a-b) = \varphi(a+(-b)) = \varphi(a) + \varphi(-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = 0_S - 0_S = 0_S$$
$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 0_S \cdot 0_S = 0_S$$

ดังนั้น $a - b \in \text{Ker}(\varphi)$ และ $ab \in \text{Ker}(\varphi)$ ฉะนั้น Ker(φ) เป็นริงย่อยของ R □

(b) Ran(φ) เป็นริงย่อยของ S

บทพิสูจน์. ให้ $a, b \in \text{Ran}(\varphi)$ จะได้ว่ามี $x, y \in R$ ซึ่ง $\varphi(x) = a$ และ $\varphi(y) = b$ แล้ว

$$a - b = \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y)$$
$$ab = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$$

ดังนั้น $a - b \in \text{Ran}(\varphi)$ และ $ab \in \text{Ran}(\varphi)$ ฉะนั้น Ran(φ) เป็นริงย่อยของ S □

4. ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{12}$ นิยามโดย $\varphi(x) = \overline{4x}$ จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสันฐานของริงหรือไม่
วิธีทำ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\varphi(x + y) = \overline{4(x + y)} = \overline{4x} + \overline{4y} = \varphi(x) + \varphi(y)$$
$$\varphi(xy) = \overline{4(xy)} = \overline{16xy} = \overline{4x} \cdot \overline{4y} = \varphi(x)\varphi(y)$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสันฐานของริง

5. ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to M_{22}(\mathbb{Z}_6)$ นิยามโดย

$$\varphi(a) = \begin{bmatrix} \overline{3a} & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{bmatrix}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง (ring homomorphism) หรือไม่
วิธีทำ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(a + b) &= \begin{bmatrix} \overline{3(a + b)} & 0 \\ 0 & \overline{a + b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{3a + 3b} & 0 \\ 0 & \overline{a + b} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \overline{3a} + \overline{3b} & 0 \\ 0 & \overline{a} + \overline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{3a} & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{3b} & 0 \\ 0 & \overline{b} \end{bmatrix} = \varphi(a) + \varphi(b) \\
\varphi(ab) &= \begin{bmatrix} \overline{3(ab)} & 0 \\ 0 & \overline{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{9ab} & 0 \\ 0 & \overline{ab} \end{bmatrix} \qquad \text{เนื่องจาก } \overline{3} = \overline{9} \text{ ใน } \mathbb{Z}_6 \\
&= \begin{bmatrix} \overline{3a} \cdot \overline{3b} & 0 \\ 0 & \overline{a} \cdot \overline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{3a} & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{3b} & 0 \\ 0 & \overline{b} \end{bmatrix} = \varphi(a)\varphi(b)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง

6. ให้ I และ J เป็นไอดีลของริง R และ $\varphi : R \to (R/I) \times (R/J)$ นิยามโดย

$$\varphi(r) = (r + I, r + J) \quad \text{เมื่อ } r \in R$$

จงแสดงว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง (ring homomorphism)

บทพิสูจน์. ให้ $a, b \in R$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(a + b) &= ((a + b) + I, (a + b) + J) \\
&= ((a + I) + (b + I), (a + J) + (b + J)) \\
&= (a + I, a + J) + (b + I, b + J) \\
&= \varphi(a) + \varphi(b) \\
\varphi(ab) &= ((ab) + I, (ab) + J) \\
&= ((a + I)(b + I), (a + J)(b + J)) \\
&= (a + I, a + J)(b + I, b + J) \\
&= \varphi(a)\varphi(b)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง □