คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 14
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ริงพหุนาม **สัปดาห์ที่** 15 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงตรวจสอบว่าพหุนามต่อไปนี้ **ลดทอนไม่ได้ (irreducible)** หรือไม่

(a) $x^{101} - 1$ ใน $\mathbb{R}[x]$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$x^{101} - 1 = (x-1)(x^{100} + x^{99} + x^{98} + \cdots + x + 1)$$

ดังนั้น $x^{101} - 1$ ลดทอนได้ใน $\mathbb{R}[x]$

(b) $x^2 + 2x + 2$ ใน $\mathbb{Z}[x]$

วิธีทำ สมมติว่ามี $a, b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง

$$x^2 + 2x + 2 = (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

ดังนั้น $ab = 2$ จะได้ว่า

a	b	$a+b$
1	2	3
2	1	3
-1	-2	-3
-2	-1	-3

นั่นคือ $a+b \neq 2$ เกิดข้อขัดแย้งกับ $a+b=2$ ดังนั้น x^2+2x+2 ลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}[x]$

(c) $x^2 + x + \bar{4}$ ใน $\mathbb{Z}_{11}[x]$

วิธีทำ สมมติว่ามี $a, b \in \mathbb{Z}_{11}$ ซึ่ง

$$x^2 + x + \bar{4} = (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

ดังนั้น $ab = \bar{4}$ จะได้ว่า

a	b	$a+b$
$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{7}$
$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$
$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$

นั่นคือ $a+b \neq \bar{1}$ เกิดข้อขัดแย้งกับ $a+b=\bar{1}$ ดังนั้น $x^2+x+\bar{4}$ ลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}_{11}[x]$

2. จงเขียนสมาชิกทั้งหมดของพหุนาม ระดับขั้น (degree) ไม่เกิน 3 ใน $\mathbb{Z}_3[x]$

วิธีทำ ให้ $ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{Z}_3[x]$ ดังนั้น

a	b	c	d
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

a	b	c	d
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

a	b	c	d
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

a	b	c	d
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

a	b	c	d
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

a	b	c	d
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

a	b	c	d
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

a	b	c	d
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

a	b	c	d
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

มีทั้งหมด $81 - 1 = 80$ ตัว

3. จงยกตัวอย่างฟิลด์ที่มีสมาชิก 49 ตัว

วิธีทำ พิจารณา $x^2+\bar{1}\in\mathbb{Z}_7[x]$
สมมติว่ามี $a,b\in\mathbb{Z}_7$ ซึ่ง

$$x^2+\bar{1}=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

ดังนั้น $ab=\bar{1}$ จะได้ว่า

a	b	$a+b$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$

นั่นคือ $a+b\neq\bar{0}$ เกิดข้อขัดแย้งกับ $a+b=\bar{0}$ ดังนั้น $x^2+\bar{4}$ ลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}_7[x]$
จะได้ว่า $\mathbb{Z}_7[x]/\langle x^2+\bar{1}\rangle$ เป็นฟิลด์ที่มีสมาชิก $7^2=49$ ตัว

4. จงยกตัวอย่างฟิลด์ที่มีสมาชิก 125 ตัว

วิธีทำ พิจารณา $x^3+x+\bar{1}\in\mathbb{Z}_5[x]$
สมมติว่ามี $a,b,c\in\mathbb{Z}_5$ ซึ่ง

$$x^3+x+\bar{1}=(x+a)(x+b)(x+c) \text{ หรือ } x^3+x+\bar{1}=(x+a)(x^2+bx+c)$$

กรณี $x^3+x+\bar{1}=(x+a)(x+b)(x+c)$

$$x^3+x+\bar{1}=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$$

ดังนั้น $abc=\bar{1}$ จะได้ว่า

a	b	c	$a+b+c$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$

นั่นคือ $a+b+c\neq\bar{0}$ เกิดข้อขัดแย้งกับ $a+b+c=\bar{0}$ ดังนั้น $x^3+x+\bar{1}$ ลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}_5[x]$
จะได้ว่า $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^3+x+\bar{1}\rangle$ เป็นฟิลด์ที่มีสมาชิก $5^3=125$ ตัว

5. ใน $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$ จงหา

(a) ตัวผกผันของ $x+\langle x^2+1\rangle$

วิธีทำ ให้ $a,b\in\mathbb{R}$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}(ax+b+\left\langle x^2+1\right\rangle)(x+\left\langle x^2+1\right\rangle)&=1+\left\langle x^2+1\right\rangle\\ (ax+b)x+\left\langle x^2+1\right\rangle&=1+\left\langle x^2+1\right\rangle\\ ax^2+bx+\left\langle x^2+1\right\rangle&=1+\left\langle x^2+1\right\rangle\\ a(x^2+1)-a+bx+\left\langle x^2+1\right\rangle&=1+\left\langle x^2+1\right\rangle\\ bx-a+\left\langle x^2+1\right\rangle&=1+\left\langle x^2+1\right\rangle\end{aligned}$$

จะได้ว่า $b=0,a=-1$ ดังนั้น

$$-x+\langle x^2+1\rangle \text{ เป็นตัวผกผันของ } x+\langle x^2+1\rangle \text{ ใน } \mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$$

(b) ตัวผกผันของ $x+2+\langle x^2+1\rangle$

วิธีทำ ให้ $a,b\in\mathbb{R}$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}
(ax+b+\left\langle x^2+1\right\rangle)(x+2+\left\langle x^2+1\right\rangle) &= 1+\left\langle x^2+1\right\rangle \\
(ax+b)(x+2)+\left\langle x^2+1\right\rangle &= 1+\left\langle x^2+1\right\rangle \\
ax^2+2ax+bx+2b+\left\langle x^2+1\right\rangle &= 1+\left\langle x^2+1\right\rangle \\
a(x^2+1)-a+2ax+bx+2b+\left\langle x^2+1\right\rangle &= 1+\left\langle x^2+1\right\rangle \\
(2a+b)x+2b-a+\left\langle x^2+1\right\rangle &= 1+\left\langle x^2+1\right\rangle
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $2a+b=0$ และ $2b-a=1$ แล้ว $a=-\dfrac{1}{5}$ และ $b=\dfrac{2}{5}$ ดังนั้น

$$-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}+\left\langle x^2+1\right\rangle \text{ เป็นตักผกผันของ } x+2+\langle x^2+1\rangle \text{ ใน } \mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$$

(c) ตัวผกผันของ $2x+1+\langle x^2+1\rangle$

วิธีทำ ให้ $a,b\in\mathbb{R}$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}
(ax+b+\left\langle x^2+1\right\rangle)(x+2+\left\langle x^2+1\right\rangle) &= 1+\left\langle x^2+1\right\rangle \\
(ax+b)(2x+1)+\left\langle x^2+1\right\rangle &= 1+\left\langle x^2+1\right\rangle \\
2ax^2+ax+2bx+b+\left\langle x^2+1\right\rangle &= 1+\left\langle x^2+1\right\rangle \\
2a(x^2+1)-2a+ax+2bx+b+\left\langle x^2+1\right\rangle &= 1+\left\langle x^2+1\right\rangle \\
(a+2b)x+b-2a+\left\langle x^2+1\right\rangle &= 1+\left\langle x^2+1\right\rangle
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $a+2b=0$ และ $b-2a=1$ แล้ว $a=-\dfrac{2}{5}$ และ $b=\dfrac{1}{5}$ ดังนั้น

$$-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}+\left\langle x^2+1\right\rangle \text{ เป็นตักผกผันของ } x+2+\langle x^2+1\rangle \text{ ใน } \mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$$