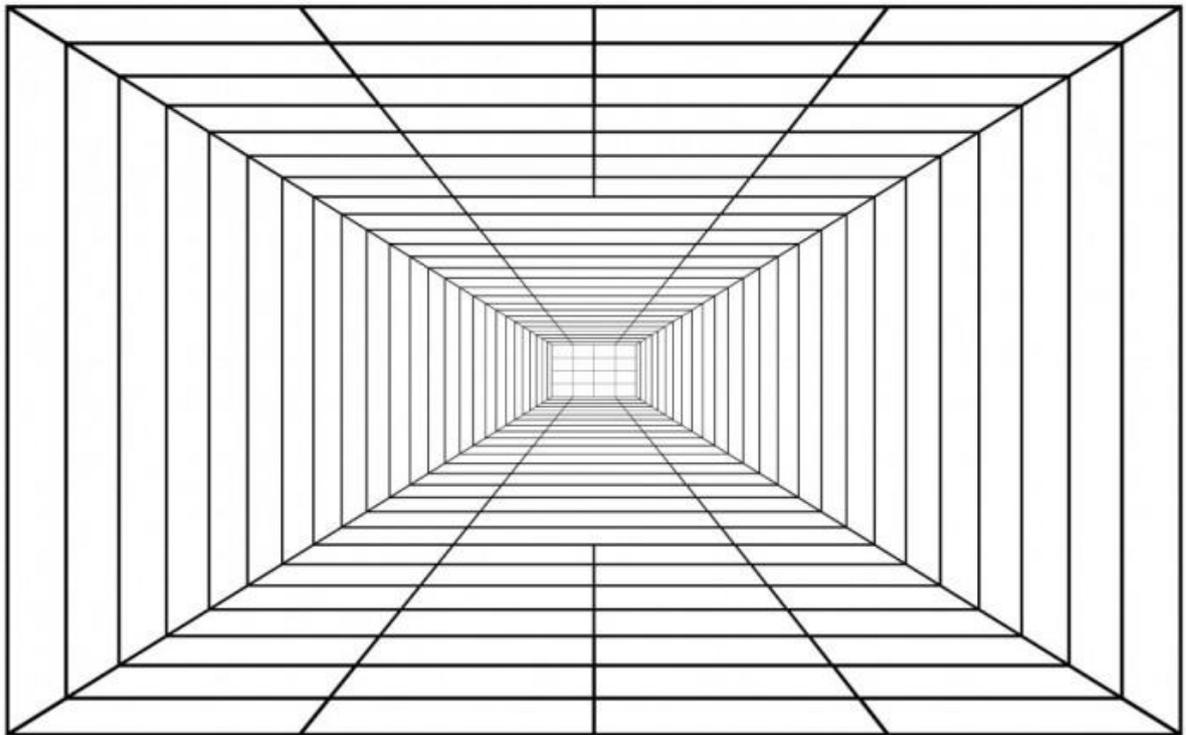


การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา

: หลักการและการนำไปใช้



ผู้ช่วยศาสตราจารย์ตีรวิชช์ ทินประภา

การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา

: หลักการและการนำไปใช้

ตีรวิชัย ทินประภา

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

พ.ศ.2567

## คำนำ

การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา : หลักการและการนำไปใช้เล่มนี้เป็นตำราที่พัฒนามาจากเอกสารประกอบการสอนรายวิชาการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาซึ่งเป็นวิชาบังคับของนักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ ตำราเล่มนี้ได้เขียนจากประสบการณ์การสอน การนิเทศและการมีส่วนร่วมในเขียนหนังสือเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาให้กับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี โดยนำเนื้อหาเรียบเรียงซึ่งจากมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ตำราประกอบไปด้วย 9 บท ดังนี้

บทที่ 1 แนวคิดพื้นฐานของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

บทที่ 2 มโนทัศน์พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวน

บทที่ 3 มโนทัศน์เกี่ยวกับการบวกและการลบ

บทที่ 4 มโนทัศน์เกี่ยวกับการคูณและการหาร

บทที่ 5 มโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วน

บทที่ 6 มโนทัศน์เกี่ยวกับทศนิยมและร้อยละ

บทที่ 7 มโนทัศน์เกี่ยวกับการวัดและเรขาคณิต

บทที่ 8 มโนทัศน์เกี่ยวกับสถิติ

บทที่ 9 การวัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์

สำหรับแต่ละบทจะกล่าวถึงตัวชี้วัดและลำดับการเรียนรู้ที่ครูสามารถนำไปวางแผน มีตัวอย่างการจัดการเรียนรู้ ข้อผิดพลาด มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน และข้อควรระวังในการจัดการเรียนรู้ ซึ่งจะทำให้ครูหรือผู้อ่านมีตัวอย่างในการจัดการเรียนรู้และสามารถนำไปประยุกต์ได้

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้เขียนหนังสือทุกท่านที่ให้ผู้เขียนได้ศึกษา อาจารย์ทุกท่านที่คอยสั่งสอน ครูนิรันดร์ ตัณชัยย์ ครูจิราพร พรายมณี ดร.เบญจมาศ เหล่าขวัญสถิตย์ นางสาวอุษณีย์ วงศ์อำมาตย์ นางสาวกชพร วงศ์สว่างศิริ สมาชิกประชุมในการจัดทำหนังสือเรียนของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่คอยแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและประสบการณ์ต่าง ๆ ครูอรุณพล จันทร์ขุน ครูโมณิกา ชุนเกาะ ที่คอยแลกเปลี่ยนประสบการณ์จริง ครูณัฐวัฒน์ ทองเงา นายพีรวิษ สิงห์ทอง ที่ช่วยคอยจัดตารางและรูป ตลอดจนตรวจสอบคำผิดและสุดท้ายขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี และรองศาสตราจารย์ ดร.ยุวดี ปณระราช ได้ให้คำแนะนำในการเขียนตำราเล่มนี้เป็นอย่างดี หากในหนังสือผิดพลาดประการใด ผู้เรียนขออภัยรับคำติชม

ผู้ช่วยศาสตราจารย์พีรวิษ ทินประภา

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

## สารบัญ

	หน้า	
คำนำ	ก	
สารบัญ	ข	
สารบัญตาราง	จ	
สารบัญภาพ	ฎ	
บทที่		
1	<b>แนวคิดพื้นฐานของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์</b>	1
	ความรู้เกี่ยวกับหลักสูตรในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์	2
	ทฤษฎีจิตวิทยาที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์	11
	การจัดการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจ	17
	การจัดการเรียนรู้ผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	22
	การอภิปรายในห้องเรียน	30
	สรุป	32
2	<b>มโนทัศน์พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวน</b>	35
	การพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับค่าประจำหลัก	37
	การเปรียบเทียบและเรียงลำดับ	43
	ความรู้สึกเชิงจำนวน	45
	ตัวอย่างงานวิจัยเกี่ยวกับความรู้สึกเชิงจำนวน	48
	สรุป	50
3	<b>มโนทัศน์เกี่ยวกับการบวกและการลบ</b>	51
	การพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของการบวกและการลบ	54
	ความสัมพันธ์แบบส่วนย่อย – ส่วนรวม (Part – Whole Relation)	59
	เทคนิคการบวกและการลบ	60
	การนำไปใช้	64
	การบวกและการลบที่ตัวตั้งและผลลัพธ์มากกว่า 100 ด้วยตารางร้อย	67
	ตารางสิบ และตารางหน่วย	
	ตัวอย่างงานวิจัยเกี่ยวกับการบวกและการลบ	78
	สรุป	79

## สารบัญ (ต่อ)

บทที่		หน้า
4	<b>มโนทัศน์เกี่ยวกับการคุณและการทหาร</b>	81
	การพัฒนา มโนทัศน์การคุณ	83
	การพัฒนา มโนทัศน์การทหาร	89
	ตัวอย่างงานวิจัยเกี่ยวกับการคุณและการทหาร	100
	สรุป	102
5	<b>มโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วน</b>	105
	ความหมายเศษส่วนและสัญลักษณ์	107
	แบบจำลองเศษส่วน	108
	เศษส่วนที่มากกว่า 1	114
	การเปรียบเทียบเศษส่วน	116
	การดำเนินการของเศษส่วน	119
	ตัวอย่างงานวิจัยเกี่ยวกับเศษส่วน	130
	สรุป	131
6	<b>มโนทัศน์เกี่ยวกับทศนิยมและร้อยละ</b>	133
	การพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับทศนิยม	135
	การเปรียบเทียบและเรียงลำดับทศนิยม	138
	การดำเนินการทศนิยม	139
	ร้อยละ	142
	ตัวอย่างงานวิจัยเกี่ยวกับทศนิยมและร้อยละ	145
	สรุป	150
7	<b>มโนทัศน์เกี่ยวกับการวัดและเรขาคณิต</b>	151
	การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับเรขาคณิต	154
	การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการวัด	163
	ตัวอย่างงานวิจัยเกี่ยวกับการวัดและเรขาคณิต	179
	สรุป	180

## สารบัญ (ต่อ)

บทที่		หน้า
8	มโนทัศน์เกี่ยวกับสถิติ	181
	การเก็บรวบรวมข้อมูล	185
	การนำเสนอข้อมูล	186
	การวิเคราะห์ข้อมูล	195
	การตีความ	195
	ตัวอย่างงานวิจัยเกี่ยวกับสถิติ	196
	สรุป	197
9	การวัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์	199
	แนวคิดพื้นฐานของการวัดและประเมินผล	200
	เทคนิคในการวัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์	202
	แนวทางการให้คะแนน	208
	สรุป	214
	บรรณานุกรม	217

## สารบัญภาพ

ภาพ	หน้า
1.1 ลำดับการเรียนรู้เศษส่วนในระดับประถมศึกษา	10
1.2 การพัฒนาความเข้าใจผ่านสถานการณ์ด้วยตัวแทนต่าง ๆ	29
2.1 ลำดับการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับจำนวน หลัก และค่าประจำหลักในระดับประถมศึกษา	36
2.2 ลำดับการสอนเรื่องค่าประจำหลัก	38
2.3 ความสัมพันธ์ของการนับครบสิบ หลัก และการเขียน	40
2.4 ความสัมพันธ์ของการนับ การอ่าน และการเขียน	40
2.5 ตารางร้อย ตารางสิบ ตารางหน่วยและความสัมพันธ์	41
2.6 ความสัมพันธ์ของหลักและค่าประจำหลัก	42
2.7 ตัวอย่างการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการเขียนจำนวนในรูปกระจาย	42
2.8 การจัดการเรียนรู้เรื่องการเปรียบเทียบโดยใช้ภาพ	43
3.1 ลำดับการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการบวกและการลบในระดับประถมศึกษา	53
3.2 ตัวอย่างกิจกรรมพัฒนาการบวกและลบจำนวน	64
3.3 ตารางร้อย ตารางสิบ ตารางหน่วยและความสัมพันธ์	68
3.4 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการหาผลบวก $369 + 309$	76
3.5 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการหาผลลบ $203 - 198$	77
4.1 ลำดับการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการคูณและการหารในระดับประถมศึกษา	82
4.2 การหาคำตอบของ $3 \times 5$ ด้วยรูปแบบต่าง ๆ	84
4.3 แสดง $2 \times 9$ และ $9 \times 2$	85
4.4 ตัวอย่างตารางและบัตรช่วยในการจำสูตรคูณ	86
4.5 การหาคำตอบ $3 \times 10$ ด้วยภาพ หรือ เขียนแทนด้วยการบวก	87
4.6 แสดงการหาผลคูณ $8 \times 15$	87
4.7 การหาร $15 \div 3$	89
4.8 การหาคำตอบของ $17 \div 3$ ด้วยภาพ	90
4.9 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของ $243 \times 5$	96
4.10 ตัวอย่างมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของการหาร	97
4.11 การบวก ลบ คูณและหารด้วยวิธีเวทคณิต	99
5.1 ลำดับการเรียนรู้เกี่ยวกับเศษส่วนในระดับประถมศึกษา	106

## สารบัญญภาพ (ต่อ)

ภาพ	หน้า
5.2 ส่วนที่ระบายสีแสดง $\frac{1}{3}$	108
5.3 แนวคิดแบบจำลองพื้นที่	109
5.4 ตัวอย่างแบบจำลองความยาวหรือการวัด	110
5.5 ตัวอย่างแถบกระดาษสำหรับการจัดการเรียนรู้เศษส่วน	110
5.6 ตัวอย่างแบบจำลองกลุ่ม	111
5.7 การแบ่ง 5 หน่วย เป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กัน	114
5.8 การใช้ลูกบาศก์แสดง $\frac{12}{5}$	115
5.9 การแสดง $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ด้วยแบบจำลองพื้นที่	115
5.10 การเปรียบเทียบ $\frac{1}{4}$ กับ $\frac{3}{4}$ ด้วยแบบจำลองต่าง ๆ	116
5.11 เปรียบเทียบ $\frac{3}{7}$ กับ $\frac{3}{4}$ ด้วยแบบจำลองพื้นที่	117
5.12 การแบ่งพื้นที่เป็นส่วนที่เท่ากันและไม่เท่ากันแต่มีรูปร่างที่ต่างกัน	118
5.13 การหาผลบวกของ $\frac{1}{6} + \frac{4}{6}$ และ $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ ด้วยแบบจำลองพื้นที่	121
5.14 การหาผลลบของ $\frac{5}{6} - \frac{1}{6}$ และ $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ ด้วยแบบจำลองพื้นที่	122
5.15 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจากการใช้สื่อ	123
5.16 การหาคำตอบของ 2 ใน 3 ของ 15 โดยใช้แบบจำลองกลุ่ม	124
5.17 การหาผลคูณด้วยวิธีการเลขคณิต	125
5.18 การหา $3\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{4}$ ด้วยแบบจำลองพื้นที่	126
5.19 การหาผลหารของ $\frac{1}{4} \div 3$ ด้วยแบบจำลองพื้นที่	128
5.20 การหาผลหารของ $\frac{5}{3} \div \frac{1}{2}$ ด้วยแบบจำลองพื้นที่	129
6.1 ลำดับการเรียนรู้เกี่ยวกับทศนิยมในระดับประถมศึกษา	134
6.2 ความสัมพันธ์ของส่วน 10 ส่วน 100 และส่วน 1,000	135
6.3 การใช้แบบจำลองพื้นที่แสดงเศษส่วนและทศนิยม	136
6.4 การใช้แบบจำลองความยาว	136
6.5 ตำแหน่งและค่าประจำหลักของทศนิยม	137

## สารบัญญภาพ (ต่อ)

ภาพ	หน้า
6.6 การเปรียบเทียบทศนิยมด้วยแบบจำลองพื้นที่	138
6.7 การบวกทศนิยมด้วยแบบจำลองพื้นที่	140
6.8 การหาการบวกและลบทศนิยมในแนวตั้งและแนวนอน	140
6.9 การหาผลคูณของ $3.7 \times 21.75$	141
6.10 การหาผลหารด้วยการเลื่อนจุด	142
6.11 การหารผลหารของ $0.135 \div 5$	142
6.12 ความสัมพันธ์เศษส่วน ทศนิยม และร้อยละ	144
7.1 ลำดับชั้นความเข้าใจเรขาคณิตตามแนวคิด van Hiele และ Dina van Hiele	155
7.2 ตัวอย่างกิจกรรมในระดับ 0 ตามแนวคิด Van Hiele Model	156
7.3 ตัวอย่างกิจกรรมในระดับ 1 ตามแนวคิด Van Hiele Model	157
7.4 ตัวอย่างกิจกรรมในระดับ 2 ตามแนวคิด Van Hiele Model	158
7.5 ลำดับการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการวัดในระดับประถมศึกษา	165
7.6 ตัวอย่างการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการวัด	166
7.7 ภาพจากงานวิจัยของของ Blume และคณะ	167
7.8 กิจกรรมการหาความยาวรอบรูป	168
7.9 รูปเรขาคณิตที่มีความยาวรูป 12 หน่วยที่แตกต่างกัน	168
7.10 การหาความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก	169
7.11 ลำดับการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับพื้นที่ในระดับประถมศึกษา	169
7.12 การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก	170
7.13 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับความสูงของสามเหลี่ยม	172
7.14 โจทย์ปัญหาและการหาคำตอบเกี่ยวกับเวลา	174
7.15 พื้นฐานทางเรขาคณิต	175
7.16 ไม้ฉาก	175
7.17 การพับกระดาษเป็นมุมฉากเพื่อตรวจสอบมุม	176
7.18 โพรแทรกเตอร์ชนิดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และโพรแทรกเตอร์ชนิดครึ่งวงกลม	177
7.19 ลำดับการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับปริมาตรและความจุ	178
7.20 ตัวอย่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การหาปริมาตรทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก	172

## สารบัญญภาพ (ต่อ)

ภาพ		หน้า
8.1	ลำดับการเรียนรู้เกี่ยวกับสถิติในระดับประถมศึกษา	183
8.2	ตัวอย่างแผนภูมิรูปภาพ	187
8.3	ตารางทางเดียวและตารางสองทาง	188
8.4	การนำเสนอด้วยแผนภูมิแท่งชนิดต่าง ๆ	190
8.5	การนำเสนอด้วยกราฟเส้น	191
8.6	การนำเสนอด้วยแผนภูมิวงกลม	192
8.7	การนำเสนอข้อมูลด้วยอินโฟกราฟิกส์ชนิดต่าง ๆ ที่ปรากฏบนสังคมออนไลน์	188

## สารบัญตาราง

ตาราง		หน้า
1.1	ระยะการเรียนรู้การแก้ปัญหาของนักเรียน	26
1.2	ตัวอย่างคำถามที่ใช้การจัดการเรียนรู้	32
3.1	ความหมายการบวกและตัวอย่างสถานการณ์	54
3.2	ความหมายการลบและตัวอย่างสถานการณ์	56
4.1	ตัวอย่างสถานการณ์เกี่ยวกับการคูณและการหาร	83
5.1	ตัวอย่างสถานการณ์และแบบจำลองเศษส่วน	107
5.2	การพัฒนามโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วนตามแนวคิด Williams	108
7.1	ลักษณะเฉพาะของระดับการคิดเชิงเรขาคณิตตามแนวคิด van Hiele	159
7.2	ลำดับการเรียนรู้ตามแนวคิด Van de Walle และคณะ	164
9.1	ความสัมพันธ์มิติลำดับชั้นทางสติปัญญา นิยาม และตัวอย่างพฤติกรรมใน วัตถุประสงค์	201
9.2	ความสัมพันธ์ระหว่างมิติด้านความรู้กับมิติด้านลำดับชั้นทางสติปัญญา	202
9.3	ประเด็นที่ต้องพิจารณาก่อนนำแบบทดสอบไปใช้	207

## บทที่ 1

แนวคิดพื้นฐานของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เข้าวันจันทร์ในช่วงวิชาคณิตศาสตร์ ครูอรรถพลเดินเข้าไปในห้องเรียน พร้อมทั้งสอบถามถึง การบ้านที่ได้มอบหมายจากชั่วโมงที่แล้ว และได้เฉลยหรืออธิบายข้อที่นักเรียนสงสัยหรือทำไม่ได้ (10 นาที) แล้วอธิบายเนื้อหาใหม่ (20 นาที) พร้อมทั้งให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 5 ข้อ เมื่อใกล้หมด ชั่วโมงได้มอบหมายการบ้านจากหนังสือในข้อ 1-5 จากเหตุการณ์ข้างต้น เป็นเหตุการณ์ที่เจอได้บ่อย ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ แต่คำถามคือการจัดการเรียนรู้แบบนี้สามารถช่วยให้นักเรียนเข้าใจ มโนทัศน์หรือประสบความสำเร็จในการเรียนหรือไม่ สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (The National Council of Teachers of Mathematics) หรือ NCTM (2014) ได้เสนอ องค์ประกอบสำคัญที่ทำให้การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ประสบความสำเร็จไว้ 6 ข้อดังนี้

- ❖ **การสอนและการเรียนรู้** ผลการเรียนรู้ที่ดีของนักเรียนควรมาจากการจัดการเรียนรู้ที่ดีของครู ซึ่งเป็นการจัดการเรียนรู้ที่ดึงดูดให้นักเรียนเรียนรู้ด้วยความหมายผ่านประสบการณ์ของ นักเรียนหรือครู และส่งเสริมให้นักเรียนมีการทำงานหรือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ อย่างมีเหตุผล
- ❖ **การเข้าถึงและเท่าเทียม** การจัดการเรียนรู้ต้องทำให้นักเรียนทุกคนสามารถเข้าถึงเนื้อหา และเข้าถึงการจัดการเรียนรู้ได้อย่างเท่าเทียม ตลอดจนทรัพยากรหรือสิ่งสนับสนุนต่าง ๆ ที่จำเป็นในการเรียนรู้ของนักเรียนให้เต็มศักยภาพสูงสุด
- ❖ **หลักสูตร** การจัดการเรียนรู้ที่ดีต้องมาจากหลักสูตรที่ดี เป็นหลักสูตรที่สามารถเห็น ความก้าวหน้าในการเรียนรู้ของนักเรียน และพัฒนาความเชื่อมโยงระหว่างเนื้อหา คณิตศาสตร์และคณิตศาสตร์ในชีวิตจริง
- ❖ **เครื่องมือและเทคโนโลยี** การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนในปัจจุบันต้องอาศัยเครื่องมือ หรือเทคโนโลยีทางคณิตศาสตร์เพื่อช่วยให้นักเรียนเรียนรู้และทำความเข้าใจคณิตศาสตร์ ให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และสื่อสารการคิดทางคณิตศาสตร์
- ❖ **การประเมินผล** การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ดีต้องมั่นใจได้ว่าจะมีการประเมินผลที่ดี เพราะการประเมินผลนักเรียนเป็นสิ่งสำคัญ เป็นหลักฐานที่ช่วยยืนยันว่านักเรียนมีความรู้ ความสามารถเป็นไปตามจุดประสงค์ เนื้อหา และปฏิบัติได้ตามที่ครูคาดหวัง รวมทั้งครูควรมี กลวิธีการประเมินผลที่ดีที่อาจนำมาปรับปรุงการจัดการเรียนรู้ของตนเองได้อีกด้วย
- ❖ **ความเป็นมืออาชีพ** ในการจัดการเรียนรู้นั้น ครู ผู้ปกครองหรือผู้มีส่วนเกี่ยวข้องถือว่ามีส่วน ในการรับผิดชอบในการเรียนรู้ของนักเรียน ครูควรพัฒนาตนเองให้เติบโตทางวิชาชีพเพื่อให้มี ประสบการณ์ที่ดีในการพัฒนาการจัดการเรียนรู้ต่อไป

เมื่อพิจารณาองค์ประกอบทั้ง 6 ข้อ พบว่าการจัดการเรียนรู้ที่ประสบความสำเร็จนั้นเกิดจาก หลายองค์ประกอบ และเมื่อศึกษางานวิจัยยังพบอีกว่าผู้บริหาร และสภาพแวดล้อมก็มีผลต่อการ

จัดการเรียนรู้อีกด้วย (จรีพร มุณี, 2565; สุพัตรา ชันทอง, 2562) จากสิ่งต่าง ๆ เหล่านี้จะหล่อหลอมให้การจัดการเรียนรู้เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพและประสบความสำเร็จ อย่างไรก็ตามทุกครั้งที่มีการจัดการเรียนรู้จะพบว่าธรรมชาติการเรียนรู้ของนักเรียนแต่ละคนแตกต่างกัน ครูจึงควรบริหารจัดการห้องเรียนเพื่อให้นักเรียนทุกคนสามารถเข้าถึงและเรียนรู้ได้อย่างมีความสุข นำความรู้ที่ได้เรียนรู้ในห้องเรียนไปใช้อย่างมีประสิทธิภาพ และใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อเรียนรู้สิ่งใหม่ เท้าทันกับสังคมที่เปลี่ยนแปลง ตลอดจนเป็นพื้นฐานในการศึกษาต่อขั้นสูงต่อไป

### ความรู้เกี่ยวกับหลักสูตรในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์นั้น ความเข้าใจเกี่ยวกับหลักสูตรที่ใช้อยู่ในปัจจุบันเป็นสิ่งสำคัญ ตั้งแต่ พ.ศ.2544 เป็นต้นมา หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานได้ถูกออกแบบโดยใช้แนวคิดหลักสูตรอิงมาตรฐาน (Standard-based Curriculum) ซึ่งเป็นหลักสูตรที่กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้เป็นเป้าหมายในการพัฒนาคุณภาพนักเรียน และมีการพัฒนาหลักสูตรจนเป็นปัจจุบันนั่นคือ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยกำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ซึ่งเป็นสิ่งที่นักเรียนพึงรู้และปฏิบัติได้เมื่อสำเร็จการศึกษาขั้นพื้นฐาน นอกจากนี้แต่ละชั้นปี (ป.1-ป.6) ได้มีการกำหนดตัวชี้วัด โดยตัวชี้วัดจะระบุสิ่งที่นักเรียนควรรู้และปฏิบัติได้เมื่อสำเร็จการศึกษาในชั้นปีนั้น ๆ รวมทั้งกำหนดคุณลักษณะของนักเรียนในแต่ละระดับชั้น ซึ่งจะสะท้อนถึงคุณภาพนักเรียนตามมาตรฐานการเรียนรู้ (รุ่งนภา นุตราวงศ์, ม.ป.ป.)

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มีการกำหนดเนื้อหาวิชาออกเป็น 8 กลุ่มสาระการเรียนรู้ โดยมีคณิตศาสตร์เป็นหนึ่งในสาระการเรียนรู้ และในปีพุทธศักราช 2560 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์มีการปรับปรุงมาตรฐานและตัวชี้วัด จนปัจจุบันกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ประกอบไปด้วย 3 สาระ ได้แก่ สาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต สาระที่ 2 การวัดและเรขาคณิต และสาระที่ 3 สถิติและความน่าจะเป็น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้ให้อธิบายโมโนทัศน์และตัวชี้วัดของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ประกอบไปด้วย 3 สาระ ได้แก่

**สาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต** เรียนรู้เกี่ยวกับ ระบบจำนวนจริง สมบัติเกี่ยวกับจำนวนจริง การดำเนินการของจำนวน อัตราส่วน ร้อยละ การประมาณค่า การแก้ปัญหาเกี่ยวกับจำนวน การใช้จำนวนในชีวิตจริง แบบรูป ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน เซต ตรรกศาสตร์ นิพจน์ เอกนาม พหุนาม สมการ

ระบบสมการ อสมการ กราฟ ดอกเบี้ยและมูลค่าของเงิน ลำดับและอนุกรม และการนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนและพีชคณิตไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ

**สาระที่ 2 การวัดและเรขาคณิต** เรียนรู้เกี่ยวกับ ความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตร และความจุ เงินและเวลา หน่วยวัดระบบต่าง ๆ การคาดคะเนเกี่ยวกับการวัด อัตราส่วนตรีโกณมิติ รูปเรขาคณิตและสมบัติของรูปเรขาคณิต การนี้ภาพ แบบจำลองทางเรขาคณิต ทฤษฎีบททางเรขาคณิต การแปลงทางเรขาคณิตในเรื่องการเลื่อนขนาน การสะท้อน การหมุน และการนำความรู้เกี่ยวกับการวัดและเรขาคณิตไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ

**สาระที่ 3 สถิติและความน่าจะเป็น** เรียนรู้เกี่ยวกับ การตั้งคำถามทางสถิติ การเก็บรวบรวมข้อมูล การคำนวณค่าสถิติ การนำเสนอและแปลผลสำหรับข้อมูลเชิงคุณภาพและเชิงปริมาณ หลักการนับเบื้องต้น ความน่าจะเป็น การใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นในการอธิบายเหตุการณ์ต่าง ๆ และช่วยในการตัดสินใจ

โดยมีตัวชี้วัดแต่ละสาระในระดับประถมศึกษาปีที่ 1 – 6 ดังนี้

สาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวน การดำเนินการของจำนวน ผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการ สมบัติของการดำเนินการ และนำไปใช้

ชั้น	ตัวชี้วัด
ป.1	<ol style="list-style-type: none"> <li>บอกจำนวนของสิ่งต่าง ๆ แสดงสิ่งต่าง ๆ ตามจำนวนที่กำหนด อ่านและเขียนตัวเลขฮินดูอารบิก ตัวเลขไทยแสดงจำนวนนับไม่เกิน 100 และ 0</li> <li>เปรียบเทียบจำนวนนับไม่เกิน 100 และ 0 โดยใช้เครื่องหมาย <math>=</math> <math>\neq</math> <math>&gt;</math> <math>&lt;</math></li> <li>เรียงลำดับจำนวนนับไม่เกิน 100 และ 0 ตั้งแต่ 3 ถึง 5 จำนวน</li> <li>หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการบวกและประโยคสัญลักษณ์แสดงการลบของจำนวนนับไม่เกิน 100 และ 0</li> <li>แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวกและโจทย์ปัญหาการลบของจำนวนนับไม่เกิน 100 และ 0</li> </ol>
ป.2	<ol style="list-style-type: none"> <li>บอกจำนวนของสิ่งต่าง ๆ แสดงสิ่งต่าง ๆ ตามจำนวนที่กำหนด อ่านและเขียนตัวเลขฮินดูอารบิก ตัวเลขไทย ตัวหนังสือแสดงจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0</li> <li>เปรียบเทียบจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0 โดยใช้เครื่องหมาย <math>=</math> <math>\neq</math> <math>&gt;</math> <math>&lt;</math></li> <li>เรียงลำดับจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0 ตั้งแต่ 3 ถึง 5 จำนวนจากสถานการณ์ต่าง ๆ</li> <li>หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการบวกและประโยคสัญลักษณ์แสดงการลบของจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0</li> </ol>

ชั้น	ตัวชี้วัด
	5. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการคูณของจำนวน 1 หลักกับจำนวนไม่เกิน 2 หลัก 6. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในการหารที่ตัวตั้งไม่เกิน 2 หลัก ตัวหาร 1 หลัก โดยที่ผลหารมี 1 หลัก ทั้งตัวหารลงตัวและหารไม่ลงตัว 7. หาผลลัพธ์การบวก ลบ คูณ หารระคนของจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0 8. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหา 2 ขั้นตอนของจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0
ป.3	1. อ่านและเขียน ตัวเลขฮินดูอารบิก ตัวเลขไทย และตัวหนังสือ แสดงจำนวนนับไม่เกิน 100,000 และ 0 2. เปรียบเทียบและเรียงลำดับจำนวนนับไม่เกิน 100,000 และ 0 จากสถานการณ์ต่าง ๆ 3. บอกร อ่าน และเขียนเศษส่วนแสดงปริมาณสิ่งต่าง ๆ และแสดงสิ่งต่าง ๆ ตามเศษส่วนที่กำหนด 4. เปรียบเทียบเศษส่วนที่ตัวเศษเท่ากันโดยที่ตัวเศษน้อยกว่าหรือเท่ากับตัวส่วน 5. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการบวกและประโยคสัญลักษณ์แสดงการลบของจำนวนนับไม่เกิน 100,000 และ 0 6. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการคูณของจำนวน 1 หลักกับจำนวนไม่เกิน 4 หลัก และจำนวน 2 หลักกับจำนวน 2 หลัก 7. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการหารที่ตั้งไม่เกิน 4 หลัก ตัวหาร 1 หลัก 8. หาผลลัพธ์การบวก ลบ คูณ หารระคนของจำนวนนับไม่เกิน 100,000 และ 0 9. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหา 2 ขั้นตอนของจำนวนนับไม่เกิน 100,000 และ 0 10. หาผลบวกของเศษส่วนที่มีตัวส่วนเท่ากันและผลบวกไม่เกิน 1 และหาผลลบของเศษส่วนที่มีตัวส่วนเท่ากัน 11. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวกเศษส่วนที่มีตัวส่วนเท่ากันและผลบวกไม่เกิน 1 และโจทย์ปัญหาการลบเศษส่วนที่มีตัวส่วนเท่ากัน
ป.4	1. อ่านและเขียนตัวเลขฮินดูอารบิก ตัวเลขไทย และตัวหนังสือแสดงจำนวนนับที่มากกว่า 100,000 2. เปรียบเทียบและเรียงลำดับจำนวนนับที่มากกว่า 100,000 จากสถานการณ์ต่าง ๆ 3. บอกร อ่าน และเขียนเศษส่วน จำนวนคละแสดงปริมาณสิ่งต่าง ๆ และแสดงจำนวนสิ่งต่าง ๆ ตามเศษส่วน จำนวนคละที่กำหนด 4. เปรียบเทียบ เรียงลำดับเศษส่วนและจำนวนคละที่ตัวส่วนตัวหนึ่งเป็นพหุคูณของอีกตัวหนึ่ง 5. อ่านและเขียนทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง แสดงปริมาณของสิ่งต่าง ๆ และแสดงสิ่งต่าง ๆ ตามทศนิยมที่กำหนด 6. เปรียบเทียบและเรียงลำดับทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่งจากสถานการณ์ต่าง ๆ 7. ประเมินผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ การหาร จากสถานการณ์ต่าง ๆ อย่างสมเหตุสมผล

ชั้น	ตัวชี้วัด
	<p>8. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการบวกและประโยคสัญลักษณ์แสดงการลบของจำนวนนับที่มากกว่า 100,000 และ 0</p> <p>9. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการคูณของจำนวนหลายหลัก 2 จำนวน ที่มีผลคูณไม่เกิน 6 หลักและประโยคสัญลักษณ์แสดงการหารที่ตัวตั้งไม่เกิน 6 หลัก ตัวหารไม่เกิน 2 หลัก</p> <p>10. หาผลลัพธ์การบวก ลบ คูณ หารระคนของจำนวนนับ และ 0</p> <p>11. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหา 2 ขั้นตอนของจำนวนนับที่มากกว่า 100,000 และ 0</p> <p>12. สร้างโจทย์ปัญหา 2 ขั้นตอนของจำนวนนับและ 0 พร้อมทั้งหาคำตอบ</p> <p>13. หาผลบวก ผลลบของเศษส่วนและจำนวนคละที่ตัวหนึ่งเป็นพหุคูณของอีกตัวหนึ่ง</p> <p>14. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวกและโจทย์ปัญหาการลบเศษส่วนและจำนวนคละที่ตัวส่วนตัวหนึ่งเป็นพหุคูณของอีกตัวหนึ่ง</p> <p>15. หาผลบวก ผลลบของทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง</p> <p>16. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวก การลบ 2 ขั้นตอนของทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง</p>
ป.5	<p>1. เขียนเศษส่วนที่มีตัวส่วนเป็นตัวประกอบของ 10 หรือ 100 หรือ 1,000 ในรูปทศนิยม</p> <p>2. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาโดยใช้บัญญัติไตรยางศ์</p> <p>3. หาผลบวก ผลลบของเศษส่วนและจำนวนคละ</p> <p>4. หาผลคูณ ผลหารของเศษส่วนและจำนวนคละ</p> <p>5. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวก การลบ การคูณ การหาร เศษส่วน 2 ขั้นตอน</p> <p>6. หาผลคูณทศนิยมที่ผลคูณเป็นทศนิยมไม่เกิน 2 ตำแหน่ง</p> <p>7. หาผลหารที่ตัวตั้งเป็นจำนวนนับหรือทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง และตัวหารเป็นจำนวนนับ ผลหารเป็นทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง</p> <p>8. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวก การลบ การคูณ การหาร ทศนิยม 2 ขั้นตอน</p>
ป.6	<p>1. เปรียบเทียบ เรียงลำดับเศษส่วนและจำนวนคละ จากสถานการณ์ต่าง ๆ</p> <p>2. เขียนอัตราส่วนแสดงการเปรียบเทียบปริมาณ 2 ปริมาณ จากข้อความหรือสถานการณ์ โดยที่ปริมาณแต่ละปริมาณเป็นจำนวนนับ</p> <p>3. หาอัตราส่วนที่เท่ากับอัตราส่วนที่กำหนดให้</p> <p>4. หา ห.ร.ม. ของจำนวนนับไม่เกิน 3 จำนวน</p> <p>5. หา ค.ร.น. ของจำนวนนับไม่เกิน 3 จำนวน</p> <p>6. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับ ห.ร.ม. และ ค.ร.น.</p> <p>7. หาผลลัพธ์ของการบวก ลบ คูณ หารระคนของเศษส่วนและจำนวนคละ</p> <p>8. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเศษส่วนและจำนวนคละ 2 - 3 ขั้นตอน</p> <p>9. หาผลหารของทศนิยมที่ตัวหารและผลหาร เป็นทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง</p> <p>10. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวก การลบ การคูณ การหารทศนิยม 3 ตำแหน่ง</p> <p>11. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาอัตราส่วน</p>

ชั้น	ตัวชี้วัด
	12. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาร้อยละ 2 - 3 ขั้นตอน

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ลำดับและอนุกรม และนำไปใช้

ชั้น	ตัวชี้วัด
ป.1	1. ระบุจำนวนที่หายไปในรูปแบบของจำนวนที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงทีละ 1 และทีละ 10 และระบุรูปที่หายไปในรูปแบบซ้ำของรูปเรขาคณิตและรูปอื่น ๆ ที่สมาชิกในแต่ละชุดที่ซ้ำมี 2 รูป
ป.2	(มีการจัดการเรียนการสอนเพื่อเป็นพื้นฐาน แต่ไม่วัดผล)
ป.3	1. ระบุจำนวนที่หายไปในรูปแบบของจำนวนที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงทีละเท่า ๆ กัน
ป.4	(มีการจัดการเรียนการสอนเพื่อเป็นพื้นฐาน แต่ไม่วัดผล)
ป.5	-
ป.6	1. แสดงวิธีคิดและหาคำตอบของปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป

มาตรฐาน ค 1.3 ใช้นิพจน์ สมการ และอสมการอธิบายความสัมพันธ์หรือช่วยแก้ปัญหาที่กำหนดให้

สำหรับมาตรฐาน ค 1.3 ไม่มีตัวชี้วัดในระดับประถมศึกษา

สาระที่ 2 การวัดและเรขาคณิต

มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดสิ่งของที่ต้องการวัด และนำไปใช้

ชั้น	ตัวชี้วัด
ป.1	1. วัดและเปรียบเทียบความยาวเป็นเซนติเมตร เป็นเมตร 2. วัดและเปรียบเทียบน้ำหนักเป็นกิโลกรัม เป็นขีด
ป.2	1. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเวลาที่มีหน่วยเดียวและเป็นหน่วยเดียวกัน 2. วัดและเปรียบเทียบความยาวเป็นเมตรและเซนติเมตร 3. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวก การลบเกี่ยวกับความยาวที่มีหน่วยเป็นเมตรและเซนติเมตร 4. วัดและเปรียบเทียบน้ำหนักเป็นกิโลกรัมและกรัม กิโลกรัมและขีด 5. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวก การลบเกี่ยวกับน้ำหนักที่มีหน่วยเป็นกิโลกรัมและกรัม กิโลกรัมและขีด 6. วัดและเปรียบเทียบปริมาตรและความจุเป็นลิตร

แนวคิดพื้นฐานของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้น	ตัวชี้วัด
ป.3	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเงิน</li> <li>2. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเวลา และระยะทาง</li> <li>3. เลือกใช้เครื่องมือวัดความยาวที่เหมาะสม วัดและบอกความยาวของสิ่งต่าง ๆ เป็นเซนติเมตร และมิลลิเมตร เมตรและเซนติเมตร</li> <li>4. คาดคะเนความยาวเป็นเมตรและเป็นเซนติเมตร</li> <li>5. เปรียบเทียบความยาวระหว่างเซนติเมตรกับมิลลิเมตร เมตรกับเซนติเมตร กิโลเมตรกับเมตร จากสถานการณ์ต่าง ๆ</li> <li>6. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับความยาว ที่มีหน่วยเป็นเซนติเมตรและมิลลิเมตร เมตรและเซนติเมตร กิโลเมตรและเมตร</li> <li>7. เลือกใช้เครื่องมือชั่งที่เหมาะสม วัดและบอกน้ำหนักเป็นกิโลกรัมละขีด กิโลกรัมและกรัม</li> <li>8. คาดคะเนน้ำหนักเป็นกิโลกรัมและเป็นขีด</li> <li>9. เปรียบเทียบน้ำหนักระหว่างกิโลกรัมกับกรัม เมตริกตันกับกิโลกรัม จากสถานการณ์ต่างๆ</li> <li>10. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับน้ำหนักที่มีหน่วยเป็นกิโลกรัมกับกรัม เมตริกตันกับกิโลกรัม</li> <li>11. เลือกใช้เครื่องตวงที่เหมาะสม วัดและเปรียบเทียบปริมาตร ความจุเป็นลิตรและมิลลิลิตร</li> <li>12. คาดคะเนปริมาตรและความจุเป็นลิตร</li> <li>13. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับปริมาตรและความจุที่มีหน่วยเป็นลิตรและมิลลิลิตร</li> </ol>
ป.4	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเวลา</li> <li>2. วัดและสร้างมุม โดยใช้โพรแทรกเตอร์</li> <li>3. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับความยาวรอบรูปและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก</li> </ol>
ป.5	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับความยาวที่มีการเปลี่ยนหน่วยและเขียนในรูปทศนิยม</li> <li>2. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับน้ำหนักที่มีการเปลี่ยนหน่วยและเขียนในรูปทศนิยม</li> <li>3. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากและความจุของภาชนะทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก</li> <li>4. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน</li> </ol>
ป.6	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับปริมาตรของรูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบด้วยทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก</li> <li>2. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับความยาวรอบรูปและพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม</li> <li>3. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับความยาวรอบรูปและพื้นที่วงกลม</li> </ol>

มาตรฐาน ค 2.2 เข้าใจและวิเคราะห์รูปเรขาคณิต สมบัติของรูปเรขาคณิต ความสัมพันธ์  
ระหว่างรูปเรขาคณิต และทฤษฎีบททางเรขาคณิต และนำไปใช้

ชั้น	ตัวชี้วัด
ป.1	1. จำแนกรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม วงกลม วงรี ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ทรงกลม ทรงกระบอก และกรวย
ป.2	1. จำแนกและบอกลักษณะของรูปหลายเหลี่ยมและวงกลม
ป.3	1. ระบุรูปเรขาคณิตสองมิติที่มีแกนสมมาตรและจำนวนแกนสมมาตร
ป.4	1. จำแนกชนิดของมุม บอกชื่อมุม ส่วนประกอบของมุมและเขียนสัญลักษณ์แสดงมุม 2. สร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเมื่อกำหนดความยาวด้าน
ป.5	1. สร้างเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ 2. จำแนกรูปสี่เหลี่ยมโดยพิจารณาจากสมบัติของรูป 3. สร้างรูปสี่เหลี่ยมชนิดต่าง ๆ เมื่อกำหนดความยาวของด้านและขนาดของมุมหรือเมื่อกำหนดความยาวของเส้นทแยงมุม 4. บอกลักษณะของปริซึม
ป.6	1. จำแนกรูปสามเหลี่ยมโดยพิจารณาจากสมบัติของรูป 2. สร้างรูปสามเหลี่ยมเมื่อกำหนดความยาวของด้านและขนาดของมุม 3. บอกลักษณะของรูปเรขาคณิตสามมิติชนิดต่าง ๆ 4. ระบุรูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบจากรูปคลี่ และระบุรูปคลี่ของรูปเรขาคณิตสามมิติ

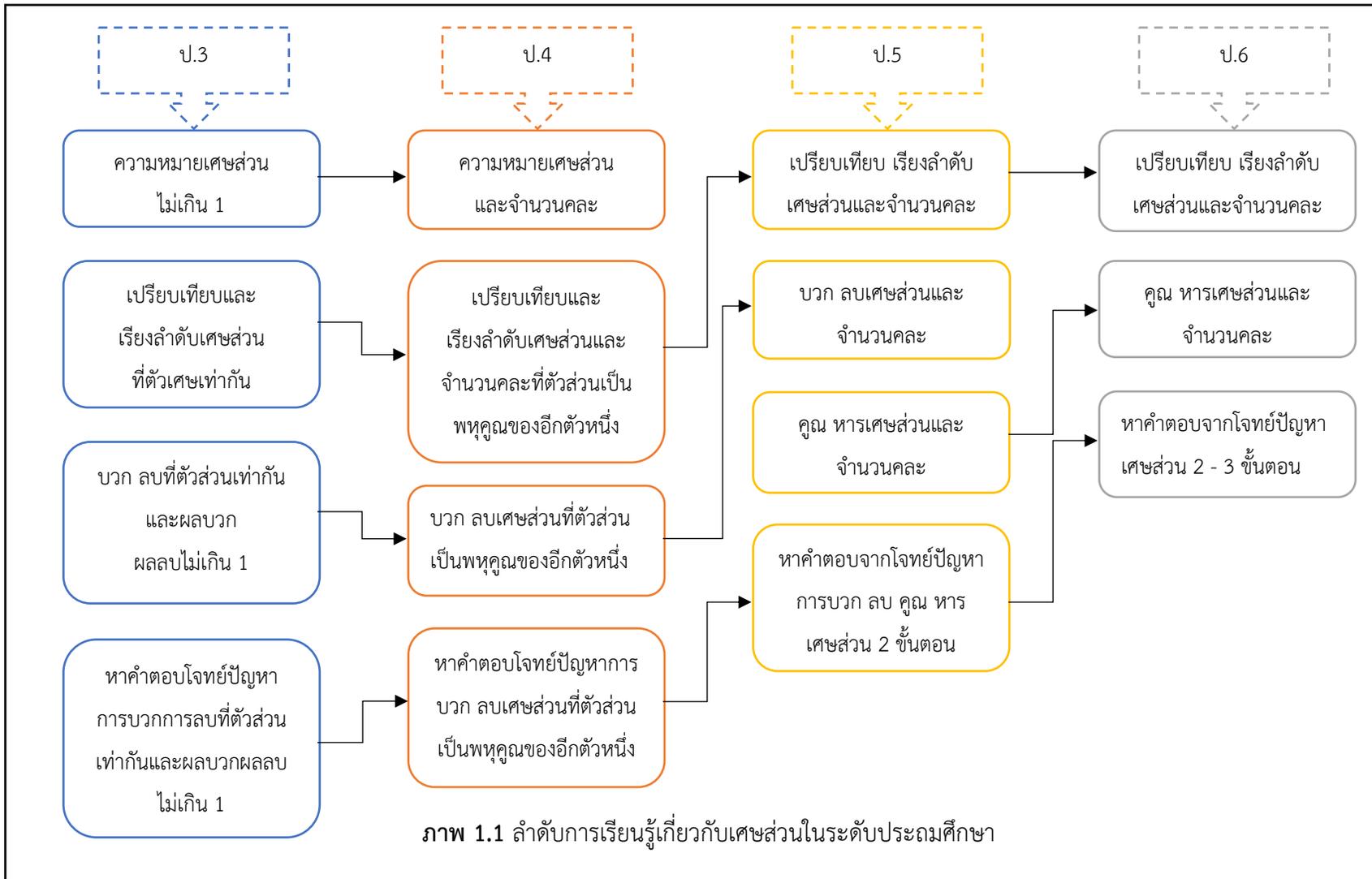
สาระที่ 3 สถิติและความน่าจะเป็น

มาตรฐาน ค 3.1 เข้าใจกระบวนการทางสถิติ และใช้ความรู้ทางสถิติในการแก้ปัญหา

ชั้น	ตัวชี้วัด
ป.1	1. ใช้ข้อมูลจากแผนภูมิรูปภาพในการหาค่าตอบของโจทย์ปัญหา เมื่อกำหนดรูป 1 รูป แทน 1 หน่วย
ป.2	1. ใช้ข้อมูลจากแผนภูมิรูปภาพในการหาค่าตอบของโจทย์ปัญหา เมื่อกำหนดรูป 1 รูป แทน 2 หน่วย 5 หน่วย หรือ 10 หน่วย
ป.3	1. เขียนแผนภูมิรูปภาพ และใช้ข้อมูลจากแผนภูมิรูปภาพในการหาค่าตอบของโจทย์ปัญหา 2. เขียนตารางทางเดียวจากข้อมูลที่เป็นจำนวนนับ และใช้ข้อมูลจากตารางทางเดียวในการหาค่าตอบของโจทย์ปัญหา
ป.4	1. ใช้ข้อมูลจากแผนภูมิแท่ง ตารางสองทางในการหาค่าตอบของโจทย์ปัญหา
ป.5	1. ใช้ข้อมูลจากกราฟเส้นในการหาค่าตอบของโจทย์ปัญหา 2. เขียนแผนภูมิแท่งจากข้อมูลที่เป็นจำนวนนับ
ป.6	1. ใช้ข้อมูลจากแผนภูมิวงกลมในการหาค่าตอบของโจทย์ปัญหา

มาตรฐาน ค 3.2 เข้าใจหลักการนับเบื้องต้น ความน่าจะเป็น และนำไปใช้

สำหรับมาตรฐาน ค 3.2 ไม่มีตัวชี้วัดในระดับประถมศึกษา และเมื่อพิจารณาการจัดวางสาระการเรียนรู้หรือเนื้อหาในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยเฉพาะระดับประถมศึกษาพบว่า การจัดวางเป็นไปตามพัฒนาการ ความยากง่าย และความซับซ้อนของเนื้อหา การวางแบบนี้จะเป็นการวางเนื้อหาที่สอดคล้องกับแนวคิดของหลักสูตรแบบก้ำวเวียน (Spiral Curriculum) อันหมายถึง หลักสูตรที่จัดเนื้อหาสาระการเรียนรู้จากง่ายไปยาก ลุ่มลึกขึ้นเรื่อย ๆ ไปตามระดับชั้นหรือรายวิชาโดยมีการย้ำซ้ำ ทวนสาระเดิม ก่อนต่อยอดสาระให้กว้างขึ้น ลึกยิ่งขึ้น (ราชบัณฑิตยสถาน, 2553) ตัวอย่างการจัดเนื้อหาในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาเรื่องเศษส่วน (ภาพ 1.1)



ภาพ 1.1 ลำดับการเรียนรู้เกี่ยวกับเศษส่วนในระดับประถมศึกษา

## ทฤษฎีจิตวิทยาที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ซึ่งเกี่ยวข้องกับการพฤติกรรมของนักเรียนและพัฒนาการของนักเรียนทำให้ครูควรศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับพฤติกรรม พัฒนาการ และจิตวิทยาของนักเรียน สิ่งต่าง ๆ เหล่านี้มีผลต่อการจัดการเรียนรู้ ในส่วนนี้จะกล่าวถึงนักจิตวิทยาที่มีอิทธิพลต่อการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ดังนี้

**ทฤษฎีของเพียเจต์ (Piaget's Theory)** เพียเจต์เป็นศาสตราจารย์แห่งมหาวิทยาลัยเจนีวา ประเทศสวิสเซอร์แลนด์ ที่ศึกษาพัฒนาการสติปัญญาของเด็ก โดยเฉพาะอย่างยิ่งการทำงานวิจัยเชิงคุณภาพที่เกี่ยวข้องกับพัฒนาการทางสติปัญญาของเด็ก เพียเจต์มีความเชื่อว่านักเรียนควรใช้ส่วนต่าง ๆ ของร่างกายสัมผัสกับสิ่งต่าง ๆ รอบ ๆ ตัวหรือจัดกระทำกับวัตถุจะเป็นการเรียนรู้โดยผ่านประสบการณ์ที่สำคัญ เพียเจต์ได้แบ่งลำดับของพัฒนาการออกเป็น 4 ขั้น ดังนี้ (Piaget, 1983)

1. ขั้นประสาทสัมผัสและกล้ามเนื้อ (Sensorimotor Stage) ในขั้นนี้จะเริ่มตั้งแต่เกิดจนถึงรู้จักกับภาษา (แรกเกิด – 2 ปี) โดยเด็กจะได้รับประสบการณ์ตรงทันทีจากการสัมผัสวัตถุ พัฒนาการทางด้านภาษาและความคิดเป็นไปอย่างช้า ๆ ซึ่งเป็นการเรียนรู้จากการสัมผัส ลักษณะของเด็กในขั้นนี้คือสามารถเชื่อมโยงจำนวนกับวัตถุได้ เช่น สุนัข 1 ตัว แมว 2 ตัว การพัฒนาความสามารถทางคณิตศาสตร์ในขั้นนี้ เด็กควรได้รับโอกาสในการสัมผัสหรือกระทำกับสิ่งแวดล้อมรอบตัวที่มากพอ (Martin, 2000) นักการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับเด็กในระดับนี้แนะนำว่า ครูและผู้ปกครองสามารถหากิจกรรมที่ช่วยพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้ เช่น ให้เด็กนับนิ้วของตัวเอง นับของเล่น นับลูกกวาด เป็นต้น พร้อมทั้งใช้คำถามกระตุ้น เช่น ใครมีมากกว่า หรือพอไหม เป็นต้น โดยกิจกรรมพื้นฐานแบบนี้ควรให้ฝึกในทุก ๆ วันจนเป็นนิสัย (Ojose, 2008)

2. ขั้นก่อนปฏิบัติการคิดด้วยรูปธรรม (Preoperational Stage) ลักษณะเฉพาะของขั้นนี้ (2-7 ปี) คือพัฒนาทางภาษา การคิดเชิงสัญลักษณ์ มุมมองเกี่ยวกับตัวเอง และการให้เหตุผลอย่างง่าย ๆ ซึ่งเด็กจะมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาโดยใช้วัสดุต่าง ๆ เช่น บล็อก (block) ทราชาย น้ำ เลโก้ (lego) เป็นต้น ซึ่งในระหว่างการแก้ปัญหาครูหรือผู้ปกครองควรสนทนาโต้ตอบกระบวนการคิดของเด็กหรือให้เหตุผลในการแก้ปัญหาอย่างง่าย ๆ ในขั้นนี้เด็กจะรับรู้ถึงการดำเนินการแต่ไม่สามารถเปลี่ยนการดำเนินการได้ เช่น เด็กสามารถบอกได้ว่า 4 รวมกับ 5 ได้ 9 แต่ไม่สามารถเปลี่ยนได้ว่า 4 รวมกับจำนวนใดได้ 9 เป็นต้น กิจกรรมที่ครูหรือผู้ปกครองควรจัดให้เด็กได้เรียนรู้คือการแยกชนิดรูปเรขาคณิตอย่างง่าย พร้อมทั้งใช้คำถามกระตุ้นอย่างง่าย ๆ (Thompson, 1990)

3. ขั้นปฏิบัติการคิดด้วยรูปธรรม (Concrete Operation Stage) ในขั้นนี้ (7-12 ปี) เด็กจะมีพัฒนาการทางด้านภาษาและการให้เหตุผลอย่างชัดเจน เด็กในขั้นนี้จะมีความรู้ถึงคำว่ารู้หรือไม่รู้

เป็นอย่างมาก เด็กในวัยนี้จะสามารถมองเห็นลักษณะของวัตถุ สิ่งของได้ถึง 2 และ 3 มิติในเวลาเดียวกันคือสามารถคิดถึงขนาดและปริมาตรไปพร้อม ๆ กันได้

4. ขั้นการคิดด้วยนามธรรม (Formal Operation Stage) ในขั้นนี้ (12 ปี ขึ้นไป) เด็กจะสามารถเข้าใจสิ่งที่เป็นนามธรรม สามารถตั้งสมมติฐานและแก้ปัญหาได้ พร้อมทั้งลำดับความสำคัญของปัญหาได้ มีการคิดหาเหตุผลแบบตรรกศาสตร์ และพัฒนาอย่างสมบูรณ์ เช่น สามารถหาคำตอบสมการ  $x + 2x = 9$  ได้โดยไม่ต้องใช้สื่อรูปธรรม จากสถานการณ์ครูอาจนำเสนอด้วยภาษา เช่น กนกมีลูกกวาดจำนวนหนึ่ง พี่ชายของกนกมีลูกกวาดเป็นสองเท่าของกนก รวมลูกกวาดของกนกและพี่ชายได้ 9 เม็ด กนกมีลูกกวาดกี่เม็ด เป็นต้น ในขั้นนี้เด็กจะสามารถให้เหตุผลในรูปทั่วไปและวัดผลในเรื่องการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ซึ่งรวมถึง การอธิบาย (clarification) การสรุป (inference) การประเมินผล (evaluation) และ การประยุกต์ (application) ตามความหมายดังนี้

- การอธิบาย (Clarification) เด็กต้องสามารถระบุและวิเคราะห์ลักษณะของปัญหา ข้อมูลที่สำคัญในการใช้แก้ปัญหา โดยครูสามารถส่งเสริมการแก้ปัญหาโดยการใช้คำถามกระตุ้น
- การสรุป (Inference) เด็กในขั้นนี้จะสามารถสรุปการให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยทางคณิตศาสตร์ได้ ซึ่งนิรนัยคือการสรุปจากกรณีรูปทั่วไปไปสู่กรณีเฉพาะ ส่วนการให้เหตุผลแบบอุปนัยคือการนำลักษณะเฉพาะที่มีร่วมกันของสิ่งของหรือเหตุการณ์มาสรุปเป็นรูปทั่วไป
- การประเมินผล (Evaluation) เป็นการใช้เกณฑ์ในการตัดสินใจแก้ปัญหา ซึ่งเด็กสามารถใช้เกณฑ์ที่กำหนดไว้ในการตัดสินใจวิธีการแก้ปัญหาของตัวเองว่ามีประสิทธิภาพมากน้อยเพียงใด
- การประยุกต์ (Application) การประยุกต์เป็นนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในห้องเรียนมาใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ เช่น นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องการประยุกต์อัตราส่วนมาใช้ในสถานการณ์ ปองคุณทำความสะอาดบ้านคนเดียวเสร็จภายใน 4 ชั่วโมง พี่ชายของเขาทำความสะอาดบ้านหลังเดียวกันเสร็จภายใน 6 ชั่วโมง ถ้าปองคุณและพี่ชายร่วมกันทำความสะอาดบ้านหลังดังกล่าว ทั้งสองคนจะใช้เวลาเท่าใด เป็นต้น

**ทฤษฎีของบรูเนอร์ (Bruner's Theory)** Ping Wen (2018) ได้อธิบายว่าการเรียนรู้ตามทฤษฎีของบรูเนอร์ยังคงเป็นแนวทางที่สำคัญในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในปัจจุบัน เพราะการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์จะมุ่งเน้นความสำคัญและให้คุณค่าของการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิต

จริง สำหรับการจัดการเรียนรู้ตามทฤษฎีนี้ ครูควรมอบหมายงานให้นักเรียนอย่างเหมาะสมและดึงศักยภาพของนักเรียนออกมาอย่างเต็มที่เพื่อให้นักเรียนได้ใช้ความสามารถของตนเองอย่างเต็มศักยภาพ ซึ่งการจัดการเรียนรู้ประกอบไปด้วย 4 มโนทัศน์ที่สำคัญคือ โครงสร้าง (Structure) ความพร้อม (Readiness) สัญชาตญาณ (Intuition) และแรงจูงใจ (Motivation) บรูเนอร์จะเน้นการจัดการเรียนรู้ที่ให้โอกาสนักเรียนเรียนรู้โครงสร้างของความรู้ อันจะนำมาซึ่งความเข้าใจและการถ่ายโยงความรู้ การเรียนรู้ว่าอย่างไร (How to Learn) จึงมีความสำคัญเช่นเดียวกับเรียนเนื้อหาสาระ (What to Learn) ซึ่งทำให้เกิดความสมดุลระหว่างกระบวนการกับผลของการเรียนรู้ จุดเน้นเหล่านี้มีความสำคัญมากต่อการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องจากนักการศึกษาคณิตศาสตร์จะพยายามศึกษาว่าเรียนอย่างไรจึงจะทำให้เด็กมีความรู้ความเข้าใจคณิตศาสตร์และสามารถถ่ายโยงการเรียนรู้นั้นไปใช้ในสถานการณ์อื่น ๆ ได้

บรูเนอร์ได้เสนอขั้นของการเรียนรู้ของนักเรียนว่าประกอบไปด้วย 3 ขั้นคือ รูปธรรม (Enactive) ภาพ (Iconic) และสัญลักษณ์ (Symbolic)

ขั้นรูปธรรม เป็นขั้นที่นักเรียนจะเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ ด้วยการกระทำหรือประสบการณ์ตรง โดยครูต้องจัดประสบการณ์โดยให้เด็กได้สัมผัสสื่อและวัตถุจริง

ขั้นภาพ เป็นการนำสิ่งที่เป็นรูปธรรมมาแทนนำเสนอแทนด้วยภาพการรับรู้ในขั้นนี้จะขึ้นอยู่กับ การรับรู้ภาพ (visual) ของการเรียนรู้ การนำเสนอด้วยภาพนั้นมีความสำคัญทั้งช่วยในการสนับสนุนและการสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์ รูปภาพ แผนภาพ กราฟ และตารางเป็นตัวอย่างของการแสดงการนำเสนอด้วยภาพทางคณิตศาสตร์ โดยในการนำเสนอข้อมูลด้วยภาพนั้น บางครั้งภาพบางภาพไม่ได้ช่วยให้นักเรียนแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น แต่ภาพบางภาพอาจให้ข้อมูลที่จำเป็นต่อการแก้ปัญหา เช่น การสอนเรื่องการบวก 5 กับ 3 ครูอาจนำเสนอด้วยภาพแอปเปิล 5 ผล รวมกับภาพแอปเปิล 3 ผล ได้ผลบวกเท่ากับ 8 ผล เป็นต้น

ขั้นสัญลักษณ์ นักเรียนสามารถเขียนหรือนำเสนอข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เช่น การสอนเรื่องการบวก 5 กับ 3 เด็กต้องสามารถนำเสนอได้ว่า  $5 + 3 = 8$  เป็นต้น นักเรียนสามารถเข้าใจสมบัติของจำนวนจริง สมบัติการเท่ากัน และสมบัติของอสมการ กฎของเลขยกกำลัง และสามารถแปลงปัญหามาเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง ในพัฒนาการของขั้นนี้ครูจะเข้ามามีบทบาทในการสร้างความเข้าใจพื้นฐานในการเขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

จากทฤษฎีของบรูเนอร์ได้มีการพัฒนาแนวคิดมาประยุกต์ใช้กับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรียกว่า เทคนิคการเรียนรู้แบบหลักการ Concrete Pictorial Abstract หรือเรียกกันสั้น ๆ ว่า CPA เทคนิคนี้เป็นวิธีที่นิยมในโรงเรียนของประเทศสิงคโปร์ จุดมุ่งหมายหลักของ CPA คือการเน้นสร้าง

ทักษะการแก้ปัญหาเป็นสำคัญ โดยมีแนวความคิดที่ว่ามนุษย์นั้น ถูกพัฒนาให้เรียนรู้จากของจริงที่จับต้องได้ เช่น สัมผัสทั้งห้า (การได้ยิน การมองเห็น การลิ้มรส การได้กลิ่น และการสัมผัสเคลื่อนไหว) การใช้กระบวนการ CPA จะทำให้นักเรียนรู้เข้าใจไปถึงแก่นของสิ่งที่จะเรียนรู้ ในที่นี้ก็คือแก่นของคณิตศาสตร์ และผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองสอนด้วยวิธีนี้ในประเทศสิงคโปร์กับผลการทดสอบโครงการประเมินผลนักเรียนระหว่างประเทศ หรือ PISA (Programme for International Student Assessment) ปรากฏว่าผลคะแนนอยู่ในระดับต้น ๆ ซึ่งถือว่าวิธีนี้เป็นวิธีที่ได้ผล อีกทั้งยังได้ถูกนำไปใช้อีกหลาย ๆ ประเทศทั่วโลก

สุภัทรา ทรัพย์อุปการ (2563) ได้อธิบายหลักการของ CPA ซึ่งแบ่งเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

- ❖ Concrete (จับต้องได้) ซึ่งเป็นขั้นตอนแรกที่นักเรียนสามารถเรียนรู้ได้จากการเห็นของจริง จับต้องได้หรือสัมผัสได้ จากสื่อหรือสิ่งของรอบตัว เช่น ครูต้องการจัดการเรียนรู้เรื่องการหาร อาจใช้กระดาษ 12 เม็ด แบ่งเป็น 2 กอง กองละเท่า ๆ กัน แล้วให้นักเรียนนับจำนวนสมาชิกในแต่ละกอง ซึ่งเป็นการเรียนรู้ผ่านของจริงทำให้นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับการหาร
- ❖ Pictorial (เห็นเป็นภาพ) ในขั้นตอนนี้จะเป็นการวาดภาพจากของจริงแทนสิ่งของนั้น ๆ ให้ออกมาเป็นภาพให้เห็นได้ชัดเจน เช่น ครูให้นักเรียนวาดวงกลม 12 วง แล้วให้นักเรียนจัดเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน พร้อมทั้งนับจำนวนสมาชิกในแต่ละกลุ่ม ในขั้นตอนนี้จะช่วยให้เกิดความเข้าใจมากขึ้นอย่างเป็นขั้นตอน และเนื้อหาที่มีความยากหรือลึกลับซึ่งอาจจะเปลี่ยนเป็นภาพ แผนภูมิ โมเดล ตาราง ก็ได้ ขั้นตอนนี้จะเป็นการสร้างการจดจำได้เป็นอย่างดี
- ❖ Abstract (สัญลักษณ์) เป็นขั้นตอนสุดท้ายที่เราแปลงภาพเหล่านั้นให้เป็นสัญลักษณ์ โดยเป็นการฝึกแทนโจทย์จากรูปภาพ ให้กลับมาเป็นสัญลักษณ์แทนจำนวน ในขั้นตอนนี้ควรมีการฝึกการสลับไปมาระหว่างการแปลงภาพเป็นสัญลักษณ์และสัญลักษณ์เป็นภาพ เพื่อเพิ่มทักษะในการจดจำและทำความเข้าใจ เช่น ครูจะเขียนประโยคสัญลักษณ์  $12 \div 2$  พร้อมทั้งอธิบายผลหารโดยเชื่อมโยงจากขั้นตอน Pictorial

สำหรับในประเทศไทยได้มีผู้สนใจศึกษาและวิจัยการนำแนวความคิดการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิด CPA เช่น วชิรญาณ สาดสว่าง และคณะ (2565) และ สุธีรา จันทร์เกตุ (2562) ที่ได้นำแนวคิด CPA ไปพัฒนามโนทัศน์ให้กับนักเรียน ต่างก็พบว่าแนวคิด CPA ช่วยพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียน นอกจากนี้ยังทำให้พัฒนาความสามารถในการสื่อสาร สื่อความหมายของนักเรียนได้ดีอีกด้วย

**ทฤษฎีการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของดีนส์ (Dienes's Theory of Mathematics)** ดีนส์เป็นนักจิตวิทยาที่มีความสนใจเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก และได้ศึกษา

กระบวนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์จนพัฒนาเป็นทฤษฎีการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของดีนส์ (Dienes's Theory of Mathematics) ซึ่งประกอบไปด้วย 4 หลักการ ดังนี้ (Dienes, 2000)

1. หลักการพลวัต (The Dynamic Principle) เป็นหลักการที่กล่าวถึงความเข้าใจในโมโนทัศน์ใหม่ว่าเป็นกระบวนการพัฒนานักเรียนตามลำดับขั้นตอน ซึ่งประกอบไปด้วย 3 ขั้น คือ

ขั้นที่ 1 ขั้นเบื้องต้นหรือขั้นเล่น (Preliminary or Play Stage) เป็นขั้นที่นักเรียนจะได้รับประสบการณ์ให้พบกับโมโนทัศน์ใหม่ในรูปแบบที่ไม่เป็นทางการ แต่ไม่ได้หมายความว่าการเล่นแบบไม่มีความหมาย เช่น เมื่อเด็กมีโอกาสได้เล่นกับของเล่นใหม่ เด็กจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับลักษณะพิเศษต่าง ๆ ของของเล่นนั้น ดีนส์ยังได้เสนอแนะไว้ว่ากิจกรรมที่ไม่เป็นทางการนั้นเป็นส่วนหนึ่งของกระบวนการเรียนรู้ที่เป็นธรรมชาติและมีความสำคัญ ครูควรมีการจัดเตรียมกิจกรรมหรือสิ่งของให้นักเรียน

ขั้นที่ 2 เป็นขั้นการเล่นที่มีโครงสร้างมากขึ้น ในขั้นนี้เด็กจะได้รับการจัดประสบการณ์ด้วยกิจกรรมที่มีโครงสร้างมากขึ้น ซึ่งเป็นโครงสร้างที่คล้ายกับโครงสร้างของโมโนทัศน์ที่เด็กจะได้เรียนรู้ เช่น การนำชิ้นส่วนมาประกอบเป็นรูปเรขาคณิต การเล่นเกมการศึกษา เป็นต้น

ขั้นที่ 3 เป็นขั้นที่เด็กจะได้เชื่อมโยงโมโนทัศน์ที่ได้เรียนรู้ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตจริง เช่น หน้าจอโทรทัศน์มีลักษณะคล้ายรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก งานขามมีลักษณะคล้ายวงกลม ลูกฟุตบอลมีลักษณะเป็นทรงกลม เป็นต้น

ซึ่งความสมบูรณ์ของขั้นตอน 3 ขั้นนี้เป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่งก่อนที่เด็กจะได้เรียนรู้โมโนทัศน์ใหม่ทางคณิตศาสตร์ ดีนส์ได้กล่าวไว้ว่า กระบวนการ 3 ขั้นนี้ คือ วัฏจักรการเรียนรู้ (learning cycle)

2. หลักการความหลากหลายของการรับรู้ (The Perceptual Variability Principle) เป็นหลักการที่กล่าวถึงการเรียนรู้โมโนทัศน์ของนักเรียนจะเกิดขึ้นสูงสุดเมื่อเด็กได้รับการจัดประสบการณ์โดยใช้กิจกรรมที่หลากหลาย และควรเป็นประสบการณ์ที่แตกต่างจากสิ่งที่ได้เคยพบหรือเห็นมา แต่มีโครงสร้างโมโนทัศน์พื้นฐานเหมือนกัน ในการจัดประสบการณ์ควรใช้อุปกรณ์ที่หลากหลายและได้รับการออกแบบมาเพื่อพัฒนามโนทัศน์ด้วยวิธีการและเงื่อนไขที่แตกต่างกันไป นักเรียนจะเกิดการรับรู้โมโนทัศน์เกี่ยวกับสิ่งที่เป็นนามธรรมเหล่านั้นได้ดียิ่งขึ้น เช่น การสอนมโนทัศน์เรื่องการบวกจำนวน ครูอาจจะใช้ตุ๊กตา 2 ตัว รวมกับตุ๊กตา 3 ตัว หรืออาจจะใช้ส้ม 2 ผล กับแอปเปิล 3 ผล เพื่อแสดงการบวกจำนวนระหว่าง 2 กับ 3 ซึ่งจะให้นักเรียนได้เรียนรู้มโนทัศน์เรื่องการบวกจำนวนจากประสบการณ์ที่เป็นรูปธรรมเหล่านี้

3. หลักการความหลากหลายทางคณิตศาสตร์ (The Mathematical Variability Principle) หลักการนี้มีแนวคิดเกี่ยวกับนัยทั่วไปของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่จะได้รับการส่งเสริมให้เกิดการเรียนรู้เมื่อมีการคงไว้ซึ่งตัวแปรหรือสมบัติที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์นั้น แต่เปลี่ยนตัวแปรหรือสมบัติที่ไม่เกี่ยวข้องให้เกิดความหลากหลาย เช่น การพัฒนามโนทัศน์เรื่องรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ตัวแปรหรือสมบัติที่ต้องคงไว้ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคือเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกัน ส่วนตัวแปรหรือสมบัติที่สามารถเปลี่ยนแปลงได้คือความยาวของด้านตรงข้าม หรือขนาดของมุมตรงข้าม ซึ่งหลายคนมักเข้าใจผิดว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน การมีมโนทัศน์ที่ผิดเช่นนี้เป็นผลสืบเนื่องมาจากเด็กได้รับการจัดประสบการณ์มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ด้วยตัวแปรที่ไม่เหมาะสม ดินส์แนะนำว่า ตามกฎข้อนี้การเรียนรู้มโนทัศน์จะเกิดขึ้นเมื่อเด็กได้ทำกิจกรรมและสรุปข้อตกลงร่วมกับเพื่อน เป็นวิธีการที่จะทำให้เด็กสามารถพัฒนากระบวนการเรียนรู้ไปสู่มโนทัศน์ที่เป็นนามธรรมและสามารถสรุปเป็นกฎทั่วไปได้ในที่สุด ซึ่งถือว่าเป็นแนวทางที่สำคัญอย่างยิ่งในการพัฒนามโนทัศน์ของเด็ก

4. หลักการการสร้าง (The Constructivity Principle) หลักการการสร้างนี้ ดินส์ได้แยกแนวคิดออกเป็น 2 ชนิด คือ ขั้นการคิดจากโครงสร้างและขั้นการคิดวิเคราะห์ หลักการการสร้างนี้กล่าวไว้ว่า “การสร้างจะมาก่อนการวิเคราะห์” ดินส์อธิบายว่านักเรียนควรได้รับการจัดประสบการณ์พัฒนามโนทัศน์โดยนักเรียนได้รับประสบการณ์ตรงด้วยการลงมือปฏิบัติจริง การจัดประสบการณ์ในการสร้างให้กับนักเรียนนั้นนับว่าเป็นพื้นฐานที่สำคัญยิ่งในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งจะทำให้นักเรียนสามารถเกิดการคิดวิเคราะห์ได้ในอนาคตพร้อมได้เน้นย้ำว่า นักเรียนจะไม่สามารถคิดวิเคราะห์ได้เลยหากไม่ได้ผ่านประสบการณ์ที่เป็นรูปธรรมจากการสร้างมาก่อน ปัญหาที่สำคัญอย่างยิ่งประการหนึ่งในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์คือ ครูมักถามคำถามเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมก่อนที่นักเรียนจะได้รับการจัดประสบการณ์ให้ลงมือปฏิบัติกับวัตถุจริง ดังนั้นนักเรียนจึงเกิดการท่องจำ การนำหลักการการสร้างไปใช้ในห้องเรียนจึงนับได้ว่าเป็นแนวทางการแก้ปัญหาที่เหมาะสม

นอกจากนี้ดินส์ได้แบ่งขั้นการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เป็น 6 ชั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 ชั้นเล่นอิสระ (The Free Play) ในขั้นนี้เป็นการเรียนรู้สิ่งรอบตัวอย่างอิสระ นักเรียนจะอาศัยการทดลองและผิดพลาดในการแก้ปัญหา นักเรียนส่วนใหญ่จะสุ่มวิธีการแก้ปัญหาและเมื่อเจอกับปัญหาที่คล้าย ๆ กันจะใช้ความพยายามวิธีเดิม ๆ ในการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 2 ชั้นเล่นตามกฎ (Playing by the Rules) หลังจากนักเรียนได้เรียนรู้อย่างอิสระแล้ว นักเรียนจะสามารถสร้างแบบรูปการแก้ปัญหาหรือสูตรได้ โดยนักเรียนจะตระหนักและมีความสนใจในกิจกรรม

ขั้นที่ 3 ขั้นเปรียบเทียบ (The Comparison Stage) หลังจากนักเรียนได้เรียนรู้ในเรื่องเดียวกันซ้ำ ๆ หรือกิจกรรมการเรียนรู้ที่คล้าย ๆ กัน นักเรียนจะสามารถเปรียบเทียบหรือถ่ายโยงความรู้ได้

ขั้นที่ 4 ขั้นการใช้ตัวแทน (The Representation Stage) เป็นขั้นที่นักเรียนจะใช้ภาพแทนสิ่งของต่าง ๆ เพื่อสื่อสารถึงความคิดของตนเอง

ขั้นที่ 5 ขั้นการใช้สัญลักษณ์ (The Symbolization Stage) ขั้นนี้นักเรียนสามารถเปลี่ยนจากภาพเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เพราะวิชาคณิตศาสตร์มักใช้สัญลักษณ์ในการสื่อสาร

ขั้นที่ 6 ขั้นแบบแผน (The Formalization Stage) หลังจากผ่านขั้นตอนต่าง ๆ ของการเรียนรู้ นักเรียนจะสามารถสรุปมโนทัศน์ออกเป็นแบบแผนทั่วไปได้ หรือสามารถอธิบายสังพจน์และพิสูจน์ทฤษฎีบทได้

### การจัดการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจ

เมื่อกำลังถึงวิชาคณิตศาสตร์คนส่วนใหญ่จะคิดว่า “ไม่ได้ใช้ในชีวิตจริง” หรือ “ไปตลาดใช้แค่บวกลบคูณหาร เรียนทำไมเรื่องยาก ๆ” ซึ่งอาจถูกต้องในมุมมองของผู้นำความรู้ไปใช้ แต่ต้องยอมรับว่าส่วนหนึ่งเกิดจากการจัดการเรียนรู้ ในอดีตการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์จะมุ่งเน้นหาคำตอบ เช่น หาผลบวกของ  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  หรือหาผลคูณของ  $34 \times 65$  โดยไม่เข้าใจความหมายและขาดการเชื่อมโยงความรู้ไปใช้ในชีวิตจริง การจัดการเรียนรู้แบบนี้เป็นการเน้นเกี่ยวกับขั้นตอน/วิธีการ (Procedural Knowledge)

อัมพร ม้าคนอง (2554) ได้แบ่งความรู้ทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ ดังนี้

- ❖ ความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์ (Conceptual Knowledge) เป็นความรู้ที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดสำคัญ สาระ และโครงสร้างของเนื้อหาคณิตศาสตร์ ซึ่งครอบคลุมความรู้ต่อไปนี้
  - ความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์ (Concept) ทฤษฎี (Theory) กฎหรือหลักการ (Principle) ทางคณิตศาสตร์
  - ความรู้เกี่ยวกับเหตุผลหรือที่มาของขั้นตอน/วิธีการ (Algorithm) ทางคณิตศาสตร์
  - ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และการเชื่อมโยงของแนวคิดต่าง ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์
- ❖ ความรู้เกี่ยวกับขั้นตอน/วิธีการ (Procedural Knowledge) ทางคณิตศาสตร์เป็นความรู้เกี่ยวกับวิธีคิดคำนวณ และขั้นตอนการทำงานทางคณิตศาสตร์ ซึ่งครอบคลุมความรู้ต่อไปนี้

แนวคิดพื้นฐานของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

- ความรู้เกี่ยวกับวิธีการระบุปัญหา
- ความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนการคำนวณตามกฎและเงื่อนไขของกฎ
- ความรู้เกี่ยวกับการดำเนินการแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง

การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ยุคใหม่จึงมุ่งเน้นนำความรู้ไปใช้ได้จริงผ่านการเรียนรู้โมทัศน์ผสมผสานกับทักษะและกระบวนการต่าง ๆ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ได้กำหนดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไว้ 5 ด้าน เพื่อเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และเป็นเครื่องมือที่จะนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ เพื่อให้ได้มาซึ่งความรู้และประยุกต์ใช้ในชีวิตจริงอย่างมีประสิทธิภาพ อันประกอบไปด้วย (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2560)

1. การแก้ปัญหา เป็นความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา คิดวิเคราะห์ วางแผนแก้ปัญหา และเลือกใช้วิธีการที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ พร้อมทั้งถูกต้อง ชัดเจน

2. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถในการใช้รูปภาพและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมาย สรุปผล และนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจน

3. การเชื่อมโยง เป็นความสามารถในการใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื้อหาต่าง ๆ หรือศาสตร์อื่น ๆ และนำไปใช้ในชีวิตจริง

4. การให้เหตุผล เป็นความสามารถในการให้เหตุผล รับฟังและให้เหตุผลสนับสนุน หรือโต้แย้งเพื่อนำไปสู่การสรุป โดยมีข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์รองรับ

5. การคิดสร้างสรรค์ เป็นความสามารถในการขยายแนวคิดที่มีอยู่เดิม หรือสร้างแนวคิดใหม่เพื่อปรับปรุง พัฒนาองค์ความรู้

แนวคิดดังกล่าว สอดคล้องกับ NCTM (2000) ได้ให้ข้อเสนอแนะในการจัดการเรียนรู้ซึ่งควรเน้นให้นักเรียนได้แก้ปัญหา ให้เหตุผลและพิสูจน์ นำเสนอ สื่อสาร และเชื่อมโยงกับวิถีคิดของนักเรียน พร้อมทั้งส่งเสริมให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการจัดการเรียนรู้ พัฒนาความคล่องแคล่วและสร้างความรู้เข้าใจโมทัศน์ที่ถูกต้อง

National Research Council (2001) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเรียนรู้คณิตศาสตร์และอิทธิพลต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนพบว่า การเรียนรู้ของนักเรียนจะประสบความสำเร็จนั้นขึ้นอยู่กับ 5 องค์ประกอบดังนี้

- ❖ เข้าใจแนวคิด เป็นความเข้าใจเกี่ยวกับการดำเนินการ ความสัมพันธ์ และการเปรียบเทียบมโนทัศน์ต่าง ๆ
- ❖ คล่องแคล่ว เป็นทักษะในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลาย มีความยืดหยุ่น และมีประสิทธิภาพและเหมาะสม
- ❖ กลวิธีที่มีประสิทธิภาพ เป็นความสามารถในการใช้สูตร หรือใช้สมการ หรือตัวแทนในการแก้ปัญหาที่ดี
- ❖ มีเหตุผล เป็นความสามารถในการคิดเชิงตรรกะ การไตร่ตรอง การอธิบาย และการอ้างเหตุผล
- ❖ มีนิสัยรักการเรียนรู้ เป็นนิสัยที่ชอบคณิตศาสตร์ โดยคิดว่าคณิตศาสตร์มีความสมเหตุสมผล มีประโยชน์และใช้ได้จริง ตลอดจนมีความขยันหมั่นเพียรในการเรียนรู้คณิตศาสตร์

CCSSO (2010) ได้สรุปคำแนะนำของ NCTM และ National Research Council ออกมาเป็น 8 แนวทางในการพัฒนานักเรียนให้เห็นถึงความเข้าใจและสามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และสิ่งที่ครูต้องตระหนักในการช่วยเหลือนักเรียนมีดังนี้

- ❖ เข้าใจปัญหาและแก้ไขปัญหา เพื่อให้เข้าใจปัญหา นักเรียนจำเป็นต้องเรียนรู้วิธีการวิเคราะห์ข้อมูล ตัวแปร และความสัมพันธ์ของเงื่อนไขในปัญหา โดยให้นักเรียนสามารถเข้าใจสถานการณ์และระบุถึงวิธีการแก้ปัญหาได้ สำหรับวิธีการจัดการเรียนรู้ที่ช่วยให้นักเรียนเข้าใจปัญหานั้น อาจใช้สื่อจริง วาดภาพ ตาราง หรือเขียนข้อมูลที่สัมพันธ์กัน เมื่อนักเรียนรู้จักกลวิธีต่าง ๆ ที่ช่วยให้เข้าใจปัญหาแล้ว ควรกระตุ้นให้นักเรียนมีความมุ่งมั่นในการแก้ปัญหา และอาจตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนและประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน
- ❖ ให้เหตุผลเชิงนามธรรมและเชิงปริมาณ เป็นที่รับรู้ว่าคุณคณิตศาสตร์ในระดับสูงจะมีความเป็นนามธรรมค่อนข้างสูง โดยในระดับประถมศึกษาชั้นนั้นยังสามารถอธิบายได้ในรูปธรรม ครูควรสนับสนุนพัฒนาการของนักเรียนโดยเมื่อกำหนดสถานการณ์ต่าง ๆ ควรให้นักเรียนใช้ตัวแทน หรือสัญลักษณ์ต่าง ๆ สื่อสารสิ่งที่ตนเองเข้าใจ เช่น ต้นไม้ ต้นหนึ่งมีความสูงเป็นสี่เท่าของอีกต้นหนึ่ง เมื่อนักเรียนวาดรูปแสดงความเข้าใจ ควรกระตุ้นให้นักเรียนเชื่อมโยงสิ่งที่นักเรียนเข้าใจด้วยสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ โดยแนวคิดพื้นฐานของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

อาจให้นักเรียนเขียนนิพจน์  $4 \times b$  เมื่อ  $b$  แทนความสูงของต้นไม้ที่เตี้ยกว่า เมื่อ นักเรียนได้รับการฝึกแบบนี้ซ้ำ ๆ นักเรียนจะสามารถสื่อสารด้วยภาษาหรือ สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง

- ❖ สร้างข้อขัดแย้งและอภิปรายแนวคิดของเพื่อน สำหรับแนวปฏิบัตินี้จะเน้นย้ำถึงความสำคัญในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในการปรับแนวคิดและแก้ไขแนวคิดรวมถึงความสามารถในการตอบโต้หรือให้ความคิดเห็นแนวคิดของผู้อื่น กระตุ้นให้นักเรียนตรวจสอบกลวิธีของเพื่อนด้วยกัน และเป็นการเรียนรู้กลวิธีที่แตกต่างกับความคิดของตนเอง ซึ่งการตรวจสอบกลวิธีแบบนี้จะช่วยฝึกการให้เหตุผลของนักเรียนแต่ละคนอีกด้วย
- ❖ ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ การแก้ปัญหาต่าง ๆ ของคณิตศาสตร์นั้นนิยมใช้แบบจำลอง แบบจำลองที่ว่าไปได้หลากหลาย เช่น เมื่อนักเรียนเจอสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ อาจเปลี่ยนสถานการณ์นั้นเป็นนิพจน์หรือสมการทางคณิตศาสตร์ สิ่งเหล่านี้ก็เรียกได้ว่าเป็นแบบจำลอง และทุกครั้งที่นักเรียนเขียนแบบจำลอง ครูควรกระตุ้นด้วยคำถามและให้นักเรียนหาคำตอบ และเน้นย้ำถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ
- ❖ ใช้เครื่องมือที่เหมาะสมและมีประสิทธิภาพ นักเรียนควรฝึกการใช้กลวิธีต่าง ๆ ในการแก้ปัญหา และปัญหาบางปัญหาอาจแก้ได้หลากหลายวิธี ควรฝึกให้นักเรียนหาวิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด
- ❖ ตั้งใจและแม่นยำ ในการสื่อสารความคิดของนักเรียนจำเป็นต้องให้นักเรียนอธิบายแนวคิด เหตุผลของตนเองอย่างชัดเจน เช่น สามารถอธิบายได้ว่าทำไมสถานการณ์นี้ต้องใช้การคูณ หรือทำไมสถานการณ์นี้ต้องแก้ปัญหาโดยใช้ตาราง ซึ่งครูจะเห็นความตั้งใจในการหาคำตอบของนักเรียน
- ❖ ค้นหาและใช้ประโยชน์จากโครงสร้างที่คุ้นเคย นักเรียนจะมองวิธีการแก้ปัญหาหรือรูปแบบการแก้ปัญหามาจากปัญหาที่เคยพบ โดยบางครั้งอาจลืมนึกไปว่าเงื่อนไขหรือบริบทนั้นไม่สามารถแก้ได้โดยใช้กลวิธีแบบเดิม ครูอาจนำเสนอปัญหาที่มีการเพิ่มเงื่อนไขเพื่อให้นักเรียนตระหนักถึงวิธีการแก้ปัญหาหรือรูปแบบการแก้ปัญหานั้น นักเรียนนำมาเป็นโครงสร้างในการแก้ปัญหา
- ❖ ค้นหาและให้เหตุผล เมื่อเจอสถานการณ์คุ้นเคยซ้ำ ๆ ในการจัดการเรียนรู้ครูมักยกปัญหาหรือสถานการณ์ที่นักเรียนอาจเคยเจอ หรือสามารถหาคำตอบสำเร็จแล้ว เมื่อนักเรียนเจอกับปัญหาที่คุ้นเคยอาจทำให้นักเรียนสามารถสร้างโมเดลขึ้นได้ด้วยตนเอง เช่น จำนวนนับใดคูณกับ 0 ผลคูณที่ได้จะเท่ากับ 0 แต่สิ่งที่ครูต้องระวังคือ

แนวคิดพื้นฐานของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

การสรุปมโนทัศน์ที่ผิดพลาด เช่น นักเรียนมักคิดว่าผลคูณที่ได้จากการคูณจำนวนสองจำนวนจะมากขึ้นเสมอ ซึ่งในข้อสรุปนี้จะไม่จริงเสมอไปเมื่อจำนวนนั้นเป็นเศษส่วนหรือทศนิยม

แม้ว่าปัจจุบันครูจะจัดการเรียนรู้ให้นักเรียนเรียนรู้ด้วยความเข้าใจ แต่ในสถานการณ์ปัจจุบันที่เทคโนโลยี และความเจริญก้าวหน้าที่เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ทำให้การติดต่อสื่อสารและเผยแพร่ข้อมูลผ่านทางช่องทางต่าง ๆ สามารถทำได้ง่ายและรวดเร็ว โดยใช้สื่ออุปกรณ์ที่ทันสมัย การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ก็เช่นกัน ต้องมีการปรับปรุงและปรับตัวให้เข้ากับบริบททางสังคมและเทคโนโลยีที่เปลี่ยนแปลงไป ซึ่งจำเป็นต้องอาศัยสื่อเทคโนโลยีสารสนเทศมาประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนรู้ที่น่าสนใจ สามารถนำเสนอเนื้อหาได้อย่างถูกต้อง ชัดเจน ส่งเสริมการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจ เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนรู้และช่วยลดภาระงานบางอย่างทั้งนักเรียนและครูได้ เช่น การใช้เครือข่ายสังคม (Social network : line , facebook , twitter) โดยการนำเทคโนโลยีเหล่านี้มาผสมผสานกับการจัดการเรียนรู้ หรือบางครั้งนำมาติดตามภาระงานที่มอบหมายหรือใช้ติดต่อสื่อสารกันระหว่างนักเรียน ครูและผู้ปกครองได้อย่างสะดวกรวดเร็ว ทุกที่ทุกเวลา ทั้งนี้ครูและผู้ที่เกี่ยวข้องกับการจัดการศึกษาควรบูรณาการและประยุกต์ใช้สื่อเทคโนโลยีสารสนเทศในการจัดการเรียนรู้เพื่อช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ มีความสามารถในการประยุกต์ใช้เทคโนโลยีเพื่อการปฏิบัติงานอย่างมีประสิทธิภาพและหลากหลาย ตลอดจนพัฒนาทักษะการคิดอย่างมีวิจารณญาณ และสถานศึกษาควรมีบทบาทอย่างยิ่งในการจัดสิ่งอำนวยความสะดวก ตลอดจนส่งเสริมให้ครูและนักเรียนได้มีโอกาสในการใช้สื่อเทคโนโลยีสารสนเทศในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้มากที่สุด เพื่อจัดสภาพแวดล้อมที่เอื้ออำนวยต่อการใช้สื่อเทคโนโลยีสารสนเทศให้มากที่สุด สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2564) มีข้อเสนอแนะสถานศึกษาควรดำเนินการสำหรับการนำเทคโนโลยีมาใช้ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ดังนี้

- ❖ จัดให้มีห้องปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์ที่มีสื่อ อุปกรณ์เทคโนโลยีต่าง ๆ เช่น ระบบอินเทอร์เน็ต คอมพิวเตอร์ โปรเจคเตอร์ให้เพียงพอกับจำนวนนักเรียน
- ❖ จัดเตรียมสื่อ เครื่องมือประกอบการสอนในห้องเรียนเพื่อให้ครูได้ใช้ในการนำเสนอเนื้อหาในบทเรียน เช่น คอมพิวเตอร์ โปรเจคเตอร์ เครื่องฉายทึบแสง เครื่องขยายเสียง เป็นต้น
- ❖ จัดเตรียมระบบสื่อสารแบบไร้สายที่ปลอดภัยโดยไม่มีค่าใช้จ่าย (secured-free WIFI) ให้เพียงพอ กระจายทั่วถึงครอบคลุมพื้นที่ในโรงเรียน
- ❖ ส่งเสริมให้ครูนำสื่อเทคโนโลยีมาใช้ในการจัดการเรียนรู้ รวมทั้งสนับสนุนให้ครูเข้ารับการอบรมอย่างต่อเนื่อง

- ❖ ส่งเสริมให้นักเรียนและผู้ปกครองได้ตรวจสอบ ติดตามผลการเรียน การเข้าชั้นเรียน ผ่านระบบอินเทอร์เน็ต เช่น ผู้ปกครองสามารถเข้าเว็บมาดูล้องวิดีโอวงจรปิด (CCTV) การจัดการเรียนรู้ในห้องเรียนที่บุตรของตนเองเรียนอยู่ได้

ครูในฐานะที่เป็นผู้ถ่ายทอดความรู้ให้กับนักเรียนจำเป็นต้องศึกษาและนำสื่อเทคโนโลยีสารสนเทศมาประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนรู้ให้สอดคล้อง เหมาะสมกับสภาพแวดล้อม และความพร้อมของโรงเรียน ครูควรมีบทบาทดังนี้

1. ศึกษาหาความรู้เกี่ยวกับสื่อเทคโนโลยีใหม่ ๆ เพื่อนำมาประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนรู้
2. จัดหาสื่อ อุปกรณ์ โปรแกรม แอปพลิเคชันต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมเพื่อนำเสนอเนื้อหาให้นักเรียนสนใจและเข้าใจมากยิ่งขึ้น
3. ใช้สื่อเทคโนโลยีประกอบการสอน เช่น ใช้โปรแกรม Power point ในการนำเสนอเนื้อหา ใช้ Line และ Facebook ในการติดต่อสื่อสารกับนักเรียนและผู้ปกครอง
4. ส่งเสริมให้นักเรียนได้ใช้สื่อเทคโนโลยีมาใช้ในการเรียน เช่น เครื่องคิดเลข โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) และ GeoGebra เป็นต้น
5. ปลุกจิตสำนึกให้นักเรียนรู้จักใช้สื่อเทคโนโลยีอย่างถูกต้อง เหมาะสมกับเวลาและสถานที่การใช้งานอย่างประหยัด เพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุด

การนำสื่อเทคโนโลยีสารสนเทศมาประยุกต์ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับชั้นประถมศึกษา เพื่อให้นักเรียนมีความรู้ มีทักษะ บรรลุผลตามจุดประสงค์ของหลักสูตร และสามารถนำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ทั้งในการเรียนและใช้ในชีวิตจริง ครูควรจัดหาและศึกษาเกี่ยวกับสื่อ อุปกรณ์และเครื่องมือที่ควรมีไว้ใช้ในห้องเรียน เพื่อนำเสนอบทเรียนที่น่าสนใจ สร้างเสริมความเข้าใจของนักเรียน ทำให้การสอนมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

### การจัดการเรียนรู้ผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์มีการเปลี่ยนแปลงไปตามยุคสมัย ในอดีตนักเรียนจะเรียนเลขคณิต (Arithmetic) ในห้องเรียนโดยมีครูเป็นคนสอน แต่ปัจจุบันเทคโนโลยีเข้ามามีบทบาทการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์จึงเปลี่ยนไป นักเรียนสามารถสืบค้นข้อมูลเกี่ยวกับความรู้ใหม่ ๆ จากอินเทอร์เน็ต เช่น แฟร็กทัล (Fractals) หรือ จำนวนฟีโบนัชชี (Fibonacci Numbers) เป็นต้น เครือข่ายองค์กร

ความร่วมมือเพื่อทักษะการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 (Partnership for 21st century Skills) หรือที่มีชื่อว่า เครือข่ายที่ P21 ได้พัฒนาวิสัยทัศน์เพื่อความสำเร็จของนักเรียนในระบบเศรษฐกิจโลกใหม่ ซึ่งประกอบไปด้วยทักษะที่จำเป็นในศตวรรษที่ 21 ประกอบด้วย 1) ทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม 2) ทักษะด้านสารสนเทศ สื่อและเทคโนโลยี และ 3) ทักษะชีวิตและอาชีพ (วิจารณ์ พานิช, 2555)

จากแนวคิดดังกล่าวนี้ทำให้การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ต้องเปลี่ยนไป การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในศตวรรษที่ 21 จึงกลายเป็นการจัดการเรียนรู้เพื่อปวงชน (Mathematics for All) ที่ทำให้นักเรียนเกิด ความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ (Mathematics Literacy) องค์การเพื่อความร่วมมือและการพัฒนาทางเศรษฐกิจ หรือ OECD (2013) ได้อธิบายความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์เป็นสมรรถนะของบุคคลในการสร้าง (formulate) การใช้ (employ) และการแปลความ (interpret) ทางคณิตศาสตร์ในบริบทต่าง ๆ รวมถึงการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการใช้มนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ขั้นตอน ข้อเท็จจริง เครื่องมือในการอธิบาย หรือบรรยาย และทำนายปรากฏการณ์ต่าง ๆ โดยความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์จะเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้นักเรียนรับรู้ถึงบทบาทของคณิตศาสตร์ในสถานการณ์จริง และเป็นพลเมืองที่มีความคิด มีความหวังใฝ่ และสร้างสรรค์สังคม จากความหมายความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์จึงเป็นสิ่งจำเป็นที่ครูต้องมีการสอดแทรกในห้องเรียน ครูควรยกตัวอย่างสถานการณ์ต่าง ๆ เพื่อให้นักเรียนสามารถระบุสถานการณ์ที่สำคัญของปัญหา กระตุ้นการหาข้อมูล สำรองตรวจสอบ และนำไปสู่การแก้ปัญหา นักเรียนต้องมีทักษะหลายอย่าง เช่น ทักษะการคิดและการให้เหตุผล ทักษะการโต้แย้งการสื่อสาร ทักษะการสร้างตัวแบบ การตั้งปัญหาและการแก้ปัญหา การนำเสนอ การใช้สัญลักษณ์ การดำเนินการ เพราะในปัจจุบันนั้นความรู้ในเนื้อหาคณิตศาสตร์ล้วน ๆ ไม่เพียงพอต่อการแก้ปัญหา (ตีรวิชัย ทินประภา, 2557)

จากความฉลาดรู้ด้านคณิตศาสตร์ที่เป็นเครื่องมือหรือตัวที่ช่วยให้นักเรียนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งเรียกกระบวนการเหล่านี้ว่า คิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (matheematising) โดยเป็นกระบวนการที่นักเรียนนำความรู้มาใช้ในความพยายามที่จะแก้ปัญหา นั่นถือว่าเป็น สมรรถนะทางคณิตศาสตร์ สิ่งเหล่านี้จะสะท้อนถึงวิธีที่นักเรียนใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหา ซึ่งสมรรถนะที่จำเป็นที่นักเรียนจะต้องเกิดมี 3 ประการ ได้แก่ 1) การผลิตขึ้นมาใหม่ (Reproduction) 2) การเชื่อมโยง (Connection) และ 3) การสะท้อนและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ (Reflection and Communication) Philipp and Vincent (2003) และ Pesek and Kirshner (2002) กล่าวว่า หลายครั้งที่ครูจะเริ่มต้นด้วยการสอนแล้วให้นักเรียนทำตาม ซึ่งวิธีการดังกล่าวจะไม่สามารถช่วยให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียนได้ การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพควรเป็นการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ผ่านการแก้ปัญหา (สถานการณ์หรือกิจกรรม) หมายความว่านักเรียนแก้ปัญหาเพื่อเรียนรู้คณิตศาสตร์ ไม่ใช่เรียนรู้คณิตศาสตร์เพื่อแก้ปัญหา โดยการ

เรียนรู้ผ่านบริบท ปัญหาจริง และแบบจำลองต่าง ๆ เมื่อนักเรียนเจอสิ่งเหล่านี้ ควรเรียนรู้ การแก้ปัญหาด้วยตนเอง แล้วสร้างแนวคิด หรือโมเดลด้วยตนเอง จีรนันท์ พิงกลิ่น (2555) ที่ได้ ศึกษาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาที่มีความสอดคล้องกับชีวิตจริงของนักเรียนเป็นฐานที่มี ครูเป็นผู้ชี้แนะเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้และแก้ปัญหาผ่านการทำงานร่วมกัน พบว่าวิธีการ ดังกล่าวช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้สูงขึ้น จากแนวคิด ดังกล่าวสอดคล้องกับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของประเทศสิงคโปร์ที่เน้นการแก้ปัญหา ซึ่งทำ ให้ผลการเรียนประสบความสำเร็จ ไม่ว่าจะเป็นผลในระดับนานาชาติ เช่น PISA ก็อยู่ในลำดับที่ดี สำหรับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในประเทศไทยอาจมีปัญหาบ้าง เพราะครูบางคนยังใช้วิธีการ จัดการเรียนรู้แบบเดิมที่เน้นการเรียนรู้เนื้อหา ก่อน โดยละเลยการนำความรู้ไปใช้จริง

การจัดการเรียนรู้ผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ควรมีความค้ำประกันดังนี้

- ❖ ครูควรสนใจกลวิธีในการแก้ปัญหาของนักเรียน เมื่อแก้ปัญหาสำเร็จ ครูควรให้ นักเรียนสะท้อนแนวคิด หรืออธิบายแนวคิด พร้อมทั้งแนะนำกลวิธีเพิ่มเติม หรือ บางครั้งอาจเสนอกลวิธีที่มีประสิทธิภาพที่ดีกว่า
- ❖ ครูควรเน้นทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ในขณะที่นักเรียนแก้ปัญหาควร ส่งเสริมให้นักเรียนได้ใช้ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ เช่น การให้ เหตุผล การสื่อสาร การเชื่อมโยง หรือการนำเสนอด้วยวิธีการต่าง ๆ ซึ่งสิ่งเหล่านี้ นักเรียนควรได้รับการส่งเสริมและสนับสนุน และได้เรียนรู้กับการฝึกฝนตลอดเวลา (CCSSO, 2010)
- ❖ ครูควรพัฒนาความมั่นใจของนักเรียน ทุกครั้งที่ครูยกตัวอย่างปัญหา ครูจะคาดหวัง ให้นักเรียนแก้ปัญหาหรือหาคำตอบได้ แต่บางครั้งปัญหาที่มีความซับซ้อนมากเกินไป ครูจึงควรเสริมแรงทางบวก หรือใช้คำพูดที่ส่งเสริมให้นักเรียนมีกำลังใจในการ แก้ปัญหา
- ❖ ครูควรใช้บริบทหรือสถานการณ์มาช่วยอธิบาย บางปัญหาอาจเป็นสถานการณ์ใหม่ที่ นักเรียนไม่คุ้นเคย ครูอาจต้องย่อปัญหาให้เล็กลง หรือยกตัวอย่างเพิ่มเติม หรือใช้ ปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคยมาช่วยอธิบาย เพื่อช่วยให้นักเรียนสามารถเข้าใจเงื่อนไข ต่าง ๆ ในปัญหาใหม่ที่กำลังพบเจอ (Fosnot and Dolk, 2001)
- ❖ เมื่อนักเรียนแก้ปัญหาสำเร็จ ครูอาจขยายปัญหา เช่น จะเกิดอะไรถ้า... คำถาม เหล่านี้จะช่วยให้ปัญหาที่นำมาใช้ในการจัดการเรียนรู้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น และ ช่วยพัฒนากระบวนการคิดอย่างหลากหลายเมื่อมีเงื่อนไขเพิ่มเติม

- ❖ ครูควรส่งเสริมการทำงาน การแก้ปัญหาเป็นกลุ่มจะช่วยให้นักเรียนแลกเปลี่ยนเรียนรู้แนวคิดของตนเองกับเพื่อน โดยนักเรียนจะสื่อสารด้วยภาษาที่สามารถเข้าใจในกลุ่มของตนเอง และช่วยให้การแก้ปัญหามีประสิทธิภาพ
- ❖ ครูควรสร้างบรรยากาศให้นักเรียนมีความสุข และสนุกในการเรียนรู้ เมื่อครูสร้างบรรยากาศที่เหมาะสมกับการเรียนรู้แล้วจะทำให้นักเรียนสนุก สามารถเรียนรู้พร้อมทั้งแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพและสร้างสรรค์ และมีส่วนร่วมในกิจกรรมต่าง ๆ

Van de Walle และคณะ (2014) กล่าวว่าสิ่งสำคัญของการจัดการเรียนรู้แบบนี้คือการที่นักเรียนอธิบายแนวคิดของตนเอง แต่อย่างไรก็ตามในห้องเรียนจะมีนักเรียนที่หลากหลาย ดังนั้น ครูควรเป็นคนที่ช่วยให้นักเรียนทุกคนสามารถเรียนรู้ในสิ่งเดียวกัน บางครั้งอาจมีนักเรียนบางคนใช้เวลาในการเรียนรู้ที่ต่างกัน สำหรับบทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้ผ่านการแก้ปัญหามีข้อเสนอแนะดังนี้

- ❖ ครูควรอธิบายภาษาและใช้สัญลักษณ์ต่าง ๆ อย่างชัดเจน เช่น มากที่สุดแต่น้อยกว่า 5 หรือ ตั้งแต่ 2 ถึง 7 นักเรียนบางคนเจอข้อความเหล่านี้ไม่สามารถเปลี่ยนเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้
- ❖ ครูควรอธิบายถึงกลวิธีในการแก้ปัญหามากมาย และมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหา บางครั้งปัญหาบางปัญหาที่นำเสนอให้นักเรียนบางคนอาจไม่เข้าใจ ครูควรมีกลวิธีในการแก้ปัญหามากมายเพื่อนำเสนอให้นักเรียนบางคน เช่น ให้นักเรียนอธิบายการหาผลลบของ 1,000 – 369 เมื่อนักเรียนอธิบายกลวิธีของตนเองแล้ว ครูอาจเสนอกลวิธีที่แตกต่าง โดยบวก 1 เข้าไปในตัวลบ จาก 369 จะได้ 370 แล้วนำไปลบจาก 1,000 แล้วนำผลลบที่ได้บวกไปอีก 1 วิธีการนี้อาจจะไม่เหมาะกับนักเรียนบางคน หรือนักเรียนบางคนไม่เข้าใจว่าทำไมต้องบวก 1 ใน 369 ก่อนแล้วค่อยนำมาลบ ซึ่งครูเสนอเป็นทางเลือก นักเรียนอาจไม่เลือกกลวิธีในการแก้ปัญหานี้ในการหาคำตอบครั้งต่อไปก็ได้
- ❖ ควรเชื่อมโยงความรู้ที่ได้กับแนวคิดเดิม เมื่อครูเปิดโอกาสให้นักเรียนแสดงกลวิธีในการแก้ปัญหานั้น อาจใช้คำถามเพื่อตรวจสอบความรู้ที่ได้ และความรู้ที่ใช้ในการแก้ปัญหา หรืออาจใช้คำถามที่ว่า ถ้าไม่ใช่เรื่องนี้ สามารถใช้ความรู้เรื่องใดได้อีกบ้างในการแก้ปัญหา

สำหรับการแก้ปัญหา นักเรียนอาจใช้กลวิธีในการแก้ปัญหามากมาย เช่น ภาพ ตาราง สัญลักษณ์ หรืออธิบายแนวคิดง่าย ๆ ได้ Van de Walle และคณะ (2014) อธิบายว่าในระหว่างการแก้ปัญหานั้น จะมีการเรียนรู้อยู่สามระยะดังนี้ ขั้นเริ่มต้น ขั้นปฏิบัติ และขั้นสรุป แต่ละขั้นมีรายละเอียดดังตาราง 1.1

## ตาราง 1.1 ระยะการเรียนรู้การแก้ปัญหาของนักเรียน

ที่มา Van de Walle และคณะ (2014)

ขั้นเริ่มต้น	ควรเริ่มต้นจากปัญหาง่าย ๆ หรือเชื่อมโยงกับความรู้เดิม หรือประสบการณ์เดิม หรือปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคย และสามารถคาดการณ์คำตอบล่วงหน้าได้อย่างมีเหตุผล
	ให้นักเรียนเล่าถึงความเข้าใจของปัญหาตามความเข้าใจของตนเอง
	ให้นักเรียนแก้ปัญหาด้วยตนเอง เป็นคู่ หรือกลุ่ม เล็ก ๆ พร้อมทั้งให้นักเรียนแลกเปลี่ยนแนวคิดง่าย ๆ หรือแผนที่ใช้ในการแก้ปัญหา
ขั้นปฏิบัติ	ครูคอยสังเกตและช่วยเหลือนักเรียนในการแก้ปัญหา
	ใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนอธิบายวิธีการที่จะลงมือทำ เช่น “บอกได้ไหมว่าทำไมต้องบวกด้วย 4” หรือ “อธิบายได้ไหมว่าทำไมต้องเปลี่ยนหน่วยก่อนแก้ปัญหา”
	หากนักเรียนแก้ปัญหาได้สำเร็จ ควรใช้คำถามเพื่อกระตุ้นนักเรียน เช่น “มีวิธีการอื่นอีกไหมในการแก้ปัญหา” หรือ “ถ้าครูเพิ่มเงื่อนไขลงไป คำตอบยังเป็นแบบเดิมหรือไม่”
ขั้นสรุป	ครูควรเพิ่มเติมกลวิธีในการแก้ปัญหภายใต้อาณัติและเวลาที่กำหนด
	ครูควรสนับสนุนแนวคิดของนักเรียน และสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนแต่ละคน ในการอธิบายแนวคิดนั้นครูไม่ควรประเมินผลนักเรียนแต่ควรประเมินพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนก่อน
	ครูต้องนำแนวคิดของนักเรียนที่ไม่เป็นทางการมาอธิบายอย่างเป็นทางการ และมีเหตุผลทางคณิตศาสตร์ และบางครั้งอาจมีคำศัพท์ หรือสัญลักษณ์ใหม่ที่เกิดขึ้นระหว่างการเรียนรู้ สิ่งนี้ครูควรให้นักเรียนจดจำเพื่อนำมาใช้ในการเรียนรู้ครั้งต่อไป

ขั้นเริ่มต้น เป็นขั้นเตรียมความพร้อมในการแก้ปัญหา เป็นขั้นในการทำความเข้าใจปัญหา วิเคราะห์ข้อมูลที่ได้ วางแผน และเลือกกลวิธีที่จะใช้ในการแก้ปัญหา ในขั้นนี้จะสามารถระบุได้ว่านักเรียนคนใดเข้าใจปัญหา หรือไม่เข้าใจปัญหา หรือมีความเข้าใจปัญหาแต่อาจยังวางแผนแก้ปัญหาไม่ได้

ขั้นปฏิบัติ ในขั้นนี้นักเรียนต้องดำเนินการสำรวจปัญหา อาจจะสำรวจคนเดียวหรือเป็นคู่หรือเป็นกลุ่ม ที่สำคัญในขั้นตอนนี้ครูยังไม่ประเมินผลนักเรียน แต่เป็นการให้นักเรียนลงมือปฏิบัติโดยมีครูคอยแนะนำหรือช่วยเหลือ

ขั้นสรุป ในขั้นนี้จะให้นักเรียนได้แลกเปลี่ยนเรียนรู้แนวคิดกับเพื่อน ๆ อภิปราย พร้อมทั้งเรียนรู้แนวคิดของเพื่อน ๆ และนำเสนอวิธีการที่มีประสิทธิภาพที่สุด ในการแลกเปลี่ยนเรียนรู้จะช่วยให้นักเรียนบางคนเกิดการเรียนรู้วิธีการต่าง ๆ หรือแนวคิดที่ตนเองอาจคาดไม่ถึง สำหรับนักเรียนบางคนอาจยังไม่สามารถแก้ปัญหาได้ ก็สามารถแลกเปลี่ยนแนวคิดที่วางแผนจะแก้ปัญหาได้ เพื่อน ๆ

ร่วมชั้นเรียนอาจมีคำแนะนำหรือช่วยให้สามารถแก้ปัญหาได้อย่างบรรลุผล กระบวนการเหล่านี้ นอกจากจะเรียนรู้คณิตศาสตร์แล้วยังสอนให้นักเรียนยอมรับ และรับฟังความคิดของบุคคลอื่น พร้อมทั้งสอนทักษะการอยู่ร่วมกัน สุดท้ายเมื่อนักเรียนได้มีการแลกเปลี่ยนเรียนรู้แล้วครูควรให้นักเรียนเขียน หรือบันทึกกลวิธีต่าง ๆ

การจัดการเรียนรู้ผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นไม่ใช่เรื่องใหม่ เพราะในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ส่วนมากมีการนำความรู้ไปแก้ปัญหา อย่างไรก็ตามแนวคิดที่นิยมใช้กันมากที่สุดในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์คือกระบวนการแก้ปัญหตามแนวคิดโพลยา โดยโพลยาเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฮังการี ซึ่งได้เขียนหนังสือ How to solve it ในปี ค.ศ.1945 ที่อธิบายกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้นตอน กล่าวโดยสรุปดังนี้ (Polya, 1945)

1. ทำความเข้าใจปัญหา (Understanding the problem) เป็นขั้นตอนแรกที่นักเรียนต้องหว่าปัญหามีเงื่อนไข หรือมีข้อมูลใดบ้าง และปัญหานี้ต้องการทราบอะไรหรือให้ทำอะไร
2. วางแผนแก้ปัญหา (Devising a plan) เป็นขั้นตอนที่นักเรียนต้องนำข้อมูลที่ได้จากขั้นแรกมาวางแผน การวางแผนนั้นอาจใช้กลวิธีต่าง ๆ หรือบางปัญหาอาจแก้ได้มากกว่า 1 วิธี
3. ดำเนินการตามแผน (Carrying out the plan) เป็นขั้นตอนที่นำแผนที่วางมาดำเนินการ
4. ตรวจสอบ (Looking back) เป็นขั้นตอนสุดท้ายก่อนที่นักเรียนจะตอบ โดยนักเรียนต้องนำคำตอบที่ได้ไปตรวจสอบว่าสอดคล้องกับเงื่อนไข หรือข้อตกลงที่โจทย์กำหนดมาหรือไม่ ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ก็สามารถตอบได้ ถ้าไม่สอดคล้องก็อาจต้องไปพิจารณาว่าผิดพลาดในขั้นใด บางครั้งอาจเกิดจากการวางแผน หรือการดำเนินการตามแผนที่ผิดพลาด

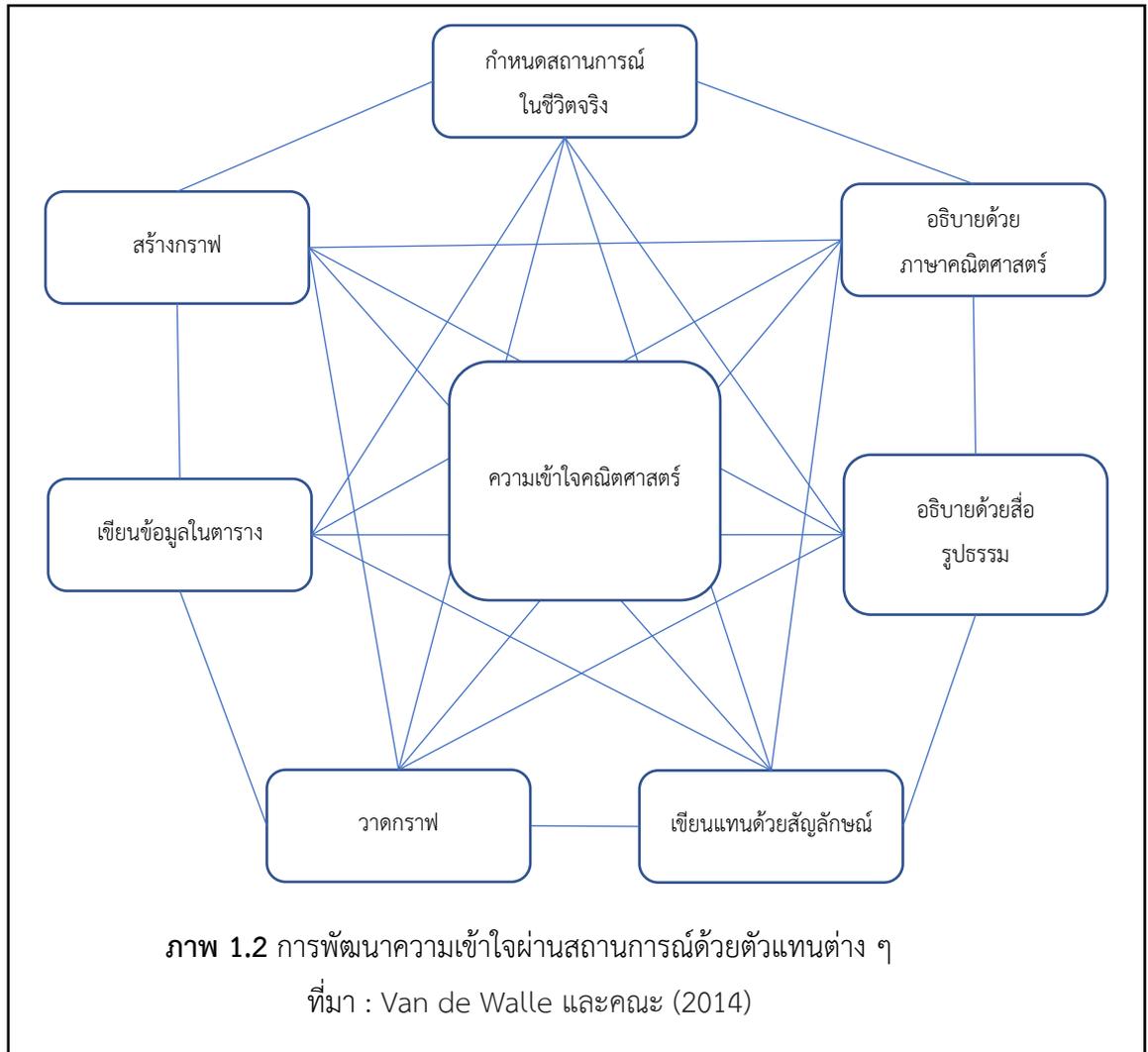
แม้ว่าแนวคิดของโพลยาจะมีมานาน แต่ก็ยังได้รับการยอมรับและนำมาประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตลอดเวลา โดยนำแนวคิดของโพลยามาผสมผสานกับวิธีการสอน เทคนิคการสอน สื่อการสอน หรือเทคโนโลยีสมัยใหม่ จากผลการวิจัยต่าง ๆ พบว่าแนวคิดของโพลยาเมื่อนำมาผสมผสานกับวิธีการต่าง ๆ ช่วยให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ดีขึ้น มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ สามารถส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาที่ดีขึ้น อีกทั้งนักเรียนยังพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้การแก้ปัญหาผ่านเทคนิคต่าง ๆ อีกด้วย (วิไลลักษณ์ สีประโคน, 2565; วรณิกา อ่อนน้อม, 2564; วรางคณา สำอางค์, 2560; นัชชนัน แก้วประเสริฐสุข, 2557) แม้การเรียนรู้อผ่านการแก้ปัญหจะเป็นที่ยอมรับและเป็นประโยชน์กับนักเรียนแต่สิ่งที่ควรระวังคือการเลือกปัญหา ครูควรเลือกปัญหาที่ดีที่จะนำมาใช้ในการจัดการเรียนรู้ เพราะแต่ละปัญหาที่นำมาใช้จะให้คุณค่า และประเด็นที่แตกต่างกัน โดยมีข้อเสนอแนะในการนำปัญหามาใช้ดังนี้

- ❖ ควรเป็นปัญหาที่ดึงดูดความสนใจของนักเรียน เหมาะสมกับระดับชั้น ความรู้พื้นฐาน และสามารถนำไปใช้ในชีวิตจริงได้มากที่สุด เพราะปัญหาที่สอดคล้องกับชีวิตจริงจะสามารถส่งเสริมให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ดี (นิตาวรรณ ทองไทย, 2562)
- ❖ ปัญหาที่ดีควรมีข้อมูลที่มากพอที่ช่วยให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ หรือบางครั้งปัญหาที่ครูกำหนดควรมีข้อมูลที่มากเกินไปจนความจำเป็น เพื่อให้ให้นักเรียนสามารถตัดสินใจได้ว่าข้อมูลใดเป็นข้อมูลสำคัญที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา
- ❖ ควรเป็นปัญหาที่ส่งเสริมการอภิปรายแนวคิด หรือคำตอบที่มากกว่า 1 คำตอบ หากกลวิธีการแก้ปัญหาของนักเรียนไม่ได้เกิดขึ้นเองตามธรรมชาติ ครูควรเสนอกลวิธีอื่น ๆ และเน้นย้ำว่าเป็นกลวิธีที่อาจทำได้ (ทางเลือก)
- ❖ บางปัญหาต้องมีการใช้สัญลักษณ์ เช่น + หรือ = ต้องเน้นย้ำการใช้ที่ระมัดระวัง เพราะนักเรียนจะใช้โดยไม่เข้าใจความหมาย และนักเรียนควรเรียนรู้ผ่านการเข้าใจก่อนจึงจะใช้สัญลักษณ์เหล่านี้ในการสื่อสาร ครูบางคนมักให้นักเรียนจำคำที่เจอบ่อย ๆ แล้วนำมาเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ เช่น เพิ่มขึ้น คือการบวก เป็นต้น
- ❖ ปัญหานั้นควรสร้างแรงกระตุ้นให้เกินการเรียนรู้สิ่งใหม่ และไม่ควรซับซ้อนเกินไป เพราะอาจทำให้นักเรียนเกิดความย่อท้อ

ในการแก้ปัญหานักเรียนบางคนจะมีวิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันหรือมีการใช้ตัวแทน (representation) ที่แตกต่างกัน ถ้านักเรียนได้มีโอกาสเจอหรือเรียนรู้ผ่านการแก้ปัญหามากขึ้นเท่าไร ก็จะทำให้เกิดการเรียนรู้ตัวแทนมากขึ้นไปด้วย และสามารถพัฒนาความเข้าใจและการแก้ปัญหาได้อีกด้วย ในประเด็นนี้ ได้อธิบายสามารถสรุปได้ดังนี้ (Clement, 2004; Lesh et al., 2003; NCTM, 2000)

- ❖ ครูควรแนะนำตัวแทนหรือแนวคิดใหม่กับนักเรียน โดยแสดงให้เห็นว่าตัวแทนที่นำเสนอมีความสำคัญอย่างไร และบางครั้งนักเรียนบางคนอาจมีความเข้าใจที่ไม่ตรงกับแนวคิดของครู ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนใช้ตัวแทนของตนเองในการแก้ปัญหา
- ❖ ส่งเสริมให้นักเรียนสร้างตัวแทนของตนเอง
- ❖ ส่งเสริมให้นักเรียนอธิบายเหตุผลของตนเองในการเลือกใช้ตัวแทน
- ❖ ส่งเสริมการแลกเปลี่ยนตัวแทนตนเองกับเพื่อน เพื่อให้เพื่อนที่ยังไม่สามารถหาตัวแทนในการแก้ปัญหาได้เรียนรู้และนำไปใช้ในการแก้ปัญหาของตนเอง
- ❖ ครูควรอำนวยความสะดวกในการอภิปรายแนวคิดของนักเรียน และเพิ่มเติมเงื่อนไขเพื่อส่งเสริมการคิดของนักเรียน

สำหรับปัญหาที่ใช้การเรียนรู้ของนักเรียนนั้น อาจเริ่มจากเรื่องราวหรือสถานการณ์ที่นักเรียนคุ้นเคย แล้วทำความเข้าใจปัญหาและแสดงความเข้าใจผ่านรูปแบบต่าง เช่น เขียนด้วยภาษาที่เข้าใจ วาดรูป เขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ วาดกราฟ หรือเขียนเป็นตาราง เพื่อแสดงความเข้าใจหรือพร้อมทั้งหาคำตอบของปัญหา (ภาพ 1.2)



แม้ว่าครูจะมีความเข้าใจเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้ เทคนิคและวิธีการต่าง ๆ เป็นอย่างดี แต่บางครั้งอาจมีเหตุการณ์ที่ทำให้การจัดการเรียนรู้ต้องมีการเปลี่ยนแปลง เช่น การแพร่ระบาดของโรคโควิด 19 การจัดการเรียนรู้จึงมีการเปลี่ยนแปลง เมื่อเกิดเหตุการณ์ดังกล่าว ครูจึงต้องหาวิธีการจัดการเรียนรู้ที่เข้ากับสถานการณ์ แต่ยังคงมีประสิทธิภาพที่ดีเสมือนนักเรียนได้เรียนรู้ผ่านตัวครูในห้องเรียน จากการศึกษาวิธีการจัดการเรียนรู้และนวัตกรรมที่เปลี่ยนไปจึงมีการใช้เทคโนโลยีเข้ามาช่วยมากขึ้น ซึ่งวิธีการจัดการเรียนรู้ที่สามารถเข้ากับสถานการณ์ได้ดีคือการจัดการเรียนรู้ออนไลน์ ลักษณะ

สำคัญของการเรียนรู้แบบออนไลน์ช่วยทำให้การเรียนรู้ของนักเรียนง่ายและสะดวกขึ้น แต่มีอินเทอร์เน็ตเข้าถึง นักเรียนก็สามารถเรียนรู้ได้ (เจริญ ภูวิจิตร, 2564) ครูในฐานะผู้ถ่ายทอดจึงต้องเรียนรู้รูปแบบการจัดการเรียนรู้ออนไลน์ ซึ่งมีโปรแกรมมากมายที่ช่วยให้การจัดการเรียนรู้แบบนี้ง่ายขึ้น และครูควรเตรียมความพร้อมให้นักเรียนปรับตัวในการเรียนรู้รูปแบบนี้ เตรียมทักษะเพื่อรับมือกับแนวทางการจัดการเรียนรู้ และครูควรมีความรู้เกี่ยวกับการใช้ดิจิทัล แพลตฟอร์ม Google Meet ที่ช่วยให้การจัดการเรียนการสอนดำเนินไปได้ และมีการนำเทคโนโลยีมาช่วยในการวัดและประเมินผล เช่น งานวิจัยของ พิชญากัท ทองม่วง (2565) ได้ที่พัฒนาการพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้แบบผสมผสานระหว่างแนวคิดคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริงร่วมกับการเรียนรู้แบบออนไลน์เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งพบว่าการจัดการเรียนรู้แบบนี้สามารถช่วยให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ที่ดีขึ้นได้ อีกทั้งยังช่วยแก้ปัญหาการจัดการเรียนรู้ในสถานการณ์ที่ไม่ปกติ

### การอภิปรายในห้องเรียน

การอภิปรายหรือการแลกเปลี่ยนแนวคิดในห้องเรียนเป็นปฏิสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นระหว่างการจัดการเรียนรู้ โดยเป็นการแลกเปลี่ยนแนวคิด การคิด หรือกระบวนการแก้ปัญหาระหว่างนักเรียนกับเพื่อน หรือนักเรียนกับครู ซึ่งอาจเป็นการแลกเปลี่ยนของนักเรียนทั้งห้อง หรือกลุ่มเล็ก ๆ จุดมุ่งหมายของการอภิปรายนั้นไม่ใช่คำตอบของปัญหาแต่เป็นการกระตุ้นและดึงดูดความสนใจของนักเรียนทุกคนให้มีความเข้าใจมากขึ้น ซึ่งการอภิปรายนี้มักเกิดจากการจัดการเรียนรู้ที่เน้นการทำงานเป็นคู่ หรือกลุ่ม ประเด็นต่อมาคือครูจัดการเรียนรู้อย่างไรให้นักเรียนได้มีโอกาสอภิปรายในห้องเรียน ซึ่งจากการศึกษา งานวิจัยทางการศึกษาคณิตศาสตร์ พบว่ากระบวนการกลุ่มหรือเทคนิคการเรียนรู้แบบร่วมมือ ไม่ว่าจะเป็น 4MAT STAD หรือ Think – Pair – Share เป็นการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนมีการอภิปราย แลกเปลี่ยนแนวคิด วิธีคิด อีกทั้งยังทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น ส่งเสริมให้นักเรียนมีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น ตลอดจนนักเรียนมีความพึงพอใจในการจัดการเรียนรู้โดยวิธีเหล่านี้ ดังนั้นครูอาจต้องใช้กระบวนการเหล่านี้ผสมผสานในการจัดการเรียนรู้ (พรพรรณ เสาร์คำเมืองดี, 2562; อุษา ภิรมย์รักษ์, 2562; กมลวรรณ ใจอารีย์, 2556)

คุณค่าของการอภิปรายแนวคิดของนักเรียน ครูไม่ควรเน้นย้ำโดยใช้คำถามเดิมมากเกินไป เพราะจะทำให้เด็กเกิดความหวาดระแวง ไม่กล้าอภิปรายแนวคิดตนเอง ครูควรใช้คำถามที่เป็นประโยชน์ที่นักเรียนสามารถอธิบายและประเมินวิธีการแก้ปัญหาของตนเอง แลกเปลี่ยนแนวทาง

การแก้ปัญหาและการคาดเดาคำตอบ วิธีการเหล่านี้เป็นวิธีการเรียนรู้ที่จะเกิดขึ้นกับนักเรียนโดยไม่รู้ตัว โดยในขณะที่นักเรียนฟังคำอธิบายจากเพื่อนจะพบมุมมองที่หลากหลายในการแก้ปัญหา และเกิดคำถามในใจตลอดเวลา เช่น ครั้งต่อไปจะทำแบบนี้ดีกว่าไหม วิธีนี้เหมาะสมกับตนเองหรือไม่ หรือวิธีนี้ไม่เหมาะสมเพราะไม่ถนัดแบบนี้ คำถามเหล่านี้จะเป็นการประเมินตนเองว่ายังขาดหรือบกพร่องในเรื่องใด และยังช่วยให้นักเรียนยอมรับแนวคิดของผู้อื่นอีกด้วย การจัดการเรียนรู้แบบนี้เป็นเรื่องที่ทำหายสำหรับครูในยุคปัจจุบันเป็นอย่างมาก และยากที่จะทำให้มีประสิทธิภาพถ้าครูไม่เข้าใจเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้แบบกลุ่ม หรือหาสถานการณ์ หรือกิจกรรมที่ไม่เหมาะสม แต่อย่างไรก็ตามครูควรวางแผนและหาวิธีการกระตุ้นให้นักเรียนแบ่งปันแนวคิดและมีส่วนร่วมซึ่งเป็นสิ่งสำคัญอย่างมาก

Van de Walle (2014) อธิบายถึงประเด็นที่ครูควรคำนึงเมื่อใช้การจัดการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการอภิปรายสามารถสรุปได้ดังนี้

1. การอธิบายแนวคิดของนักเรียนนั้นสามารถทำได้หลากหลายวิธี ครูสามารถใช้คำถามเพื่อยืนยันในสิ่งที่นักเรียนจะทำหรือคิด ตลอดจนถึงสิ่งที่นักเรียนสังเกตหรือเข้าใจในปัญหา ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนแต่ละคนมีส่วนร่วม เมื่อครูใช้คำถามจนเป็นเรื่องปกติในห้องเรียน นักเรียนจะสามารถหาแนวทาง และแนวคิดได้อย่างชัดเจน บางครั้งนักเรียนอาจไม่เข้าใจคำถาม ดังนั้น ครูควรใช้คำถามที่ชัดเจน และย้ำให้เห็นถึงความสำคัญของคำตอบที่จะนำไปใช้ในการเรียนรู้
2. เน้นการให้เหตุผล บางคำถามนั้นครูมักสนใจแต่คำตอบว่าถูกหรือผิด ซึ่งอาจเกิดจากการเดาคำตอบ ครูควรเน้นให้นักเรียนอธิบายแนวคิด โดยบทบาทของครูคือต้องเข้าใจแนวคิดของนักเรียน ไม่ใช่เมื่อได้คำตอบที่ถูกต้องแล้วดำเนินการจัดการเรียนรู้ต่อ ดังนั้นการอธิบายเหตุผลจึงมีความสำคัญในการเรียนรู้ ตลอดจนถึงสามารถประเมินผลได้ว่านักเรียนเข้าใจในประเด็นที่ครูต้องการสื่อสารหรือไม่
3. สนับสนุนการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ระหว่างครูหรือนักเรียน เมื่อครูต้องการประเมินว่านักเรียนมีความเข้าใจในหัวข้อที่เรียนรู้หรือไม่ ครูจะให้นักเรียนแก้ปัญหาและตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบนั้น แล้วส่งเสริมให้นักเรียนแลกเปลี่ยนแนวคิด การแลกเปลี่ยนแนวคิดที่ได้มาซึ่งคำตอบจะช่วยให้นักเรียนตรวจสอบซึ่งกันและกัน การส่งเสริมระหว่างนักเรียนกับนักเรียนจะช่วยสร้างความรู้สึกเป็นตัวของตัวเอง แต่อย่างไรก็ตามการใช้วิธีนี้จะเกิดปัญหาเมื่อมีนักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหาของตนเองได้ ครูควรสังเกตและช่วยเหลือก่อนที่จะเกิดการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ระหว่างนักเรียนด้วยตนเอง และครูควรใช้คำถามเพื่อส่งเสริมให้เกิดการเรียนรู้ เพราะคำถามของครูจะส่งผลต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ คำถามที่ใช้เน้นควรเกิดคุณค่าในการเรียนรู้ และควรให้เวลาในการคิดคำตอบ และระหว่างที่นักเรียนคิดนั้นครูไม่ควรเร่งรีบมากเกินไป บางครั้งอาจใช้คำถามที่ให้นักเรียนเห็นว่าคำถามนี้สำคัญ เช่น คำถามนี้อาจต้องใช้เวลาในการหาคำตอบ หรือบางครั้งอาจไม่ได้รับคำตอบ

จากนักเรียน ครูอาจแนะนำคำตอบ หรือตรวจสอบให้แน่ใจว่านักเรียนเข้าใจคำถามนี้จริง ๆ ดังนั้นการใช้คำถามของครูจึงสำคัญ และจำเป็นอย่างมากในการทำให้การจัดการเรียนรู้บรรลุตามจุดประสงค์ แต่อย่างไรก็ตามการใช้คำถามที่ดีนั้นครูต้องรู้ว่าควรใช้คำถามอย่างไร เวลาใด และสรุปคำตอบของนักเรียนมาเป็นความรู้ใหม่ ๆ ได้อย่างไร

**ตาราง 1.2** ตัวอย่างคำถามที่ใช้การจัดการเรียนรู้

แยกแนวคิด	<ul style="list-style-type: none"> <li>- ทำไมปัญหานี้ต้องวาดรูปสี่เหลี่ยมก่อนจึงจะแก้ปัญหาได้</li> <li>- ทำไมต้องบันทึกข้อมูลที่ได้ลงในตาราง</li> </ul>
ให้เหตุผล	<ul style="list-style-type: none"> <li>- อธิบายหน่อยว่าทำไมคำตอบของเธอจึงถูกต้อง</li> <li>- เห็นด้วยกับแนวคิดของสายฝนหรือไม่ เพราะอะไร</li> </ul>
กระตุ้นการอภิปราย	<ul style="list-style-type: none"> <li>- มีนักเรียนคนใดมีคำถามในแนวคิดของเพื่อนหรือไม่</li> <li>- แลกเปลี่ยนแนวคิดหรือวิธีคิดกับเพื่อนที่นั่งข้าง ๆ และเห็นด้วยหรือไม่เห็นด้วยกับแนวคิดของเพื่อน เพราะเหตุใด</li> <li>- วิธีการของพลมีความเกี่ยวข้องหรือสัมพันธ์กับวิธีการของตนเองอย่างไร</li> </ul>

จากการส่งเสริมการอภิปรายในห้องเรียน ตีรวิรัช ทินประภา (2566) ได้พัฒนากิจกรรมที่ส่งเสริมการแก้ปัญหาในห้องเรียน โดยได้ทำการศึกษาแก่นักศึกษาครุสาขาวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเริ่มจากการพัฒนากิจกรรมที่ส่งเสริมการอภิปรายในห้องเรียน 14 กิจกรรม นำไปให้นักศึกษาดำเนินกิจกรรม 7 กิจกรรม จากผลการวิจัยพบว่านักศึกษาจะใช้ความรู้ระดับสูงหรือความรู้ที่เพิ่งได้เรียนมาแก้ปัญหาในกิจกรรม และเมื่อได้มีการอภิปรายภายในกลุ่ม และนำเสนอกับเพื่อนในห้องเรียน หลังจากนั้นทำให้นักศึกษาดำเนินกิจกรรมด้วยปัญหาที่มีโครงสร้างคล้ายกันอีก 7 กิจกรรม ปรากฏว่านักศึกษา 68% มีแนวคิดหรือวิธีการที่เปลี่ยนไป โดยเลือกนำวิธีการแก้ปัญหาที่ได้แลกเปลี่ยนกับเพื่อนในครั้งแรกมาใช้ นอกจากนี้การส่งเสริมการอภิปรายยังช่วยให้นักศึกษาทบทวนเนื้อหา วิธีการ และการกระบวนแก้ปัญหาที่เคยได้เรียนมาในอดีต อีกทั้งยังสามารถนำเอาวิธีการต่าง ๆ ไปประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนรู้ในการแก้ปัญหากับนักเรียนในอนาคตได้อีกด้วย

## สรุป

การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในปัจจุบันเป็นการจัดการเรียนรู้ที่เน้นการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจในเนื้อหาหรือมโนทัศน์ที่กำหนดในตัวชี้วัดของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2660) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2550 โดยเป็นการจัดกิจกรรมการ

เรียนรู้ผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เน้นการเรียนรู้ด้วยสถานการณ์จริง รวมทั้งควรส่งเสริมให้  
เน้นให้นักเรียนอธิบายแนวคิดของตนเองและเพื่อนร่วมห้อง ซึ่งมโนทัศน์ที่นักเรียนต้องเรียนรู้  
ประกอบไปด้วย 3 สาระ ได้แก่ จำนวนและพีชคณิต การวัดและเรขาคณิต และสถิติและความน่าจะเป็น  
เป็น นอกจากนี้ครูควรความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีจิตวิทยาที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์  
เช่น ทฤษฎีจิตวิทยาของเพียเจต์ ซึ่งประกอบไปด้วย 4 ชั้น ได้แก่ ชั้นประสาทสัมผัสและกล้ามเนื้อ ชั้น  
ก่อนปฏิบัติการคิดด้วยรูปธรรม ชั้นการคิดด้วยรูปธรรม และชั้นคิดด้วยนามธรรม ทฤษฎีจิตวิทยาของ  
บรูเนอร์ 3 ชั้น ได้แก่ ชั้นรูปธรรม ชั้นภาพ และชั้นสัญลักษณ์ ทฤษฎีของดิวอี้ 4 ขั้นตอน ได้แก่  
หลักการพลวัต หลักการความหลากหลายของการรับรู้ หลักการความหลากหลายทางคณิตศาสตร์  
และหลักการสร้าง ซึ่งทฤษฎีต่าง ๆ เหล่านี้จะช่วยให้ครูมีความเข้าใจนักเรียน และวางแผนการจัดการ  
เรียนรู้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ



## บทที่ 2

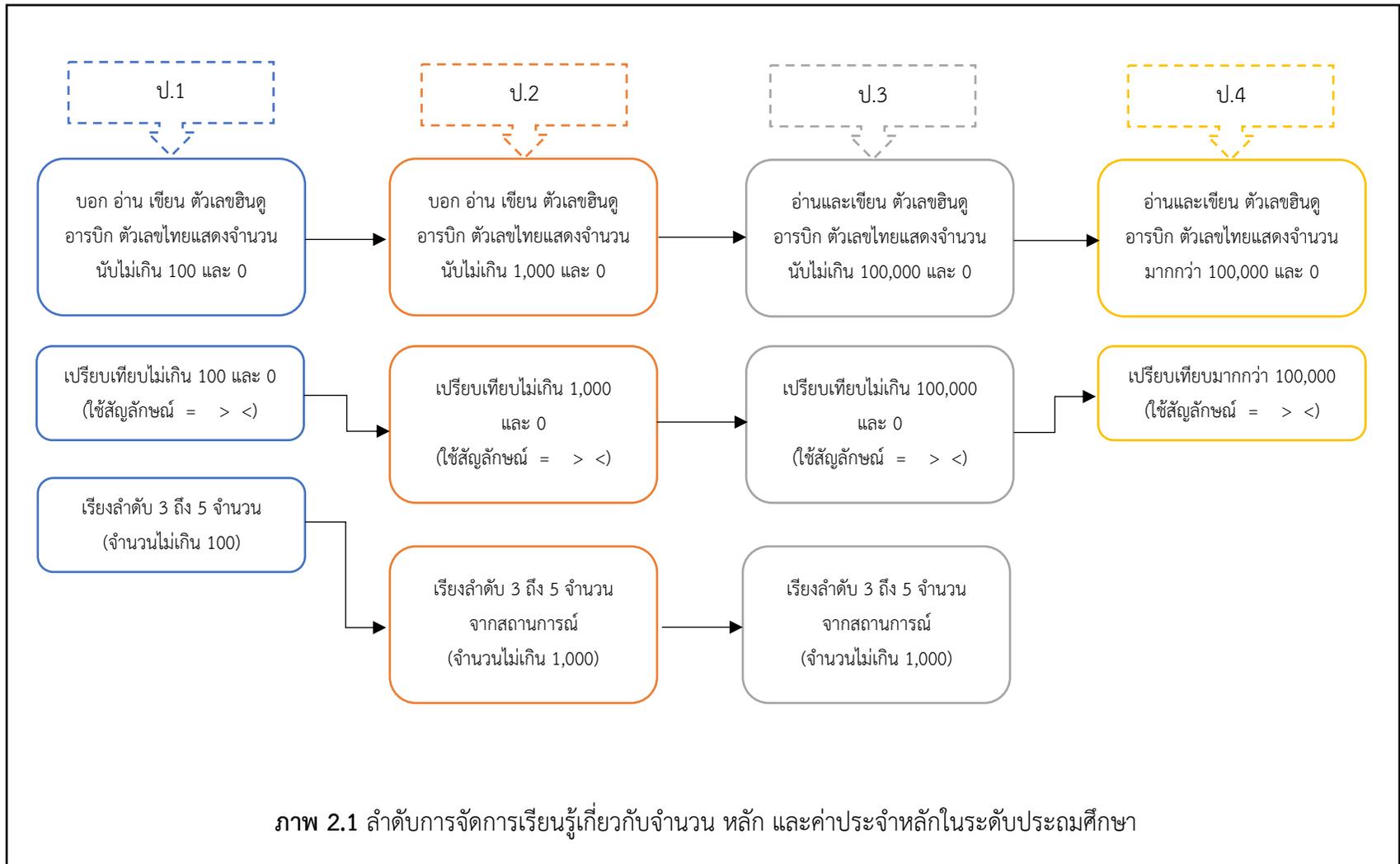
มโนทัศน์พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวน

ในชีวิตจริงมีการนำสัญลักษณ์ต่าง ๆ มาช่วยในการสื่อสาร และสื่อความหมายแทนสิ่งใดสิ่งหนึ่งที่ต้องการสื่อสาร ตัวเลขก็เช่นกันเป็นสัญลักษณ์ชนิดหนึ่งที่มีการพัฒนาการเขียน ระบบ และการอ่าน มาอย่างช้านาน เพื่อช่วยให้มนุษย์สามารถสื่อสารสิ่งต่าง ๆ รอบตัวได้อย่างดี ทำให้การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์เกี่ยวกับจำนวนมีลำดับและพัฒนาการ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ได้กำหนดในสาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต โดยมีตัวชี้วัดดังนี้

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวน ระบบจำนวน การดำเนินการของจำนวน ผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการ สมบัติของการดำเนินการ และนำไปใช้

ระดับ	ตัวชี้วัด
ประถมศึกษาปีที่ 1	<ol style="list-style-type: none"> <li>บอกจำนวนของสิ่งต่าง ๆ แสดงสิ่งต่าง ๆ ตามจำนวนที่กำหนด อ่านและเขียน ตัวเลขฮินดูอารบิก ตัวเลขไทยแสดงจำนวนนับไม่เกิน 100 และ 0</li> <li>เปรียบเทียบจำนวนนับไม่เกิน 100 และ 0 โดยใช้เครื่องหมาย = &gt; &lt;</li> <li>เรียงลำดับจำนวนไม่เกิน 100 และ 0 ตั้งแต่ 3 ถึง 5 จำนวน</li> </ol>
ประถมศึกษาปีที่ 2	<ol style="list-style-type: none"> <li>บอกจำนวนของสิ่งต่าง ๆ แสดงสิ่งต่าง ๆ ตามจำนวนที่กำหนด อ่านและเขียน ตัวเลขฮินดูอารบิก ตัวเลขไทย ตัวหนังสือแสดงจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0</li> <li>เปรียบเทียบจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0 โดยใช้เครื่องหมาย = &gt; &lt;</li> <li>เรียงลำดับจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0 ตั้งแต่ 3 ถึง 5 จำนวนจากสถานการณ์ต่าง ๆ</li> </ol>
ประถมศึกษาปีที่ 3	<ol style="list-style-type: none"> <li>อ่านและเขียน ตัวเลขฮินดูอารบิก ตัวเลขไทย และตัวหนังสือ แสดงจำนวนนับไม่เกิน 100,000 และ 0</li> <li>เขียน ตัวเลขฮินดูอารบิก ตัวเลขไทย และตัวหนังสือ แสดงจำนวนนับไม่เกิน 100,000 และ 0</li> </ol>
ประถมศึกษาปีที่ 4	<ol style="list-style-type: none"> <li>อ่านและเขียนตัวเลขฮินดูอารบิก ตัวเลขไทย และตัวหนังสือแสดงจำนวนนับที่มากกว่า 100,000</li> <li>เปรียบเทียบและเรียงลำดับจำนวนนับที่มากกว่า 100,000 จากสถานการณ์ต่าง ๆ</li> </ol>

เมื่อนำตัวชี้วัดที่กำหนดมาวิเคราะห์ลำดับการเรียนรู้ของจำนวนจะได้ดังภาพ 2.1



## การพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับค่าประจำหลัก

เมื่อก้าวถึง 34 ซึ่งเป็นจำนวนสองหลัก นักเรียนในวัยเด็ก (อายุประมาณ 5 – 8 ปี) จะเรียนรู้ 34 ผ่านการนับสิ่งของหรือวัตถุ แต่ยังไม่สามารถแยก 34 ว่ามีเลขโดด 2 ตัว คือ 3 กับ 4 และ 3 มีค่าเท่าใด 4 มีค่าเท่าใด ซึ่งเป็นความเข้าใจเกี่ยวกับค่าประจำหลัก ในหัวข้อนี้จึงจะกล่าวถึงการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับค่าประจำหลักให้กับนักเรียน สำหรับค่าประจำหลักจะมีความสำคัญอย่างมากในการเปรียบเทียบ เรียงลำดับ บวก ลบ คูณ และหาร จากงานวิจัยของ Wright และคณะ (2008) ที่ได้ทำการศึกษาพัฒนาการค่าประจำหลักพบว่า นักเรียนจะมีลำดับขั้นการเรียนรู้เกี่ยวกับค่าประจำหลัก 3 ระดับ ดังนี้

ระดับ 1 (Level 1) ชั้นแนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับสิบ นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับสิบแต่ไม่เข้าใจเกี่ยวกับหนึ่งสิบ เมื่อนักเรียนแก้ปัญหาเกี่ยวกับการบวกหรือการลบจะใช้วิธีการนับทีละหนึ่ง

ระดับ 2 (Level 2) ชั้นสร้างแนวคิดเกี่ยวกับสิบ ในขั้นนี้นักเรียนจะสามารถแยกได้ว่าสิบประกอบด้วย 1 กับ 0 แต่ยังคงอาศัยสื่อที่เป็นรูปธรรมในการแก้ปัญหา

ระดับ 3 (level 3) ชั้นมโนทัศน์เกี่ยวกับสิบ ขั้นนี้เป็นขั้นที่นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับสิบไปแก้ปัญหาหรือสร้างแบบจำลองต่าง ๆ โดยไม่ต้องใช้สื่อ

นอกจากนี้ Wright และคณะ ยังได้ให้ข้อเสนอแนะในการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับค่าประจำหลักซึ่งต้องอาศัยความเข้าใจเกี่ยวกับการนับ และเชื่อมโยงไปตัวเลข และการอ่านอย่างมีความหมายสำหรับนักเรียนแล้วในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 จะสามารถนับวัตถุหรือสิ่งของต่าง ๆ ได้ ครูต้องอาศัยความรู้เรื่องการนับเชื่อมโยงไปยังค่าประจำหลัก และให้นักเรียนเชื่อมโยงความรู้เกี่ยวกับปริมาณที่แตกต่างกันดังนี้ (ภาพ 2.2)

1. การนับทีละหน่วย ในขั้นนี้ครูจะให้นักเรียนนับสิ่งของหรือวัตถุแต่ละหน่วยด้วยตัวเอง และครูสามารถตรวจสอบความถูกต้องได้ด้วยคำถามพื้นฐาน เช่น มีทั้งหมดเท่าใด ในขั้นนี้นักเรียนจะสามารถนับได้ว่ามี 34 ชิ้น นั่นคือการนับต่อไปเรื่อย ๆ ก่อนที่จะพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับค่าประจำหลักในขั้นต่อไป

2. การนับเป็นกลุ่ม ในขั้นนี้จะเป็นการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับการนับเป็นกลุ่ม และเชื่อมโยงกับการนับทีละหน่วย โดยให้นักเรียนนับทีละหน่วย เมื่อครบสิบให้จัดไว้เป็นกลุ่ม การนับแบบนี้ นักเรียนจะสามารถสื่อสารได้ว่ามีครบสิบกี่กลุ่ม และไม่ครบสิบมีเท่าใด เช่น 34 มีครบสิบ 3 กลุ่ม กับอีก 4 หน่วย ครูควรเน้นย้ำเรื่องการอ่านครบสิบอย่างมีความหมาย เช่น 34 อ่านว่า 3 สิบ กับ 4 หน่วย พร้อมทั้งกระตุ้นให้นักเรียนสังเกตเศษที่ไม่ครบสิบ

3. การนับครบสิบและเศษ ในขั้นตอนนี้จะเป็นพัฒนาการที่ต่อจากขั้น 1 และ 2 และเป็นขั้นที่จะนำไปพัฒนาเรื่องการกระจายในการบวกและการลบ เช่น 34 มีครบสิบ 2 กลุ่ม กับอีก 14 หน่วย หรือ มีครบสิบ 1 กลุ่ม กับอีก 24 หน่วย ครูควรเน้นย้ำเรื่องการอ่านอย่างมีความหมาย เช่น 34 อ่านว่า 2 สิบ กับ 14 หน่วย หรือ 1 สิบ กับ 24 หน่วย

ขั้นที่ 1 การนับทีละหนึ่งหรือการนับรวมทั้งหมด

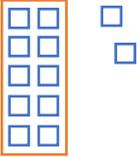
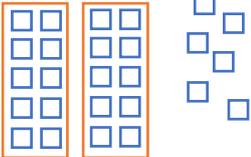
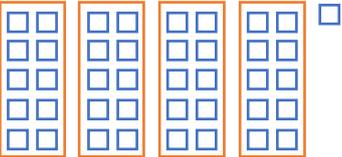
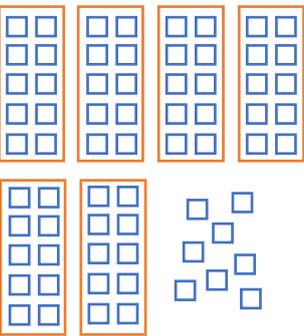
ขั้นที่ 2 การนับเป็นกลุ่ม กลุ่มละสิบ หรือการนับฐานสิบ

ขั้นที่ 3 การนับครบสิบและเศษ

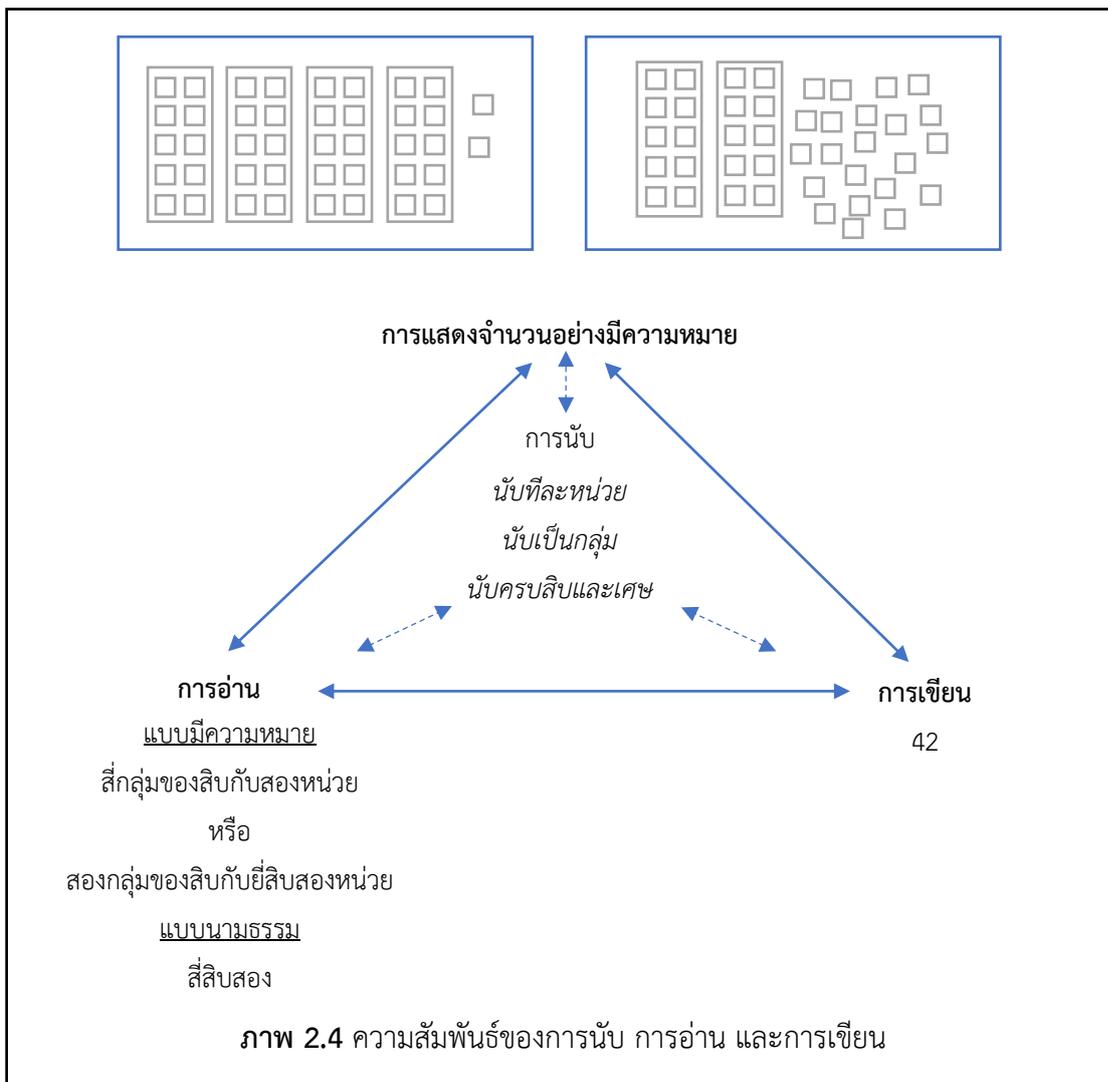
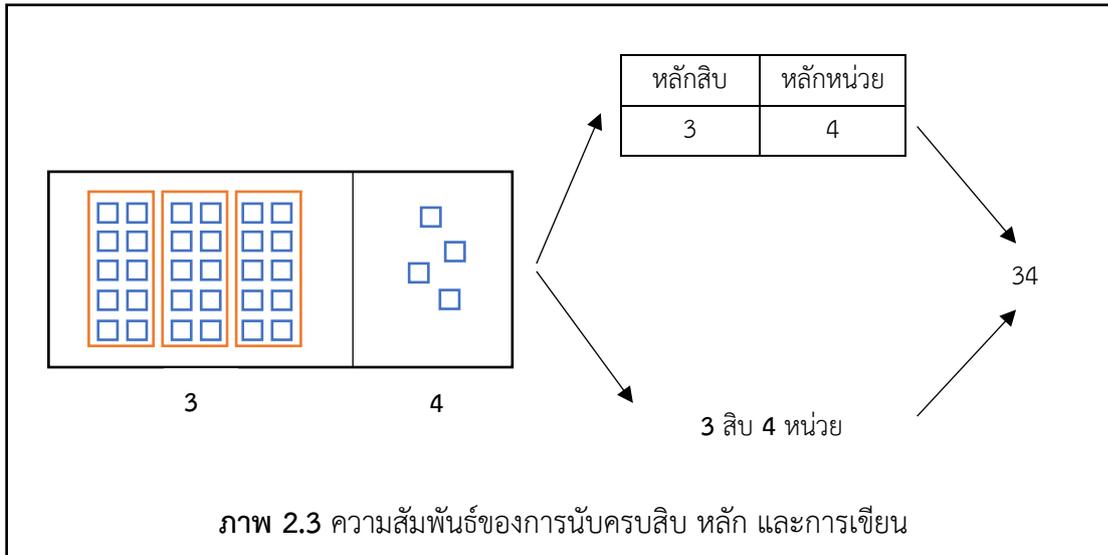
ภาพ 2.2 ลำดับการสอนเรื่องค่าประจำหลัก

เมื่อนักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับการนับทีละหน่วย นับเป็นกลุ่ม และนับครบสิบและเศษแล้ว ครูสามารถใช้กิจกรรมง่าย ๆ เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน

ตัวอย่างกิจกรรมเพื่อตรวจสอบความเข้าใจเกี่ยวกับค่าประจำหลัก

จำนวน	จำนวนกลุ่มที่ ครบสิบ (กลุ่ม)	เศษ	ตัวเลข	ตัวหนังสือ
1. 	1	2	12	หนึ่งสิบกับสองหน่วย หรือ สิบสอง
2. 	2	6	26	สองสิบกับหกหน่วย หรือ ยี่สิบหก
3. 	4	1	41	สี่สิบกับหนึ่งหน่วย หรือ สี่สิบเอ็ด
4. 	6	8	68	หกสิบกับแปดหน่วย หรือ หกสิบแปด

จากกิจกรรมพบว่านักเรียนจะสามารถบอกจำนวนเป็นกลุ่มได้ เขียนตัวเลขแสดงจำนวน และอ่านตัวเลขได้ เมื่อนักเรียนทำกิจกรรมแล้วครูควรขยายความรู้เรื่องจำนวนกลุ่มของสิบ เช่น สามกลุ่มของสิบ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์อะไร (30) และอ่านว่าอย่างไร (สามสิบ) จากคำถามเหล่านี้จะช่วยพัฒนามโนทัศน์เกี่ยวกับหลักสิบของนักเรียนได้ และสามารถอธิบายโดยใช้ความสัมพันธ์ของการนับครบสิบ หลัก และการเขียน (ภาพ 2.3 และ ภาพ 2.4)

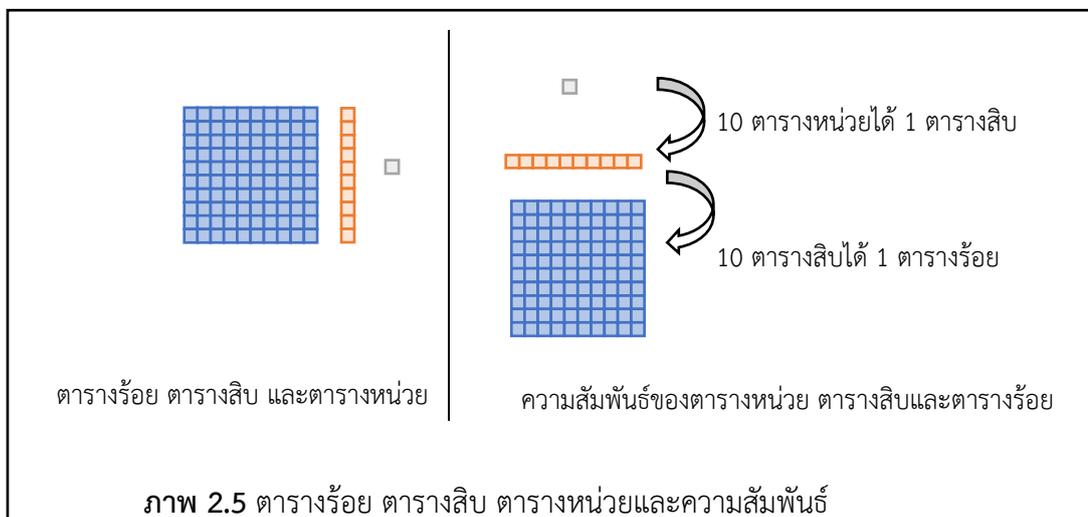


สำหรับนักเรียนที่มีโมทัศน์เกี่ยวกับจำนวนสองหลัก ครูควรให้นักเรียนคิดย้อนกลับเกี่ยวกับจำนวนสองหลักเพื่อพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับค่าประจำหลัก ดังนี้

ตัวอย่างกิจกรรมการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับค่าประจำหลัก

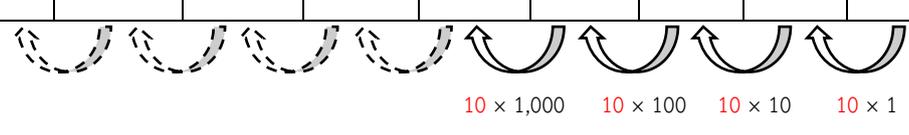
	หลักสิบ		หลักหน่วย	
	คำอ่าน	สัญลักษณ์ (ตัวเลข)	คำอ่าน	สัญลักษณ์ (ตัวเลข)
14	1 สิบ	10	4 หน่วย	4
28	2 สิบ	20	8 หน่วย	8
36	3 สิบ	30	6 หน่วย	6
79	7 สิบ	70	9 หน่วย	9

การขยายมโนทัศน์ไปยังหลักที่มากกว่าสิบนั้น ครูต้องอธิบายถึงความเข้าใจที่ว่า 10 สิบ มีค่าเท่ากับ 1 ร้อย 10 ร้อย มีค่าเท่ากับ 1 พัน 10 พัน มีค่าเท่ากับ 1 หมื่น ... โดยอาจใช้สื่อการสอนที่สามารถสื่อสารกับนักเรียน และสามารถสรุปเป็นนามธรรมได้ เช่น ตารางร้อย ตารางสิบ และตารางหน่วย ซึ่งตารางร้อยเป็นสื่อการสอนที่มีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยแบ่งเป็นแนวนอน 10 ช่อง และแนวตั้ง 10 ช่อง จะได้เป็น 100 ช่อง ช่องละเท่า ๆ กัน ตารางสิบ มีลักษณะคล้ายกับตารางร้อยแต่แนวนอนจะมีเพียง 1 ช่อง ส่วนแนวตั้งจะมี 10 ช่อง โดยขนาดของแต่ละช่องจะเท่ากับตารางร้อย และสามารถสลับแนวนอนกับแนวตั้งได้ เมื่อนำตารางสิบมาประกอบกันจำนวน 10 ตาราง จะเท่ากับ 1 ตารางร้อย หรือ 10 สิบ เท่ากับ 1 ร้อย ตารางหน่วย มีลักษณะคล้ายกับตารางร้อยและตารางสิบแต่แนวนอนจะมีเพียง 1 ช่อง และแนวตั้ง 1 ช่อง เมื่อนำตารางหน่วยมาประกอบกัน 10 ตารางหน่วย จะเท่ากับ 1 ตารางสิบ หรือ 10 หน่วย เท่ากับ 1 สิบ (ภาพ 2.5 และ ภาพ 2.6)



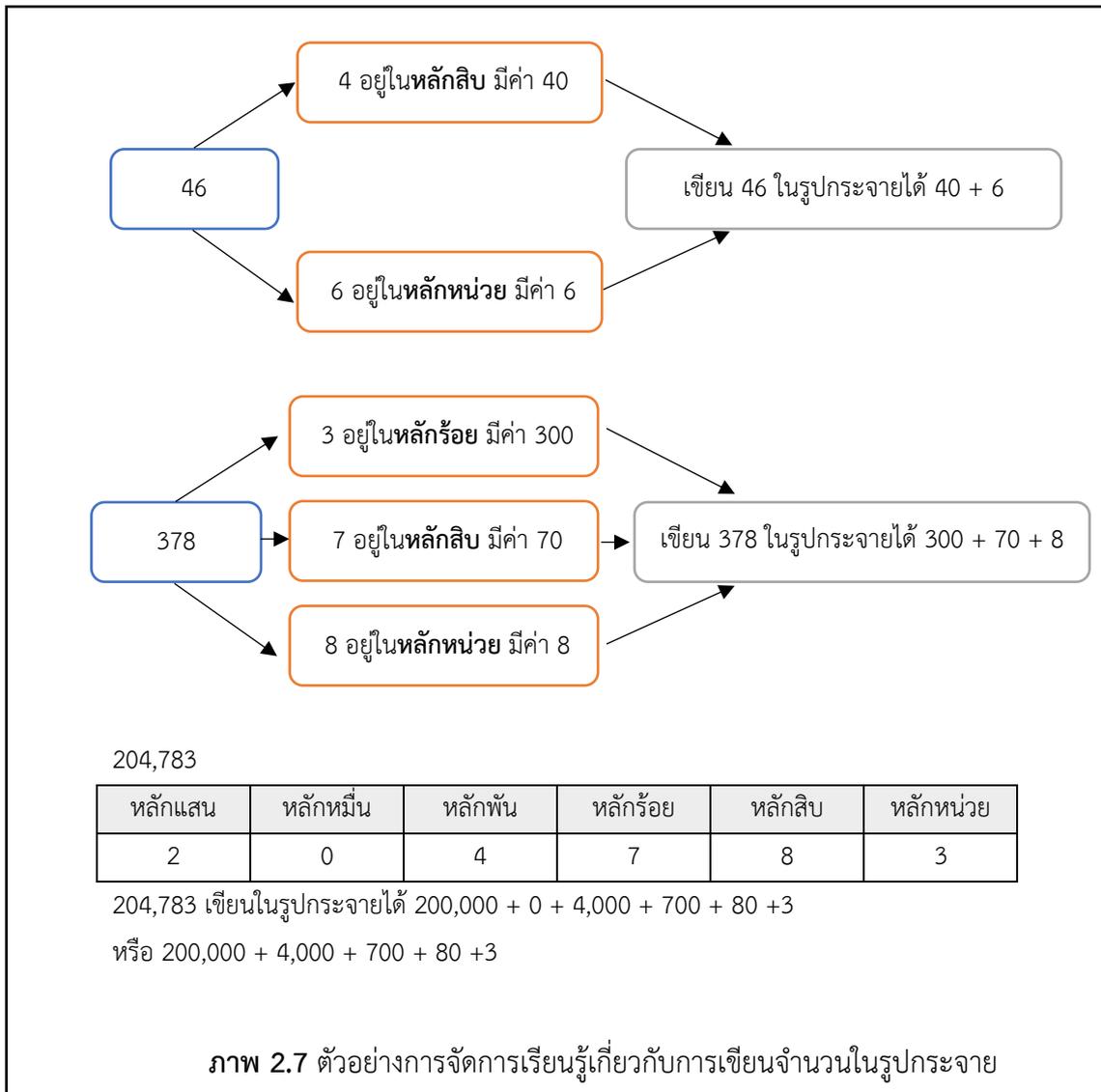
มโนทัศน์พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวน

หลัก	...	สิบล้าน	ล้าน	แสน	หมื่น	พัน	ร้อย	สิบ	หน่วย
ค่าประจำหลัก	...	10,000,000	1,000,000	100,000	10,000	1,000	100	10	1



**ภาพ 2.6 ความสัมพันธ์ของหลักและค่าประจำหลัก**

จากการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับค่าประจำหลัก สามารถนำไปใช้การเขียนจำนวนในรูปกระจาย (ภาพ 2.7)

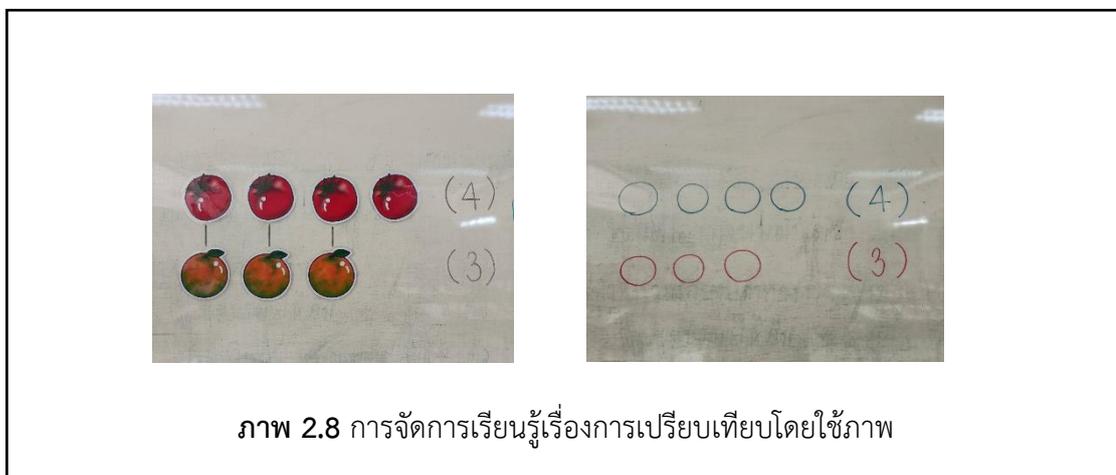


## การเปรียบเทียบและเรียงลำดับ

จากตัวชี้วัดที่กำหนดในระดับชั้นประถมศึกษา (ภาพ 2.1) ได้มีการกำหนดการเรียนรู้เกี่ยวกับการเปรียบเทียบและเรียงลำดับ โดยเริ่มจากชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 เป็นการเปรียบเทียบและเรียงลำดับจำนวนที่ไม่เกิน 100 และ 0 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 เปรียบเทียบและเรียงลำดับจำนวนที่ไม่เกิน 1,000 และ 0 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เปรียบเทียบและเรียงลำดับจำนวนที่ไม่เกิน 100,000 และ 0 และชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 เปรียบเทียบและเรียงลำดับจำนวนที่มากกว่า 100,000 และ 0 อย่างไรก็ตามครูควรวางแผนในการจัดการเรียนรู้ โดยอาจใช้สื่อการสอนที่สามารถพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับการเปรียบเทียบและสามารถพัฒนาไปยังการเรียงลำดับได้ โดยอาจมีลำดับการจัดการเรียนรู้ดังนี้

### การเปรียบเทียบจำนวนไม่เกิน 10

การเปรียบเทียบจำนวนไม่เกิน 10 เป็นการเปรียบเทียบที่สามารถใช้สื่อการสอน หรือการวาดภาพง่าย ๆ เพื่อสื่อสารกับนักเรียนได้ง่าย เทคนิคที่นิยมใช้คือการจับคู่ โดยครูอาจให้นักเรียนชายและหญิงจับคู่เล่น เพื่อนำเข้าสู่อะบบการเปรียบเทียบจำนวน และในขณะที่เปรียบเทียบจำนวนจะมีค่าที่นักเรียนต้องเรียนรู้ นั่นคือ เท่ากับ ไม่เท่ากับ มากกว่า และน้อยกว่า โดยค่าเหล่านี้สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $=$   $>$  หรือ  $<$  ตามลำดับ



ภาพ 2.8 การจัดการเรียนรู้เรื่องการเปรียบเทียบโดยใช้ภาพ

### การเปรียบเทียบจำนวนที่มากกว่า 10

การเปรียบเทียบจำนวนที่มากกว่า 10 เป็นการนำความรู้เกี่ยวกับการจัดกลุ่มเป็นสิบมาช่วยในการเปรียบเทียบ โดยเริ่มจากการเปรียบเทียบจำนวนของกลุ่มที่ครบสิบก่อน ถ้าจำนวนของกลุ่มที่ครบสิบเท่ากันให้พิจารณาในหลักหน่วย โดยใช้หลักการเหมือนกับการเปรียบเทียบจำนวนที่น้อยกว่า 10 จากแนวคิดนี้สามารถขยายแนวคิดไปยังการเปรียบเทียบจำนวนที่มากกว่า 100 ในระดับชั้น

ประถมศึกษาปีที่ 2 และชั้นอื่น ๆ จนสามารถสรุปเป็นความรู้ที่ได้ว่า การเปรียบเทียบจำนวน 2 จำนวน ถ้ามีหลักไม่เท่ากัน จำนวนที่มีหลักมากกว่า จะมากกว่า ถ้ามีหลักเท่ากัน จำนวนที่ค่าของเลขโดดในหลักซ้ายสุด มากกว่า จำนวนนั้นจะมากกว่า แต่ถ้าค่าของเลขโดดในหลักซ้ายสุดเท่ากัน ให้พิจารณาค่าของเลขโดดในหลักถัดไปทางขวาทีละหลัก ตามลำดับ

ตัวอย่าง เปรียบเทียบ 36 กับ 38

แนวคิด 36 หลักสิบมีค่า 30 และ 38 หลักสิบมีค่า 30

เนื่องจากหลักสิบของ 36 กับ 38 มีค่าเท่ากับ จึงพิจารณาในหลักหน่วย พบว่า 6 น้อยกว่า 8

ดังนั้น 36 น้อยกว่า 38 หรือ 38 มากกว่า 36

เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้  $36 < 38$  หรือ  $38 > 36$

ตัวอย่าง เปรียบเทียบ 792 กับ 415

แนวคิด 792 หลักร้อยมีค่า 700 และ 415 หลักร้อยมีค่า 400

เนื่องจากหลักร้อยของ 792 มีค่ามากกว่าหลักร้อยของ 415

ดังนั้น 792 มากกว่า 415 หรือ 415 น้อยกว่า 792

เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้  $792 > 415$  หรือ  $415 < 792$

### การเรียงลำดับ

การเรียงลำดับจำนวนเป็นมโนทัศน์ที่พัฒนาต่อจากการเปรียบเทียบจำนวน โดยเริ่มจากการเปรียบเทียบจำนวนทีละคู่ แล้วจึงเรียงลำดับจากมากไปน้อย หรือน้อยไปมาก

ข้อควรระวังในการจัดการเรียนรู้เรื่องการเปรียบเทียบ และเรียงลำดับจำนวนมีดังนี้

1. นักเรียนมักจะสับสนเครื่องหมาย เช่น นักเรียนสามารถบอกได้ว่า 14 น้อยกว่า 16 แต่สับสนว่าต้องใช้เครื่องหมาย  $>$  หรือ  $<$  ในการแสดง น้อยกว่า

2. ในการจัดการเรียนรู้ ครูมักให้นักเรียนเปรียบเทียบจำนวนและอธิบายทั้งน้อยกว่าและมากกว่า เช่น 14 น้อยกว่า 16 หรือ 16 มากกว่า 14 แต่นักเรียนสามารถบอกได้ว่า 14 น้อยกว่า 16 แต่ไม่สามารถบอกได้ว่า 16 มากกว่า 14

## ความรู้สึกเชิงจำนวน

ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ นักเรียนมีการคำนวณหรือหาคำตอบของปัญหา แต่บางครั้งนักเรียนบางคนจะมีการรับรู้เกี่ยวกับจำนวน หรือคาดการณ์คำตอบได้ล่วงหน้า กระบวนการเหล่านี้เป็นพื้นฐานในการให้เหตุผล หรือคำตอบอย่างคร่าว ๆ หรืออาจกล่าวได้ว่านักเรียนคนนั้นมีความรู้สึกเชิงจำนวน (Number Sense) คำนี้มีนักวิชาการหลายท่านได้ให้ความหมายไว้มากมายอาจกล่าวได้ว่าความรู้สึกเชิงจำนวนเป็นความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวน ความสัมพันธ์ที่หลากหลายระหว่างจำนวน ขนาดของจำนวน และการดำเนินการของจำนวน รวมทั้งรู้จักเลือกใช้จำนวนใกล้เคียงเพื่อมาช่วยในการคิดคำนวณในใจได้อย่างยืดหยุ่น สามารถตัดสินใจได้ว่าจะใช้การดำเนินการแบบใดในการแก้ปัญหา รวมถึงตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้จากการคิดคำนวณ และสามารถใช้ประสบการณ์มาเป็นเกณฑ์ในการอ้างอิงความเป็นไปได้ของการวัด (Reys et al., 1992; Ronau, 1988) จากแนวคิดดังกล่าวทำให้ความรู้สึกเชิงจำนวนควรได้รับการส่งเสริมและพัฒนา เพราะเป็นสิ่งที่ส่งเสริมความสามารถในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนในด้านต่าง ๆ ทำให้เกิดความมั่นใจว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เข้าใจได้ มีเหตุผล ไม่ใช่การจำกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ไปใช้เท่านั้น นักเรียนจำเป็นต้องเข้าใจจำนวนเพื่อบอกปริมาณ บอกตำแหน่งของสิ่งต่าง ๆ เข้าใจความหมายของจำนวน รวมถึงเข้าใจค่าประจำหลัก ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญในการใช้จำนวน หรือการคิดคำนวณ นอกจากนี้นักเรียนจำเป็นต้องเข้าใจจำนวนอย่างมีความหมายไปตามลำดับ นักเรียนที่มีความรู้สึกเชิงจำนวนจะสามารถนำจำนวนไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพและเหมาะสมตามสถานการณ์ สามารถนำไปใช้ในการคิดคำนวณในใจ การแก้โจทย์ปัญหา การคิดขั้นสูง การประมาณค่า และสามารถพิจารณาความสมเหตุสมผลได้เกิดความมั่นใจในความสามารถของตนในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และความรู้สึกเชิงจำนวนยังมีความสำคัญกับเจตคติของนักเรียน คือสร้างความมั่นใจในความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ของตนเอง ซึ่งมีความสำคัญต่อการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูงต่อไป (นพพร แหยมแสง, 2556)

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา หรือ NCTM ได้เผยแพร่เอกสาร Curriculum and Evaluation Standard for Mathematics (1989) ได้อธิบายว่า นักเรียนที่มีความรู้สึกเชิงจำนวนที่ดีต้องมีลักษณะดังนี้

1. เข้าใจความหมายของจำนวนเป็นอย่างดี เช่น 136 สามารถจัดได้เป็น 13 สิบ 6 หน่วย หรือ 1 ร้อย 3 สิบ 6 หน่วย
2. รับรู้ความสัมพันธ์ต่าง ๆ ระหว่างจำนวน เช่น  $4 \times 25$  เท่ากับ  $2 \times 50$
3. เข้าใจขนาดสัมพัทธ์ของจำนวน เช่น เข้าใจว่า 35 มีค่ามากกว่า 20 แต่น้อยกว่า 80

4. รู้ผลลัพธ์ต่าง ๆ ของการดำเนินการของจำนวน เช่น เมื่อนำ 3 ไปบวกกับ 5 จะมีค่ามากกว่า 5 หรือ เมื่อนำ 3 ไปลบออกจาก 5 จะมีค่าน้อยกว่า 5

5. พัฒนาความสามารถในการใช้สถานการณ์ต่าง ๆ ในสิ่งแวดล้อมมาเป็นเกณฑ์อ้างอิงความเป็นไปได้ของการวัด

นอกจากนี้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2560) ได้อธิบายว่า ความรู้สึกเชิงจำนวนเป็นสามัญสำนึกและความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวนที่อาจพิจารณาในด้านต่าง ๆ เช่น

- ความเข้าใจความหมายของจำนวนที่ใช้บอกปริมาณ เช่น ดินสอ 5 แท่ง และใช้บอกอันดับที่ เช่น เต๋วึ่งเข้าเส้นชัยเป็นคนที 5
- เข้าใจเกี่ยวกับขนาดหรือค่าของจำนวนใด เมื่อเปรียบเทียบกับจำนวนอื่น เช่น 8 มีค่าใกล้เคียงกับ 4 แต่ 8 มีค่าน้อยกว่า 100 มาก
- เข้าใจผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวน เช่น ผลบวกของ  $65 + 42$  ควรมากกว่า 100 เพราะ  $65 > 60$   $42 > 40$  และ  $60 + 40 = 100$
- ใช้เกณฑ์จากประสบการณ์ในการเทียบเคียงเพื่อพิจารณาความสมเหตุสมผลของจำนวน เช่น การรายงานว่ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 คนหนึ่งสูง 250 เซนติเมตรนั้น ซึ่งเป็นไปไม่ได้

จากความหมายและแนวคิดพบว่าความรู้สึกเชิงจำนวนเป็นความสามารถที่ควรได้รับการพัฒนา โดยหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ได้กำหนดให้ผู้เรียนมีความรู้สึกเชิงจำนวนในคุณภาพผู้เรียนเมื่อจบชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 และชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยระบุว่าเมื่อจบชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ผู้เรียนมีความรู้สึกเชิงจำนวนเกี่ยวกับเศษส่วนที่ไม่เกิน 1 มีทักษะการบวก การลบ เศษส่วนที่ตัวส่วนเท่ากันและนำไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ และเมื่อจบชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ผู้เรียน อ่าน เขียนตัวเลขตัวหนังสือแสดงจำนวนนับ เศษส่วน ทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง อัตราส่วน และร้อยละ มีความรู้สึกเชิงจำนวน มีทักษะการบวก การลบ การคูณ การหาร ประมาณผลลัพธ์ และนำไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2560) แม้กระทั่งสภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติของประเทศสหรัฐอเมริกาได้ระบุความรู้สึกเชิงจำนวนไว้ในหนังสือหลักการและมาตรฐานคณิตศาสตร์ในโรงเรียน Standard 2000 (Principle and Standards for School Mathematics) ในจำนวนและการดำเนินการว่าควรเริ่มพัฒนาความรู้สึกเชิงจำนวนของนักเรียนตั้งแต่อุนบาล 2 (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) จากแนวคิดดังกล่าวจึงอาจสรุปได้ดังนี้

1. ครูต้องสร้างบรรยากาศที่เหมาะสมในชั้นเรียน การพัฒนาอย่างมีความหมายควรมีกิจกรรมที่เกี่ยวข้องคือ (1) การคิดคำนวณ (2) การวัด (3) การประมาณ โดยการคิดคำนวณจะต้องเกี่ยวข้องกับการนำไปใช้ได้จริง ไม่ว่าจะเป็นการคิดคำนวณด้วยกระดาษ และดินสอ หรือการคิดคำนวณในใจ นักเรียนควรคิดคำนวณเพื่อจุดประสงค์ของการแก้ปัญหาจากการนำไปใช้

2. เชื่อมโยงคณิตศาสตร์ในโรงเรียนกับประสบการณ์ในโลกจริง โดยเสนอสถานการณ์ที่สัมพันธ์กับประสบการณ์ของนักเรียนทั้งในและนอกห้องเรียน ซึ่งจะทำให้นักเรียนเรียนรู้ว่าจำนวนเป็นสิ่งที่มีความหมายสำหรับการแก้ปัญหา พร้อมทั้งใช้สื่อรูปธรรมเพราะจะช่วยให้เด็กสามารถสำรวจความคิดเห็นเชิงจำนวน เห็นความสัมพันธ์ของจำนวนในรูปแบบต่าง ๆ ซึ่งเป็นทักษะที่เป็นประโยชน์มากในการศึกษาคณิตศาสตร์ในภายหลัง ซึ่งความรู้เชิงจำนวนจะพัฒนาตลอดเวลา นักเรียนจำเป็นต้องมีโอกาสอย่างสม่ำเสมอที่จะให้เหตุผล และฟังผู้อื่นอธิบายความคิดของเขา

3. การช่วยให้เด็กพัฒนาความรู้เชิงจำนวนจะต้องจัดรูปแบบที่เหมาะสม ใช้คำถามส่งเสริมการคิดเกี่ยวกับจำนวน ใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนคิดคำนวณในใจ เนื่องจากเราจำเป็นต้องคิดคำนวณในสถานการณ์ต่าง ๆ อยู่เป็นประจำ และควรสร้างสภาพแวดล้อมของห้องเรียนที่เอื้อต่อการพัฒนาความรู้เชิงจำนวน

4. การพัฒนาความรู้เชิงจำนวนเริ่มต้นอย่างไม่เป็นทางการก่อนเด็กจะเข้าโรงเรียน เมื่อเด็กเข้าโรงเรียน เด็กจะมีความรู้เชิงจำนวนบางอย่างต่อไป ทั้งจากประสบการณ์ภายนอกโรงเรียนและประสบการณ์ภายในโรงเรียน นักเรียนจะมีประสบการณ์จากการใช้จำนวนในวิถีทางต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน ครูต้องหาโอกาสให้นักเรียนได้สำรวจความสัมพันธ์ของจำนวนโดยใช้สื่อชนิดต่าง ๆ และส่งเสริมการอภิปรายเกี่ยวกับมโนทัศน์เหล่านั้น

5. ต้องใช้กิจกรรมในการวัดที่หลากหลาย ปัญหาที่เกี่ยวกับการวัดจะช่วยสร้างความรู้เชิงจำนวนของนักเรียน เพราะนักเรียนจะสามารถตรวจสอบการประมาณ และการคำนวณโดยการวัดจริงหาวิธีการตรวจสอบความคิดของเขากับสื่อกายภาพมากกว่าที่จะฟังคำตอบของครูหรือหาคำตอบจากหนังสือ ส่งเสริมให้เด็กกล้าเสี่ยง และพยายามหาหนทางใหม่

6. ในการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมความรู้เชิงจำนวนโดยใช้วิธีการสอนต่าง ๆ ครูวิเคราะห์ถึงความสามารถและวุฒิภาวะของนักเรียน และครูควรศึกษาวิธีการจัดการเรียนรู้ให้เข้าใจอย่างถ่องแท้ก่อนนำไปประยุกต์ใช้

7. ควรเปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมและสำรวจตัวเลขด้วยวิธีที่ลงมือปฏิบัติจริง เพราะสื่อการสอนที่จับต้องได้มีความสำคัญสำหรับการทำความเข้าใจคณิตศาสตร์ในอนาคต

8. ควรส่งเสริมให้นักเรียนสำรวจจำนวนด้วยวิธีการต่าง ๆ เนื่องจากนักเรียนทุกคนมีความสามารถและการรับรู้ที่แตกต่างกัน และเมื่อได้รับประสบการณ์ที่ต่างกันอย่างมากมาย นักเรียนจะสามารถพัฒนาความรู้สึกเชิงจำนวนในรูปแบบที่เหมาะสมกับตนเองได้ดีที่สุด

ตัวอย่างกิจกรรมพัฒนาความรู้สึกเชิงจำนวน

1. เติมตัวเลขแสดงจำนวนใน

$$1) 20 \times 18 = 9 \times \square$$

$$2) 24 \div \square = 12 \div 6$$

$$3) \square + 37 < 37 + 38$$

2. สร้าง 260 จาก 9 8 4 และ 6

3. สร้างส่วนของเส้นตรงที่ยาวกว่าส่วนของเส้นตรงที่กำหนดอีก  $\frac{1}{2}$

### ตัวอย่างงานวิจัยเกี่ยวกับความรู้สึกเชิงจำนวน

ความรู้สึกเชิงจำนวนเป็นความสามารถที่นักเรียนควรได้รับการพัฒนา เพราะจะเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้นักเรียนสามารถนำความรู้ไปใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ มีผู้วิจัยศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาความรู้สึกเชิงจำนวน สามารถสรุปได้ดังนี้

รุ่งนภา มีใจ (2564) ได้พัฒนาแบบวัดความรู้สึกเชิงจำนวน สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) สร้างและวิเคราะห์คุณภาพแบบวัดความรู้สึกเชิงจำนวนสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และ 2) หาเกณฑ์ปกติ (Norms) ของแบบวัดความรู้สึกเชิงจำนวนสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่สร้างขึ้น ตัวอย่างในการศึกษาครั้งนี้คือนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 786 คน จากโรงเรียนในสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน จังหวัดนครปฐม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2563 ที่ได้มาจากการสุ่มแบบสองขั้นตอน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นแบบวัดความรู้สึกเชิงจำนวน แบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 24 ข้อ ประกอบด้วย 6 องค์ประกอบ ได้แก่ 1) ด้านความหมายของจำนวน หมายถึง นักเรียนมีความเข้าใจจำนวนเบื้องต้นอย่างถ่องแท้ เริ่มจากมีความเข้าใจเรื่องของการนับ เรื่องค่าประจำหลัก จำนวน

ที่มีค่ามาก ๆ ทศนิยมเศษส่วน สามารถบอกได้ว่าจำนวนใดคือจำนวนเชิงการนับและจำนวนใดคือในเชิงอันดับที่ 2) ความสัมพันธ์ที่หลากหลายของจำนวน หมายถึง นักเรียนมีความเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในเบื้องต้น การแสดงจำนวนเดียวกันในรูปแบบที่หลากหลาย ความเข้าใจความสัมพันธ์ของค่าประจำหลักของจำนวนนับที่มีค่ามาก ทศนิยม รวมทั้งเศษส่วน สามารถรวมจำนวนเข้าด้วยกัน หรือแยกจำนวนออกจากกันได้ 3) การเปรียบเทียบจำนวน หมายถึง นักเรียนมีความสามารถที่จะแสดงขนาดสัมพันธ์ของจำนวน นั่นคือสามารถบอกได้ว่าจำนวนใดจำนวนหนึ่งมีขนาดใหญ่หรือเล็ก เมื่อเปรียบเทียบกับอีกจำนวนหนึ่ง 4) ผลการดำเนินการ และการประมาณค่า หมายถึง นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับสิ่งที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการระหว่างจำนวน และสามารถนำความรู้เกี่ยวกับผลเชิงสัมพันธ์ของการใช้จำนวนในฐานะที่เป็นตัวปฏิบัติการมาเชื่อมโยงกับความรู้อื่นๆ ขนาดสัมพันธ์ของจำนวน และเข้าใจเรื่องของการประมาณค่า 5) การอ้างอิงในเรื่องปริมาณ และการวัด หมายถึง นักเรียนมีความสามารถที่จะบอกหน่วยการวัดในการอ้างอิงปริมาณต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันได้อย่างสมเหตุสมผล และ 6) การคิดคำนวณในใจได้อย่างยืดหยุ่น หมายถึง นักเรียนมีความสามารถในการคิดคำนวณในใจได้อย่างหลากหลายในการหาคำตอบของการบวก การลบ การคูณ หรือการหาร หรือการคิดคำนวณต่าง ๆ โดยปราศจากการใช้เครื่องมือใด ๆ จากภายนอกในการช่วยคิดซึ่งเป็นความสามารถ ผลการวิจัยพบว่า แบบวัดความรู้สึกเชิงจำนวนสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ความตรงเชิงเนื้อหา มีความสอดคล้องอยู่ระหว่าง 0.60 – 1.00 ค่าความยากอยู่ระหว่าง 0.27 - 0.60 ค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.22 - 0.67 และค่าความเที่ยงทั้งฉบับเท่ากับ 0.77 และแบบวัดความรู้สึกเชิงจำนวนสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 คะแนนมาตรฐานที่ปกติระหว่าง 36.10 ถึง 79.20 ครอบคลุมคะแนนดิบตั้งแต่ 4 ถึง 24 คะแนน ผู้อ่านสามารถศึกษาและนำแบบวัดความรู้สึกเชิงจำนวนไปประยุกต์ใช้กับนักเรียนของตนเองได้

ภณทิรา ศรีใจ และสมบัติ ท้ายเรือคำ (2564) ได้พัฒนากิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมความรู้สึกเชิงจำนวนสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษา โดยกิจกรรมที่พัฒนาประกอบไปด้วยแผนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมความรู้สึกเชิงจำนวน 18 แผนใช้เวลา 6 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 3 ชั่วโมงรวมระยะเวลา 18 ชั่วโมง ประกอบไปด้วย 1) ความหมายของจำนวนทั้งจำนวนเชิงการนับและจำนวนเชิงอันดับที่ (3 ชั่วโมง) ประกอบไปด้วย เรื่องความหมายของจำนวนทั้งจำนวนเชิงการนับและจำนวนเชิงอันดับที่ เรื่องเลขโดดและค่าประจำหลักและเรื่องแบบรูปและจำนวน 2) ความสัมพันธ์หลากหลายระหว่างจำนวน (3 ชั่วโมง) ประกอบไปด้วย เรื่องความหลากหลายของจำนวนและสมบัติการแจกแจง เรื่อง สมบัติการสลับที่ และเรื่องแบบรูปความสัมพันธ์ของจำนวน 3) ขนาดสัมพันธ์ของจำนวนการเปรียบเทียบจำนวน (3 ชั่วโมง) ประกอบไปด้วยเรื่อง ขนาดของจำนวน เรื่องจำนวนใกล้เคียงและเรื่องการประมาณค่า 4) ผลสัมพันธ์ของการดำเนินการของจำนวน (3 ชั่วโมง) ประกอบไปด้วยเรื่องการประมาณผลลัพธ์ของการบวกและการลบ เรื่องการประมาณผลลัพธ์ของ

การคูณ และเรื่องการประมาณผลลัพธ์ของการหาร 5) การอ้างอิงสำหรับการวัดสิ่งของต่าง ๆ และสถานการณ์ในสิ่งแวดล้อม (3 ชั่วโมง) ประกอบไปด้วยเรื่องการอ้างอิงสำหรับการวัด เรื่องการอ้างอิงสำหรับการชั่งและเรื่อง การอ้างอิงในสถานการณ์ต่าง ๆ และ 6) ความสามารถในการคิดคำนวณในใจและการประมาณค่าจำนวน (3 ชั่วโมง) ประกอบไปด้วยเรื่องการคิดคำนวณในใจ และเรื่องการประมาณค่าจำนวน เมื่อพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้แล้วนำไปดัชนีประสิทธิผล (E.I.) ได้ .2632 ประสิทธิภาพ E1/E2 เท่ากับ 88/91 และนำไปทดลองใช้พบว่านักเรียนมีคะแนนความรู้สึกรู้สึกเชิงจำนวนเฉลี่ยเท่ากับ 15.38 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6.37 ส่วนหลังเรียนมีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 21.07 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 5.00 และผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนพหุคูณแบบวัดซ้ำทางเดียวของคะแนนก่อนเรียนและหลังเรียนพบว่าทุกองค์ประกอบคะแนนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

## สรุป

การพัฒนาโมโนทัศน์เกี่ยวกับค่าประจำหลักเป็นการพัฒนาเพื่อให้เด็กมีความเข้าใจเกี่ยวกับค่าของเลขโดดในแต่ละหลัก โดยเรียนรู้ผ่าน 3 ระดับ ดังนี้ ระดับ 1 เป็นขั้นแนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับสิบ ระดับ 2 เป็นขั้นสร้างแนวคิดเกี่ยวกับสิบ และระดับ 3 เป็นขั้นโมโนทัศน์เกี่ยวกับสิบ เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับค่าประจำหลักแล้ว นักเรียนจะสามารถเปรียบเทียบ เรียงลำดับ เขียนจำนวนในรูปกระจายจากตัวชี้วัดได้กำหนดให้ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 นักเรียนสามารถเปรียบเทียบและเรียงลำดับจำนวนนับไม่เกิน 100 และ 0 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 เปรียบเทียบและเรียงลำดับจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เปรียบเทียบและเรียงลำดับจำนวนนับไม่เกิน 100,000 และ 0 และชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 เปรียบเทียบและเรียงลำดับจำนวนนับมากกว่า 100,000 และ 0 โดยทั้ง 4 ระดับนักเรียนจะสามารถเขียนจำนวนในรูปกระจายได้ตามที่ตัวชี้วัดกำหนด นอกจากนี้นักเรียนควรได้รับการพัฒนาความรู้สึกเชิงจำนวนผ่านกิจกรรม เกมหรือรูปแบบการสอนต่าง ๆ เพราะความรู้สึกเชิงจำนวนจะช่วยให้เด็กสามารถมองความสัมพันธ์ ขนาด หรือการดำเนินการของจำนวนได้อย่างคล่องแคล่ว และช่วยพัฒนาการเรียนรู้ของเด็กได้อีกด้วย

## บทที่ 3

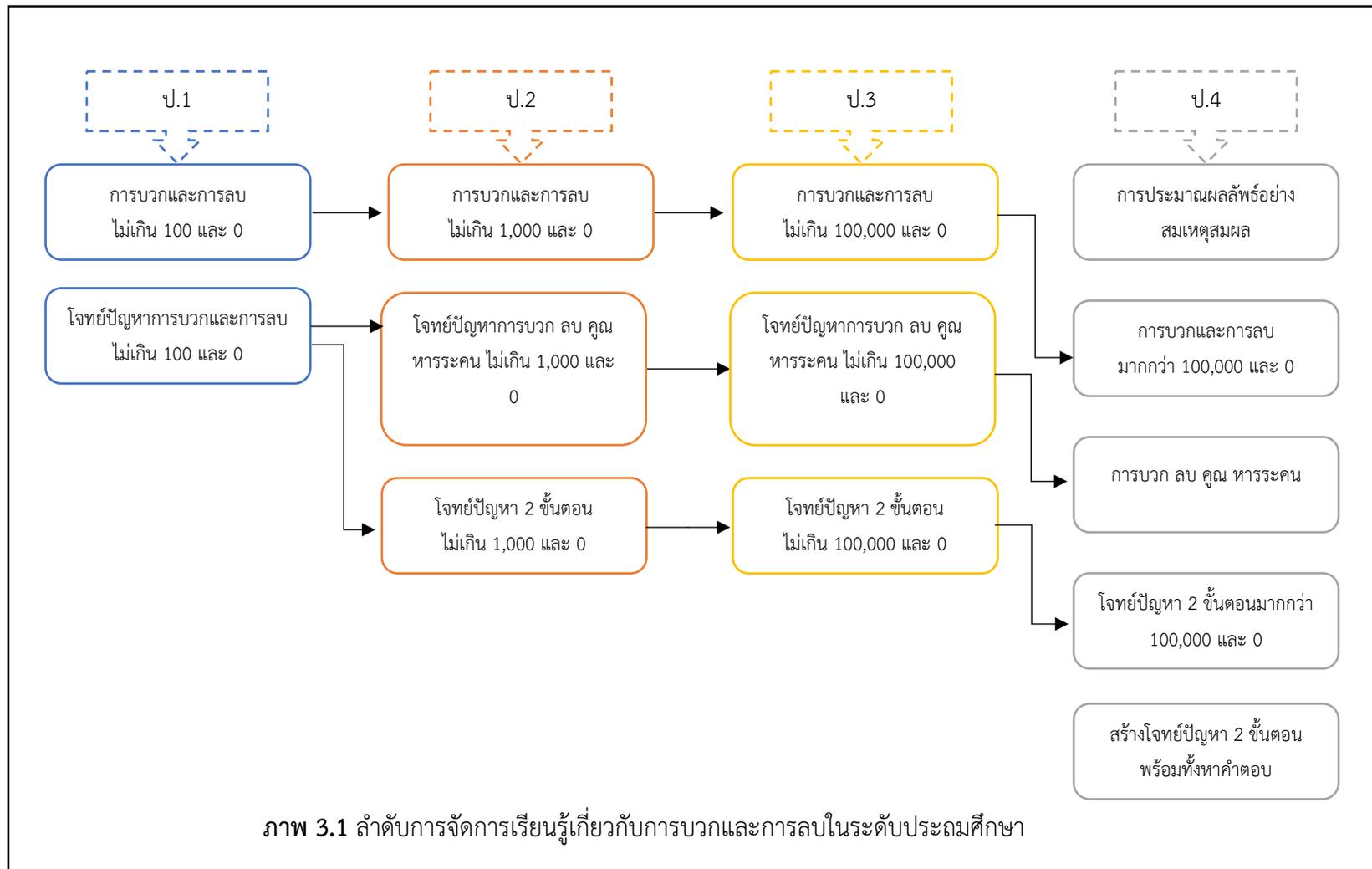
มโนทัศน์เกี่ยวกับการบวกและการลบ

บทนี้จะกล่าวถึงการดำเนินการของจำนวนซึ่งประกอบด้วยการบวกและการลบ ส่วนการคูณและการหารจะกล่าวในบทถัดไป การดำเนินการทั้งสี่มีความจำเป็นอย่างมากในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพราะเป็นพื้นฐานในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตจริง การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการดำเนินการนั้น ครูต้องอาศัยการเชื่อมโยงไปยังสถานการณ์หรือบริบทต่าง ๆ ที่นักเรียนพบเจอ และควรสอดแทรกความรู้เกี่ยวกับการดำเนินการให้กับนักเรียนด้วย ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการของจำนวนถูกกำหนดไว้ในสาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต มาตรฐาน 1.1 เข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวน ระบบจำนวน การดำเนินการของจำนวน ผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการ สมบัติของการดำเนินการ และนำไปใช้ โดยแต่ละตัวชี้วัดแต่ละชั้นปีมีรายละเอียดดังนี้

ระดับ	ตัวชี้วัด
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการบวกและประโยคสัญลักษณ์แสดงการลบของจำนวนนับไม่เกิน 100 และ 0</li> <li>2. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวกและโจทย์ปัญหาการลบของจำนวนนับไม่เกิน 100 และ 0</li> </ol>
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการบวกและประโยคสัญลักษณ์แสดงการลบของจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0</li> <li>2. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการคูณของจำนวน 1 หลักกับจำนวนไม่เกิน 2 หลัก</li> <li>3. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการหารที่ตัวตั้งไม่เกิน 2 หลักตัวหาร 1 หลัก โดยที่ผลหารมี 1 หลักทั้งหารลงตัวและหารไม่ลงตัว</li> <li>4. หาผลลัพธ์การบวก ลบ คูณ หารระคนของจำนวนนับ ไม่เกิน 1,000 และ 0</li> <li>5. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหา 2 ขั้นตอนของจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0</li> </ol>
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการบวกและประโยคสัญลักษณ์แสดงการลบของจำนวนนับไม่เกิน 10,000 และ 0</li> <li>2. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการคูณของจำนวน 1 หลักกับจำนวนไม่เกิน 4 หลัก และจำนวน 2 หลักกับจำนวน 2 หลัก</li> <li>3. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการหารที่ตัวตั้งไม่เกิน 4 หลักตัวหาร 1 หลัก</li> <li>4. หาผลลัพธ์การบวก ลบ คูณ หารระคนของจำนวนนับ ไม่เกิน 1,000 และ 0</li> <li>5. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหา 2 ขั้นตอนของจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0</li> </ol>
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ประเมินผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ การหาร จากสถานการณ์ต่าง ๆ อย่างสมเหตุสมผล</li> <li>2. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการบวกและประโยคสัญลักษณ์แสดงการลบของจำนวนนับไม่เกิน 10,000 และ 0</li> </ol>

ระดับ	ตัวชี้วัด
	3. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์แสดงการคูณของจำนวนหลายหลัก 2 จำนวน ที่มีผลคูณไม่เกิน 6 หลักและประโยคสัญลักษณ์แสดงการหารที่ตัวตั้งไม่เกิน 6 หลัก ตัวหารไม่เกิน 2 หลัก 4. หาผลลัพธ์การบวก ลบ คูณ หารระคนของจำนวนนับ และ 0 5. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหา 2 ขั้นตอนของจำนวนนับที่มากกว่า 100,000 และ 0 6. สร้างโจทย์ปัญหา 2 ขั้นตอน ของจำนวนนับและ 0 พร้อมทั้งหาคำตอบ

เมื่อนำตัวชี้วัดที่กำหนดมาวิเคราะห์ลำดับขั้นการเรียนรู้ของการดำเนินการจะได้ดังภาพ 3.1



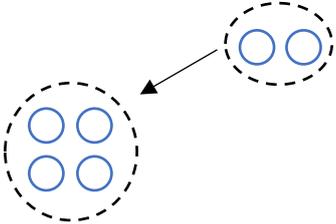
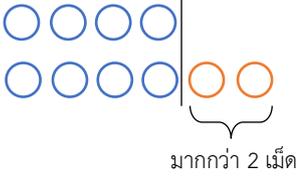
มโนทัศน์เกี่ยวกับการบวกลบและการลบจำนวน

## การพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของการบวกและการลบ

### การบวก

การบวกเป็นการดำเนินการที่นักเรียนจะได้เรียนรู้ตั้งแต่ระดับประถมศึกษา 1 โดยมี  
ความหมายดังนี้

ตาราง 3.1 ความหมายการบวกและตัวอย่างสถานการณ์

ความหมาย	ตัวอย่างสถานการณ์
<p>การเพิ่มเข้า (Add To)</p> 	<p>กวีมีลูกกวาด 4 เม็ด สุธีให้อีก 2 เม็ด กวีมีลูกกวาดทั้งหมดกี่เม็ด</p>
<p>ส่วนย่อย - ส่วนรวม (Part - Part - Whole)</p> 	<p>กวีมีลูกกวาดรสชาไทย 4 เม็ด รสชาเขียว 2 เม็ด กวีมีลูกกวาดทั้งหมดกี่เม็ด</p>
<p>การเปรียบเทียบ (Comparison)</p> 	<p>กวีมีลูกกวาด 4 เม็ด สุธีมีลูกกวาดมากกว่ากวี 2 เม็ด สุธีมีลูกกวาดกี่เม็ด</p>

จากตาราง 3.1 เป็นการอธิบายความหมายของการบวก 3 ความหมายผ่านสถานการณ์ โดยแต่ละสถานการณ์สามารถอธิบายความหมายแต่ละความหมายโดยการวาดภาพ สำหรับการบวก จะเริ่มจากการบวกจำนวนสองจำนวน จำนวนที่โดนเพิ่มเข้า หรือไว้เปรียบเทียบจะเขียนไว้ตัวแรก เรียกว่า ตัวตั้ง (augend) ในขณะที่จะเพิ่มเข้าเท่าใด หรือเปรียบเทียบกับจำนวนใดจะเรียกว่า ตัวบวก (adding) เช่น  $6 + 2$  จะเรียก 6 ว่าตัวตั้ง และ 2 ว่าตัวบวก สำหรับความหมายของการบวกแต่ละความหมายมีรายละเอียดดังนี้

1. การเพิ่มเข้า (Add To) เป็นการนำจำนวนที่มีอยู่รวมกับจำนวนที่เพิ่มขึ้น ครูควรวาดภาพ เพื่อสื่อสารกับนักเรียนให้เข้าใจเกี่ยวกับการนำมาเพิ่ม (ตาราง 3.1) และเชื่อมโยงไปยังการเขียน

มโนทัศน์เกี่ยวกับการบวกและการลบจำนวน

สัญลักษณ์แทนการบวก (+) อย่างมีความหมาย โดยอาศัยตัวอย่างสถานการณ์ที่ไม่ซับซ้อนและเพิ่มตัวอย่างที่พัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ดังนี้

สถานการณ์ 1 กวีมีลูกกวาด 4 เม็ด สู้ให้อีก 2 เม็ด กวีมีลูกกวาดทั้งหมดกี่เม็ด เขียนแทนด้วยประโยคสัญลักษณ์  $4 + 2 = \square$  สำหรับการอ่านประโยคสัญลักษณ์ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ชั้นเริ่มต้น ครูควรอ่านอย่างมีความหมาย เช่น 4 นำมาเพิ่มอีก 2 รวมเป็นเท่าใด หรือ 4 รวมกับ 2 เป็นเท่าใด ไม่ควรอ่านว่า 4 บวก 2 เท่ากับเท่าใด หรือ 4 บวกกับ 2 เท่ากับสี่เหลี่ยม เพราะในชั้นเริ่มต้นคำว่า บวก ยังเป็นคำที่เป็นนามธรรมสำหรับนักเรียน

สถานการณ์ 2 กวีมีลูกกวาด 4 เม็ด สู้นำมาให้อีกจำนวนหนึ่งทำให้กวีมีลูกกวาดทั้งหมด 6 เม็ด สู้นำลูกกวาดมาให้กวีกี่เม็ด เขียนแทนด้วยประโยคสัญลักษณ์  $4 + \square = 6$  สำหรับการอ่านประโยคสัญลักษณ์นี้ ควรอ่านว่า มีอยู่ 4 นำมาเพิ่มอีกเท่าใดจึงได้ 6 ไม่ควรอ่านว่า 4 บวกกับอะไร เท่ากับ 6 หรือ 4 บวกสี่เหลี่ยมเท่ากับ 6

สถานการณ์ 3 กวีมีลูกกวาดอยู่จำนวนหนึ่ง เมื่อได้รับลูกกวาดจากสู้ 2 เม็ด ทำให้กวีมีลูกกวาดทั้งหมด 6 เม็ด เดิมกวีมีลูกกวาดกี่เม็ด เขียนแทนด้วยประโยคสัญลักษณ์  $\square + 2 = 6$  จากสถานการณ์นี้พบว่าการเรียงตัวที่ไม่ทราบค่าจะวางในตำแหน่งแรก จะอ่านได้ว่า จำนวนใดเมื่อรวมกับ 2 ได้ 6 เมื่อครูเน้นย้ำถึงการอ่านจะทำให้ นักเรียนสามารถเขียนประโยคสัญลักษณ์จากสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง

2. ส่วนย่อย - ส่วนรวม (Part – Part – Whole) เป็นการรวมแต่ละส่วนจากทั้งหมด ไม่ได้เป็นการนำมาเพิ่มเข้า โดยการวาดภาพเพื่อสื่อสารส่วนย่อย – ส่วนรวม จะแตกต่างจากการการเพิ่มเข้า (ดังตาราง 3.1) ตัวอย่างสถานการณ์ส่วนย่อย – ส่วนรวม ดังนี้

สถานการณ์ 4 กวีมีลูกกวาดรสชาไทย 4 เม็ด และรสชาเขียว 2 เม็ด กวีมีลูกกวาดทั้งหมดกี่เม็ดเขียนแทนด้วยประโยคสัญลักษณ์  $4 + 2 = \square$  สามารถอ่านได้ว่า นับ 4 รวมกับ 2 ได้เท่าใด

สถานการณ์ 5 กวีมีลูกกวาดรสชาไทยและรสชาเขียวรวมกันทั้งหมด 6 เม็ด เป็นลูกกวาดรสชาไทย 4 เม็ด กวีมีลูกกวาดรสชาเขียวกี่เม็ด เขียนแทนด้วยประโยคสัญลักษณ์  $6 = 4 + \square$  หรือ  $4 + \square = 6$  อ่านประโยคสัญลักษณ์ได้ว่า 6 เกิดจาก 4 รวมกับจำนวนใด หรือ 4 รวมกับจำนวนใดมีค่าเท่ากับ 6 ไม่ควรอ่านว่า 6 เท่ากับ 4 บวกกับอะไร หรือ 6 เท่ากับ 4 บวกสี่เหลี่ยม หรือ 4 บวกกับอะไรได้ 6 หรือ 4 บวกกับสี่เหลี่ยมได้ 6

สถานการณ์ 6 กวีมีลูกกวาดรสชาไทยและรสชาเขียวรวมกันทั้งหมด 6 เม็ด กวีมีลูกกวาดรสชาไทยและชาเขียวอย่างละกี่เม็ด เขียนแทนด้วยประโยคสัญลักษณ์  $6 = \square + \bigcirc$  หรือ

$\square + \bigcirc = 6$  สำหรับสถานการณ์ 6 จะเป็นการพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยคำตอบจะมีความหลากหลาย และควรอ่านประโยคสัญลักษณ์ว่า จำนวนสองจำนวนใดบ้างรวมกันได้ 6 หรือ 6 เป็นการรวมกันของสองจำนวนใดบ้าง และในสถานการณ์นี้ครูควรให้เวลากับนักเรียนในการหาคำตอบตัวที่ไม่ทราบค่า และอาจเพิ่มเงื่อนไขเพื่อให้นักเรียนพัฒนาการคิดเพิ่มเติมได้อีก เช่น ถ้ากวีมีลูกกวาดรสชาไทยมากกว่ารสชาเย็น 2 เม็ด คำตอบจะเป็นเช่นไร

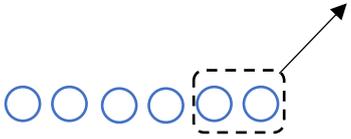
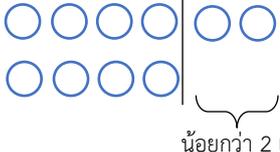
3. การเปรียบเทียบ (Comparison) การเปรียบเทียบเป็นอีกหนึ่งความหมายของการบวก เป็นการเปรียบเทียบปริมาณสองปริมาณที่เท่ากันแล้วนำปริมาณไปเพิ่มในปริมาณหนึ่งเพื่อให้อีกปริมาณหนึ่งมากกว่า โดยปกติเมื่อนักเรียนเจอสถานการณ์การเปรียบเทียบ จะเป็นการยากที่จะนำเงื่อนไขมาเขียนประโยคสัญลักษณ์ ครูควรใช้การวาดภาพสื่อความหมาย (ดังตาราง 3.1) ตัวอย่างสถานการณ์ดังนี้

สถานการณ์ 7 กวีมีลูกกวาด 4 เม็ด สุธีมีลูกกวาดมากกว่ากวี 2 เม็ด สุธีมีลูกกวาดกี่เม็ด เขียนแทนด้วยประโยคสัญลักษณ์  $4 + 2 = \square$  จากสถานการณ์ 7 มักเป็นสถานการณ์ที่นักเรียนมักไม่คุ้นชิน ครูอาจต้องอาศัยการวาดภาพเพื่อสื่อสาร และสร้างความเข้าใจให้กับนักเรียน ซึ่งความหมายการบวกชนิดนี้จะสามารถทำให้นักเรียนเข้าใจและแก้ปัญหาหรือสถานการณ์ที่คล้ายกันได้ในอนาคต

การลบ

การลบมีความหมายคล้ายกับการบวก นักเรียนเริ่มเรียนรู้ตั้งแต่ระดับประถมศึกษาปีที่ 1 โดยมีความหมายดังนี้

ตาราง 3.2 ความหมายการลบและตัวอย่างสถานการณ์

ความหมาย	ตัวอย่างสถานการณ์
การเอาออก (Take Off) 	กวีมีลูกกวาด 6 เม็ด ให้สุธีไป 2 เม็ด กวีเหลือลูกกวาดกี่เม็ด
ส่วนย่อย – ส่วนรวม (Part – Part – Whole) 	กวีมีลูกกวาดรสชาไทยและชาเขียวรวมกันได้ 6 เม็ด เป็นลูกกวาดรสชาไทย 4 เม็ด กวีมีลูกกวาดรสชาเขียวกี่เม็ด
การเปรียบเทียบ (Comparison) 	กวีมีลูกกวาด 6 เม็ด สุธีมีลูกกวาดน้อยกว่ากวี 2 เม็ด สุธีมีลูกกวาดกี่เม็ด

มโนทัศน์เกี่ยวกับการบวกและการลบจำนวน

การลบจะเริ่มจากลบจำนวนสองจำนวน โดยจำนวนที่โดนเอาออก หรือโดนเปรียบเทียบจะเขียนไว้ตัวแรกเรียกว่า ตัวตั้ง (minuend) ในขณะที่จะหักออกเท่าใด หรือเปรียบเทียบกับจำนวนใด จะเรียกว่า ตัวลบ (subtrahend) เช่น  $6 - 2$  เรียก 6 ว่าตัวตั้ง และ 2 ว่าตัวลบ

1. การเอาออก (Take Off) เป็นความหมายแรกของการลบ เป็นการนำปริมาณของตัวลบออกจากตัวตั้ง (ตาราง 3.2) และเชื่อมโยงไปยังการเขียนสัญลักษณ์แทนการลบ (-) อย่างมีความหมาย โดยอาจยกตัวอย่างสถานการณ์ที่ไม่ซับซ้อนและเพิ่มตัวอย่างที่พัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ดังนี้

สถานการณ์ 8 กวีมีลูกกวาด 6 เม็ด ให้สุธีไป 2 เม็ด กวีเหลือลูกกวาดกี่เม็ด เขียนแทนด้วยประโยคสัญลักษณ์  $6 - 2 = \square$  ประโยคสัญลักษณ์นี้ ควรอ่านว่า 6 เอาออกไป 2 จะเหลือเท่าใด ไม่ควรอ่านว่า 6 ลบ 2 เท่ากับเท่าใด หรือ 6 ลบ 2 เท่ากับสี่เหลี่ยม เพราะในระดับนี้คำว่า ลบ ก็ยังเป็นคำที่เป็นนามธรรมมากเช่นเดียวกับคำว่า บวก

สถานการณ์ 9 กวีมีลูกกวาด 6 เม็ด นำไปให้สุธีจำนวนหนึ่ง ทำให้กวีเหลือลูกกวาด 4 เม็ด สุธีได้ลูกกวาดจากกวีกี่เม็ด เขียนแทนด้วยประโยคสัญลักษณ์  $6 - \square = 4$  ประโยคสัญลักษณ์นี้ ควรอ่านว่า มีอยู่ 6 นำออกไปเท่าใดจึงจะเหลือ 4 ไม่ควรอ่านว่า 6 ลบอะไรได้ 4 หรือ 6 ลบสี่เหลี่ยมได้ 4

สถานการณ์ 10 กวีมีลูกกวาดอยู่จำนวนหนึ่ง เมื่อให้ลูกกวาดกับสุธีไป 2 เม็ดทำให้กวีเหลือลูกกวาด 4 เม็ด เดิมกวีมีลูกกวาดกี่เม็ด เขียนแทนด้วยประโยคสัญลักษณ์  $\square - 2 = 4$  ข้อสังเกตจากสถานการณ์ 10 จะพบว่า การเรียงตัวที่ไม่ทราบค่าจะวางในตำแหน่งแรก โดยสามารถอ่านอย่างมีความหมายได้ว่า จำนวนใดเมื่อเอาออกไป 2 จะเหลือ 4 เมื่อครูเน้นย้ำถึงการอ่านจะทำให้ นักเรียนสามารถเขียนประโยคสัญลักษณ์จากสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง

2. ส่วนย่อย – ส่วนรวม (Part – Part – Whole) เป็นการพิจารณาแต่ละส่วนจากทั้งหมด ไม่ได้เป็นการนำมาเพิ่มเข้าหรือเอาออก การวาดภาพเพื่อสื่อสารส่วนย่อย – ส่วนรวม จะแตกต่างจากการเอาออก (ดังตาราง 3.2) ตัวอย่างสถานการณ์ส่วนย่อย – ส่วนรวม ดังนี้

สถานการณ์ 11 กวีมีลูกกวาดรสชาไทยและชาเขียวรวมกันได้ 6 เม็ด เป็นลูกกวาดรสชาไทย 4 เม็ด กวีมีลูกกวาดรสชาเขียวกี่เม็ด เขียนแทนด้วยประโยคสัญลักษณ์  $6 - 4 = \square$  อ่านประโยคสัญลักษณ์ได้ว่า มีจำนวนสองจำนวนรวมกันได้ 6 จำนวนหนึ่งเป็น 4 อีกจำนวนเป็นเท่าใด

3. การเปรียบเทียบ (Comparison) การเปรียบเทียบเป็นอีกหนึ่งความหมายของการลบ เช่นเดียวกับการบวก การเปรียบเทียบปริมาณสองปริมาณนั้นจะเริ่มจากปริมาณที่เท่ากันแล้ว

นำปริมาณไปเปรียบเทียบกับปริมาณหนึ่งเพื่อให้อีกปริมาณหนึ่งน้อยกว่า โดยปกติเมื่อนักเรียนเจอสถานการณ์การเปรียบเทียบ จะเป็นการยากที่จะนำเงื่อนไขมาเขียนประโยคสัญลักษณ์ ครูควรใช้การวาดภาพสื่อความหมายก่อน (ดังตาราง 3.2) ตัวอย่างสถานการณ์ดังนี้

สถานการณ์ 12 กวีมีลูกกวาด 6 เม็ด สุธีมีลูกกวาดน้อยกว่ากวี 2 เม็ด สุธีมีลูกกวาดกี่เม็ด เขียนแทนด้วยประโยคสัญลักษณ์  $6 - 2 = \square$

สำหรับการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการบวกและการลบจำนวนนั้นครูควรมีการจัดวางเนื้อหา ดังนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดสถานการณ์ สำหรับขั้นนี้ครูควรสร้าง หรือนำสถานการณ์ที่มีอยู่จริงให้นักเรียนได้เรียนรู้ ทำความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องราวต่าง ๆ ที่สามารถนำไปใช้ได้ในชีวิตจริง ครูควรมีสถานการณ์ที่หลากหลายและให้นักเรียนสื่อสารความเข้าใจเกี่ยวกับสถานการณ์ที่กำหนดให้ผ่านการเล่า หรืออธิบายตามความเข้าใจของตนเอง และข้อควรระวังคือในการยกตัวอย่างสถานการณ์ที่ใกล้เคียงกับชีวิตจริงให้มากที่สุด

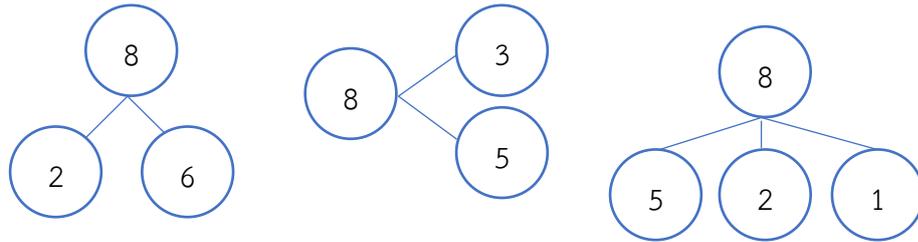
ขั้นที่ 2 เขียนประโยคสัญลักษณ์ ขั้นนี้เป็นการนำความเข้าใจที่ถูกต้องของนักเรียนในขั้นที่ 1 มาเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ให้ถูกต้อง สิ่งที่สำคัญของขั้นตอนนี้คือไม่ควรให้นักเรียนจำคำ เช่น คำว่าเพิ่ม คือการบวก หรือ คำว่าลด คือการลบ แต่ควรให้นักเรียนเรียนรู้สถานการณ์นั้นด้วยความเข้าใจ พร้อมทั้งให้นักเรียนอ่านประโยคสัญลักษณ์อย่างมีความหมาย และไม่ควรเร่งรีบใช้คำที่เป็นนามธรรม เช่น บวก ลบ เร็วเกินไปสำหรับนักเรียน

ขั้นที่ 3 หาคำตอบ เมื่อนักเรียนสามารถเขียนประโยคสัญลักษณ์ได้ถูกต้อง ขั้นนี้จะเป็นการหาคำตอบโดยใช้เทคนิคต่าง ๆ เช่น การใช้เส้นจำนวน การใช้กรอบสิบ (Base ten block) เป็นต้น

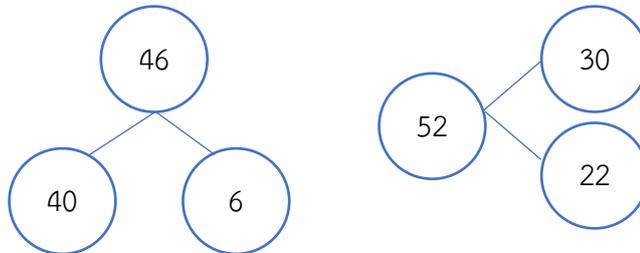
ลำดับการจัดการเรียนรู้ทั้ง 3 ตอนจะเป็นวิธีการที่ช่วยให้ครูสามารถวิเคราะห์ หรือวินิจฉัยนักเรียนได้อย่างตรงจุดว่าควรแก้ไขหรือปรับปรุงนักเรียนในส่วนใด เช่น เมื่อกำหนดสถานการณ์มาให้ นักเรียนไม่สามารถหาคำตอบได้อย่างถูกต้อง ครูไม่ควรมองประเด็นแค่คำตอบสุดท้าย เพราะสาเหตุอาจเกิดจากขั้นที่ 1 นั่นคือนักเรียนไม่เข้าใจสถานการณ์นั้น หรืออาจเกิดจากนักเรียนเข้าใจสถานการณ์แต่ไม่สามารถเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ถูกต้อง หรือนักเรียนเข้าใจทั้งขั้น 1 และ 2 แต่ไม่สามารถหาคำตอบได้ อาจจะมาจากการบวกหรือการลบที่ไม่ถูกต้อง ดังนั้นควรฝึกนักเรียนแต่ละขั้น และเมื่อนักเรียนมีความเข้าใจแล้วจึงจะผ่านไปยังขั้นต่อไป บางครั้งการเขียนประโยคสัญลักษณ์อาจยากสำหรับนักเรียน แต่นักเรียนสามารถเข้าใจและหาคำตอบได้ สิ่งนี้ครูต้องมีความเข้าใจว่าต้องการเน้นในการหาคำตอบ หรือการสื่อสารภายใต้สถานการณ์ที่กำหนดด้วยภาษาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจจำเป็นต้องละการเขียนประโยคสัญลักษณ์ในบางครั้งก็ได้

### ความสัมพันธ์แบบส่วนย่อย – ส่วนรวม (Part – Whole Relation)

ความสัมพันธ์แบบส่วนย่อย – ส่วนรวม (Part – Whole Relation) เป็นการเขียนจำนวนในรูปของจำนวน 2 จำนวนขึ้นไป โดยที่ผลบวกของจำนวนเหล่านั้นจะเท่ากับจำนวนเดิม เช่น 8 อาจเขียนได้เป็น 2 กับ 6 หรือ 3 กับ 5 หรือ 0 กับ 8 หรือ 5 กับ 2 กับ 1



ในการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์แบบส่วนย่อย – ส่วนรวม ครูอาจให้นักเรียนได้เรียนรู้ตั้งแต่ระดับประถมศึกษาปีที่ 1 โดยเริ่มจากจำนวนหนึ่งหลัก และเมื่อนักเรียนมีความเข้าใจแล้วสามารถขยายไปยังจำนวนหลายหลักได้ สำหรับความสัมพันธ์แบบส่วนย่อย – ส่วนรวมจะเป็นตัวช่วยให้นักเรียนสามารถหาผลบวกหรือผลลบได้อย่างรวดเร็วมากขึ้น



สิ่งที่ครูควรสอดแทรกเกี่ยวกับความสัมพันธ์แบบส่วนย่อย – ส่วนรวมคือการบวกด้วยศูนย์ เช่น 7 เกิดจาก 7 รวมกับ 0 หรือ  $7 = 7 + 0$  หรือ 9 เกิดจาก 9 รวมกับ 0 หรือ  $9 = 9 + 0$  จนได้มโนทัศน์ที่ว่า จำนวนนับใดเมื่อรวมกับศูนย์ผลบวกจะเท่ากับจำนวนนับตัวนั้น และการบวกด้วยจำนวนเดียวกัน เช่น 6 เกิดจาก 3 รวมกับ 3 หรือ  $6 = 3 + 3$  หรือ 14 เกิดจาก 7 รวมกับ 7 หรือ  $14 = 7 + 7$  สิ่งเหล่านี้จะเป็นพื้นฐานในการหาผลบวกด้วยเทคนิคต่าง ๆ

## เทคนิคการบวกและการลบ

สำหรับเทคนิคการบวกและการลบนั้นมีหลายเทคนิค แต่ละเทคนิคมีวิธีการและข้อจำกัดที่ต่างกัน ในการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการบวกและการลบนั้น ครูควรแยกเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานเกี่ยวกับการบวกและการลบให้ชัดเจน เพื่อฝึกให้นักเรียนมีความเข้าใจและกระบวนการคิดที่ถูกต้อง โดยอาจแบ่งได้เป็นดังนี้

1. การบวกและการลบจำนวนไม่เกิน 20 เป็นขั้นการสร้างมโนทัศน์เกี่ยวกับการหาผลบวกและหาผลลบ เทคนิคหรือวิธีการจะใช้วิธีง่าย ๆ

1) การนับ เป็นเทคนิคการหาการบวกหรือการลบอย่างง่ายที่คำตอบไม่เกิน 20 ตัวอย่างการใช้เทคนิคการนับ

หาผลบวก  $4 + 2$

แนวคิด เริ่มจาก 4 นับต่อไปอีก 2 เป็น 5 6 ดังนั้น  $4 + 2 = 6$

หาผลลบ  $6 - 2$

แนวคิด เริ่มจาก 6 นับลดไปอีก 2 เป็น 5 4 ดังนั้น  $6 - 2 = 4$

หรือ นับต่อจาก 2 ไปถึง 6 เป็น 3 4 5 6 นับได้ 4 ครั้ง ดังนั้น  $6 - 2 = 4$

เทคนิคการนับนี้เป็นเทคนิคพื้นฐาน และสามารถทำได้ง่ายกับนักเรียนที่สามารถนับจำนวนได้

2) การวาดภาพ เป็นอีกเทคนิคอย่างง่าย โดยจะใช้ภาพแทนจำนวน และเทคนิคการวาดภาพควรใช้กับจำนวนน้อย หรือไม่ควรเกิน 20 ตัวอย่างการใช้เทคนิคการวาดภาพ

หาผลบวก  $4 + 2$

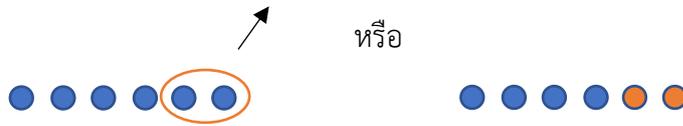
แนวคิด



ดังนั้น  $4 + 2 = 6$

หาผลลบ  $6 - 2$

แนวคิด

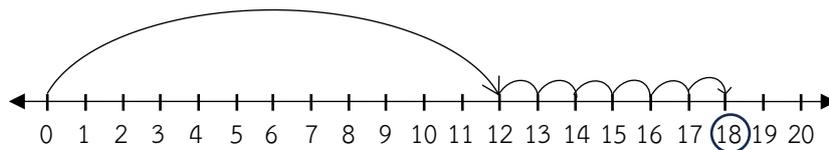


ดังนั้น  $6 - 2 = 4$

3) การใช้เส้นจำนวน เป็นวิธีการที่สามารถใช้ได้กับจำนวนเกือบทุกจำนวน แต่ครูควรอธิบายให้นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับเส้นจำนวนก่อน สำหรับเทคนิคนี้อาจมีความยุ่งยากถ้าจำนวนที่นำมาบวกหรือจำนวนที่นำมาลบมีจำนวนมาก อาจเกิดความผิดพลาดได้ง่าย ตัวอย่างการใช้เทคนิคเส้นจำนวน

หาผลบวก  $12 + 6$

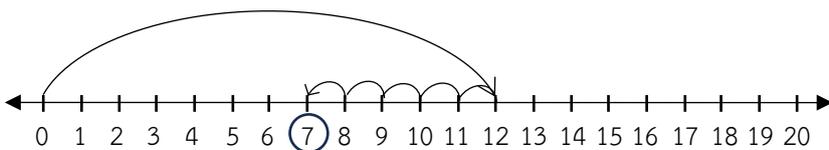
แนวคิด



ดังนั้น  $12 + 6 = 18$

หาผลลบ  $12 - 5$

แนวคิด



ดังนั้น  $12 - 5 = 7$

4) การบวกหรือลบจำนวนเดียวกัน เป็นเทคนิคเพิ่มเติม โดยเป็นการรวมเอาเทคนิคส่วนย่อย - ส่วนรวมมาช่วยในการบวกหรือลบจำนวนให้มีความรวดเร็วมากขึ้น แต่ข้อจำกัดคือนักเรียนต้องสามารถแยกจำนวนออกเป็น ส่วนย่อย - ส่วนรวม และหาผลบวกจำนวนเดียวกันอย่างคล่องแคล่ว ตัวอย่างการใช้การบวกจำนวนเดียวกัน

หาผลบวก  $7 + 9$

แนวคิด

$$7 + \begin{array}{c} 9 \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

$$\boxed{7 + 7} + 2 = 14 + 2 = 16$$

ดังนั้น  $7 + 9 = 16$

หาผลลบ  $15 - 8$

แนวคิด

$$15 - 8$$

$$\begin{array}{c} 15 \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

$$7 + \boxed{8 - 8} = 7 + 0 = 7$$

ดังนั้น  $15 - 8 = 7$

5) การบวกหรือลบจำนวนให้ครบสิบ เทคนิคนี้จะคล้ายกับเทคนิคการบวกจำนวนเดียวกัน แต่มีความแตกต่างตรงที่เทคนิคนี้จะเน้นไปที่จำนวนที่นำมาบวกหรือลบกันจะสามารถนำไปบวกหรือลบอีกจำนวนให้ครบสิบก่อนแล้วนำจำนวนที่เหลือไปดำเนินการต่อ ตัวอย่างการใช้การบวกหรือลบจำนวนให้ครบสิบ

หาผลบวก  $16 + 9$

แนวคิด

$$16 + \begin{array}{c} 9 \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

$$\boxed{16 + 4} + 5 = 20 + 5 = 25$$

ดังนั้น  $16 + 9 = 25$

หาผลลบ  $16 - 9$

แนวคิด

$$16 - \begin{array}{c} 9 \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

$$\boxed{16 - (6)} + 3 = 10 - 3 = 7$$

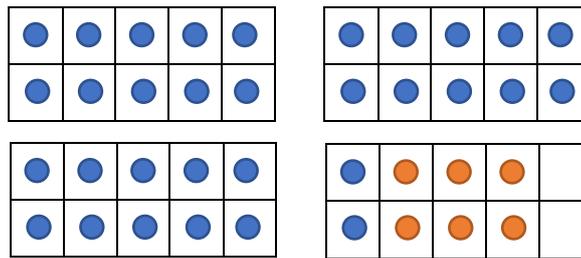
$$\text{ดังนั้น } 16 - 9 = 7$$

สำหรับเทคนิคนี้ต้องใช้ใช้อย่างระมัดระวัง เช่น  $16 - 9$  เมื่อแยก 9 เป็น  $6 + 3$  นั้น แล้วนำไปลบด้วย 16 นักเรียนอาจสับสนได้ว่า ลบด้วย 6 แล้วบวกด้วย 3 ตรงนี้อาจเกิดข้อผิดพลาดได้ ควรอธิบายอย่างละเอียดว่า 9 เกิดจาก  $6 + 3$  ดังนั้น นำ 6 ไปลบกับ 16 ก่อน แล้วนำมาลบต่ออีก 3

2. การบวกและการลบจำนวนไม่เกิน 100 เมื่อจำนวนมากขึ้น การใช้เทคนิคการนับหรือวาดรูปอาจมีความยุ่งยาก และเสียเวลามากเกินไป ครูอาจใช้กรอบสิบ (Base ten block) เป็นวิธีการช่วยให้นักเรียนหาคำตอบของการบวกหรือการลบ โดยมีกรอบสิบเป็นตัวช่วยในการนับเพิ่มหรือการเอาออก ตัวอย่างการใช้เทคนิคกรอบสิบ

$$\text{หาผลบวก } 32 + 6$$

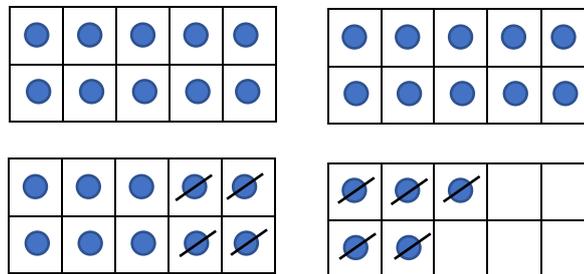
แนวคิด



$$\text{ดังนั้น } 32 + 6 = 38$$

$$\text{หาผลลบ } 35 - 9$$

แนวคิด



$$\text{ดังนั้น } 35 - 9 = 26$$

อธิบายความสัมพันธ์ของตัวเลขที่วงล้อมกับตัวเลขที่เหลือ

หาตัวเลขแสดงจำนวนที่แทนด้วย A

ภาพ 3.2 ตัวอย่างกิจกรรมพัฒนาการบวกและลบจำนวน

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

### การนำไปใช้

ในอดีตเมื่อครูต้องการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการบวกหรือการลบ จะนึกถึงการบวกหรือการลบในแนวตั้งหรือแนวนอน แต่ในปัจจุบันมีเทคนิคการบวกและการลบมากมายที่สามารถหาคำตอบได้เช่นกัน โดยนักเรียนอาจใช้เทคนิคต่าง ๆ ผสมผสานกับแนวคิดของตนเอง หรือบางครั้งอาจใช้แนวคิดที่พบเจอในสื่อสังคมออนไลน์ ในประเด็นเหล่านี้ครูต้องเปิดใจ และยอมรับแนวคิด โดยให้นักเรียนแสดงแนวคิดตนเอง อย่างไม่จำกัดไม่ว่านักเรียนจะแสดงแนวคิดในวิธีใด สิ่งสำคัญคือนักเรียนต้องสามารถอธิบายหรือบอกที่มาได้ สิ่งนี้จะเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนสื่อสารกระบวนการคิด และครูควรยอมรับวิธีการที่นักเรียนทำ ตัวอย่างการนำเทคนิคต่าง ๆ ไปใช้

หาผลบวก  $56 + 7$

แนวคิด

$$56 + 7 = 60 + 3 = 63$$

ดังนั้น  $56 + 7 = 63$

หาผลลบ  $37 - 8$

แนวคิด  $37 - 8 = 30 - 1 = 29$

$$\begin{array}{c} 37 - 8 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 7 \quad 1 \end{array}$$

ดังนั้น  $37 - 8 = 29$

หาผลบวก  $41 + 25$

แนวคิด  $41 + 25 = 61 + 5 = 66$

$$\begin{array}{c} 41 + 25 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 20 \quad 5 \end{array}$$

หรือ  $41 + 25 = 1 + 65 = 66$

$$\begin{array}{c} 41 + 25 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 40 \end{array}$$

ดังนั้น  $41 + 25 = 66$

หาผลลบ  $74 - 39$

แนวคิด  $74 - 39 = 44 - 9 = 40 - 5 = 35$

$$\begin{array}{c} 74 - 39 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 30 \quad 9 \end{array} \quad \begin{array}{c} 44 - 9 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 4 \quad 5 \end{array}$$

ดังนั้น  $74 - 39 = 35$

แนวคิดที่นักเรียนนำมาใช้นั้น บางครั้งต้องผสมผสานกับแนวคิด การคิดเชิงสัมพันธ์ (Relational Thinking) ซึ่งแนวคิดนี้จะมองหาความสัมพันธ์และภาพรวมของจำนวนที่อยู่ในสมการ โดยใช้การเปรียบเทียบจำนวนคู่หนึ่งที่ทราบค่าซึ่งอยู่คนละด้านของเครื่องหมายเท่ากับเพื่อหาอีกจำนวนที่ไม่ทราบค่า การมองความสัมพันธ์ของจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ โดยไม่ใช้การคำนวณ นักเรียนที่ประสบความสำเร็จในการคิดเชิงสัมพันธ์นั้นต้องมีความสามารถในการระบุทิศทางหรือความเปลี่ยนแปลงของจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ เพื่อเป็นแนวทางสู่การหาตัวไม่ทราบค่า สิ่งที่สำคัญคือต้องมีความเข้าใจการเท่ากัน การแสดงการเท่ากันและการชดเชย รวมถึงความรู้เกี่ยวกับทิศทางของการชดเชย ซึ่งเป็นกุญแจสำคัญของการคิดเชิงสัมพันธ์บนประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่า การคิดเชิงสัมพันธ์ยังรวมถึงความสามารถในการใช้สมบัติ

พื้นฐานของจำนวนและการดำเนินการในการแปลงประโยคสัญลักษณ์เพื่อหาคำตอบ นอกจากนี้ยังเป็นองค์ประกอบสำคัญของการคิดเชิงพีชคณิต และสามารถนำไปใช้เป็นยุทธวิธีในการหาคำตอบบนประโยคสัญลักษณ์ได้ ทั้งนี้เพื่อหลีกเลี่ยงการคำนวณจากทั้งสองข้างของประโยคสัญลักษณ์การคิดเชิงสัมพันธ์บนประโยคสัญลักษณ์มีความสำคัญสำหรับการเรียนรู้พีชคณิตคือ เป็นพื้นฐานที่สำคัญสำหรับการเรียนพีชคณิตและการให้เหตุผลทางพีชคณิต และทำให้การเรียนพีชคณิตง่ายขึ้นในระดับขั้นต่อไป ตัวอย่างการคิดเชิงสัมพันธ์ หาตัวไม่ทราบค่า  $27 + 12 = 15 + \square$  หรือ  $36 - 17 = 40 - \square$  หรือ  $\square + 15 = 7 + 69$  (Molina and Ambrose, 2008)

การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นแนวคิดที่เป็นประโยชน์กับนักเรียนเป็นอย่างมากซึ่ง สุกัญญา หะยิสา และคณะ (2554) ได้ทำการศึกษาแนวคิดนี้ โดยสร้างกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างการคิดเชิงสัมพันธ์ เรื่องการบวกและการลบจำนวนที่มีผลลัพธ์และตัวตั้งไม่เกิน 100 ซึ่งพบว่า เมื่อนักเรียนมีประสบการณ์ในกิจกรรมเรียนรู้เพิ่มเสริมสร้างการคิดเชิงสัมพันธ์ นักเรียนจะมีความเข้าใจเครื่องหมายเท่ากับ มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสองจำนวนและใช้การชดเชย มีความสามารถในการใช้สมบัติพื้นฐานของจำนวนและการดำเนินการ สามารถเขียนประโยคสัญลักษณ์โดยใช้เครื่องหมายเท่ากับได้อย่างหลากหลาย และหาสามารถหาคำตอบได้อย่างถูกต้อง ตลอดจนสามารถใช้เครื่องหมายเท่ากับในลักษณะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองปริมาณได้ เรื่องการคิดเชิงสัมพันธ์ จากแนวคิดต่าง ๆ สามารถนำมาขยายกับการหาผลบวกที่เกิน 100 หรือการลบได้ดังนี้

หาผลบวก  $86 + 47$

แนวคิด 1

$$86 + 47 = 90 + 43 = 100 + 33 = 133$$

แนวคิด 2

$$86 + 47 = 100 + 6 + 27 = 100 + 30 + 3 = 133$$

แนวคิด 3

$$86 + 47 = 120 + 6 + 7 = 120 + 13 = 133$$

หาผลลบ  $84 - 68$

แนวคิด 1

$$84 - 68 = 80 - 64 = 20 - 4 = 16$$

แนวคิด 2

$$84 - 68 = 76 - 60 = 16$$

### การบวกและการลบที่ตัวตั้งและผลลัพธ์มากกว่า 100 ด้วยตารางร้อย ตารางสิบ และตารางหน่วย

สำหรับการหาผลบวกหรือผลลบที่ตัวตั้งมากกว่า 100 โดยตัวชี้วัดได้กำหนดไว้ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ครูอาจจัดการเรียนรู้โดยใช้ตารางร้อย และตารางสิบ และตารางหน่วยก่อน (ภาพ 3.3) โดยสื่อนี้จะช่วยสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับการบวกและลบจำนวนนับ และเหมาะกับการนำมาใช้ในกรณีที่จำนวนนั้นมากกว่า 100

ตารางร้อย เป็นสื่อการสอนที่มีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยแบ่งเป็นแนวนอน 10 ช่อง และแนวตั้ง 10 ช่อง จะได้เป็น 100 ช่อง ช่องละเท่า ๆ กัน

ตารางสิบ มีลักษณะคล้ายกับตารางร้อยแต่แนวนอนจะมีเพียง 1 ช่อง ส่วนแนวตั้งจะมี 10 ช่อง โดยขนาดของแต่ละช่องจะเท่ากับตารางร้อย และสามารถสลับแนวนอนกับแนวตั้งได้ เมื่อนำตารางสิบมาประกอบกันจำนวน 10 ตาราง จะเท่ากับ 1 ตารางร้อย หรือ 10 สิบ เท่ากับ 1 ร้อย

ตารางหน่วย มีลักษณะคล้ายกับตารางร้อยและตารางสิบแต่แนวนอนจะมีเพียง 1 ช่อง และแนวตั้ง 1 ช่อง เมื่อนำตารางหน่วยมาประกอบกัน 10 ตารางหน่วย จะเท่ากับ 1 ตารางสิบ หรือ 10 หน่วย เท่ากับ 1 สิบ

ตารางร้อย ตารางสิบ และตารางหน่วย

10 ตารางหน่วยได้ 1 ตารางสิบ

10 ตารางสิบได้ 1 ตารางร้อย

ความสัมพันธ์ของตารางหน่วย ตารางสิบและตารางร้อย

**ภาพ 3.3 ตารางร้อย ตารางสิบ ตารางหน่วยและความสัมพันธ์**

การนำตารางเหล่านี้มาใช้ ครูควรให้นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับการใช้จำนวนแทนด้วยตารางต่าง ๆ เช่น

จำนวน	สื่อตาราง
364	
187	

สำหรับการนำไปใช้นั้นจะแยกเป็นการบวกและการลบ ดังนี้

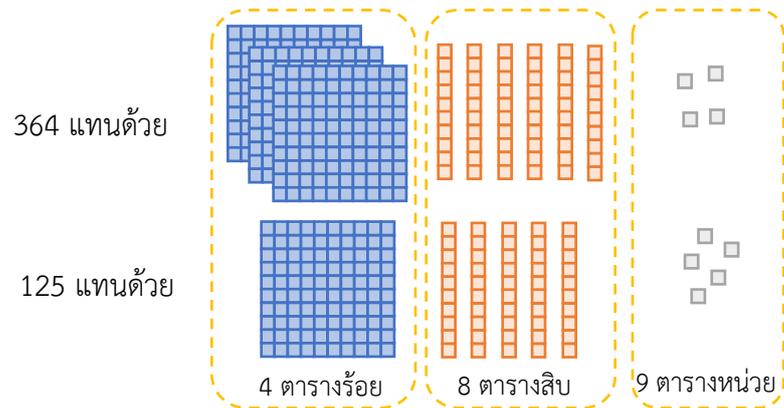
การบวก สามารถแยกได้เป็น 2 หัวข้อย่อย คือ กรณีไม่มีการทด และกรณีมีการทด

มโนทัศน์เกี่ยวกับการบวกและการลบจำนวน

กรณีไม่มีการทด

ตัวอย่าง หาผลบวก  $364 + 125$

หาผลบวกโดยใช้ตาราง



หาผลบวก  $364 + 125$  โดยใช้ตารางพบว่า

- มี 9 ตารางหน่วย เกิดจาก 4 ตารางหน่วยของ 364 รวมกับ 5 ตารางหน่วยของ 125 หรือ 4 หน่วย บวกกับ 5 หน่วย ได้ 9 หน่วย
- มี 8 ตารางสิบ เกิดจาก 6 ตารางสิบของ 364 รวมกับ 2 ตารางสิบของ 125 หรือ 6 สิบ บวกกับ 2 สิบ ได้ 8 สิบ
- มี 4 ตารางร้อย เกิดจาก 3 ตารางร้อยของ 364 รวมกับ 1 ตารางร้อยของ 125 หรือ 3 ร้อย บวกกับ 1 ร้อย ได้ 4 ร้อย

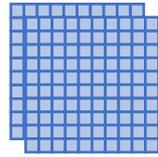
ดังนั้น  $364 + 125$  ได้ 4 ร้อย กับ 8 สิบ กับ 9 หน่วย หรือ  $364 + 125 = 489$

กรณีมีการทด

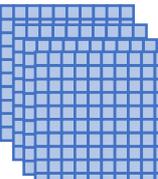
ตัวอย่าง หาผลบวกของ  $256 + 473$

หาผลบวกโดยใช้ตาราง

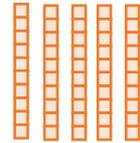
256 แทนด้วย



473 แทนด้วย



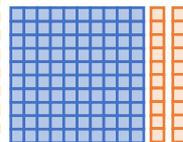
6 ตารางร้อย



12 ตารางสิบ

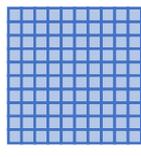


9 ตารางหน่วย



1 ตารางร้อยกับ

2 ตารางสิบ



6 ตารางร้อย รวม  
กับ 1 ตารางร้อย  
ได้ 7 ตารางร้อย

ทดไป 1 ตารางร้อย  
เหลือ 2 ตารางสิบ

หาผลบวก  $256 + 473$  โดยใช้ตารางพบว่า

- มี 9 ตารางหน่วย เกิดจาก 6 ตารางหน่วยของ 256 รวมกับ 3 ตารางหน่วยของ 473 หรือ 6 หน่วย บวกกับ 3 หน่วย ได้ 9 หน่วย
- มี 12 ตารางสิบ เกิดจาก 5 ตารางสิบของ 256 รวมกับ 7 ตารางสิบของ 473 หรือ 5 สิบ บวกกับ 7 สิบ ได้ 12 สิบ หรือ 1 ตารางร้อยกับ 2 สิบ ทดไป 1 ตารางร้อย เหลือ 2 สิบ
- มี 7 ตารางร้อย เกิดจาก 2 ตารางร้อยของ 256 รวมกับ 4 ตารางร้อยของ 473 และที่ทดมาอีก 1 ตารางร้อย หรือ 2 ร้อย บวกกับ 4 ร้อย และทดอีก 1 ร้อย ได้ 7 ร้อย

ดังนั้น  $256 + 473$  ได้ 7 ร้อย กับ 2 สิบ กับ 9 หน่วย หรือ  $256 + 473 = 729$

มโนทัศน์เกี่ยวกับการบวกและการลบจำนวน

จากการพิจารณา 2 ตัวอย่างพบว่า การบวกนั้นจะหาผลบวกได้เมื่อนำจำนวนในหลักเดียวกัน มาบวกกัน เมื่อผลบวกครบสิบหรือมากกว่าสิบให้ทดไปในหลักทางซ้ายหนึ่งหลัก จากข้อสรุปสามารถ นำมาเขียนการบวกในแนวตั้งแนวนอน พร้อมทั้งขยายมโนทัศน์ไปยังการบวกจำนวนที่มีหลายหลัก มีการเขียนที่มีการลดการอธิบายได้ดังนี้

ตัวอย่าง หาผลบวก  $364 + 125$

วิธีทำ

หลักร้อย	หลักสิบ	หลักหน่วย
3	6	4
1	2	5
4	8	9

+

3	6	4
1	2	5
4		
4	8	9

ดังนั้น  $364 + 125 = 489$

ตัวอย่าง หาผลบวก  $256 + 473$

วิธีทำ

หลักร้อย	หลักสิบ	หลักหน่วย
2	5	6
4	7	3
6	12	9

+

+ 1 ร้อย		
หลักร้อย	หลักสิบ	หลักหน่วย
2	5	6
4	7	3
7	2	9

↓

1		
2	5	6
4	7	3
7		
7	2	9

ดังนั้น  $256 + 473 = 729$

สำหรับการลบสามารถใช้ตารางร้อย ตารางสิบ และตารางหน่วยได้เช่นเดียวกับการบวก สามารถแยกออกเป็น 2 หัวข้อย่อยเช่นกันดังนี้

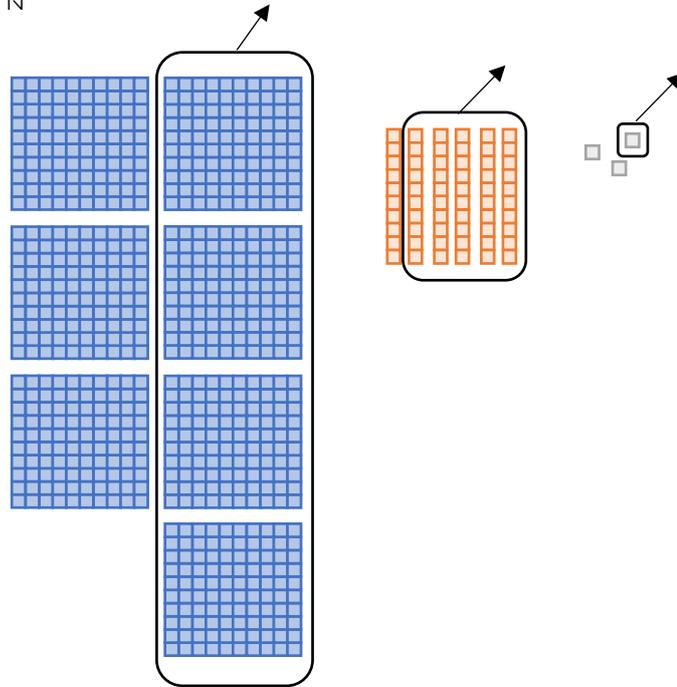
มโนทัศน์เกี่ยวกับการบวกและการลบจำนวน

## การลบกรณีไม่มีกระจาย

ตัวอย่าง หาผลลบ 763 - 451

หาผลลบโดยใช้ตาราง

763 แทนด้วย



หาผลลบ 763 - 451 โดยใช้ตารางพบว่า

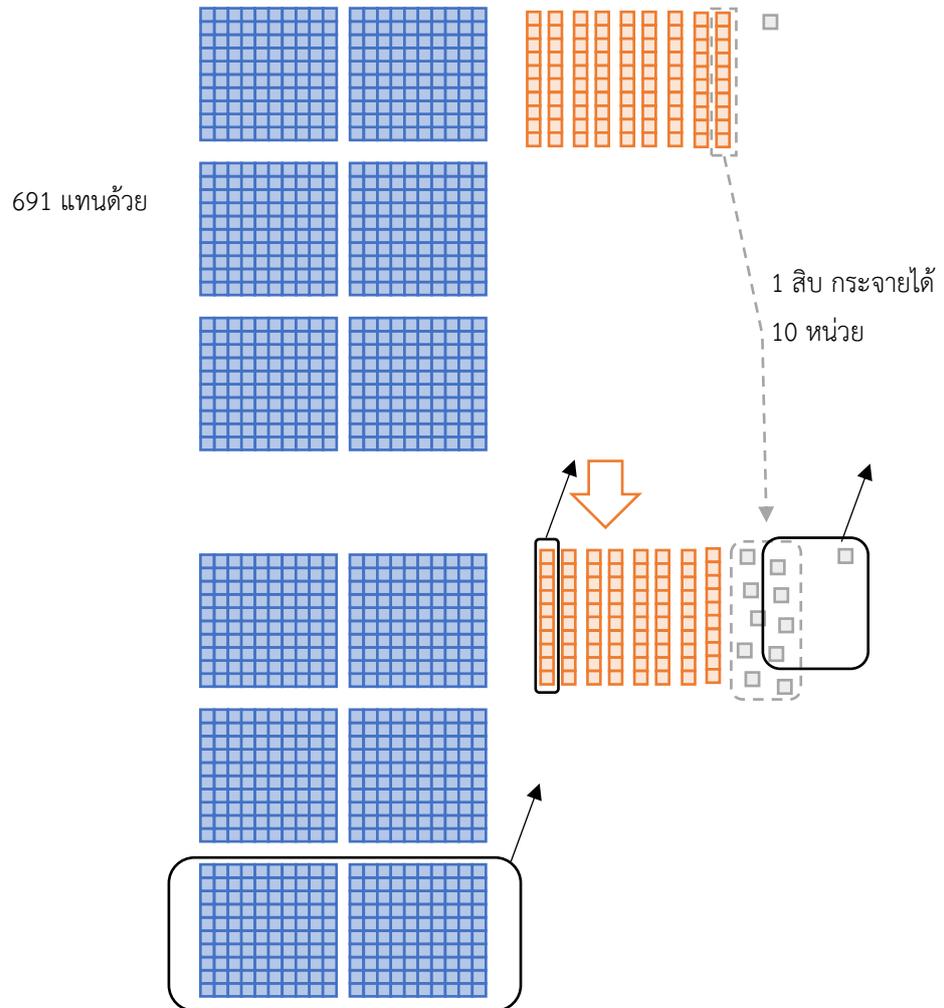
- มี 2 ตารางหน่วย เกิดจาก 3 ตารางหน่วยของ 763 เอาออกไป 1 ตารางหน่วยของ 451 หรือ 3 หน่วย ลบ 1 หน่วย เหลือ 2 หน่วย
- มี 1 ตารางสิบ เกิดจาก 6 ตารางสิบของ 763 เอาออกไป 5 ตารางสิบของ 451 หรือ 6 สิบ ลบ 5 สิบ เหลือ 1 สิบ
- มี 3 ตารางร้อย เกิดจาก 7 ตารางร้อย 763 เอาออกไป 4 ตารางร้อย 451 หรือ 7 ร้อย ลบ 4 ร้อย เหลือ 3 ร้อย

ดังนั้น 763 - 451 ได้ 3 ร้อย กับ 1 สิบ กับ 2 หน่วย หรือ  $763 - 451 = 312$

## การลบกรณีที่มีการกระจาย

ตัวอย่าง ทาผลลบ 691 - 215

ทาผลลบโดยใช้ตาราง



ทาผลลบ 691 - 215 โดยใช้ตารางพบว่า

- มี 6 ตารางหน่วย เกิดจากนำ 1 สิบของ 9 สิบมากระจายได้ 10 หน่วย รวมกับ 1 หน่วยเดิมของ 691 ได้ 11 ตารางหน่วย ลบไป 5 ตารางหน่วยของ 215 หรือ 11 หน่วย ลบ 5 หน่วย เหลือ 6 หน่วย
- มี 7 ตารางสิบ เกิดจาก 9 ตารางสิบของ 691 กระจายไป 1 ตารางสิบได้ 8 ตารางสิบ กับ 10 หน่วย นำ 8 ตารางสิบ ลบไป 1 ตารางสิบของ 215 ได้ 7 ตารางสิบ หรือ 8 สิบ ลบ 1 สิบ เหลือ 7 สิบ
- ตารางร้อยมี 4 ตารางร้อย เกิดจาก 6 ตารางร้อยของ 691 ลบไป 2 ตารางร้อยของ 215 หรือ 6 ร้อย ลบ 2 ร้อย เหลือ 4 ร้อย

ดังนั้น 691 - 215 ได้ 4 ร้อย กับ 7 สิบ กับ 6 หน่วย หรือ  $691 - 215 = 476$

สำหรับการลบนั้น ครูควรอธิบายนักเรียนให้รู้จักตัวตั้งซึ่งเป็นจำนวนที่โดนลบ และตัวลบ ซึ่งเป็นจำนวนที่จะไปลบจากตัวตั้ง โดยตัวตั้งจะเป็นจำนวนแรก เช่น  $763 - 451$  จะได้ 763 เป็นตัวตั้ง และ 451 เป็นตัวลบ จากตัวอย่างทั้ง 2 พบว่า การจะลบได้นั้นควรพิจารณาแต่ละหลักว่าตัวตั้งมากกว่าตัวลบหรือไม่ ถ้ามากกว่าสามารถลบกันได้เลย แต่ถ้าหลักใดตัวตั้งน้อยกว่าให้กระจายหลักทางซ้ายมา 1 หลัก แล้วรวมกับค่าประจำหลักเดิมจึงนำมาลบ สำหรับในระดับประถมศึกษาความรู้เกี่ยวกับจำนวนนั้น นักเรียนจะรู้จักแค่จำนวนนับ จึงทำให้ตัวตั้งต้องมากกว่าหรือเท่าตัวลบเสมอ มีการเขียนที่มีการลดการอธิบายได้ดังนี้

ตัวอย่าง หาผลลบ  $763 - 451$

วิธีทำ

หลักร้อย	หลักสิบ	หลักหน่วย
7	6	3
4	5	1
3	1	2

$$\begin{array}{r} 763 \\ - 451 \\ \hline 312 \end{array}$$

ดังนั้น  $763 - 451 = 312$

ตัวอย่าง หาผลลบ  $691 - 215$

วิธีทำ

หลักร้อย	หลักสิบ	หลักหน่วย
6	9	1
2	1	5
4	7	6

หลักร้อย	หลักสิบ	หลักหน่วย
6	8	11
2	1	5
4	7	6

$$\begin{array}{r} 811 \\ 6\cancel{9}\cancel{1} \\ - 215 \\ \hline 476 \end{array}$$

ดังนั้น  $691 - 215 = 476$

ในบางครั้งอาจใช้วิธีผสมผสานในการหาคำตอบ เช่น หาผลลบ  $325 - 38$  โดยเริ่มจากตัวลบ แล้วหาจำนวนที่บวกกับตัวลบเพื่อให้ได้ผลบวกครบสิบ แล้วทำเช่นเดียวกันเพื่อให้ได้ครบร้อย แล้วจึงหาจำนวนสุดท้ายที่นำมาบวกแล้วได้เท่ากับตัวตั้ง สำหรับวิธีการนี้เรียกว่า วิธีการนับขึ้น (counting – up method)

หาผลลบ  $325 - 38$  โดยใช้วิธีการนับขึ้น

	3	8	
		2	+
	4	0	
	6	0	+
1	0	0	
2	0	0	+
3	0	0	
	2	5	+
3	2	5	

บวกด้วย 2 เพื่อให้ครบสิบ (40)

บวกด้วย 60 เพื่อให้ครบร้อย (100)

บวกด้วย 200 เพื่อให้ครบร้อยของตัวตั้ง (300)

บวกด้วย 25 เพื่อให้ได้ตัวตั้ง (325)

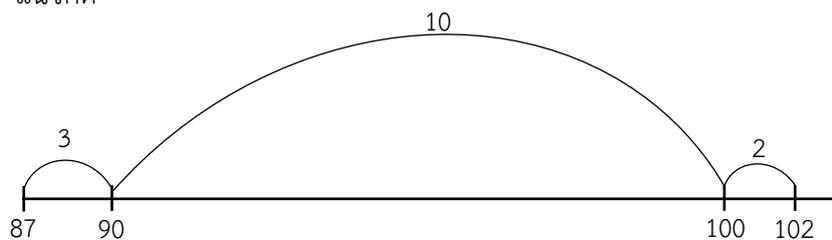
$$\text{จาก } 2 + 60 + 200 + 25 = 287$$

$$\text{ดังนั้น } 325 - 38 = 287$$

หรือบางครั้งนักเรียนอาจหาคำตอบได้จากการใช้น้ำความรู้เรื่องเส้นจำนวนมาประยุกต์ใช้ เช่น

$$\text{หาผลบวก } 87 + 15$$

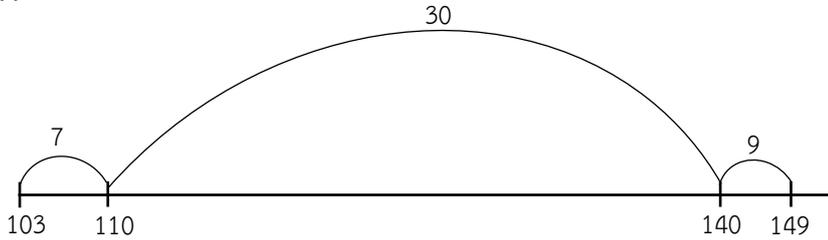
แนวคิด



$$\text{ดังนั้น } 87 + 15 = 102$$

หาผลบวก  $103 + 46$

แนวคิด



ดังนั้น  $103 + 46 = 149$

คำแนะนำในการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการบวกและการลบ มีดังนี้

1. นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับค่าประจำหลักและไม่เข้าใจเกี่ยวกับการบวกเมื่อผลบวกครบสิบหรือมากกว่าสิบ เช่น หาผลบวก  $369 + 309$

นักเรียนบวกหลักหน่วยได้ 18 ซึ่งมากกว่าสิบ นั่นคือเขียน 8 ในหลักหน่วยแล้วทดในหลักสิบไป 1 สิบ แต่นักเรียนเข้าใจว่าได้ 18 เขียน 18 ในหลักหน่วย แล้วจึงบวกหลักถัดไปทันที

ภาพ 3.4 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการหาผลบวก  $369 + 309$

2. นักเรียนคำนวณผิดพลาด โดยไม่ได้นำจำนวนในหลักเดียวกันมาบวกหรือลบกัน ข้อผิดพลาดนี้จะพบมากที่สุด (วิไลลักษณ์ ไร้ไสว, 2560) ครูควรเน้นย้ำถึงการบวกและการลบว่าเกิดจากการนำหลักเดียวกันมาบวกหรือลบกัน ข้อผิดพลาดนี้จะพบมากสำหรับการจัดการเรียนรู้ที่ควรเริ่มจากการตั้งบวกหรือลบในแนวตั้งก่อน และอาจให้นักเรียนเขียนจำนวนให้ตรงกันเพื่อลดความสับสน เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจจึงขยายมโนทัศน์ไปบวกหรือลบในแนวนอน

3. สำหรับโจทย์ปัญหา นักเรียนบางคนจะมีความเข้าใจว่าจำนวนที่อยู่ตัวแรกของโจทย์จะเป็นตัวตั้งเสมอ ซึ่งในกรณีนี้อาจทำได้ในการบวก เพราะสามารถสลับที่ได้แต่การลบนั้นไม่สามารถทำได้ ในประเด็นนี้ครูควรให้นักเรียนอ่านและทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา แล้วให้นักเรียนอธิบายความเข้าใจของโจทย์ปัญหา แล้วนำไปเขียนประโยคสัญลักษณ์ และหาคำตอบ สำหรับโจทย์ปัญหา ระคน ครูควรให้นักเรียนอธิบายความเข้าใจทีละขั้นตอน และใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนอธิบายลำดับการดำเนินการที่ชัดเจน บางครั้งอาจใช้คำถามเพื่อชี้ถึงลำดับขั้นตอนที่ไม่สามารถทำก่อนได้ เช่น ถ้า

นำจำนวนสองจำนวนไปลบกันก่อนแล้วค่อยนำมาบวก จะได้ผลลัพธ์เท่าใด สอดคล้องหรือมีความเป็นไปตามเงื่อนไขของโจทย์หรือไม่

4. การหาผลลบที่มีกระจายนักเรียนอาจสับสน และอาจลืมกระจายได้ เช่น ผลลบ 203 – 198 นักเรียนแสดงแนวคิดดังนี้

$\begin{array}{r} 1013 \\ 203 \\ \underline{198} \\ 115 \end{array}$	<p>นักเรียนกระจาย 0 ในหลักสิบ แต่ลืมว่ากระจายไปแล้ว หรือไม่ทราบ 0 เมื่อกระจายไปทางขวา 1 ขวาจะเหลือเท่าใด</p>
<p><b>ภาพ 3.5</b> มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการหาผลลบ 203 – 198</p>	

เมื่อครูพบกรณีแบบนี้ อย่าเพิ่งให้คำตอบนักเรียนว่าถูกหรือผิด แต่ใช้การตรวจสอบคำตอบ เช่น ให้นักเรียนนำคำตอบไปบวกกับตัวลบว่าตรงกับตัวตั้งหรือไม่ ถ้าครูทำแบบนี้ซ้ำ ๆ จะทำให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบทุกครั้งก่อนตอบ

5. ครูควรให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบและประมาณคำตอบทุกครั้ง ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการประมาณคำตอบดังนี้

- ใช้สถานการณ์ช่วยในการประมาณค่า
- ใช้ภาษาพูดที่นักเรียนมีความเข้าใจอยู่แล้ว (ประมาณเท่าใด ใกล้เคียงกับจำนวนใด อยู่ระหว่างจำนวนใดกับจำนวนใด)
- ยอมรับค่าที่ประมาณผิดพลาด เช่น  $270 + 325$  นักเรียนประมาณค่าดังนี้  $270 \approx 200$  และ  $325 \approx 300$  ดังนั้น  $270 + 325 \approx 500$  หรือ  $270 \approx 250$  และ  $325 \approx 350$  ดังนั้น  $270 + 325 \approx 600$  หรือ  $270 \approx 300$  ดังนั้น  $270 + 325 \approx 625$  จาก 3 แบบพบว่าได้ค่าประมาณที่แตกต่างกันออกไป ในประเด็นนี้ครูควรให้นักเรียนแต่ละคนอธิบายแนวคิดในการประมาณ โดยครูอาจอธิบายค่าที่แตกต่างกันของแต่ละคน และช่วยอภิปรายถึงค่าที่ประมาณได้ที่สมเหตุสมผลที่สุด
- ไม่ควรให้รางวัลกับนักเรียนที่ประมาณค่าได้ใกล้เคียงคำตอบที่สุด เนื่องจากการประมาณคำตอบเป็นแค่การคาดเดาคำตอบ แต่ควรเสริมแรงทางด้วยคำพูดต่าง ๆ และให้กำลังใจกับนักเรียนที่ยังประมาณค่าไม่สมเหตุสมผล

- ควรสนใจกระบวนการหรือวิธีคิดในการคาดเดาคำตอบมากกว่าค่าประมาณที่ได้ การประมาณค่าคำตอบล่วงหน้าไม่มีผิดหรือถูก ซึ่งการประมาณคำตอบล่วงหน้าจะเป็นการส่งเสริมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายสำหรับนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษา

6. เมื่อนักเรียนมีโมโนทัศน์ที่ดีเกี่ยวกับการบวกและการลบแล้ว ครูควรพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนโดยอาจให้นักเรียนเล่นเกมหรือทำกิจกรรมต่าง ๆ นอกเวลาเพิ่มเติม

### ตัวอย่างงานวิจัยเกี่ยวกับการบวกและการลบ

การบวกและการลบนั้นเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ได้มีผู้ที่สนใจนวัตกรรมหรือเทคนิคการจัดการเรียนรู้ด้วยรูปแบบต่าง ๆ เพื่อสร้างความเข้าใจ หรือพัฒนาทักษะการบวกและการลบให้กับนักเรียน สามารถสรุปได้ดังนี้

ด้านรูปแบบการสอน วิมล มานพ (2562) ได้พัฒนากิจกรรมการสอนคณิตศาสตร์ เรื่อง การบวกและการลบจำนวนที่มีผลลัพธ์และตัวตั้งไม่เกิน 20 สำหรับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้รูปแบบ QSCCS โดยผู้วิจัยได้พัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ที่จัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้รูปแบบ QSCCS จำนวน 7 แผน ซึ่งประกอบไปด้วยการเรียนการสอน ชั้น Q (question) ทำให้นักเรียนพัฒนาทักษะการใช้เหตุผลผ่านการใช้คำถามและตั้งสมมุติฐาน ชั้น S (search) ทำให้นักเรียนพัฒนาทักษะด้านภาษา ชั้น C (Construct) ทำให้นักเรียนได้พัฒนาทักษะการใช้ภาษา เหตุผล และการคำนวณ นำไปสู่การสร้างองค์ความรู้ ชั้น C (Communication) ทำให้นักเรียนได้พัฒนาทักษะการใช้ภาษา เหตุผลและการคำนวณ ในการนำเสนองานและสื่อสาร ชั้น S (service) ทำให้นักเรียนได้พัฒนาทักษะการใช้ภาษา เหตุผล และการคำนวณ เมื่อนำแผนการจัดการเรียนรู้ไปใช้ พบว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์หลังเรียนดีกว่าก่อนเรียน อีกทั้งนักเรียนยังมีความพึงพอใจในระดับมากที่สุด

อารีย์ สุขใจเวทย์ (2553) ได้ทำการศึกษาการพัฒนาผลการเรียนรู้เรื่อง การบวกและการลบของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ด้วยการจัดการเรียนรู้แบบวัฏจักรการเรียนรู้ 7E ผู้วิจัยได้สร้างแผนการจัดการเรียนรู้แบบวัฏจักรการเรียนรู้ 7E เรื่องการบวกและการลบที่มีผลลัพธ์และตัวตั้งไม่เกิน 100 จำนวน 2 แผนการเรียนรู้ โดยแต่ละแผนประกอบไปด้วย ขั้นตอนตรวจสอบความรู้เดิม (Elicitation) เป็นการตั้งคำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนแสดงความรู้เดิมในเรื่องที่จะเรียนออกมา เพื่อครูจะได้ตรวจสอบความรู้เดิมของนักเรียน ขั้นสร้างความสนใจ (Engagement) เป็นการนำเข้าสู่บทเรียน เพื่อเชื่อมโยงกับความรู้เดิมที่นักเรียนได้เรียนมา ขั้นสำรวจและค้นหา (Exploration) เป็น

การเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้แนวคิดที่มีอยู่มาจัดความสัมพันธ์ของเรื่องที่กำลังเรียน ชั้นอธิบาย (Explanation) เป็นขั้นการตรวจสอบความรู้แล้วนำมารวบรวมเพื่อสรุปผล และหาคำตอบ ชั้นขยายความรู้ (Elaboration) เป็นการนำความรู้ที่ได้มาเชื่อมโยงกับความรู้เดิม ชั้นประเมินผล (Evaluation) เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ตรวจสอบแนวคิดและหาคำตอบที่ถูกต้อง และชั้นนำความรู้ไปใช้ (Extension) เป็นการให้นักเรียนได้นำสิ่งที่ได้เรียนมาไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนสามารถนำความรู้ไปสร้างเป็นความรู้ใหม่ โดยแต่ละแผนการเรียนจะใช้เวลา 5 ชั่วโมง ผลของนำแผนการเรียนไปใช้พบว่า นักเรียนมีผลการเรียนก่อนและหลังแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่สถิติที่ระดับ .05 นอกจากนี้ผลการเรียนหลังจากใช้การเรียนรู้อัตนวิสัยการการเรียนรู้ 7E นักเรียนมีความสามารถอยู่ในระดับดี และมีความพึงพอใจในระดับมาก

ด้านแบบฝึกทักษะ สุพัตรา อินทรเกษม และคณะ (2565) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การบวกและการลบ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้แบบฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์ โรงเรียนบ้านไร่ จังหวัดกำแพงเพชร กัญญาภัค ธรรมสุข (2563) ได้พัฒนาแบบฝึกทักษะการแก้ปัญหา คณิตศาสตร์ เรื่อง การบวก ลบ คูณ หารระคน สำหรับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ธัญรดา คงฉิม (2560) ได้พัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนเรื่อง การบวกและการลบจำนวนนับที่ผลลัพธ์และตัวตั้งไม่เกิน 100,000 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้แบบฝึกทักษะ และหนึ่งฤทัย เลี้ยงพันธุ์สกุล (2559) ได้พัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้แบบฝึกทักษะเรื่องการบวก ลบ คูณ หารระคน ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนอนุบาลเบตง (สภาพอนุสรณ์) จากการศึกษา งานวิจัยทั้ง 4 เรื่องพบว่า แบบฝึกทักษะช่วยให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ดีขึ้น และนักเรียนมีความพึงพอใจในระดับดี

## สรุป

การพัฒนาโมโนทัศน์เกี่ยวกับการบวกและการลบนั้น ครูต้องมีความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของการบวกนั่นคือ การเพิ่มเข้า ส่วนย่อย – ส่วนร่วม และการเปรียบเทียบ การลบมีความหมายคือ การเอาออก ส่วนย่อย – ส่วนร่วม และการเปรียบเทียบ เมื่อครูจัดการเรียนรู้ด้วยความหมายและนักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของการบวกและลบแล้ว ครูควรอธิบายถึงเทคนิคต่าง ๆ ที่ช่วยให้นักเรียนสามารถหาคำตอบได้ เช่น การนับ การวาดภาพ และการใช้เส้นจำนวน การบวกหรือลบจำนวนเดียวกัน หรือการบวกหรือลบจำนวนให้ครบสิบ ซึ่งเทคนิคเหล่านี้เหมาะกับจำนวนที่ไม่เกิน 20 ส่วน การใช้กรอบสิบจะเหมาะกับจำนวนไม่เกิน 100 และจากตัวชี้วัดกำหนดให้นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 สามารถหาผลบวกและผลลบของจำนวนนับไม่เกิน 100 และ 0 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 สามารถ

หาผลบวกและผลลบของจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 สามารถหาผลบวกและผลลบของจำนวนนับไม่เกิน 100,000 และ 0 และชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 สามารถหาผลบวกและผลลบของจำนวนนับมากกว่า 100,000เกิน สำหรับการบวกสามารถสรุปได้ว่า การบวกให้นำจำนวนในหลักเดียวกันมาบวกกัน เมื่อผลบวกครบสิบหรือมากกว่าสิบให้ทดไปในหลักทางซ้ายหนึ่งหลัก ส่วนการลบให้นำจำนวนในหลักเดียวกันมาลบกัน ในกรณีที่ตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบให้กระจายหลักทางซ้ายมา 1 หลัก แล้วรวมกับค่าประจำหลักเดิมแล้วจึงนำมาลบ จากข้อสรุปนี้สามารถทำได้ตั้งการบวกและการลบในแนวตั้งและแนวนอน หรือครูอาจนำเทคนิคต่าง ๆ มาผสมผสานเพื่อหาคำตอบ และควรศึกษาและตรวจสอบความเข้าใจที่ถูกต้องของนักเรียนในการนำเทคนิคเหล่านี้มาใช้ ครูควรศึกษาลำดับการจัดการเรียนรู้ และการวางแผนการจัดการเรียนอย่างเป็นระบบ อาจใช้สถานการณ์ง่าย ๆ และใกล้เคียงกับชีวิตจริง ใช้บริบทที่ใกล้ตัวของนักเรียนมากที่สุด เพื่อให้นักเรียนสามารถเรียนรู้เกี่ยวกับการบวกและการลบอย่างมีความหมาย นอกจากนี้ครูควรศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่อาจเกิดจากการจัดการเรียนรู้ หรือเกิดจากสื่อต่าง ๆ พร้อมทั้งวางแผนในการแก้ปัญหา และศึกษารูปแบบการสอนหรือสื่อการสอนต่าง ๆ นอกเหนือจากหนังสือเรียนหรือตำราหลัก เพื่อช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้อย่างแท้จริง

## บทที่ 4

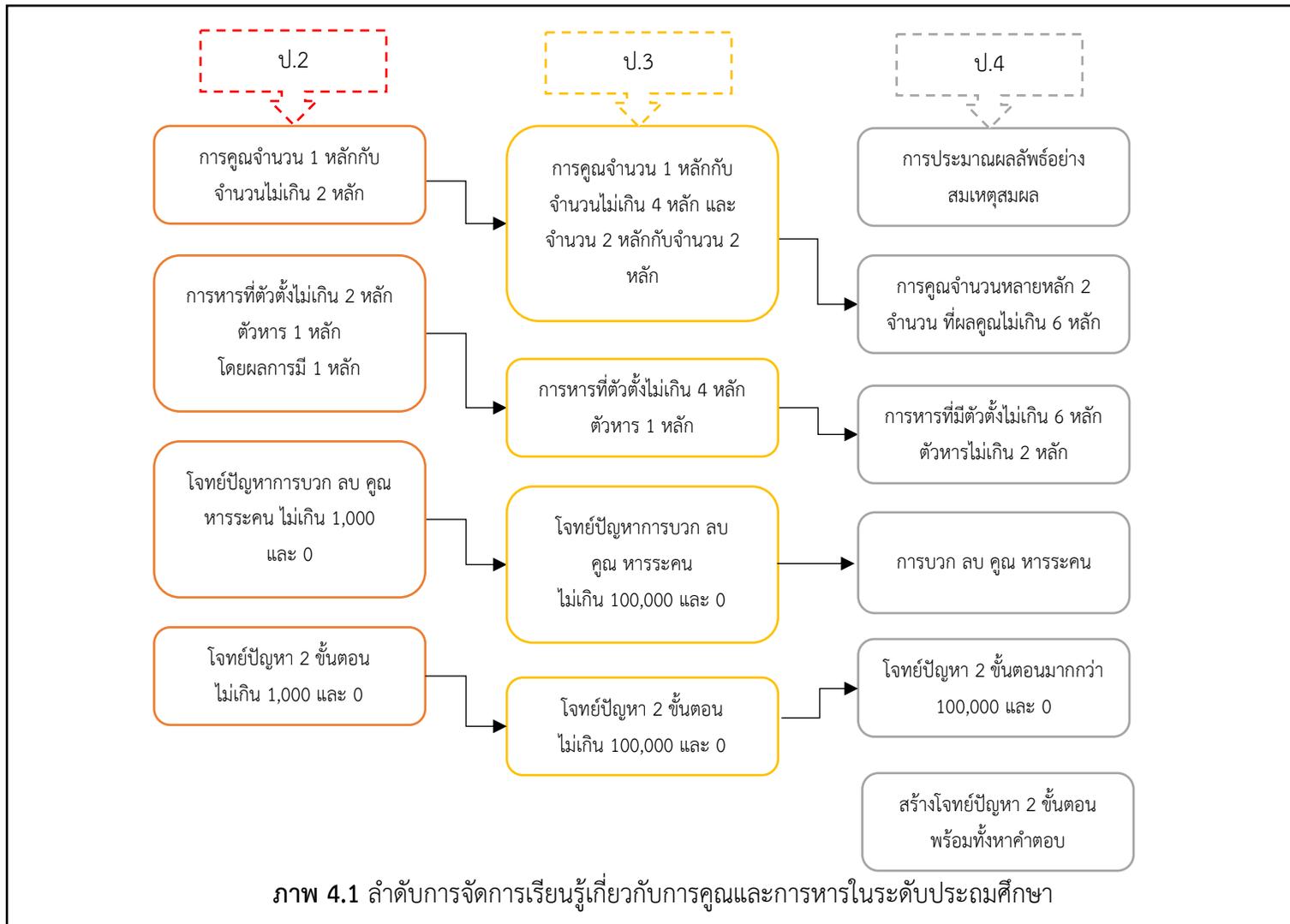
มโนทัศน์เกี่ยวกับการคูณและการหาร

บทนี้เป็นการอธิบายหรือขยายมโนทัศน์เพิ่มเติมจากบทที่แล้วเกี่ยวกับการคูณและการหาร หลักสูตร  
แกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง  
พ.ศ.2560) ได้กำหนดตัวชี้วัดที่เกี่ยวข้องกับการคูณและการหารไว้ดังนี้ (ภาพ 4.1)

ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 จะเป็นการคูณจำนวน 1 หลักกับจำนวนไม่เกิน 2 หลัก และการหารที่  
ตัวตั้งไม่เกิน 2 หลัก ตัวหาร 1 หลัก โดยผลหารมี 1 หลัก เมื่อพิจารณาจะพบว่า การคูณและการหาร  
ในระดับนี้จะสัมพันธ์กันทั้งตัวตั้งและตัวหาร

ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เป็นการคูณจำนวน 1 หลักกับจำนวนไม่เกิน 4 หลัก และจำนวน 2  
หลักกับจำนวน 2 หลัก และการหารที่ตัวตั้งไม่เกิน 4 หลัก ตัวหาร 1 หลัก

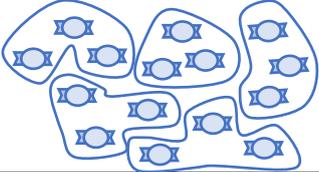
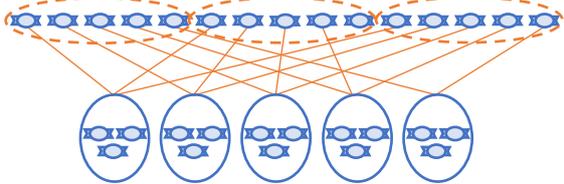
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 การคูณจำนวนหลายหลักกับ 2 จำนวน แต่ผลคูณไม่เกิน 6 หลัก และ  
การหารที่มีตัวตั้งไม่เกิน 6 หลัก ตัวหารไม่เกิน 2 หลัก



มโนทัศน์เกี่ยวกับการคูณและการหารจำนวน

ในการจัดการเรียนรู้การคูณและการหารซึ่งเป็นโมโนทัศน์ที่เกี่ยวข้องกัน ครูสามารถอธิบายไปพร้อมกันได้ โดยใช้การเชื่อมโยงผ่านสถานการณ์ที่ไม่ซับซ้อน ดังตาราง 4.1

ตาราง 4.1 ตัวอย่างสถานการณ์เกี่ยวกับการคูณและการหาร

ตัวอย่างสถานการณ์	แนวคิด
อหิมี่ลูกกวาด 3 รส รสละ 5 เม็ด อหิมี่ลูกกวาดทั้งหมดก็เม็ด	
อหิมี่ลูกกวาด 15 เม็ด แบ่งให้เพื่อน คนละ 3 เม็ด ได้กี่คน	
อหิมี่ลูกกวาด 15 เม็ด แบ่งให้เพื่อน 5 คน คนละเท่า ๆ กัน แต่ละคนได้ ลูกกวาดกี่เม็ด	

จากตัวอย่างสถานการณ์ในตาราง 4.1 พบว่ามี 3 5 และ 15 ทั้งสามจำนวนนี้จะทำหน้าที่หรือมีบทบาทที่แตกต่างกัน ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างการคูณกับการหาร ดังนั้นในการจัดการเรียนรู้การคูณและการหารครั้งแรกครูควรมุ่งเน้นไปยังความหมาย ความสัมพันธ์ระหว่างการคูณกับการหาร และวิธีการหาคำตอบอย่างง่าย ๆ แล้วจึงพัฒนาวิธีการหาคำตอบที่ซับซ้อนตามตัวชี้วัดที่กำหนดในระดับต่อไป

### การพัฒนาโมโนทัศน์การคูณ

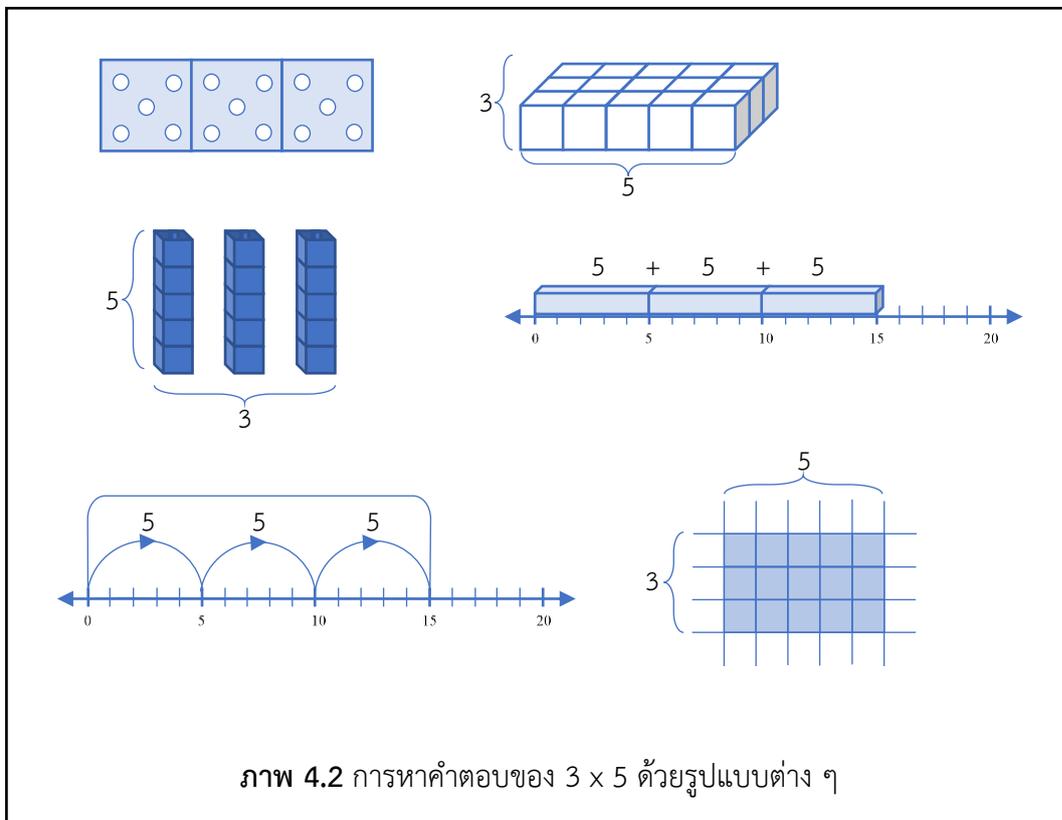
การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการคูณ ครูอาจใช้สื่อหรือเทคนิคต่าง ๆ เพื่อช่วยพัฒนาความเข้าใจพื้นฐานของการคูณ จากงานวิจัยของ วิจิษณ์ ปันสีมา (2559) พบว่าการคิดเกี่ยวกับการคูณของนักเรียนระดับประถมศึกษาพบว่าส่วนใหญ่มีระดับการคิดเกี่ยวกับการคูณในระดับพื้นฐาน ที่เป็นเช่นนี้เพราะเนื้อหาการคูณมีความซับซ้อนกว่าการบวกและการลบ ทำให้นักเรียนส่วนใหญ่ประสบปัญหาในการทำ ความเข้าใจการคูณ และไม่สามารถนำการคูณไปใช้อย่างมีความหมาย ดังนั้นครูควรวางแผนและลำดับการจัดการเรียนรู้ให้ชัดเจน โดยมีลำดับการเรียนรู้ดังนี้

### การคูณจำนวน 1 หลักกับจำนวน 1 หลัก

การคูณจำนวน 1 หลักกับจำนวน 1 หลัก นักเรียนจะเรียนรู้ในระดับประถมศึกษาปีที่ 2 โดยสามารถอธิบายผ่านสถานการณ์ ดังนี้

สถานการณ์ 1 อธิมีลูกกวาด 3 รส รสละ 5 เม็ด อธิมีลูกกวาดทั้งหมดกี่เม็ด จากสถานการณ์ ครูอาจให้นักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบในรูปแบบต่าง ๆ (ตาราง 4.1) พร้อมทั้งนำเสนอการเขียนแทนด้วยประโยคสัญลักษณ์  $3 \times 5 = \square$  (มี 3 รส รสละ 5 เม็ด) อ่านอย่างมีความหมายได้ว่า 3 กลุ่มของ 5 เท่ากับเท่าใด โดย 5 แสดงจำนวนสมาชิกในแต่ละกลุ่ม 3 แสดงจำนวนของกลุ่ม และ  $\times$  เรียกว่า เครื่องหมายคูณ จากตาราง 4.1 สื่อความหมายได้ว่า  $3 \times 5 = 5 + 5 + 5 = 15$  ดังนั้นอธิมีลูกกวาดทั้งหมด 15 เม็ด ครูอาจใช้แบบจำลองต่าง ๆ หรือเทคนิคต่าง ๆ ช่วยในการหาคำตอบ (ภาพ 4.2)

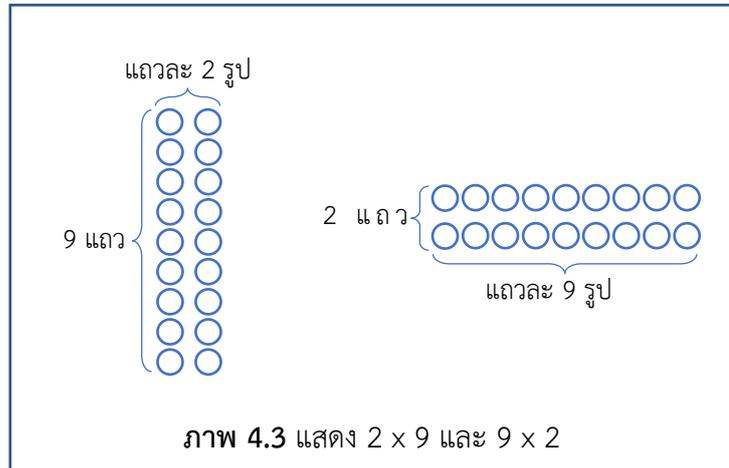
การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการคูณ จะได้ค้นหาคำว่าตัวตั้งกับตัวคูณ จากสถานการณ์ 1 หาคำตอบได้จาก  $3 \times 5$  มีความหมายว่า 3 กลุ่มของ 5 ดังนั้น เรียก 5 ว่าตัวตั้งคูณ (multiplicand) หรือนิยมเรียกว่าตัวตั้ง และเรียก 3 ว่าตัวคูณ (multiplier) นั่นคือ มี 5 อยู่ 3 กลุ่ม และ  $3 \times 5 = 5 + 5 + 5$  เป็นการเขียนการคูณในรูปการบวก สิ่งที่ครูควรเน้นย้ำคือ  $3 \times 5$  หมายความว่า 5 บวกกัน 3 ตัว ไม่ใช่ 3 ครั้ง



สถานการณ์ 2 ครูจัดโต๊ะ 6 แถว แถวละ 7 ตัว ครูจัดโต๊ะที่ตัว เขียนประโยคสัญลักษณ์ได้  $6 \times 7 = \square$  (มี 6 แถว แถวละ 7 ตัว) สามารถหาคำตอบได้จาก  $6 \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 42$  ดังนั้น ครูใช้โต๊ะ 42 ตัว

เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายการคูณ การอ่าน และสัญลักษณ์การคูณแล้ว ควรยกตัวอย่างเพื่อให้นักเรียนสังเกตและขยายความเข้าใจ เช่น  $2 \times 9$  กับ  $9 \times 2$

จากภาพ 4.3  $2 \times 9$  (มี 2 แถว แถวละ 9 ช่อง) จะได้  $9 + 9 = 18$   $9 \times 2$  (มี 9 แถว



แถวละ 2 ช่อง) จะได้  $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 18$  พบว่า  $2 \times 9$  กับ  $9 \times 2$  มีความหมายไม่เหมือนกันแต่มีผลคูณเท่ากัน สรุปได้ว่าการคูณนั้นสามารถสลับที่ได้ทำให้ผลคูณคงเดิม ในประเด็นนี้จะช่วยในการหาผลคูณในแนวตั้งหรือแนวนอน

เมื่อนักเรียนหาผลคูณได้จากการนำจำนวนเดียวกันมาบวกซ้ำ ๆ แต่การคำตอบด้วยวิธีนี้จะทำให้เสียเวลาและอาจมีข้อผิดพลาดได้ ครูส่วนมากจึงนิยมให้นักเรียนจำผลคูณ หรือที่นิยมเรียกว่า การท่องสูตรคูณ การท่องสูตรคูณจะช่วยให้นักเรียนสามารถคิดคำนวณได้เร็วขึ้น และนิยมให้นักเรียนท่องสูตรคูณแม่ 2 - 9 หรือ 2 - 12 โดยอาจท่องสูตรคูณหลังเข้าแถวเคารพธงชาติ หรือก่อนเลิกเรียน แต่อย่างไรก็ตามการท่องสูตรคูณนั้นอาจทำให้นักเรียนเกิดความเบื่อหน่าย หรือรู้สึกจำเจ จากงานวิจัยต่าง ๆ พบว่าครูควรหาเกม เทคนิค เพลง หรือกิจกรรมต่าง ๆ มาช่วยให้นักเรียนสามารถจดจำ พัฒนาความเข้าใจ และอีกทั้งวิธีการเหล่านี้ยังช่วยให้นักเรียนมีเจตคติ มีความสุขในการเรียน และมีความกระตือรือร้นในการเรียนอีกด้วย (เวชการต์ มีสุข, 2565; ชัชวาล จิตรขุนทด และวิทยา ทองโสม, 2563)

×	2	3	4	5	6	7	8	9
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								

4 × 9

7 × 2

6 × 3

2 × 7

7 × 4

5 × 6

**ภาพ 4.4** ตัวอย่างตารางและบัตรช่วยในการจำสูตรคูณ

### การคูณด้วย 0 และ 1

ในระดับประถมศึกษาปีที่ 2 การพิสูจน์ว่าจำนวนนับคูณด้วย 0 และ 1 มีผลคูณเท่าใดเป็นเรื่องที่ยากที่นักเรียนจะเรียนรู้ได้ บางครั้งครูอาจใช้การอธิบายด้วยการยกตัวอย่างง่าย ๆ 2 – 3 สถานการณ์ แล้วจึงสรุป เช่น

สถานการณ์ 3 น้ำส้มแต่ละแก้วมีน้ำตาล 0 กรัม ถ้าโหมตืมน้ำส้ม 3 แก้ว โหมได้รับน้ำตาลกี่กรัม เขียนประโยคสัญลักษณ์ได้  $3 \times 0 = \square$  (3 แก้ว แก้วละ 0 กรัม) นั่นคือ  $3 \times 0 = 0 + 0 + 0 = 0$

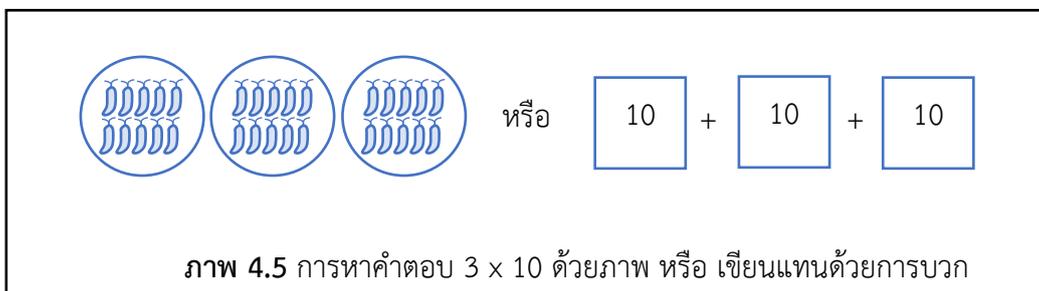
สถานการณ์ 4 พลอยทอผ้าได้วันละ 1 เมตร ถ้าพลอยทอผ้า 5 วัน พลอยจะทอผ้าได้ยาวเท่าใด เขียนประโยคสัญลักษณ์ได้  $5 \times 1 = \square$  (5 วัน วันละ 1 เมตร) นั่นคือ  $5 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

หรือครูอาจให้หาผลคูณจากการบวกเพื่อให้นักเรียนสังเกตผลคูณที่ได้ ซึ่งจะพบว่า จำนวนนับใดคูณกับ 0 ผลคูณที่ได้จะเป็น 0 และ จำนวนนับใดคูณกับ 1 ผลคูณที่ได้จะเท่ากับจำนวนนับนั้น

### การคูณจำนวน 1 หลักกับพหุคูณของ 10

สำหรับประเด็นย่อยในหัวข้อนี้เป็นการเตรียมความพร้อมของนักเรียน โดยเป็นการจัดการเรียนรู้ในระดับประถมศึกษาปีที่ 2 โดยครูจะจัดการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยเพื่อให้นักเรียนสังเกตผลคูณจากสถานการณ์ 2 - 3 สถานการณ์ ตัวอย่างสถานการณ์

สถานการณ์ 5 มีมะม่วง 3 กอง กองละ 10 ผล มีมะม่วงทั้งหมดกี่ผล เขียนประโยคสัญลักษณ์ได้  $3 \times 10 = \square$  ซึ่งนักเรียนจะสามารถหาผลคูณได้ว่ามีมะม่วงทั้งหมด 30 ผล นั่นคือ  $3 \times 10 = 10 + 10 + 10 = 30$  (ภาพ 4.5)

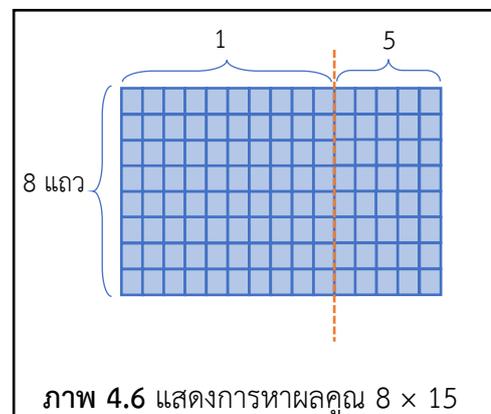


สถานการณ์ 6 สายใจทำข้าวกล่องขายวันละ 40 กล่อง เป็นเวลา 5 วัน สายใจขายข้าวกล่องได้ทั้งหมดเท่าใด เขียนประโยคสัญลักษณ์ได้  $5 \times 40 = \square$  ซึ่งนักเรียนจะสามารถหาผลคูณได้จาก  $5 \times 40 = 40 + 40 + 40 + 40 = 200$  นั่นคือ สายใจขายข้าวกล่องได้ทั้งหมด 200 กล่อง

จากสถานการณ์ 5 - 6 พบว่า เมื่อนำจำนวน 1 หลักคูณกับ 10 20 30 ... 90 ผลคูณที่ได้เกิดจากการนำจำนวน 1 หลักนั้นคูณกับ 1 2 3 ... 9 แล้วเติม 0 ต่อท้าย 1 ตัว เมื่อได้ข้อสรุปแล้ว ครูควรให้นักเรียนหาผลคูณจำนวนอื่นเพื่อเป็นการยืนยันข้อสรุป และสามารถจัดการเรียนรู้วิธีเดียวกันนี้กับการคูณจำนวน 1 หลักกับ 100 200 300 ... 900 และการคูณจำนวน 1 หลักกับ 1,000 2,000 3,000 ... 9,000

### การคูณจำนวน 1 หลักกับจำนวน 2 หลัก

สถานการณ์ 7 จัดเก้าอี้ในห้องประชุม จำนวน 8 แถว แถวละ 15 ตัว ต้องใช้เก้าอี้ทั้งหมดกี่ตัว เขียนประโยคสัญลักษณ์ได้  $8 \times 15 = \square$  จาก  $15 = 10 + 5$  ดังนั้น  $8 \times 15 = (8 \times 10) + (8 \times 5) = 80 + 40 = 120$  (ภาพ 4.6)



เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับการคูณจำนวน 1 หลักกับจำนวน 2 หลัก ครูสามารถอธิบายการเขียนในรูปแบบที่ตั้งได้ดังนี้

ตัวอย่าง หาผลคูณ  $8 \times 15$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 15 \\ \times 8 \\ \hline 120 \end{array}$$

ดังนั้น  $8 \times 15 = 120$

สำหรับการคูณจำนวน 1 หลักกับจำนวนที่มากกว่า 2 หลักนั้น ครูขยายมโนทัศน์โดยใช้กิจกรรมเหมือนกับการคูณจำนวน 1 หลักกับจำนวน 2 หลัก

การคูณจำนวน 2 หลักกับจำนวนที่มากกว่า 2 หลัก

การคูณจำนวน 2 หลักกับจำนวนที่มากกว่า 2 หลัก จะเป็นการจัดการเรียนรู้ในระดับประถมศึกษาปีที่ 3 (ภาพ 4.1) ครูควรจัดการเรียนรู้จำนวน 2 หลักกับจำนวน 2 หลักก่อน แล้วค่อยขยายความรู้ โดยอาจจัดการเรียนรู้ที่แตกต่างกับที่ผ่านมา เพราะในชั้นนี้จะใช้การจัดการเรียนรู้โดยอาศัยความเข้าใจเกี่ยวกับค่าประจำหลัก

สถานการณ์ 8 แม่ค้าขายเสื้อตัวละ 175 บาท ได้ 36 ตัว แม่ค้าได้เงินกี่บาท สำหรับสถานการณ์นี้จะเป็นการขยายความรู้เกี่ยวกับการคูณ โดยอาจใช้การกระจายช่วยในการหาผลคูณ ดังนี้ จากสถานการณ์ 8 เขียนประโยคสัญลักษณ์ได้  $36 \times 175 = \square$  จาก  $175 = 100 + 70 + 5$  ดังนั้น  $36 \times 175 = 36 \times (100 + 70 + 5) = (36 \times 100) + (36 \times 70) + (36 \times 5) = 3,600 + 2,520 + 180$  สามารถทำได้อีกวิธีนั้นคือ จาก  $36 = 30 + 6$  ดังนั้น  $36 \times 175 = (30 + 6) \times 175$  จากการคูณด้วยการกระจายหลักสามารถเขียนในรูปแบบที่ตั้งได้ดังนี้

$$\begin{array}{r} 175 \\ \times 36 \\ \hline 1050 \leftarrow 6 \times 175 \\ 5250 \leftarrow 30 \times 175 \\ \hline 6300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 175 \\ \hline 180 \leftarrow 5 \times 36 \\ 2520 \leftarrow 70 \times 36 \\ 3600 \leftarrow 100 \times 36 \\ \hline 6300 \end{array}$$

จากทั้ง 2 วิธีที่นำเสนอ สังเกตพบว่าถ้านำจำนวนที่มีหลักน้อยกว่ามาเขียนในรูปกระจายแล้วนำไปคูณกับจำนวนที่มีหลักมากกว่าจะสามารถหาคำตอบได้ง่ายกว่า แต่อย่างไรก็ตามผลคูณที่ได้ทั้ง 2 วิธีมีผลคูณเท่ากัน และสามารถขยายมโนทัศน์ไปยังการคูณจำนวน 2 หลักกับจำนวนหลายหลักได้

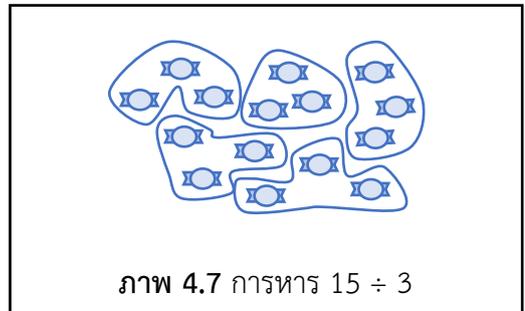
### การพัฒนา มโนทัศน์การหาร

จากสถานการณ์การนำเข้าสู่บทเรียนเกี่ยวกับการหาร (ตาราง 4.1) สามารถสรุปได้ว่าการหารเป็นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่เมื่อกำหนดจำนวน (ตัวตั้ง) แล้วนำมาแบ่งเป็นกลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน จะได้กี่กลุ่ม หรือเมื่อกำหนดจำนวนกลุ่มมาให้ แต่ละกลุ่มจะมีสมาชิกเท่าใด โดยมีลำดับการเรียนรู้ดังนี้

#### การหารที่ตัวตั้งไม่เกิน 20

การพัฒนา มโนทัศน์เกี่ยวกับการหาร ครูควรใช้สถานการณ์ที่ตัวตั้งไม่เกิน 20 เพราะสามารถใช้ของจริง (เหรียญ แบบจำลองต่าง ๆ) ช่วยในการหาคำตอบ หรือการวาดภาพง่าย ๆ ที่ไม่มากเกินไป พร้อมทั้งพัฒนาการใช้สัญลักษณ์และการอ่านควบคู่กันไป ซึ่งสามารถจัดการเรียนรู้ในระดับประถมศึกษาปีที่ 2 โดยอาจใช้สถานการณ์ดังนี้

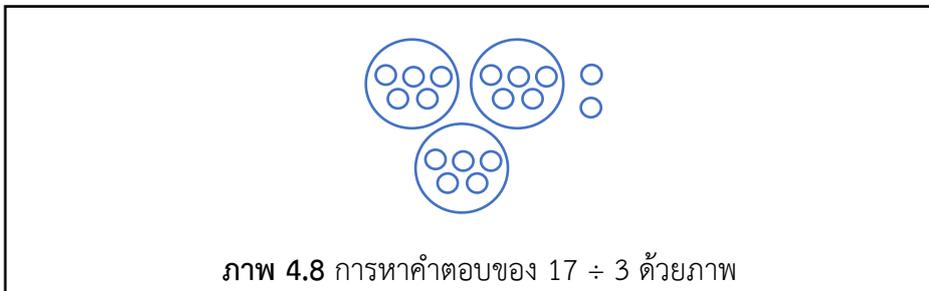
สถานการณ์ 9 อธิมีลูกกวาด 15 เม็ด แบ่งให้เพื่อนคนละ 3 เม็ด ได้กี่คน เขียนประโยคสัญลักษณ์ได้  $15 \div 3 = \square$  และอ่านอย่างมีความหมายได้ว่า มีอยู่ 15 แบ่งเป็นกลุ่มละ 3 ได้กี่กลุ่ม (ภาพ 4.7) จากประโยคสัญลักษณ์มีการใช้  $\div$  แทนการหาร โดย 15 เรียกว่า ตัวตั้งหาร (dividend) หรือที่นิยมเรียกว่า ตัวตั้ง และ 3 เรียกว่า ตัวหาร (divisor) ในส่วนของการ



หาคำตอบนั้นมีเทคนิคหรือวิธีการมากมาย แต่สำหรับเทคนิคที่ง่ายและนิยมใช้หาคำตอบเมื่อจำนวนตัวตั้งไม่มากคือการหยิบออกครั้งละเท่า ๆ กัน ดังนั้นจากสถานการณ์อธิบายได้ว่า มีลูกกวาด 15 เม็ด หยิบออกครั้งละ 3 เม็ดได้กี่ครั้ง (5 ครั้ง) และจากตัวอย่างสถานการณ์ในตาราง 4.1 อธิมีลูกกวาด 15 เม็ด แบ่งให้เพื่อน 5 คน คนละเท่า ๆ กัน แต่ละคนได้ลูกกวาดกี่เม็ด เขียนประโยคสัญลักษณ์ได้  $15 \div 5 = \square$  อ่านอย่างมีความหมายได้ว่า มีอยู่ 15 แบ่งเป็น 5 กลุ่ม ได้กลุ่มละเท่าใด สำหรับก่อนการอ่าน  $15 \div 5$  ด้วยภาษาที่เป็นนามธรรม ครูควรให้นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับการหารผ่านสถานการณ์ที่มากพอ จึงพัฒนาการอ่านที่เป็นนามธรรม ในขั้นตอนนี้ครูไม่ควรเร่งรีบ เพราะถ้านักเรียนอ่านอย่างไม่เข้าใจความหมายจะไม่สามารถทำให้นักเรียนนำความรู้ไปใช้ในการหาคำตอบของ

โจทย์ปัญหาได้ สำหรับ  $15 \div 5$  อ่านว่า 15หารด้วย 5 และควรเน้นย้ำถึงคำว่า หารด้วย เช่น  $15 \div 3$  อ่านว่า 15หารด้วย 3 ไม่ใช่ 15หาร 3

สถานการณ์ 10 รถนำต้นไม้ 17 ต้น ไปปลูก 3 แถว แถวละเท่า ๆ กัน ได้แถวละกี่ต้น และ เหลือต้นไม้กี่ต้น จากสถานการณ์ 10 สามารถหาคำตอบได้จาก  $17 \div 3$  พบว่า เมื่อแบ่ง 17 ออกเป็น กลุ่มละ 3 จะได้กลุ่มละ 5 เหลือ 2 ดังนั้น รถปลูกต้นไม้ 3 แถว แถวละ 5 ต้น เหลือต้นไม้ 2 ต้น สังเกต 17 5 3 และ 2 จำนวนทั้ง 4 ตัวนี้มีความสัมพันธ์กัน (ภาพ 4.8) มี 3 กลุ่ม กลุ่มละ 5 นอก กลุ่มอีก 2 จะได้  $(3 \times 5) + 2 = 17$  ความสัมพันธ์ทั้ง 4 จำนวนนี้เรียกว่าความสัมพันธ์ระหว่างการคูณกับการหาร ซึ่งจะมีประโยชน์ที่ช่วยในการตรวจสอบคำตอบที่เกิดจากการหาร สามารถเขียน ความสัมพันธ์ระหว่างการคูณกับการหารรูปทั่วไปได้ว่า (ตัวหาร  $\times$  ผลหาร) + เศษ = ตัวตั้ง



สำหรับการเขียนคำตอบของการหาร สามารถเขียนได้ 2 แบบ ดังนี้ ในกรณีหารลงตัวหรือ เศษเป็น 0 จะใช้สัญลักษณ์ = เช่น  $20 \div 4 = 5$  ส่วนกรณีไม่ลงตัวจะใช้คำว่า ได้ เช่น  $21 \div 4$  ได้ 5 เศษ 1

จากการหารที่ประกอบไปด้วยตัวตั้ง ตัวหาร ผลหาร และเศษ สิ่งที่ไม่อาจละเลยได้นั้นคือเศษ ในการจัดการเรียนรู้ครูควรให้นักเรียนสังเกตว่าเศษจะน้อยกว่าตัวหารเสมอ และเมื่อไรก็ตามที่เศษ เป็น 0 จะเรียกว่า หารลงตัว บางสถานการณ์เศษจะโดนตัดทิ้ง หรือบางครั้งจะนำเข้ามาเป็นส่วนหนึ่งของคำตอบ เพื่อให้สามารถนำความรู้เกี่ยวกับการหารไปใช้ในชีวิตจริง ตัวอย่างสถานการณ์

สถานการณ์ 11 ห้องเรียนหนึ่งมีนักเรียน 35 คน ครูต้องการซื้อดินสอที่บรรจุกล่องละ 6 แท่ง ครูต้องซื้อดินสออย่างน้อยกี่กล่องจึงจะพอกับนักเรียน

สถานการณ์ 12 แม่ค่านำเชือกยาว 35 เมตร มาตัดแบ่งขายเส้นละ 6 เมตร จะสามารถแบ่งขายได้ที่เส้น

จากสถานการณ์ 11 และ 12 จะพบว่า ในสถานการณ์ 12 นั้น ครูต้องคำนึงถึงนักเรียน 35 คน ถ้าซื้อดินสอเพียง 5 กล่องจะไม่เพียงพอ ในขณะที่สถานการณ์ 13 แม่ค่านำเชือกเป็นเส้น โดยแต่ละเส้นที่ขายต้องยาว 6 เมตร ดังนั้น เศษที่ได้ยังไม่มีผล จากทั้ง 2 สถานการณ์นั้น จะทำให้นักเรียน เห็นถึงการนำความรู้ไปใช้ได้จริงตามบริบทที่เจอ

มโนทัศน์เกี่ยวกับการคูณและการหารจำนวน

### การหารโดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการคูณกับการหาร

การพัฒนาโมโนทัศน์เกี่ยวกับการหารโดยใช้ความสัมพันธ์ควรใช้กับการหารที่ตัวหารเป็นจำนวน 2 หลัก และผลหาร 1 หลัก เพราะต้องอาศัยสูตรคูณในการหาคำตอบ

สถานการณ์ 13 นำลูกปัด 56 ลูก จัดใส่ถุง ถุงละ 8 ลูก ได้กี่ถุง เขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้  $56 \div 8 = \square$  เมื่อใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการคูณกับการหารจะได้ว่า  $8 \times \square = 56$  นั่นคือ 8 คูณกับจำนวนใดได้ 56 จาก  $8 \times 7 = 56$  ดังนั้น  $\square$  แทนด้วย 7

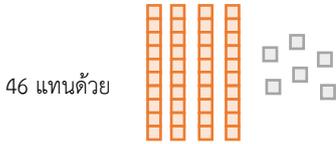
สถานการณ์ 14 ฟ้าใส่จัดดินสอ 60 แท่ง เป็นมัด มัดละ 9 แท่ง ได้กี่มัด และเหลือเศษเท่าใด เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ได้  $75 \div 9 = \square$  เมื่อใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการคูณกับการหารจะได้ว่า  $9 \times \square = 75$  จากสถานการณ์นี้ สิ่งที่ต้องตระหนักคือไม่มีจำนวนใดที่คูณกับ 9 แล้วได้ 75 นั่นคือต้องหาวามีจำนวนใดคูณกับ 9 แล้วได้ผลคูณใกล้เคียง 75 มากที่สุด และไม่เกิน 75 จาก  $9 \times 8 = 72$  และ  $75 - 72 = 3$  จะได้คำตอบคือ 8 เศษ 3 ในประเด็นนี้ครูควรให้นักเรียนตรวจคำตอบทุกครั้ง เพื่อยืนยันคำตอบที่ได้  $(9 \times 8) + 3 = 75$

### การหารที่ตัวตั้งมากกว่า 20 โดยใช้แบบจำลองตารางร้อย ตารางสิบ และตารางหน่วย

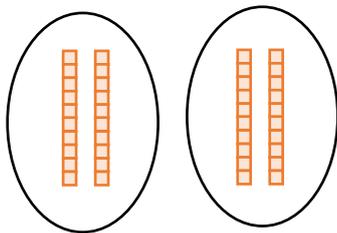
สำหรับการจัดการเรียนรู้เมื่อตัวตั้งมากกว่า 20 และผลหาร 2 หลัก นั้น อาจใช้การวาดภาพ แต่ภาพที่วาดจะมีจำนวนมากเกินไป ครูอาจใช้การอธิบายที่เชื่อมโยงกับภาพได้ดังนี้

ตัวอย่าง ครูต้องการแบ่งนักเรียน 46 คน ออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน ได้จะได้กลุ่มละกี่คน จากสถานการณ์หาคำตอบได้จาก  $46 \div 2$

แนวคิด



ขั้นที่ 1 นำ 4 สิบ มาแบ่งเป็น 2 กลุ่ม จะได้กลุ่มละ 2 สิบ  
นั่นคือ  $2 \times 20 = 40$



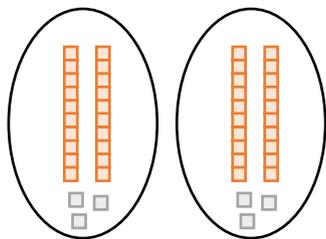
เขียนการหารยาวได้ดังนี้



	2	0
2	)	4 6
		4 0
		6

$2 \times 20$

ขั้นที่ 2 นำ 6 หน่วย มาแบ่งเป็น 2 กลุ่ม ได้กลุ่มละ 3 หน่วย นั่นคือ  $2 \times 3 = 6$



เขียนการหารยาวได้ดังนี้

	2	3
2	)	4 6
		4 0
		6
		6
		0

$20 + 3$

$2 \times 20$

$2 \times 3$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 1 และ 2 จะได้ 46 แบ่งเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน  
ได้กลุ่มละ  $20 + 3 = 23$  หรือ  $46 \div 2 = 23$   
ดังนั้น นักเรียนแต่ละกลุ่มมี 23 คน



	2	3
2	)	4 6
		4 0
		6
		6
		0

ในการจัดการเรียนรู้ครูควรใช้คำถามเพื่อตรวจสอบคำตอบอีกครั้ง เช่น ถ้ามีนักเรียน 2 กลุ่ม กลุ่มละ 23 คน จะมีนักเรียนทั้งหมดเท่าใด นักเรียนจะใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการคูณและการหารเพื่อตรวจสอบคำตอบ

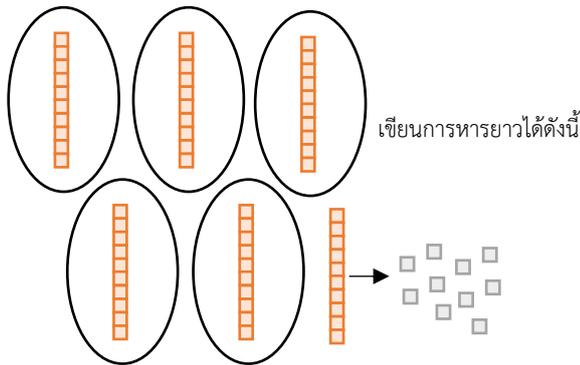
ตัวอย่าง ฟ้าไหมมีขนม 64 ชิ้น แบ่งใส่กล่อง กล่องละ 5 ชิ้น ได้กี่กล่อง และเหลือขนมเท่าใด

จากสถานการณ์หาคำตอบได้จาก  $64 \div 5$

แนวคิด



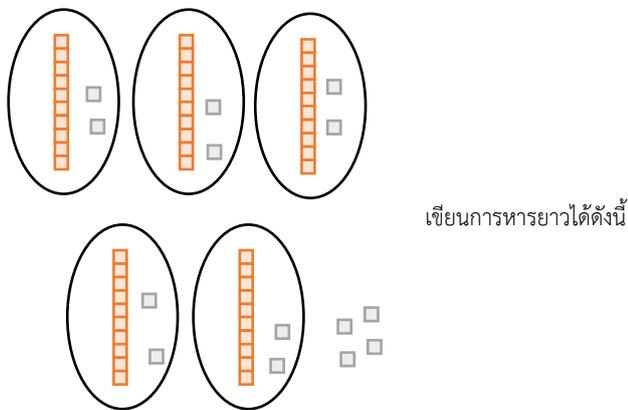
ขั้นที่ 1 นำ 6 สิบ มาแบ่งเป็น 5 กลุ่ม จะได้กลุ่มละ 1 สิบ นั่นคือ  $5 \times 10 = 50$  เหลือ 1 สิบ กับ 4 หน่วย



	1	0
5	)	64
	5	0
	1	4

$5 \times 10$

ขั้นที่ 2 นำ 1 สิบ มากระจายได้ 10 หน่วย รวมกับ 4 หน่วย ได้ 14 หน่วย นำ 14 หน่วยมาแบ่งเป็น 5 กลุ่ม ได้กลุ่มละ 2 หน่วย นั่นคือ  $5 \times 2 = 10$  เหลือ  $14 - 10 = 4$  หน่วย



	1	2
5	)	64
	5	0
	1	4
	1	0
		4

$10 + 2$

$5 \times 10$

$5 \times 2$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 1 และ 2 จะได้ 64 แบ่งเป็น 5 กลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน ได้กลุ่มละ  $10 + 2 = 12$  เหลือ 4 นั่นคือ  $64 \div 5$  ได้ 12 เหลือ 4

ดังนั้น ฟ้าไหมมีขนม 64 ชิ้น แบ่งใส่กล่อง กล่องละ 5 ชิ้น ได้กล่องละ 12 กล่อง เหลือขนม 4 ชิ้น

ตรวจคำตอบ  
 $(5 \times 12) + 4 = 64$

	1	2
5	)	64
	5	0
	1	4
	1	0
		4

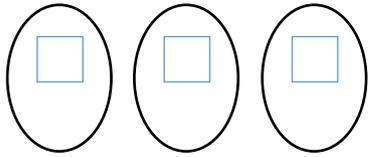
ตัวอย่าง หยกนำเชือกยาว 315 เซนติเมตร มาตัดเป็น 3 ส่วน ส่วนละเท่า ๆ กัน แต่ละส่วนยาวเท่าใด

จากสถานการณ์หาคำตอบได้จาก  $315 \div 3$

แนวคิด

315 แทนด้วย 

ขั้นที่ 1 นำ 3 ร้อย มาแบ่งเป็น 3 กลุ่ม ได้กลุ่มละ 1 ร้อย นั่นคือ  $3 \times 100 = 300$

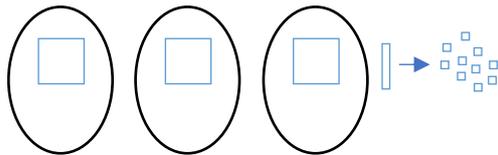


เขียนการหารยาวได้ดังนี้

	1	0	0	
3	)	3	1	5
		3	0	0
			1	5

$3 \times 100$

ขั้นที่ 2 นำ 1 สิบ แบ่งเป็น 3 กลุ่ม ได้กลุ่ม 0 สิบ นั่นคือ  $3 \times 0 = 0$  เหลือ 1 สิบ



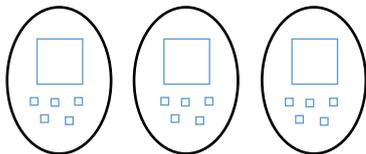
เขียนการตั้ง  
หารยาวได้ดังนี้

	1	0	0	
3	)	3	1	5
		3	0	0
			1	5
			0	0
			1	5

$3 \times 100$

$3 \times 0$

ขั้นที่ 3 นำ 1 สิบ มากระจายได้ 10 หน่วยรวมกับ 5 หน่วย ได้ 15 หน่วย แล้วนำมาแบ่งเป็น 3 กลุ่ม ได้กลุ่มละ 5 หน่วย



เขียนการตั้งหารยาว  
ได้ดังนี้

	1	0	5	
3	)	3	1	5
		3	0	0
			1	5
			0	0
			1	5
			1	5
			0	

$100 + 0 + 5$

$3 \times 100$

$3 \times 0$

$3 \times 5$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 1-3 จะได้ 315 แบ่งเป็น 3 กลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน ได้กลุ่มละ  $10 + 0 + 5 = 105$

ดังนั้น เชือกแต่ละส่วนยาว 105 เซนติเมตร

ตรวจคำตอบ  
 $3 \times 105 = 315$

การจัดการเรียนรู้เรื่องการหารเมื่อตัวหาร 1 หลักนั้นสามารถอธิบายและเชื่อมโยงกับความรู้ได้ง่าย แต่ในกรณีที่ตัวหาร 2 หลักนั้น อาจจะต้องใช้การอธิบายที่แตกต่างกันออกไป ก่อนการจัดการเรียนรู้ครูควรฝึกให้นักเรียนประมาณคำตอบอย่างคร่าว ๆ ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนสามารถหาคำตอบได้อย่างรวดเร็วมากยิ่งขึ้น เช่น

เติมตัวเลขแสดงจำนวนใน  ที่ทำผลคูณมากที่สุด แต่น้อยกว่าจำนวนที่กำหนดให้

ข้อที่	จำนวนที่กำหนด
1. $12 \times$ <input type="text"/>	35
2. $36 \times$ <input type="text"/>	75
3. $57 \times$ <input type="text"/>	80
4. $89 \times$ <input type="text"/>	240

เมื่อนักเรียนได้ฝึกคำนวณแล้ว ครูอาจขยายความรู้เดิมเกี่ยวกับการหารและยกตัวอย่างเพิ่มความเข้าใจดังนี้

ตัวอย่าง โรงงานแห่งหนึ่งผลิตดินสอได้ 3,517 แท่ง จัดใส่กล่องละ 1 โหล ได้เท่าใด

จากสถานการณ์หาคำตอบได้โดย  $3,517 \div 12$

แนวคิด

**ขั้นที่ 1** นำ 3 พันมาแบ่งเป็น 12 กลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน

ได้กลุ่มละ 0 พัน นั่นคือ  $12 \times 0 = 0$  พัน เหลือ 3 พัน

**ขั้นที่ 2** นำ 3 พันมากระจายได้ 30 ร้อย รวมกับ 5 ร้อย ได้ 35 ร้อย

แบ่งเป็น 12 กลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน ได้กลุ่มละ 2 ร้อย

นั่นคือ  $12 \times 2 = 24$  ร้อย เหลือ 11 ร้อย

**ขั้นที่ 3** นำ 11 ร้อยมากระจายได้ 110 สิบ รวมกับ 1 สิบ ได้ 111 สิบ

แบ่งเป็น 12 กลุ่ม ได้กลุ่มละ 9 สิบ

นั่นคือ  $12 \times 9 = 108$  สิบ เหลือ 3 สิบ

**ขั้นที่ 4** นำ 3 สิบมากระจายได้ 30 หน่วย รวมกับ 7 หน่วยได้ 37 หน่วย

แบ่งเป็น 12 กลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน ได้กลุ่มละ 3 หน่วย

นั่นคือ  $12 \times 3 = 36$  เหลือ 1 หน่วย

ดังนั้น  $3,517 \div 12$  ได้ 293 เศษ 1

		0	2	9	3
1	2	3	5	1	7
		0	0	0	0
		3	5	1	7
		2	4	0	0
		1	1	1	7
		1	0	8	0
				3	7
				3	6
					1

เมื่อครูยกตัวอย่างการหาร 2 - 3 ตัวอย่าง เพื่อพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนการหาร อาจใช้คำถามและอธิบายได้ดังนี้

**ขั้นที่ 1** “พิจารณาหลักพัน จำนวนใดเมื่อคูณด้วย 12 มีคุณมากที่สุดแต่น้อยกว่า 3” นั่นคือ 0 เขียน 0 ในหลักพัน

ดังนั้น  $12 \times 0$  พัน = 0 พัน นำ  $3,571 - 0 = 3,571$

**ขั้นที่ 2** “พิจารณาหลักร้อย จำนวนใดเมื่อคูณด้วย 12 คุณแล้วทำให้ผลคูณมากที่สุดแต่น้อยกว่า 35”

นั่นคือ 2 เขียน 2 ในหลักร้อย ดังนั้น  $12 \times 2$  ร้อย = 24 ร้อย นำ  $3,571 - 2,400 = 1,171$

**ขั้นที่ 3** “พิจารณาหลักสิบ จำนวนใดเมื่อคูณด้วย 12 คุณแล้วทำให้ผลคูณมากที่สุดแต่น้อยกว่า 111”

นั่นคือ 9 เขียน 9 ในหลักสิบ ดังนั้น  $12 \times 9$  สิบ = 108 สิบ จะได้  $1,171 - 1,080 = 91$

**ขั้นที่ 4** “พิจารณาในหลักหน่วย จำนวนใดเมื่อคูณด้วย 12 คุณแล้วทำให้ผลคูณมากที่สุดแต่น้อยกว่า 37”

นั่นคือ 3 เขียน 3 ในหลักหน่วย ดังนั้น  $12 \times 3 = 36$  หน่วย จะได้  $91 - 36 = 55$

ดังนั้น  $3,517 \div 12$  ได้ 293 เศษ 1 และตรวจคำตอบ  $(12 \times 293) + 1 = 3,517$

จากตัวอย่างครุควรสอดแทรกให้นักเรียนตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ เช่น  $3,517 \approx 3,600$  จะได้  $3,600 \div 12 = 300$  ดังนั้นผลลัพธ์ควรใกล้เคียงกับ 300 แต่ไม่เกิน 300

คำแนะนำสำหรับการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการคูณและการหาร มีดังนี้

1. การคูณ นักเรียนมักนำตัวทศมาบวกก่อน แล้วนำไปคูณ (ภาพ 4.9)

$\begin{array}{r} 243 \\ \times 5 \\ \hline 1215 \\ \hline 1215 \\ \hline 2055 \end{array}$	<p>1 สิบ (ตัวทศ) บวกกับ 4 สิบ แล้วจึงไปคูณกับ 5 และนำ 2 ร้อย (ตัวทศ) ไปบวกกับ 2 ร้อย แล้วมาคูณด้วย 5</p>
---	--

**ภาพ 4.9** มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของ  $243 \times 5$

2. ในการหารยาว นักเรียนเขียนผลหารไม่ตรงหลัก ทำให้คำตอบที่ได้ไม่ถูกต้อง
3. ในการหารยาว มีผลหารในหลักใดหลักหนึ่งเป็น 0 แต่นักเรียนลืมเขียน 0 ในหลักนั้น เช่น  $6,293 \div 3$  เมื่อนักเรียนนำ 3 ไปหาร 2 ในหลักร้อย จะพบว่าได้ผลหารเป็น 0 แต่ลืมเขียน 0 ในหลักร้อย เมื่อหารจำนวนในหลักถัดไปจึงมีความผิดพลาด
4. นักเรียนหาผลหารไม่ถึงหลักหน่วย โดยเฉพาะเมื่อหลักหน่วยเป็น 0 โดยคิดว่าเมื่อหารแล้วลบกันได้เศษเป็น 0 ทำให้คิดว่าหาผลหารสำเร็จแล้ว เช่น  $4,800 \div 40$  เมื่อนักเรียนนำ  $80 - 80 = 0$  คิดว่าการหารเสร็จสิ้นแล้ว โดยลืมไปว่ายังมี 0 ในหลักหน่วยของตัวตั้งอีกหนึ่งตัว
5. นักเรียนอาจใช้เทคนิคการตัด 0 ซึ่งบางครั้งอาจทำให้คำตอบผิดพลาด เช่น  $15,890 \div 20$  นักเรียนสังเกตพบว่า ในหลักหน่วยทั้งตัวตั้งและตัวหารเป็น 0 ดังนั้นจึงตัด 0 จะได้  $1,589 \div 2$  ซึ่งคำตอบของ  $15,890 \div 20$  ได้ 794 เศษ 10 แต่  $1,589 \div 2$  ได้ 794 เศษ 1 พบว่าเศษไม่ตรงกัน ดังนั้นคำตอบจึงไม่ถูกต้อง
6. ครูควรให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบและประมาณคำตอบทุกครั้ง เช่นเดียวกับการบวกและการลบ

**ภาพ 4.10** ตัวอย่างมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของการหาร

7. ครูควรมีความระมัดระวังในการใช้คำสั่ง เช่น หาผลหาร  $21 \div 4$  คำตอบคือ 5 เพราะ 5 คือผลหาร แต่ถ้าครูต้องการให้นักเรียนตอบเศษด้วยควรใช้คำสั่ง หาผลลัพธ์ เพราะผลลัพธ์จะหมายถึง ผลหารและเศษ ในกรณีเดียวกันคำว่าผลบวก ผลลบ ผลคูณ จะไม่มีปัญหา แต่การหารจะมีทั้งผลหาร และเศษ ดังนั้นครูควรใช้คำถามให้ชัดเจนว่าต้องการให้นักเรียนหาอะไร (ตีรวิช ทินประภา , 2561)

สำหรับการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการบวก ลบ คูณและหารนั้นบางครั้งครูอาจนำเสนอวิธีการหรือแนวคิดต่าง ๆ เพื่อช่วยการเรียนรู้ของนักเรียน จากการศึกษาพบว่ามามีวิธีการหรือเทคนิคหนึ่งที่หลากหลาย ๆ โรงเรียนนำมาประยุกต์ใช้นั้นคือเทคนิคการคิดเลขเร็วแบบอินเดีย หรือที่นิยมเรียกว่า เวทคณิต เวทคณิตเป็นสาขาหนึ่งของอรรถพเวท เป็นหนึ่งในพระเวททั้ง 4 ได้แก่ ฤคเวท สามเวท ยชุรเวท และอรรถพเวท โดยถูกค้นพบขึ้นมาอีกครั้งจากต้นฉบับสันสกฤต ระหว่างปี ค.ศ. 1911 ถึง ค.ศ. 1918 โดย ศรี ภารติ กฤษณะ อีทรากิจ อันประกอบด้วยสูตร 16 สูตรที่เกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ และการหาร ตอนต้นศตวรรษที่ 20 เกิดมีความสนใจอย่างใหญ่หลวงในต้นฉบับสันสกฤตในทวีปยุโรป ศรี ภารติ กฤษณะ อีทรากิจได้บอกเล่าเรื่องราว และเนื้อหาเกี่ยวกับหัวข้อ Ganita sutras ซึ่งหมายถึงคณิตศาสตร์ แต่ในระยะนั้นยังไม่เป็นที่รู้จักแพร่หลาย และหลายคนยังไม่เชื่อถือ เห็นว่าเป็นเรื่องเหลวไหล เมื่อศรีภารติ กฤษณะ อีทรากิจ ทำการศึกษาต้นฉบับเหล่านั้นอย่างละเอียด และทำการตรวจสอบอย่างรอบคอบ จึงสามารถฟื้นฟูคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเวทคณิตขึ้นมาใหม่ โดยอ้างถึงการวิจัยของเขา พบว่าทั้งหมดของคณิตศาสตร์มีพื้นฐานมาจากพระสูตร 16 บท ศรี ภารติ กฤษณะ อีทรากิจ ได้เขียนหนังสือ 16 บท ที่อธิบายระบบเกี่ยวกับเวทคณิต แต่ไม่สามารถบอกเหตุผลถึงการสูญหายไปของเวทคณิตได้ แต่เมื่อการสูญหายได้รับการยืนยันในปีสุดท้ายของชีวิตศรี ภารติ กฤษณะ อีทรากิจ ได้เขียนหนังสือขึ้นมาหนึ่งเล่มเกี่ยวกับเวทคณิต และถูกตีพิมพ์ในปี ค.ศ. 1965 นับเป็นเวลา 5 ปีหลังจากการเสียชีวิตของเขาไม่กี่ปีต่อมาสำเนาของหนังสือถูกนำไปที่กรุงลอนดอน นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ เช่น เคนเน็ธวิลเลียมส์ แอนดรู นิโคลัส และเจอร์มี พิกเกิลส์ ให้ความสนใจในเรื่องเวทคณิตเป็นอย่างมาก และขยายการแนะนำให้รู้จักกับสิ่งที่กำหนดไว้ในหนังสือของศรี ภารติ กฤษณะ อีทรากิจ ให้กว้างไกลออกไป อีกทั้งได้จัดให้มีหลักสูตรมากมาย และการพูดในกรุงลอนดอน หนังสือซึ่งในขณะนี้ไม่มีการตีพิมพ์ ได้บรรยายและแนะนำให้รู้จักกับเวทคณิต ต่อมาได้มีการตีพิมพ์หนังสือขึ้นหนึ่งเล่มในปี ค.ศ.1981 โดยระหว่างปี ค.ศ.1981 – 1987 แอนดรู นิโคลัส ได้เดินทางไปประเทศอินเดีย 4 ครั้ง เพื่อทำการค้นคว้าเกี่ยวกับเวทคณิต เพราะตระหนักว่าได้รับบางสิ่งเป็นพิเศษจากเวทคณิต ที่โรงเรียนแซนต์เจมส์ โรงเรียนควีนส์เกต และในประเทศอินเดีย เวทคณิตถูกนำมาสอนอย่างกว้างขวางในโรงเรียนต่าง ๆ และเริ่มมีการทำวิจัยเกี่ยวกับเวทคณิต หนังสืออีก 3 เล่ม ได้ปรากฏขึ้นในปี ค.ศ.1984 เพื่อฉลองการครบรอบวันเกิด 100 ปีของศรี ภารติ กฤษณะ อีทรากิจ โดยหนังสือเหล่านั้นจัดพิมพ์โดยกลุ่มการวิจัยคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเวทคณิต ต่อมาเมื่อโยคี มหาริชีมาเฮ็ช ได้อธิบายความสำคัญ และความมหัศจรรย์ของเวทคณิต ในปี ค.ศ.1988 โรงเรียนมหาริชีทั่วโลก เริ่มทำการสอนเวทคณิต และที่โรงเรียนสเกลเมอร์สเดล โรงเรียนแลงคาสเซอร์ ได้จัดการศึกษาเวทคณิตอย่างเต็มรูปแบบ มีการจัดทำหลักสูตร และทดลองกับนักเรียนที่มีอายุ 11-14 ปี ใช้ชื่อเรียกว่า The Cosmic Computer หลักสูตรนี้จัดพิมพ์ขึ้นในปี ค.ศ.1998 และปัจจุบันมีการนำเวทคณิตมาใช้อย่างแพร่หลายทั่วโลก (อัจฉราพรรณ พลเยี่ยมแสน, 2565)

ในประเทศไทยได้มีการนำเทคนิคมาศึกษาและวิจัยเกี่ยวกับการนำเทคนิคไปใช้ในการจัดการเรียนรู้ เช่น อัจฉราพรรณ พลเยี่ยมแสน (2565) ที่ได้ศึกษาการพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการคูณ ด้วยเทคนิคการคูณแบบอินเดียโดยใช้ตารางร่วมกับเทคนิค Team Games Tournament (TGT) ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนในสังกัดสำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมการศึกษาเอกชนตรัง หรืออณัฐญา แก้วไขเกิด (2565) ที่ได้พัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง การบวก การลบ การคูณ และการหาร โดยใช้เทคนิคคิดเลขเร็วแบบเวทคณิตร่วมกับเกมออนไลน์สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ต่างก็พบการจัดการเรียนรู้โดยใช้เวทคณิตผสมผสานกับเทคนิคการสอนอื่น ๆ สามารถช่วยให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ที่ดีขึ้นแต่อย่างไรก็ตามครูต้องมีความชัดเจนในการหาคำตอบว่าจะให้นักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบโดยวิธีใด เพราะจากงานวิจัยมีนักเรียนบางคนเกิดความสับสนในวิธีที่นิยมใช้หรือเคยเรียนรู้กับวิธีแบบเวทคณิต

$34 + 28$   
 วิธีทำ  $34$   
 $28$   
 $62$

$5752 - 871$   
 $4881$

$2,409 \times 6 = 14,454$

$34 \div 9$   
 $9 \overline{) 34}$   
 $3$   
 $3$   
 $34 \div 9$  ได้  $3$  เศษ  $7$

ภาพ 4.11 การบวก ลบ คูณและหารด้วยวิธีเวทคณิต

## ตัวอย่างงานวิจัยเกี่ยวกับการคูณและการหาร

การคูณและการหารเป็นเนื้อหาที่กำหนดให้เริ่มเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 และมีลำดับการเรียนรู้ที่ซับซ้อนตามลำดับ ดังนั้นจึงมีงานวิจัยที่ศึกษาในแต่ละระดับที่แตกต่างกัน สามารถสรุปได้ดังนี้

ชุตินา แสนบุญยัง และปรียา บุญญสิริ (2563) ได้พัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง การบวก ลบ คูณ หารระคน โดยใช้การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดของโพลยาพร้อมกับบาร์โมเดล ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ผู้วิจัยได้พัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดของโพลยาพร้อมกับบาร์โมเดล เรื่อง การบวก ลบ คูณ หารระคน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 4 แผน แผนละ 2 ชั่วโมง จำนวน 8 ชั่วโมง ในการจัดการเรียนรู้แต่ละแผนจะประกอบไปด้วยกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของโพลยา ดังนี้ 1) ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นการวิเคราะห์ว่าโจทย์กำหนดสิ่งใดมาและโจทย์ถามอะไร 2) ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา เป็นขั้นกำหนดว่าจะแก้ปัญหาด้วยวิธีการใด 3) ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา เป็นขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นตอนที่ลงมือคำนวณหาคำตอบ และ 4) ขั้นตรวจสอบ เป็นขั้นตรวจสอบความถูกต้อง และความสมเหตุสมผลของคำตอบ แล้วนำแผนการจัดการเรียนรู้ไปหาคุณภาพพบว่าประสิทธิภาพรวมของแผนการจัดการเรียนรู้ (E1/E2) เท่ากับ 81.04/83.75 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ 80/80 แล้วนำแผนไปใช้ ผลการวิจัยพบว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .01 และมีความพึงพอใจในระดับมากที่สุด

สุวรรณรักษ์ หงษ์สุด (2562) ได้ศึกษาระดับการคิดเกี่ยวกับการคูณกับการแก้ปัญหาวงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ระดับการคิดเกี่ยวกับการคูณ (Multiplicative Thinking Levels) ที่ผู้วิจัยศึกษานั้น เป็นการจัดระดับความสามารถของการคิดจากเผชิญสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการคูณสามารถแบ่งออกได้เป็น 5 ระดับ ดังนี้ ระดับ 0 การคิดเบื้องต้น เป็นระดับที่สามารถสังเกตได้เพียงความแตกต่างมากกว่าและน้อยกว่าเท่านั้น ยังไม่สามารถนับจำนวนได้ ระดับ 1 การคิดโดยใช้การนับ เป็นระดับที่สามารถใช้ยุทธวิธีในการนับจำนวนเพื่อหาจำนวนของสิ่งของชนิดเดียวกันจากหลาย ๆ กลุ่มได้ จากสิ่งที่เป็นรูปธรรม หรือ อาศัยการสร้างแบบจำลอง ระดับ 2 การคิดโดยใช้การบวกเป็นระดับที่สามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ในปัญหาที่ซับซ้อนหรือไม่คุ้นเคย โดยอาศัยแนวคิดการบวก การวาดภาพ อีกทั้งเข้าใจการคงที่ของจำนวนเมื่อมีการจัดเรียงใหม่ และสามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่เขียนได้ในบางส่วน ระดับ 3 การคิดโดยใช้การคูณ เป็นระดับที่สามารถตีความเข้าใจปัญหาเกี่ยวกับการคูณ มีการคิดอย่างเป็นระบบ สามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้แนวคิดการคูณ เริ่มคิดเป็นนามธรรมได้ ไม่ต้องใช้การสร้างแบบจำลองหรือการรับรู้โดยตรง เข้าใจถึงความสัมพันธ์ของกลุ่มที่มีขนาดเท่ากัน จำนวนกลุ่มและผลรวมทั้งหมด ซึ่งสามารถคิดย้อนกลับได้ ทำให้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ทั้งทางตรงและทางอ้อมได้ และสามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่เขียนได้สมบูรณ์ และระดับ 4 การขยายผลการคิด

มโนทัศน์เกี่ยวกับการคูณและการหารจำนวน

เป็นระดับที่สามารถแก้ปัญหาการคูณโดยใช้ยุทธวิธีต่าง ๆ สมบัติของการคูณ หรือดำเนินการโดยใช้ตัวแปร นำความรู้ไปประยุกต์ใช้ได้จริงรวมทั้งการแสดงแนวคิดโดยใช้ภาษา สัญลักษณ์ และสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ผลการวิจัยพบว่า ระดับการคิดเกี่ยวกับการคูณของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จำนวนนักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับ 2 การคิดโดยใช้การบวก คิดเป็นร้อยละ 37.50 รองลงมาคือระดับ 3 การคิดโดยใช้การคูณ คิดเป็นร้อยละ 31.94 ระดับ 1 การคิดโดยใช้การนับ คิดเป็นร้อยละ 26.39 ระดับ 0 การคิดเบื้องต้น คิดเป็นร้อยละ 4.17 และไม่มีนักเรียนคนใดที่มีระดับความคิดเกี่ยวกับการคูณอยู่ในระดับ 4 การขยายผลการคิด และ นักเรียนที่มีระดับการคิดเกี่ยวกับการคูณต่างกันจะมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 จากการสัมภาษณ์พบว่า นักเรียนที่มีการคิดเกี่ยวกับการคูณในระดับ 1 การคิดโดยใช้การนับ เมื่อเผชิญสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการคูณ นักเรียนต้องใช้เวลาในการตีความโจทย์ ทำความเข้าใจปัญหา และเข้าใจผิดในการหาคำตอบ ทำให้อธิบายเหตุผลให้เข้าใจผิด และไม่สามารถตรวจสอบคำตอบ ระดับ 2 การคิดโดยใช้การบวก นักเรียนสามารถตีความโจทย์ ทำความเข้าใจปัญหา และเข้าใจปัญหา สามารถอธิบายเหตุผลให้เข้าใจได้บ้าง และไม่สามารถตรวจสอบคำตอบได้เว้นระดับ 3 การคิดโดยใช้การคูณ นักเรียนสามารถตีความโจทย์ ทำความเข้าใจปัญหา และเข้าใจปัญหา สามารถอธิบายเหตุผลให้เข้าใจได้ชัดเจน และตรวจสอบคำตอบได้เริ่มคิดเป็นนามธรรม สามารถแสดงแนวคิดได้อย่างมีประสิทธิภาพ

นฤมล ทิพย์พินิจ (2560) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาการบวก ลบ คูณ หารระคนโดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เทคนิค KWDL ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนบ้านสามัคคีธรรม จังหวัดนครศรีธรรมราช โดยพัฒนาแบบฝึกทักษะแต่ละข้อประกอบไปด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้ K : นักเรียนรู้อะไร (what we know) โจทย์บอกอะไรบ้าง W : นักเรียนต้องการรู้ / ต้องการทราบอะไร (what we want to know) โจทย์ให้ / บอกอะไรบ้าง D : นักเรียนทำอะไร/อย่างไร (what we do) มีวิธีการหาคำตอบอย่างไร L : นักเรียนเรียนรู้อะไรจากขั้นตอนที่ 3 (what we learned) วิธีการศึกษาคำตอบและการคิดคำนวณ แล้วนำแบบฝึกทักษะไปหาคุณภาพ พบว่ามีค่าประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่กำหนด E1/E2 เท่ากับ 87.33/84.33 ผลการวิจัยพบว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เทคนิค KWDL หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน และมีความพึงพอใจรูปแบบการสอนในระดับมาก

ดารุณี แก้วบุญเรือง (2560) ได้พัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค LT ประกอบแบบฝึกทักษะ เรื่อง การบวก ลบ คูณ หารระคน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 โดยพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้จำนวน 10 แผน แต่ละแผนออกแบบจากแนวคิดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค LT (Learning Together) ซึ่งประกอบไปด้วย

5 ชั้น ดังนี้ 1) ชั้นเตรียม เป็นชั้นที่ครูแนะนำทักษะในการจัดการเรียนรู้และจัดเป็นกลุ่มย่อยพร้อมทั้งกำหนดบทบาทและหน้าที่ของสมาชิกแต่ละคน 2) ชั้นสอน เป็นชั้นที่ครูเข้าบทเรียน และนำเสนอเนื้อหาแนะนำแหล่งข้อมูลและมอบหมายงานให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม 3) ชั้นทำกิจกรรมกลุ่ม นักเรียนเรียนรู้ร่วมกันในกลุ่มย่อย โดยที่แต่ละคนมีหน้าที่และบทบาทและหน้าที่ตามที่กำหนด 4) ผลการวิจัยพบว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 และมีความพึงพอใจในระดับมาก

กชกร พัฒเสมา (2558) ได้พัฒนาชุดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องการบวก ลบ คูณ หารระคน สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ชุดกิจกรรมที่ผู้วิจัยได้พัฒนามีทั้งหมด 10 แผน ใช้เวลา 10 ชั่วโมง โดยแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้จะมุ่งเน้นการพัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นความสามารถในการนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ เพื่อให้ได้มาซึ่งความรู้ และประยุกต์ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ ประกอบด้วยทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 5 ด้าน ได้แก่ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ การสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ เมื่อนำชุดกิจกรรมไปหาคุณภาพ พบว่ามีประสิทธิภาพ (E1/E2) เท่ากับ 81.20/80.33 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้ 80/80 และเมื่อนำแผนการจัดการเรียนไปใช้พบว่านักเรียนจะมีผลสัมฤทธิ์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน และมีนักเรียนมีความพึงพอใจในระดับมาก

## สรุป

การคูณและการหารเป็นมโนทัศน์ที่ต่อเนื่องจากการบวกและการลบ ซึ่งการคูณมีความหมายคือการบวกด้วยจำนวนเดียวกัน ในขณะที่การหารเป็นการแบ่งปริมาณออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน หรือการหาปริมาณในแต่ละกลุ่ม เมื่อกำหนดจำนวนกลุ่มมาให้ การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการคูณและการหารได้กำหนดในตัวชี้วัดตั้งแต่ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 การคูณจะเริ่มจากจำนวน 1 หลักกับจำนวน 1 หลัก ส่วนการหารจะเริ่มจากการหารที่ตัวตั้งเป็นจำนวน 2 หลัก ตัวหาร 1 หลัก และผลหาร 1 ทั้งมีเศษและไม่มีเศษ โดยเน้นความหมายและการใช้สื่อที่หลากหลาย ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 – 4 ได้ขยายมโนทัศน์ไปยังการคูณจำนวน 1 หลักกับพหุคูณของ 10 การคูณจำนวน 1 หลักกับจำนวน 2 หลัก และจำนวนที่มากกว่า 2 หลัก การหารที่ตัวตั้งไม่เกิน 4 หลัก ตัวหาร 2 หลัก พร้อมทั้งพัฒนาการคิดที่เป็นนามธรรมให้กับนักเรียน ผ่านการจัดการเรียนรู้และสื่อ โดยเป็นการขยายแนวคิด

เกี่ยวกับการคูณมาสู่นามธรรม โดยอาจเทคนิคหรือวิธีการต่าง ๆ ช่วยให้นักเรียนได้เรียนรู้ตัวอย่างหลากหลาย เช่น การหารยาว การหารสั้น หรือเวทคณิต



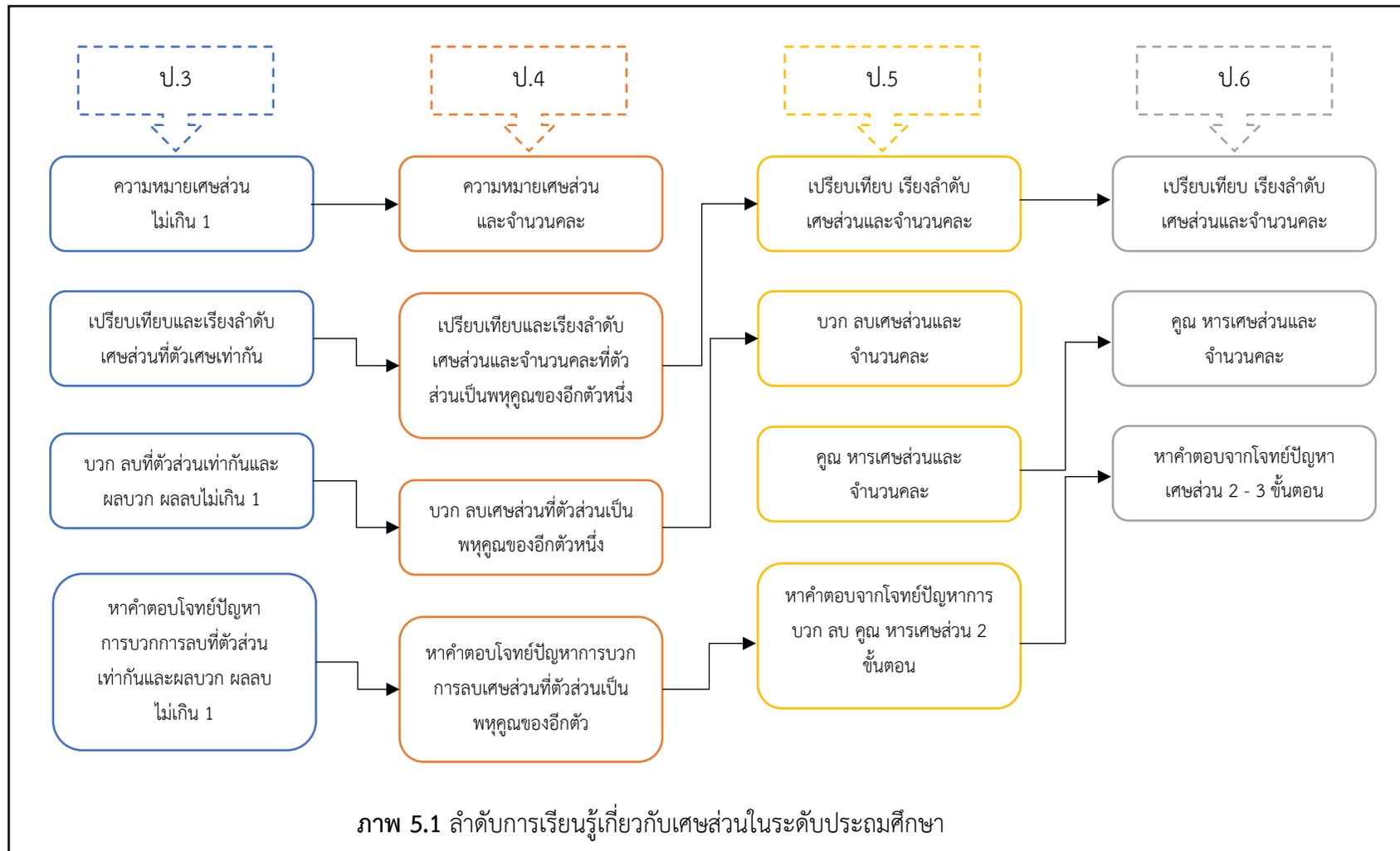
## บทที่ 5

### มโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วน

ในชีวิตจริงเรามักจะคุ้นชินกับสถานการณ์ที่ต้องแบ่งสิ่งของเป็นส่วนต่าง ๆ เช่น แม่ค้าแบ่งเค้กออกเป็นชิ้น โดยแต่ละชิ้นมีขนาดเท่ากัน หรือการตัดเชือกหนึ่งเส้นออกเป็น ส่วน ๆ โดยแต่ละส่วนมีความยาวเท่ากัน หรือแม้กระทั่งแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน เหตุการณ์เหล่านี้เป็นการใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งโดยไม่รู้ตัว นั่นคือ เศษส่วน (fraction) เศษส่วนเป็นคำใหม่ที่นักเรียนจะได้เรียนรู้ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ได้กำหนดมาตรฐานและตัวชี้วัดเกี่ยวกับเศษส่วนไว้ในมาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวน ระบบจำนวน การดำเนินการของจำนวน ผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการ สมบัติของการดำเนินการ และนำไปใช้ มีตัวชี้วัดดังนี้

ระดับ	ตัวชี้วัด
ประถมศึกษาปีที่ 3	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. บอก อ่าน และเขียนเศษส่วนแสดงปริมาณสิ่งต่าง ๆ และแสดงสิ่งต่าง ๆ ตามเศษส่วนที่กำหนด</li> <li>2. เปรียบเทียบเศษส่วนที่ตัวเศษเท่ากันโดยที่ตัวเศษน้อยกว่าหรือเท่ากับตัวส่วน</li> <li>3. หาผลบวกของเศษส่วนที่มีตัวส่วนเท่ากัน และผลบวกไม่เกิน 1 และหาผลลบของเศษส่วนที่มีตัวส่วนเท่ากัน</li> <li>4. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวกเศษส่วนที่มีตัวส่วนเท่ากัน และผลบวกไม่เกิน 1 และโจทย์ปัญหาการลบเศษส่วนที่มีตัวส่วนเท่ากัน</li> </ol>
ประถมศึกษาปีที่ 4	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. เปรียบเทียบ เรียงลำดับเศษส่วน และจำนวนคละที่ตัวส่วนตัวหนึ่งเป็นพหุคูณของอีกตัวหนึ่ง</li> <li>2. หาผลบวก ผลลบของเศษส่วนและจำนวนคละที่ตัวส่วนตัวหนึ่งเป็นพหุคูณของอีกตัวหนึ่ง</li> <li>3. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวกและโจทย์ปัญหาการลบเศษส่วนและจำนวนคละที่ตัวส่วนตัวหนึ่งเป็นพหุคูณของอีกตัวหนึ่ง</li> </ol>
ประถมศึกษาปีที่ 5	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. หาผลบวก ผลลบของเศษส่วนและจำนวนคละ</li> <li>2. หาผลคูณ ผลหารของเศษส่วนและจำนวนคละ</li> <li>3. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวก การลบ การคูณ การหารเศษส่วน 2 ขั้นตอน</li> </ol>
ประถมศึกษาปีที่ 6	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. เปรียบเทียบ เรียงลำดับเศษส่วน และจำนวนคละจากสถานการณ์ต่าง ๆ</li> <li>2. หาผลลัพธ์ของการบวก ลบ คูณ หารระคนของเศษส่วนและจำนวนคละ</li> <li>3. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเศษส่วนและจำนวนคละ 2 – 3 ขั้นตอน</li> </ol>

เมื่อนำตัวชี้วัดที่กำหนดมาวิเคราะห์ลำดับการเรียนรู้เกี่ยวกับเศษส่วนได้ดังภาพ 5.1

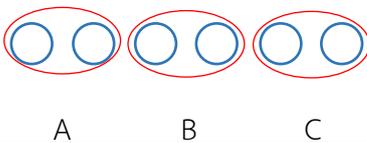


มโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วน

## ความหมายเศษส่วนและสัญลักษณ์

การพัฒนาโน้ตศน์เกี่ยวกับเศษส่วนนั้นครูควรใช้สถานการณ์ง่าย ๆ เพื่อนำสนทนาเกี่ยวกับเศษส่วน โดยครูอาจต้องวาดภาพหรือใช้แบบจำลองต่าง ๆ เพื่อสื่อสารถึงความหมายและวิธีการหาคำตอบที่ได้ ตัวอย่างสถานการณ์เพื่อนำเข้าสู่เนื้อหาเกี่ยวกับเศษส่วน

ตาราง 5.1 ตัวอย่างสถานการณ์และแบบจำลองเศษส่วน

สถานการณ์	แบบจำลอง	คำตอบ
มีขนม 6 ชิ้น แบ่งให้เด็ก 3 คน คนละเท่า ๆ กัน จะได้คนละเท่าใด		ได้ขนมคนละ 2 ชิ้น
มีขนม 5 ชิ้น แบ่งให้เด็ก 4 คน คนละเท่า ๆ กัน จะได้คนละเท่าใด		ได้ขนมคนละ 1 ชิ้น กับ 1 ใน 4 ชิ้น
มีขนม 4 ชิ้น แบ่งให้เด็ก 3 คน คนละเท่า ๆ กัน จะได้คนละเท่าใด		ได้ขนมคนละ 1 ชิ้น กับ 1 ใน 3 ชิ้น
มีขนม 4 ชิ้น แบ่งให้เด็ก 6 คน คนละเท่า ๆ กัน จะได้คนละเท่าใด		ได้ขนมคนละ 1 ใน 2 ชิ้น กับ 1 ใน 6 ชิ้น
มีขนม 5 ชิ้น แบ่งให้เด็ก 3 คน คนละเท่า ๆ กัน จะได้คนละเท่าใด		ได้ขนมคนละ 1 ชิ้น กับ 1 ใน 3 ชิ้น กับ 1 ใน 3 ชิ้น

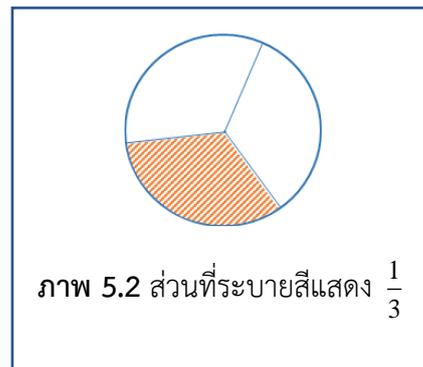
จากตาราง 5.1 เริ่มจากการเชื่อมโยงเศษส่วนกับการหาร โดยใช้สถานการณ์ที่นักเรียนพบเจอในชีวิตจริง แล้วขยายมโนทัศน์และความซับซ้อนในการหาคำตอบ สิ่งสำคัญคือครูควรเน้นย้ำคือการแบ่ง โดยที่แต่ละส่วนต้องมีขนาดเท่ากัน ซึ่งเป็นหัวใจของเศษส่วน เมื่อนักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับการแบ่งสิ่งของออกเป็น ส่วน ส่วนละเท่า ๆ กันแล้ว ครูอาจใช้สถานการณ์ต่าง ๆ เพิ่มเติมเพื่อพัฒนาโน้ตศน์ของนักเรียน ในการพัฒนาโน้ตศน์จะเพิ่มความซับซ้อนของสถานการณ์ใหม่ สิ่งที่ครูควรตระหนักและระมัดระวังในการยกตัวอย่างสถานการณ์เพิ่มเติมคือความรู้พื้นฐานภูมิหลังและการรับรู้ของแต่ละคน เพราะสิ่งต่าง ๆ เหล่านี้จะทำให้นักเรียนมีการรับรู้ หรือวิธีการหาคำตอบที่แตกต่างกัน

Williams (2008) กล่าวว่าเมื่อนักเรียนมีมโนทัศน์พื้นฐานเกี่ยวกับเศษส่วนแล้ว อาจใช้สถานการณ์การแบ่งขนมเพื่อพัฒนามโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วนดังนี้

ตาราง 5.2 การพัฒนามโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วนตามแนวคิด Williams

ระดับง่าย	ระดับปานกลาง	ระดับสูง
มีเด็ก 2 คน ต้องการแบ่งขนม 3 ชิ้น ให้เด็กคนละเท่า ๆ กัน	มีเด็ก 4 คน ต้องการแบ่งขนม 3 ชิ้น ให้เด็กคนละเท่า ๆ กัน	มีเด็ก 3 คน ต้องการแบ่งขนม 2 ชิ้น ให้เด็กคนละเท่า ๆ กัน
มีเด็ก 2 คน ต้องการแบ่งขนม 5 ชิ้น ให้เด็กคนละเท่า ๆ กัน	มีเด็ก 3 คน ต้องการแบ่งขนม 5 ชิ้น ให้เด็กคนละเท่า ๆ กัน	มีเด็ก 3 คน ต้องการแบ่งขนม 7 ชิ้น ให้เด็กคนละเท่า ๆ กัน
มีเด็ก 3 คน ต้องการแบ่งขนม 4 ชิ้น ให้เด็กคนละเท่า ๆ กัน	มีเด็ก 6 คน ต้องการแบ่งขนม 4 ชิ้น ให้เด็กคนละเท่า ๆ กัน	มีเด็ก 5 คน ต้องการแบ่งขนม 4 ชิ้น ให้เด็กคนละเท่า ๆ กัน

จากกิจกรรมที่ Williams เสนอพบว่าจะเริ่มจากสถานการณ์ง่าย ๆ โดยใช้การแบ่งครึ่ง แล้วพัฒนาต่อไปยังสถานการณ์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้น เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับเศษส่วนแล้วควรอธิบายเกี่ยวกับการเขียนเศษส่วนควบคู่ไปด้วย โดยอาจนำสถานการณ์ที่เริ่มต้นมาอธิบายผ่านการเขียนด้วยสัญลักษณ์ดังนี้ เช่น แม่มีเค้ก 1 ก้อน แบ่งให้ลูก 3 คน คนละเท่า ๆ กัน ลูกแต่ละคนจะได้เค้ก



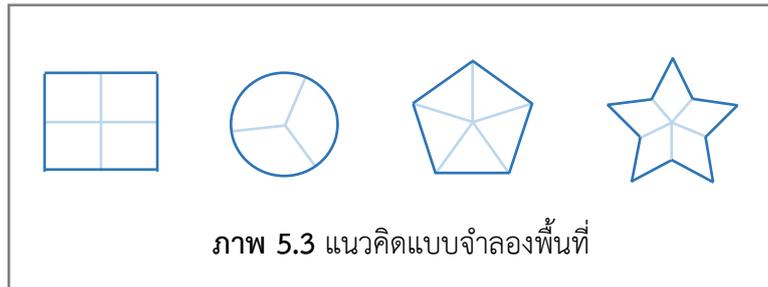
คนละเท่าใด ครูอาจใช้การวาดภาพในการอธิบาย จากภาพ 5.2 คำตอบที่ได้คือส่วนที่ระบายสี นั่นคือลูกแต่ละคนจะได้เค้ก 1 ใน 3 ของทั้งก้อน เขียนคำตอบที่ได้ด้วยสัญลักษณ์  $\frac{1}{3}$  อ่านว่า เศษหนึ่งส่วนสาม โดย 3 จะแสดงจำนวนส่วนที่แบ่งเท่า ๆ กันจากเค้ก และ 1 แสดง ปริมาณที่ลูกแต่ละคนได้รับ ซึ่ง  $\frac{1}{3}$  เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ชนิดหนึ่งที่เรียกว่า เศษส่วน (fraction) 1 เรียกว่า ตัวเศษ (numerator) และ 3 เรียกว่า ตัวส่วน (denominator)

### แบบจำลองเศษส่วน

การสร้างมโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วนนั้น Lamon (2012), Cramer and Whitney (2010) และ Siegler และคณะ (2010) ได้เสนอรูปแบบการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับเศษส่วนด้วยแบบจำลองดังนี้

### แบบจำลองพื้นที่ (Area Models)

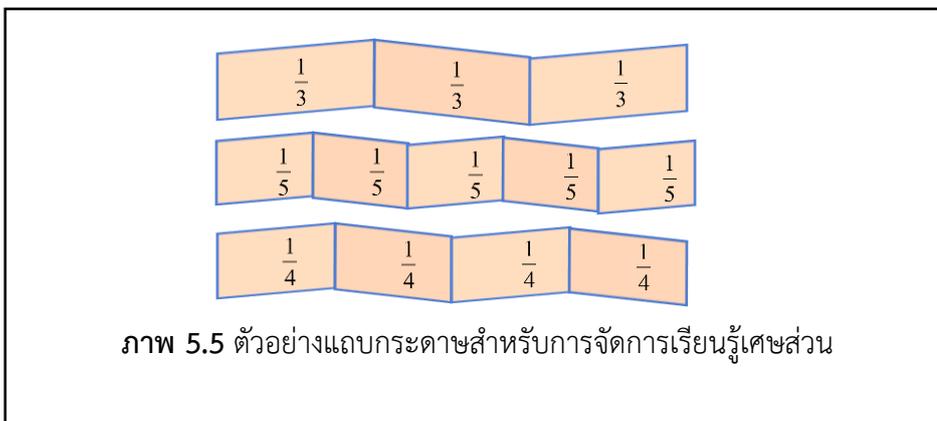
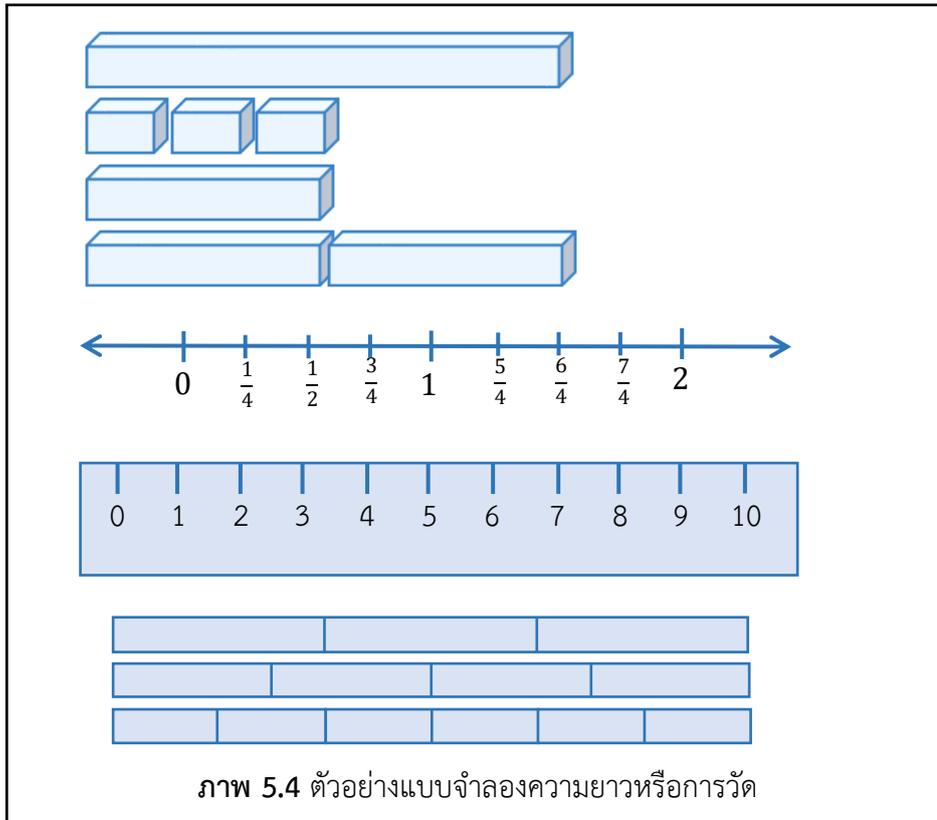
การใช้แบบจำลองพื้นที่เป็นแบบจำลองที่นิยมใช้กันมากที่สุด เนื่องจากง่ายในการนำเสนอ และเมื่อแบ่งเป็นส่วน ๆ ที่เท่ากันจะเห็นแต่ละส่วนที่เท่ากันชัดเจน (ภาพ 5.3)



ภาพ 5.3 แนวคิดแบบจำลองพื้นที่

### แบบจำลองความยาวหรือการวัด (Length or Measurement Models)

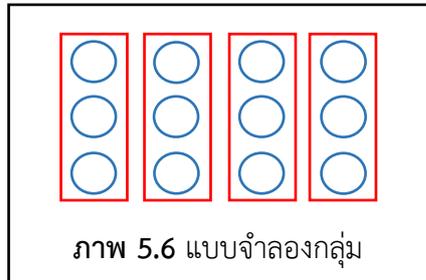
แบบจำลองความยาวหรือการวัดเป็นการนำเส้นจำนวนหรือแถบเศษส่วนมาแบ่งเป็นส่วนส่วนละเท่า ๆ กัน แบบจำลองนี้เหมาะกับการอธิบายการเปรียบเทียบเศษส่วน และบางครั้งครูอาจต้องแนะนำเรื่องเส้นจำนวนกับนักเรียนก่อนนำแบบจำลองความยาวมาใช้อธิบาย การใช้แบบจำลองความยาวสามารถนำไปใช้ได้ง่ายโดยให้นักเรียนวาดเส้นจำนวนลงบนกระดาษแล้วแบ่งเป็นช่องย่อย ๆ ด้วยไม้บรรทัด หรือบางครั้งอาจประยุกต์โดยใช้แถบกระดาษมาพับเป็นส่วน ส่วนละเท่า ๆ กัน เช่น ให้นักเรียนลากเส้นตรงและเขียนตัวเลขกำกับจาก 0 ถึง 10 หรือให้นักเรียนนำ Cuisenaire มาต่อกัน นอกจากนี้แบบจำลองนี้สามารถพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวนตรรกยะ และสร้างมโนทัศน์ที่ว่าจะมีเศษส่วนอยู่ระหว่างเศษส่วนสองตัวเสมอ ตัวอย่างแบบจำลองชนิดนี้ดังภาพ 5.4 และ 5.5



### แบบจำลองกลุ่ม (Set Models)

แบบจำลองกลุ่มเป็นการพัฒนาความเข้าใจที่ว่าสิ่งของแต่ละชิ้นสามารถแยกเป็นกลุ่ม และกลุ่มย่อยแต่ละกลุ่มจะประกอบกันเป็นเศษส่วน เช่น มีลูกกวาด 12 เม็ด แบ่งเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 เม็ด ได้ 4 กลุ่ม ดังนั้นหนึ่งกลุ่มจะแทนด้วย  $\frac{1}{4}$  ของลูกกวาดทั้งหมด แบบจำลองนี้อาจสร้างความสับสนให้กับนักเรียนบางคนได้ เพราะนักเรียนจะสนใจแต่ปริมาณของกลุ่มย่อยมากกว่าจำนวนกลุ่มที่

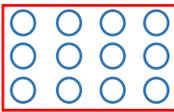
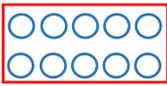
เท่ากัน จากตัวอย่างข้างต้น นักเรียนบางคนจะมีโน้ตศน์ว่า  $\frac{1}{3}$  ของลูกกวาด เพราะแต่ละกลุ่มมีลูกกวาด 3 เม็ด (ภาพ 5.6)



จากแบบจำลองต่าง ๆ ครูอาจตรวจสอบความเข้าใจเกี่ยวกับเศษส่วนจากกิจกรรมดังนี้

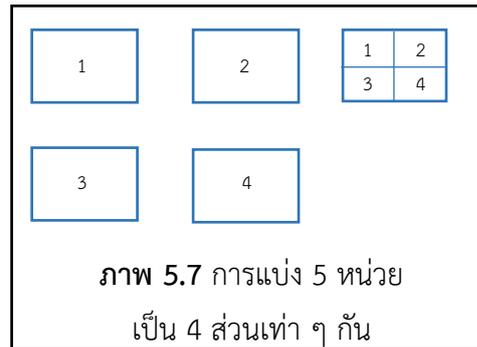
กิจกรรมเศษส่วน : ให้นักเรียนระบายสี หรือหาคำตอบ	
	ระบายสี $\frac{1}{4}$ ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้
	ระบายสี $\frac{2}{3}$ ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้
	ระบายสี $\frac{5}{3}$ ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้
	$\frac{1}{4}$ ของเซ็กที่กำหนดให้ ยาวเท่าใด
	$\frac{2}{3}$ ของเซ็กที่กำหนดให้ ยาวเท่าใด
	$\frac{3}{2}$ ของเซ็กที่กำหนดให้ ยาวเท่าใด
	$\frac{1}{4}$ ของลูกกวาดที่กำหนดให้ มีเท่าใด
	$\frac{3}{5}$ ของลูกกวาดที่กำหนดให้ มีเท่าใด
	$\frac{5}{3}$ ของลูกกวาดที่กำหนดให้ มีเท่าใด

เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับเศษส่วน ครูอาจขยายมโนทัศน์เศษส่วนโดยใช้กิจกรรม  
ดังนี้

กิจกรรมหาทั้งหมด : ให้นักเรียนระบายสี หรือหาคำตอบ	
	รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดคิดเป็น $\frac{1}{3}$ ของทั้งหมด รูปทั้งหมดจะมีลักษณะอย่างไร
	รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดคิดเป็น $\frac{3}{4}$ ของทั้งหมด รูปทั้งหมดจะมีลักษณะอย่างไร
	รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดคิดเป็น $\frac{4}{3}$ ของทั้งหมด รูปทั้งหมดจะมีลักษณะอย่างไร
	ความยาวที่กำหนดให้คิดเป็น $\frac{1}{3}$ ของทั้งหมด จงวาด ความยาวเดิม
	ความยาวที่กำหนดให้คิดเป็น $\frac{2}{3}$ ของทั้งหมด จงวาด ความยาวเดิม
	ความยาวที่กำหนดให้คิดเป็น $\frac{5}{4}$ ของทั้งหมด จงวาด ความยาวเดิม
	ลูกกวาด 4 เม็ด คิดเป็นครึ่งหนึ่งของทั้งหมด ลูกกวาดทั้งหมดมีกี่เม็ด
	ลูกกวาด 12 เม็ด คิดเป็น $\frac{3}{4}$ ของทั้งหมด ลูกกวาด ทั้งหมดมีกี่เม็ด
	ลูกกวาด 10 เม็ด คิดเป็น $\frac{5}{2}$ ของทั้งหมด ลูกกวาด ทั้งหมดมีกี่เม็ด

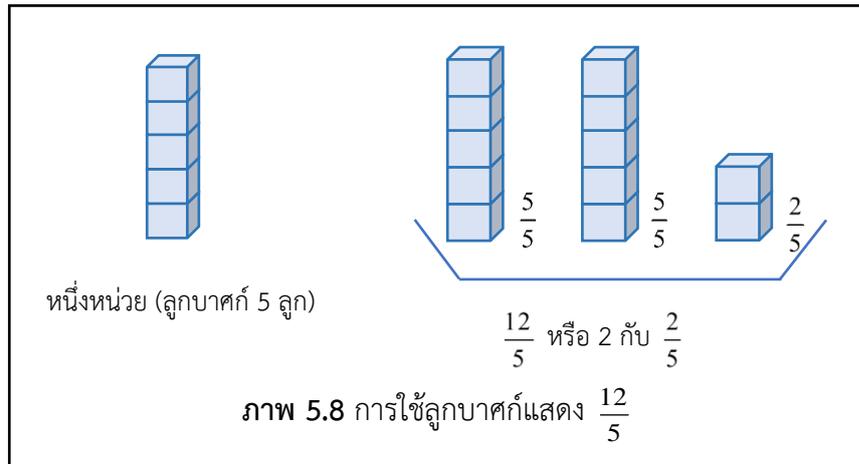
## เศษส่วนที่มากกว่า 1

ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ได้กำหนดตัวชี้วัดให้นักเรียนเรียนรู้เศษส่วนที่มากกว่า 1 โดยมีการขยายแนวคิดจากความหมายของเศษส่วนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 สำหรับเศษส่วนที่มากกว่า 1 อาจนำเสนอได้ด้วยเศษส่วนอีกประเภทหนึ่งที่เรียกว่า เศษเกิน (improper fraction) หรือจำนวนคละ (mixed number) จากสถานการณ์ในตาราง 5.1 มีขนม 5 ชิ้น แบ่งให้เด็ก 4 คน คนละเท่า ๆ กัน จะได้คนละเท่าใด สามารถนำเสนอด้วยแบบจำลองพื้นที่ ดังภาพ 5.7 พบว่าเด็กแต่ละคนจะได้ขนม 1 กับ  $\frac{1}{4}$  ใน 4 ส่วน หรือ  $1 + \frac{1}{4}$  หรือ  $\frac{4}{4} + \frac{1}{4}$  หรือ  $\frac{5}{4}$  จากสถานการณ์เป็นการเชื่อมโยงจากสิ่งที่ครูได้นำมาพัฒนามโนทัศน์ในขั้นต้น ทำให้นักเรียนทราบว่า ตัวเศษอาจมากกว่าหรือเท่ากับตัวส่วนก็ได้ ดังนั้น ถ้าเศษส่วนใดที่ตัวเศษเท่ากับหรือมากกว่าตัวส่วนจะเรียกว่า เศษเกิน (improper fraction)



การนำเสนอเศษส่วนที่มากกว่า 1 อีกวิธีหนึ่งคือการเปลี่ยนจากเศษเกินเป็นจำนวนคละ หรือการเปลี่ยนจากจำนวนคละเป็นเศษเกิน จากงานวิจัยของ Kouba และคณะ (1988) พบว่านักเรียนร้อยละ 80 ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 สามารถเปลี่ยนจำนวนคละเป็นเศษเกินได้ แต่มีจำนวนครั้งหนึ่งที่ไม่ทราบว่า  $5\frac{1}{4}$  มีความหมายว่า  $5 + \frac{1}{4}$  จากงานวิจัยนี้จึงพบว่านักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับกระบวนการ (procedures knowledge) แต่ไม่เข้าใจเกี่ยวกับความรู้เรื่องมโนทัศน์ (conceptual knowledge) ในประเด็นนี้เป็นสิ่งที่ครูควรอธิบายหรือสร้างความเข้าใจให้นักเรียน

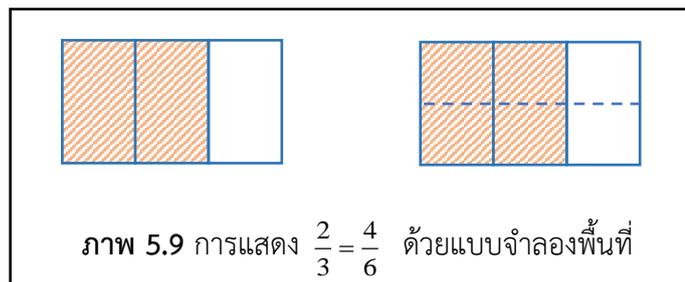
Neumer (2007) ได้ให้คำแนะนำว่าลูกบาศก์เป็นสื่อการสอนที่มีประสิทธิภาพที่สุดในการสร้างมโนทัศน์เกี่ยวกับเศษเกินและจำนวนคละ เช่น ต้องการเปลี่ยน  $\frac{12}{5}$  เป็นจำนวนคละ อาจทำได้โดยให้ลูกบาศก์แต่ละลูกแทน  $\frac{1}{5}$  ปัญหานี้จำเป็นต้องใช้ลูกบาศก์ 12 ลูก โดยเมื่อนำลูกบาศก์ 5 ลูกมาประกอบกันจะได้  $\frac{5}{5}$  หรือ 1 ดังนั้น  $\frac{12}{5}$  สามารถเขียนแทนด้วย  $\frac{5}{5} + \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = 1 + 1 + \frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5} = 2\frac{2}{5}$  ในทางกลับกันจากแบบจำลองนี้สามารถนับได้ว่า  $2\frac{2}{5}$  เกิดจากลูกบาศก์ที่แทน  $\frac{1}{5}$  จำนวน 12 ลูก นั่นคือ  $2\frac{2}{5}$  สามารถเขียนแทนด้วย  $\frac{12}{5}$  (ภาพ 5.8)



### เศษส่วนที่เท่ากัน

สำหรับการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับเศษส่วนอาจเชื่อมโยงจากแบบจำลองที่ใช้ในการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับเศษส่วน ดังนี้

จากภาพ 5.9 ทางด้านซ้าย มี 3 ส่วนเท่า ๆ กัน ระบายสี 2 ส่วน เขียนเป็นเศษส่วนได้  $\frac{2}{3}$  เมื่อนำภาพทางด้านซ้ายมาแบ่งเพิ่มตามแนวนอนจะได้ภาพด้านขวา พบว่ามี 6 ส่วนที่เท่า ๆ กัน ระบายสี 4 ส่วน



เขียนเป็นเศษส่วนได้  $\frac{4}{6}$  จากภาพ พบว่ามีส่วนที่ระบายสีทั้งสองภาพเท่ากัน ดังนั้น  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$  จากภาพที่แสดงการเท่ากันพบว่า เราสามารถนำเศษส่วนเดิมไปคูณหรือหารด้วยจำนวนนับทั้งเศษส่วนจะได้เศษส่วนใหม่ที่ค่าคงเดิม

ข้อสังเกตในการนิเทศและการทดลองสอนของนักศึกษาศาสาวิชาคณิตศาสตร์พบว่า มีการเขียนการอธิบายการหาเศษส่วนที่เท่ากัน 3 แบบ เช่น ต้องการแสดงว่า  $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

$$\text{แบบที่ 1 อธิบายบนกระดานดังนี้ } \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$$

$$\text{แบบที่ 2 อธิบายบนกระดานดังนี้ } \frac{3}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{8}$$

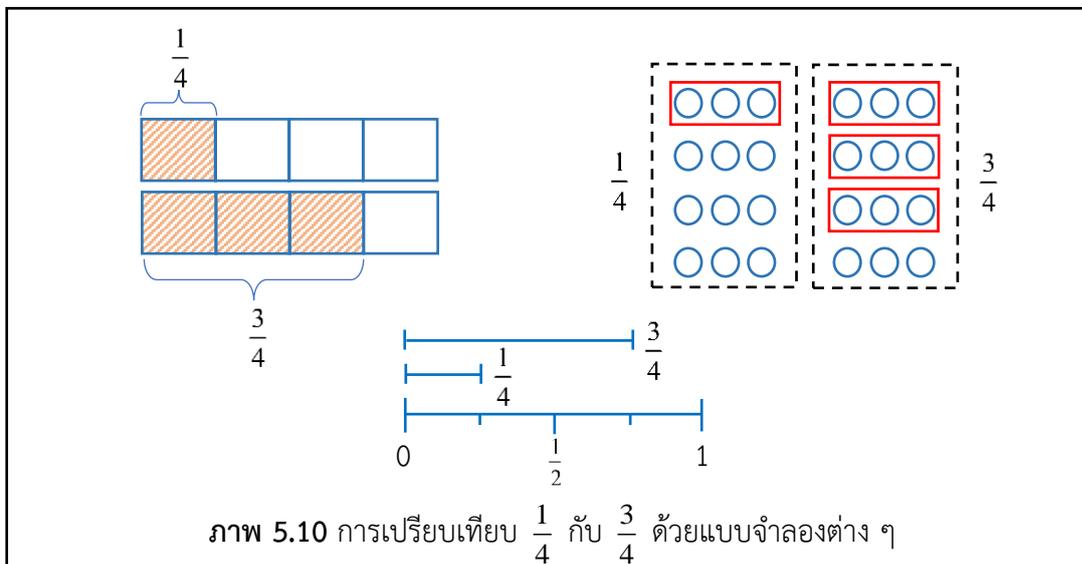
$$\text{แบบที่ 3 อธิบายบนกระดานดังนี้ } \frac{3}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{8}$$

เมื่อพิจารณาพบว่าการเขียนมีความแตกต่างกัน แบบที่ 1 นำ 2 ไปคูณทั้งตัวเศษและตัวส่วน ซึ่งถูกต้อง แบบที่ 2 เป็นการนำ  $\frac{2}{2}$  ไปคูณกับ  $\frac{3}{4}$  ซึ่งเป็นการคูณเศษส่วนกับเศษส่วน ในประเด็นนี้อาจยังไม่สามารถทำได้ เพราะการคูณเศษส่วนกับเศษส่วนเป็นหัวข้อที่ยังไม่ได้มีการจัดการเรียนรู้ นั่นคือนักเรียนยังไม่ทราบวิธีการการคูณเศษส่วนกับเศษส่วนต้อง อาจทำได้เมื่อนักเรียนได้เรียนรู้ในหัวข้อนี้ ส่วนแบบที่ 3 ไม่ถูกต้องเพราะ  $\frac{3}{4}$  เป็นจำนวนหนึ่งจำนวน และ  $\frac{2}{2}$  ก็เป็นเพียงจำนวนหนึ่งจำนวนเช่นกัน ดังนั้นการดำเนินการจะมีเพียงสัญลักษณ์เดียวเท่านั้น ในประเด็นนี้ครูควรมีการระมัดระวังในการเขียนสัญลักษณ์หรือการอธิบายแนวคิด

### การเปรียบเทียบเศษส่วน

สำหรับการเปรียบเทียบเศษส่วนนั้น เมื่อพิจารณาตัวชี้วัดที่เกี่ยวข้องกับการเปรียบเทียบเศษส่วน (ภาพ 5.1) พบว่าได้มีการกำหนดให้นักเรียนเรียนรู้การเปรียบเทียบเศษส่วนตั้งแต่ระดับประถมศึกษาปีที่ 3 โดยเป็นการเปรียบเทียบเศษส่วนในกรณีที่ตัวส่วนเท่ากัน หรือตัวเศษเท่ากัน ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 เป็นการเปรียบเทียบเศษส่วนที่ตัวส่วนตัวหนึ่งเป็นพหุคูณของอีกตัวหนึ่ง และในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 เป็นการเปรียบเทียบเศษส่วนเมื่อตัวส่วนของเศษส่วนทั้งสองตัวไม่เป็นพหุคูณซึ่งกันและกัน โดยอาจใช้แนวคิดในการจัดการเรียนรู้ดังนี้

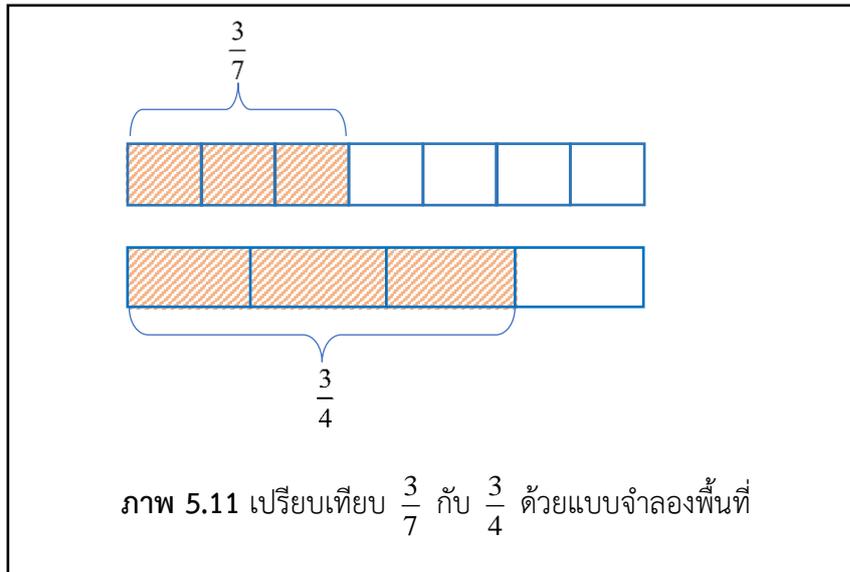
1. กรณีที่ตัวส่วนเท่ากัน เช่น เปรียบเทียบ  $\frac{1}{4}$  กับ  $\frac{3}{4}$  ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบที่ง่าย เพราะสามารถอธิบายโดยใช้แบบจำลองชนิดต่าง ๆ ได้ง่าย (ภาพ 5.10)



ภาพ 5.10 การเปรียบเทียบ  $\frac{1}{4}$  กับ  $\frac{3}{4}$  ด้วยแบบจำลองต่าง ๆ

มโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วน

2. กรณีตัวเลขเท่ากัน เช่น เปรียบเทียบ  $\frac{3}{7}$  กับ  $\frac{3}{4}$  การอธิบายความเข้าใจในประเด็นนี้ครูต้องสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับปริมาณหรือพื้นที่แต่ละส่วนก่อน แบบจำลองพื้นที่ถ้านำมาแบ่งเป็น 7 ส่วนเท่า ๆ กัน กับแบ่งเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กัน แต่ละส่วนของรูปใดจะมีพื้นที่มากกว่ากัน แล้วจึงพิจารณา 3 ส่วน ว่าภาพใดมีพื้นที่มากกว่ากัน (ภาพ 5.11)



3. กรณีที่มากกว่าหรือน้อยกว่า  $\frac{1}{2}$  ในกรณีนี้เป็นการสอดแทรกความรู้สึกเชิงจำนวน (number sense) ซึ่งจะช่วยในการเปรียบเทียบเศษส่วน โดยการใช้เปรียบเทียบกับ  $\frac{1}{2}$  เช่น เปรียบเทียบ  $\frac{5}{6}$  กับ  $\frac{3}{8}$  เริ่มจากการพิจารณา  $\frac{5}{6}$  พบว่า 5 มีค่ามากกว่าครึ่งหนึ่งของ 6 นั่นคือ 3 แสดงว่า  $\frac{5}{6}$  มีค่ามากกว่า  $\frac{1}{2}$  และ  $\frac{3}{8}$  พบว่า 3 มีค่าน้อยกว่า ครึ่งหนึ่งของ 8 นั่นคือ 4 แสดงว่า  $\frac{3}{8}$  มีค่าน้อยกว่า  $\frac{1}{2}$  แสดงว่า  $\frac{5}{6}$  มากกว่า  $\frac{3}{8}$  มโนทัศน์เหล่านี้จะช่วยให้นักเรียนสามารถเปรียบเทียบและเรียงลำดับเศษส่วนได้ง่ายขึ้น

4. กรณีห่างจากครึ่งหรือจำนวนนับ เช่น เปรียบเทียบ  $\frac{9}{10}$  กับ  $\frac{3}{4}$  จากหลักการที่กล่าวข้างต้นจะไม่สามารถเปรียบเทียบได้ทันทีเพราะตัวส่วนไม่เท่ากัน และตัวเลขก็ไม่เท่ากัน จะใช้แนวทางการเปรียบเทียบกับ  $\frac{1}{2}$  ก็ทำไม่ได้ ดังนั้นครูควรนำเสนอแนวคิดใหม่ โดยอาจเริ่มจาก  $\frac{9}{10}$  ห่างจาก 1 อยู่เท่าใด นั่นคือ  $\frac{1}{10}$  และ  $\frac{3}{4}$  ห่างจาก 1 อยู่เท่าใด นั่นคือ  $\frac{1}{4}$  ดังนั้น เศษส่วนใดใกล้ 1 มากกว่ากัน และคิดย้อนกลับโดยการเปรียบเทียบ  $\frac{1}{10}$  กับ  $\frac{1}{4}$  แล้วจึงได้คำตอบ

มโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วน

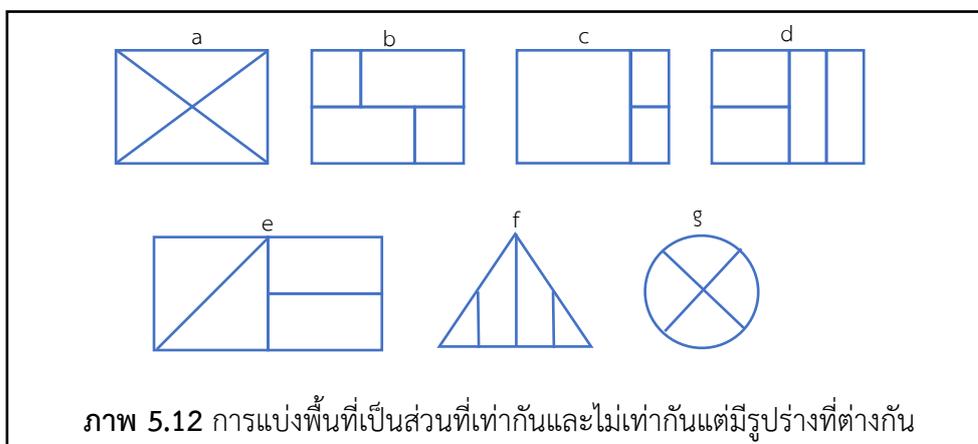
จากมโนทัศน์การเปรียบเทียบเศษส่วนทั้ง 4 แนวคิด ครูอาจใช้แนวคิดที่หลากหลายในการอธิบาย หรือนำเสนอ แต่อย่างไรก็ตามทั้ง 4 แนวคิดสามารถสรุปเป็นสำหรับวิธีการทางเลขคณิตได้ว่าการเปรียบเทียบเศษส่วนต้องทำตัวส่วนให้เท่ากันแล้วพิจารณาที่ตัวเศษ ตัวเศษใดมากกว่าเศษส่วนนั้นก็มากกว่าเศษส่วนอีกตัวหนึ่ง

แม้ว่าครูเองจะมีความพยายามในการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับเศษส่วนให้กับนักเรียน แต่ก็ยังมีนักเรียนบางคนมีความเข้าใจเกี่ยวกับเศษส่วนที่คลาดเคลื่อน โดยสิ่งเหล่านี้ครูต้องมีการเตรียมการอธิบายสิ่งต่าง ๆ ด้วยความชัดเจนให้กับนักเรียน สำหรับความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนอาจมีดังนี้

1. นักเรียนเข้าใจเศษส่วนมีสองตัวนั่นคือ ตัวเศษและตัวส่วน โดยนำทั้งสองตัวนี้มาประกอบกันจะกลายเป็นเศษส่วน โดยความเป็นจริงแล้วเศษส่วนเป็นตัวเลขที่แสดงจำนวนเพียงค่าเดียว

2. นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับส่วนทั้งหมด หรือส่วนที่ระบายสี เช่น  $\frac{2}{3}$  นักเรียนมีความเข้าใจว่ามี 3 ส่วน ระบายสี 2 ส่วน โดยไม่ได้สนใจว่าแต่ละส่วนมีขนาดเท่ากันหรือไม่

3. เศษส่วนเกิดจากการแบ่งพื้นที่เป็นส่วน ๆ ซึ่งแต่ละส่วนต้องมีพื้นที่เท่ากัน แต่ไม่จำเป็นต้องมีรูปร่างเหมือนกัน และแต่ละส่วนที่แบ่งสามารถแบ่งเป็นส่วน ๆ ที่เท่ากันได้อีก เมื่อนักเรียนพบเจอเศษส่วนที่มีการแบ่งพื้นที่จากรูปที่ไม่เหมือนกันจึงคิดว่าไม่ใช่การแบ่งที่มีปริมาณเท่ากัน ครูควรฝึกให้นักเรียนสังเกต เช่น จากภาพ 5.12 แต่ละส่วนของ a และ g มีพื้นที่แต่ละส่วนเท่ากัน ( $\frac{1}{4}$ ) ในขณะที่ d กับ e แต่ละส่วนเป็นรูปเรขาคณิตที่ไม่เหมือนกัน แต่มีพื้นที่แต่ละส่วนเท่ากัน ( $\frac{1}{4}$ )



Cramar and Whitney (2010) และ Clarke และคณะ (2008) ได้เสนอแนะการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเศษส่วนสรุปได้ดังนี้

มโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วน

1. ควรให้ความสำคัญเกี่ยวกับความรู้สึกเชิงจำนวนของเศษส่วน ความหมายของเศษส่วนมากกว่ากระบวนการทางเศษส่วน
2. ควรให้นักเรียนได้เจอบริบทจริง หรือสื่อการสอนที่เป็นรูปธรรมที่หลากหลาย
3. ควรเน้นย้ำว่าเศษส่วนเป็นสัญลักษณ์หนึ่งที่ใช้แทนปริมาณ ไม่ได้เกิดจากจำนวนสองจำนวนมาประกอบกัน และสามารถนำเสนอได้ด้วยเส้นจำนวน
4. ควรให้เวลากับการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับความหมายของเศษส่วนอย่างมากพอ รวมทั้งการเปรียบเทียบเศษส่วนและเศษส่วนที่เท่ากัน
5. ควรฝึกการเชื่อมโยงเศษส่วนกับการประมาณค่า
6. นักเรียนอาจมีโมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในบางประเด็น เช่น  $\frac{1}{5}$  น้อยกว่า  $\frac{1}{10}$  เพราะ 5 น้อยกว่า 10 จากโมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนนี้ครูควรใช้ของจริงหรือแบบจำลองต่าง ๆ เพื่อแสดงเหตุผลที่ชัดเจนกับนักเรียน หรืออาจใช้กิจกรรมการแบ่งขนมชิ้นหนึ่งเป็นห้าส่วนเท่า ๆ กัน หรือแบ่งเป็นสิบส่วนเท่า ๆ กัน แล้วให้นักเรียนเปรียบเทียบปริมาณของขนมแต่ละส่วนที่แบ่งได้

### การดำเนินการของเศษส่วน

การดำเนินการของเศษส่วนจะมีความซับซ้อนมากกว่าหัวข้ออื่น เนื่องจากในแต่ละการดำเนินการสามารถแยกได้หลายหัวข้อย่อย เช่น การคูณเศษส่วนกับจำนวนนับ การคูณเศษส่วนกับเศษส่วน หรือการคูณเศษส่วนกับจำนวนคละ เป็นต้น ดังนั้นครูจึงควรวางแผน หรือลำดับการจัดการเรียนรู้ให้ชัดเจนว่าควรอธิบายหรือขยายแนวคิดจากหัวข้อใดไปยังหัวข้อใด หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) นั้นได้ลำดับการเรียนรู้ไว้ดังนี้

การบวกและการลบ เริ่มต้นจากชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 นักเรียนจะมีความเข้าใจเกี่ยวกับการบวก และลบเศษส่วนที่มีตัวส่วนเท่ากัน แต่ผลบวกไม่เกิน 1 ในขณะที่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ผลบวกและผลลบเกิน 1 แต่ต้องเป็นการบวกและลบที่ตัวส่วนของเศษส่วนตัวหนึ่งเป็นพหุคูณของอีกตัวหนึ่ง ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จะเป็นการบวกและลบเศษส่วนเมื่อตัวส่วนเป็นจำนวนนับใด ๆ สำหรับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 นั้น จะเป็นการนำความรู้เกี่ยวกับการหา ค.ร.น. มาช่วยทำให้ตัวส่วนเท่ากัน

การคูณและการหาร จะเริ่มจากชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 เป็นการหาผลคูณ ผลหารของเศษส่วนและจำนวนคละ ในขณะที่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จะเป็นการบวก ลบ คูณ และหารระคน และนำความรู้ไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาระคน

Siegler และคณะ (2010) ได้แนะนำ 4 ขั้นตอน ในการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการดำเนินการของเศษส่วนดังนี้

1. ใช้สถานการณ์ที่มีความหมายในการจัดการเรียนรู้ ซึ่งควรทำทุกครั้งเมื่อต้องการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยควรนำเสนอสถานการณ์ที่มีความหมายเพื่อให้นักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจ วิธีการในการคำนวณ เปิดโอกาสให้นักเรียนแสดงถึงวิธีการหาคำตอบ ซึ่งสถานการณ์ที่ใช้ไม่ควรมีความซับซ้อน แต่ควรเน้นที่การดำเนินการและความหมายของเศษส่วน

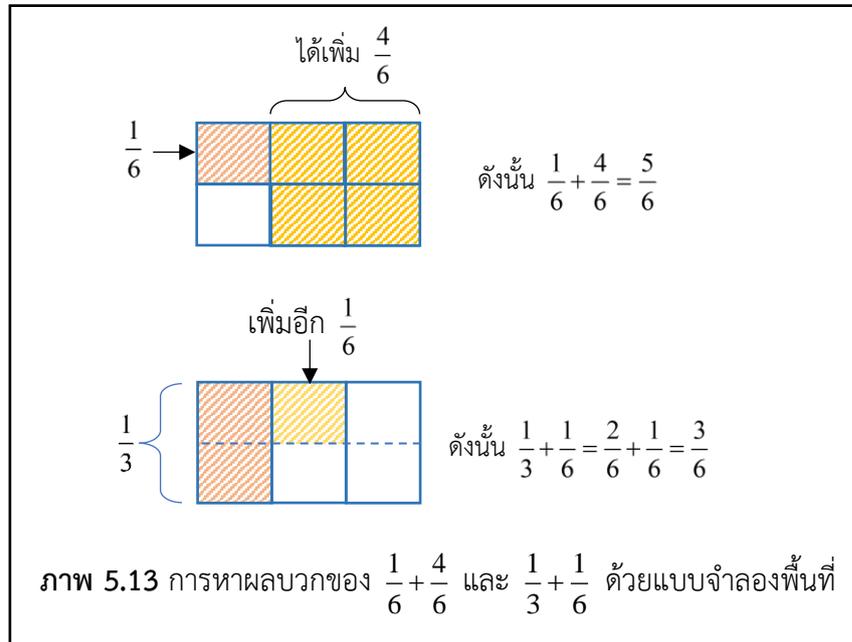
2. ใช้แบบจำลองที่หลากหลายในการสร้างความเข้าใจ ไม่ว่าจะเป็นแบบจำลองพื้นที่แบบจำลองความยาว หรือแบบจำลองกลุ่ม อาจใช้สื่อที่เป็นของจริงหรือการวาดภาพที่แสดงถึงการดำเนินการของเศษส่วนควบคู่ไปด้วย และเป็นการตรวจสอบว่านักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับเศษส่วนอย่างแท้จริง แล้วจึงพัฒนาความเข้าใจเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์และระบบการคิดที่เป็นนามธรรม

3. เน้นการประมาณค่าและวิธีการอธิบายที่ไม่เป็นทางการในบางปัญหา เช่น  $2\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$  นักเรียนคิดว่าผลคูณมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่า 1 คำถามเหล่านี้นักเรียนต้องหาเหตุผล หรือแสดงแนวคิดง่าย ๆ ในการหาคำตอบ โดยที่ยังไม่ได้คำนวณ สิ่งเหล่านี้จะมีประโยชน์สำหรับนักเรียนเป็นอย่างมากในการพัฒนามโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วน วิธีการอธิบายหรือแนวคิดของนักเรียนอาจยังไม่เป็นทางการ แต่จะมีประโยชน์ต่อตนเอง ครูควรรับฟังและแนะนำในบางครั้ง โดยสิ่งนี้จะเป็นการประเมินผลนักเรียนว่ามีความเข้าใจถูกต้องเกี่ยวกับเศษส่วนหรือไม่ก็ได้

4. ยกตัวอย่างมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการดำเนินการต่าง ๆ ให้กับนักเรียน แนะนำหรือเน้นย้ำถึงข้อควรระวังในอนาคต เช่น นักเรียนจะมีความเข้าใจว่า  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$  นั่นคือนำตัวเศษมาบวกกัน และนำตัวส่วนมาบวกกัน หรือ เมื่อครูอธิบายเกี่ยวกับการบวกเศษ  $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{5}$  นักเรียนก็อาจคิดได้ว่า  $\frac{1}{3+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$  ก็สามารถทำได้เช่นกัน ในประเด็นเหล่านี้จึงต้องมีความระมัดระวังอย่างสูงในการสร้างมโนทัศน์

### การบวก

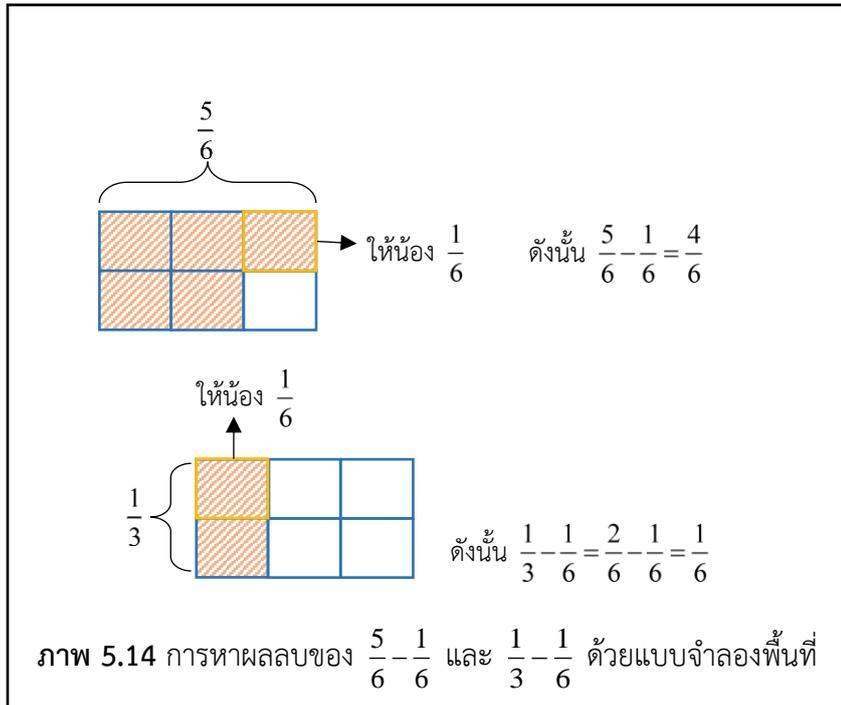
การบวกเป็นการดำเนินการแรกที่จะเชื่อมโยงการบวกกับเศษส่วน ครูอาจยกตัวอย่างสถานการณ์เพื่อนำเข้าสู่เนื้อหา เช่น แม่แบ่งเค้ก  $\frac{1}{6}$  ก้อนให้กับจอม และให้เพิ่มอีก  $\frac{4}{6}$  ก้อน จอมได้เค้กทั้งหมดเท่าใด จากสถานการณ์ครูสามารถนำเสนอด้วยแบบจำลองพื้นที่ (ภาพ 5.13) เพื่ออธิบายถึงที่มาของคำตอบ ซึ่งเป็นการหาคำตอบโดยเน้นย้ำถึงมโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วนเรื่องการแบ่งพื้นที่แต่ละส่วนต้องมีปริมาณเท่ากัน จึงจะทำให้เศษส่วนมีความหมาย ดังนั้นถ้าต้องการหาคำตอบโดยใช้แบบจำลองพื้นที่จึงต้องทำให้พื้นที่แต่ละส่วนเท่ากัน นั่นคือมีตัวส่วนเท่ากัน ครูอาจยกสถานการณ์เพิ่มเติมอีก 2-3 สถานการณ์เพื่อตรวจสอบความเข้าใจเบื้องต้น เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับการบวกของเศษส่วนเมื่อตัวส่วนเท่ากันแล้วจึงขยายมโนทัศน์ เช่น แม่แบ่งเค้ก  $\frac{1}{3}$  ก้อนให้กับจอม และให้เพิ่ม  $\frac{1}{6}$  ก้อน จอมได้เค้กคิดเป็นส่วนเศษเท่าใด จากสถานการณ์ครูควรใช้คำถามเพื่อตรวจสอบความเข้าใจพื้นฐาน เช่น ตัวส่วนของเศษส่วนในสถานการณ์เท่ากันหรือไม่ และถ้าจะทำให้ตัวส่วนเท่ากันควรทำได้โดยวิธีใดและมีค่าเท่าใด แล้วจึงใช้แบบจำลองพื้นฐานในการอธิบายคำตอบ (ภาพ 5.13)



เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับการบวกเศษส่วน ครูอาจข้อสรุปจากแบบจำลองพื้นที่นี้ การบวกเศษส่วนนั้นทำได้ก็ต่อเมื่อเศษส่วนทั้งสองตัวต้องมีตัวส่วนเท่ากัน ผลบวกที่เกิดจากการนำตัวเศษมาบวกกันโดยที่ตัวส่วนคงเดิม

### การลบ

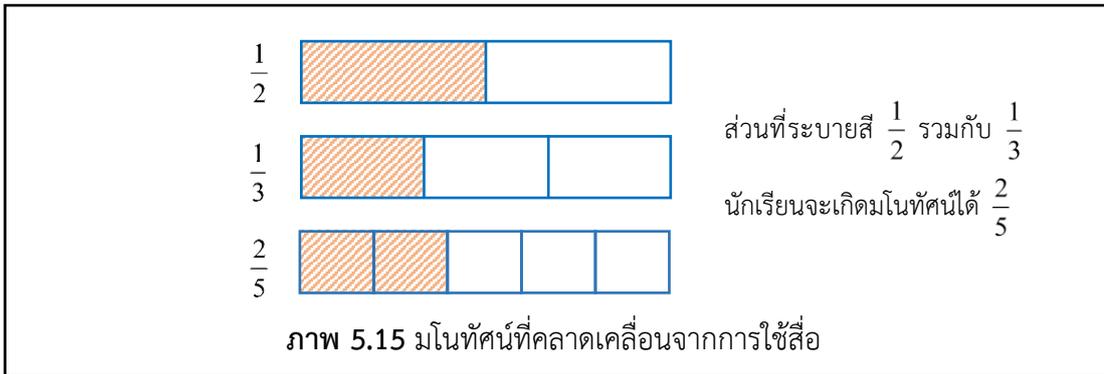
การลบเศษส่วนนั้น ครูอาจใช้สถานการณ์คล้ายกับการบวกเศษส่วน เช่น ฟ้าใสมีขนม  $\frac{5}{6}$  ชิ้น แบ่งให้น้องไป  $\frac{1}{6}$  ชิ้น ฟ้าใสเหลือขนมเท่าใด หรือฟ้าใสมีขนม  $\frac{1}{3}$  ชิ้น แบ่งให้น้องไป  $\frac{1}{6}$  ชิ้น ฟ้าใสเหลือขนมเท่าใด แบบจำลองพื้นที่ในการอธิบายดังภาพ 5.14



เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับการลบเศษส่วน ครูอาจข้อสรุปจากแบบจำลองพื้นที่ที่ตั้งนี้ การลบเศษส่วนนั้นทำได้ก็ต่อเมื่อเศษส่วนทั้งสองตัวต้องมีตัวส่วนเท่ากัน ผลลบที่ได้เกิดจากการนำตัวเศษมาลบกันโดยที่ตัวส่วนคงเดิม

ข้อควรระวังในการพัฒนาโมเดลเกี่ยวกับการบวกและการลบเศษส่วนมีดังนี้

1. การบวกเศษส่วนนักเรียนจะนำทั้งตัวเศษและตัวส่วนมาบวกกัน เช่น  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$  โมเดลที่คลาดเคลื่อนแบบนี้จะพบได้บ่อย สาเหตุหนึ่งอาจเนื่องจากการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับการบวก ครูใช้สื่อดังภาพ 5.15 ทำให้นักเรียนมีโมเดลที่เห็นว่า เมื่อนำส่วนที่ระบายสีมารวมกัน ก็นำส่วนทั้งหมดมารวมกันได้ด้วย ในประเด็นนี้ครูควรใช้สื่อแค่แบบจำลองเดียวในการอธิบาย



2. นักเรียนไม่สามารถทำตัวส่วนให้เท่ากันได้ ในการทำตัวส่วนให้เท่ากันนั้น ในประเด็นนี้ครูอาจต้องหาเกมหรือกิจกรรมมาฝึก เพื่อพัฒนานักเรียนในประเด็นนี้ให้มากขึ้น

3. การเปลี่ยนจำนวนคละให้อยู่ในรูปเศษเกินไม่ถูกต้อง บางครั้งการบวกหรือการลบจะมีจำนวนคละเข้ามาเกี่ยวข้อง นักเรียนไม่สามารถหาคำตอบได้ Petit และคณะ (2010) และ Siegler และคณะ (2010) ได้ศึกษาและสามารถสรุปได้ดังนี้

- หาผลลบของ  $3\frac{1}{4} - 1\frac{3}{8}$  นักเรียนจะเริ่มจาก  $\frac{3}{8} - \frac{1}{4}$  โดยคิดว่า  $\frac{3}{8}$  มากกว่า  $\frac{1}{4}$  แล้วค่อยนำ 3 - 1
- หาผลลบของ  $4 - \frac{7}{8}$  นักเรียนไม่ทราบว่า 4 เป็นเศษส่วนที่มีตัวส่วนเป็น 1 และนักเรียนจะแก้ปัญหาโดยนำ 8 ไปเขียนไว้ใต้ 4 จะได้  $\frac{4}{8} - \frac{7}{8}$  แล้วจึงหาผลลบ
- หาผลลบของ  $3\frac{1}{4} - 1\frac{3}{8}$  นักเรียนจะสนใจแต่จำนวนนับ โดยไม่ระวังเศษส่วนที่เหลือ

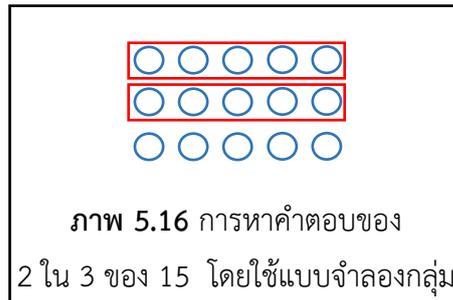
ในการหลีกเลี่ยงประเด็นเหล่านี้ครูควรเน้นย้ำถึงข้อตกลงในการบวกและลบเศษส่วน รวมทั้งฝึกเปลี่ยนจากจำนวนคละเป็นเศษเกิน หรือจากเศษเกินเป็นจำนวนคละ

#### การคูณ

ก่อนจะจัดการเรียน ครูควรวางแผนการสอนเกี่ยวกับการคูณ หรือวางลำดับการพัฒนาการคูณเศษส่วนที่ละขั้นตอน โดยอาจเริ่มการทบทวนความหมายของการคูณ เช่น  $3 \times 5$  หมายความว่า 3 กลุ่มของ 5 หรือเขียนแทนการบวกด้วย  $5 + 5 + 5$  จากนั้นจะขยายไปยังการคูณจำนวนนับกับเศษส่วน โดยใช้ความหมายของการคูณ ตามด้วยการคูณเศษส่วนกับเศษส่วน และการคูณจำนวนคละกับเศษส่วน โดยอาจใช้สถานการณ์ดังนี้

สถานการณ์ 1 แม่ค้าขายน้ำแดงโซดา โดยแต่ละแก้วจะใช้โซดา  $\frac{2}{3}$  แก้ว ถ้าแม่ค้าต้องการขายน้ำแดงโซดา 5 แก้ว แม่ค้าต้องใช้โซดาเท่าใด จากสถานการณ์ 1 เป็นการนำเข้าสู่บทเรียนเกี่ยวกับการคูณจำนวนนับกับเศษส่วน โดยนักเรียนสามารถหาคำตอบได้จาก  $5 \times \frac{2}{3}$  หมายถึง  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2+2+2+2+2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$  การหาคำตอบในลักษณะนี้ จะยุ่งยากเมื่อจำนวนนับมากขึ้น แต่เป็นการอธิบายเพื่อเชื่อมโยงจากความรู้เดิม

สถานการณ์ 2 ร้านขายรถยนต์มือสองแห่งหนึ่งมีรถยนต์ทั้งหมด 15 คัน โดยสองในสามของรถยนต์เป็นสีแดง มีรถยนต์สีแดงกี่คัน จากสถานการณ์ 2 สามารถแปลงเป็นประโยคที่มีความหมายได้ว่า 2 ใน 3 ของ 15 คือเท่าใด โดยให้นักเรียนอาจแสดงแนวคิดในการหาคำตอบ เริ่มจากแบ่ง 15 คัน เป็น 3 กลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ



กัน จะได้กลุ่มละ 5 คัน หลังจากนั้นพิจารณา 2 กลุ่ม จะได้ทั้งสองกลุ่มเท่ากับ 10 คัน จากสถานการณ์ดังกล่าวเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ว่า  $\frac{2}{3} \times 15 = 10$  ดังนั้น รถยนต์สีแดงมี 10 คัน (ภาพ 5.16)

สถานการณ์ 3 อธิมีขนม  $\frac{3}{4}$  ชิ้น แบ่งให้พี่ชาย  $\frac{1}{3}$  ของที่มี พี่ชายได้รับขนมคิดเป็นเศษส่วนเท่าใด

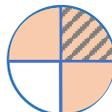
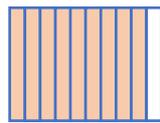
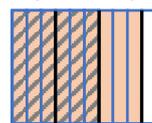
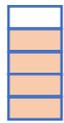
สถานการณ์ 4 สมคิดทานขนมปังไป  $\frac{1}{10}$  ของทั้งหมด แล้วนำ  $\frac{2}{3}$  ของที่เหลือไปทำแซนวิช สมคิดนำขนมปังไปทำแซนวิชคิดเป็นเศษส่วนเท่าใด

สถานการณ์ 5 กมลใช้สีฟ้าในการวาดรูปหนึ่งรูป  $2\frac{1}{2}$  หลอด ถ้าในแต่ละหลอดมีกาวผสมอยู่  $\frac{4}{5}$  กรัม กมลใช้กาวไปทั้งหมดกี่กรัม

จากสถานการณ์ที่ 3 – 5 เป็นการคูณเศษส่วนด้วยเศษส่วน และเศษส่วนด้วยจำนวนคละ สามารถเชื่อมโยงหาคำตอบได้ดังนี้

สถานการณ์	ขั้นแรก	ขั้นสอง	คำตอบ
-----------	---------	---------	-------

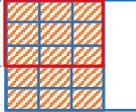
มโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วน

สถานการณ์ 3 หา $\frac{1}{3}$ ของ $\frac{3}{4}$ หรือ $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$	ส่วนที่ระบายสีแสดง $\frac{3}{4}$ 	$\frac{1}{3}$ ของ $\frac{3}{4}$ 	$\frac{1}{3}$ ของ $\frac{3}{4}$ ได้ $\frac{1}{4}$ นั่นคือ $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
สถานการณ์ 4 หา $\frac{2}{3}$ ของ $\frac{9}{10}$ หรือ $\frac{2}{3} \times \frac{9}{10}$	ส่วนที่ระบายสีแสดง $\frac{9}{10}$ 	$\frac{2}{3}$ ของ $\frac{9}{10}$ 	$\frac{2}{3}$ ของ $\frac{9}{10}$ ได้ $\frac{6}{10}$ นั่นคือ $\frac{2}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{6}{10}$
สถานการณ์ 5 หา $2\frac{1}{2}$ ของ $\frac{4}{5}$ หรือ $2\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$	ส่วนที่ระบายสีแสดง $\frac{4}{5}$ 	$2\frac{1}{2}$ ของ $\frac{4}{5}$ 	$2\frac{1}{2}$ ของ $\frac{4}{5}$ ได้ $\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5}$

การพัฒนาการคูณเศษส่วนด้วยวิธีการทางเลขคณิต (arithmetic method)

เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับการคูณเศษส่วนด้วยสถานการณ์ต่าง ๆ แล้ว ครูต้องเชื่อมโยงไปยังการคำนวณด้วยวิธีการทางเลขคณิต อาจใช้แบบจำลองพื้นที่ในการอธิบายและสรุปวิธีการ โดยอาจเริ่มจาก  $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4}$  (ภาพ 5.17) มีความหมายว่า 3 ใน 5 ของ  $\frac{3}{4}$  ดังนั้นจึงเริ่มต้นที่การวาดรูปแสดง  $\frac{3}{4}$  แล้วนำส่วนที่สนใจนั้นคือ 3 มาแบ่งเป็น 5 ส่วน ส่วนละเท่า ๆ กัน แล้วระบายสีไป 3 ส่วน จะได้ว่าส่วนที่สนใจคิดเป็น  $\frac{9}{20}$



$\frac{3}{5}$ 


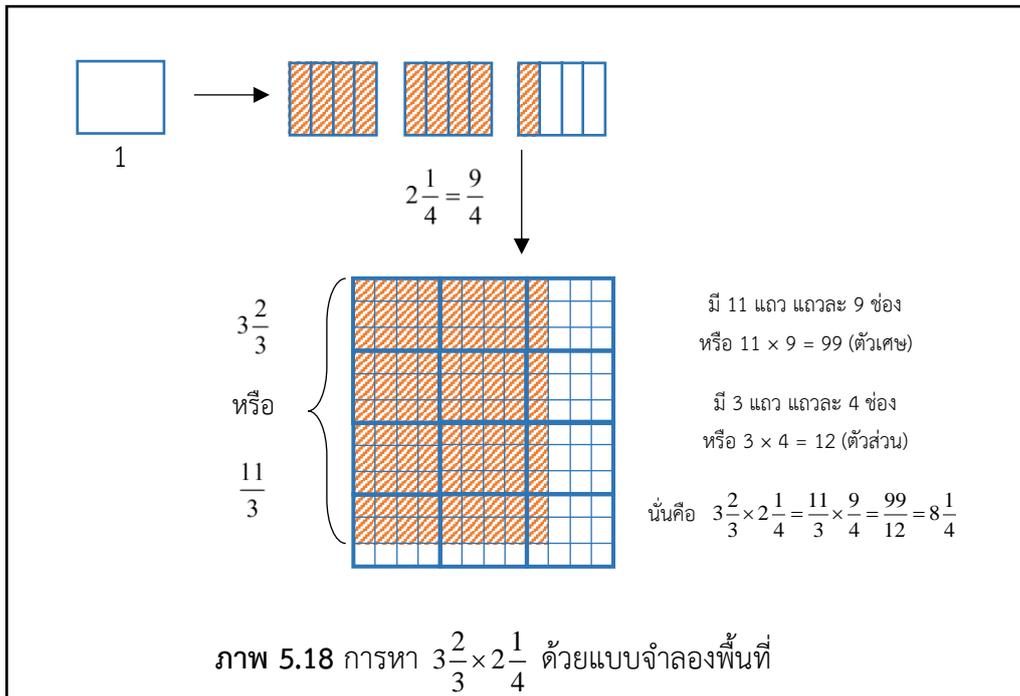
เริ่มต้นจาก 3 ช่อง ช่องละ 3 แถว  
 ได้  $3 \times 3 = 9$  แถว

จากรูปทั้งหมดมี 4 ช่อง นำมาแบ่งเป็น  
 5 แถว ได้  $4 \times 5 = 20$  ช่อง

ผลคูณของ  $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{5 \times 4} = \frac{9}{20}$

**ภาพ 5.17** การหาผลคูณด้วยวิธีการเลขคณิต

หรือ  $3\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{4}$  สามารถแสดงได้ดังภาพ 5.18



จากสถานการณ์ต่าง ๆ ที่นำเสนอ ครูควรให้นักเรียนสังเกตผลคูณที่ได้ เช่น  $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$  หรือ  $3\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{4} = \frac{99}{12} = 8\frac{1}{4}$  โดยเมื่อนำตัวเลขของตัวตั้งและตัวคูณมาคูณกันจะเท่ากับตัวเลขของผลคูณ และเมื่อนำตัวส่วนของตัวตั้งและตัวคูณมาคูณกันจะเท่ากับตัวส่วนของผลคูณ เมื่อนักเรียนได้ข้อสรุปแล้วครูอาจให้นักเรียนนำข้อสรุปที่ได้กลับไปตรวจสอบคำตอบในสถานการณ์ 1-5

ข้อควรระวังในการพัฒนามโนทัศน์เกี่ยวกับการคูณเศษส่วนมีดังนี้

1. นักเรียนมักจะเข้าใจว่าการคูณเศษส่วนจะต้องทำให้ตัวส่วนเท่ากันก่อนเหมือนกับการบวกและการลบ สำหรับในประเด็นนี้อาจต้องใช้แบบจำลองพื้นที่ในการอธิบาย
2. การประมาณคำตอบ นักเรียนบางคนมีมโนทัศน์ที่ว่าผลคูณจะมากกว่าตัวตั้งและตัวคูณเสมอ ซึ่งเป็นการยากที่จะอธิบายให้นักเรียนเข้าใจในประเด็นนี้ ครูอาจต้องใช้การพิจารณาแบบจำลองพื้นที่ในการอธิบาย หรือยกตัวอย่างซ้ำ ๆ
3. การคูณเศษส่วนด้วยจำนวนนับ นักเรียนบางคนจะสับสนกับตัวส่วนของจำนวน เช่น  $4 \times \frac{1}{3}$  นักเรียนบางคนจะไม่ทราบว่าตัวส่วนของ 4 คือจำนวนใด จึงทำให้หาผลคูณไม่ได้

4. มีความสับสนในการดำเนินการ เช่น หาค่าของ  $\frac{1}{3}$  ของ 24 นักเรียนบางคนจะเข้าใจว่าเป็นการหารด้วย 3 ในขณะที่บางคนเข้าใจว่าเป็นการคูณด้วย  $\frac{1}{3}$  หรือบางคนจะเข้าใจว่าหารด้วย  $\frac{1}{3}$  ในกรณีนี้ควรใช้การอธิบายอย่างมีความหมายว่า ต้องการ 1 ใน 3 ของ 24

5. การจัดการเรียนรู้เรื่องโจทย์ปัญหา นักเรียนจะจำคำที่เป็นการดำเนินการ เช่น ของ นักเรียนบางคนมีมโนทัศน์ถ้าเจอคำว่า ของ ในสถานการณ์ นั่นคือการคูณ ซึ่งบางครั้งอาจผิดพลาดและไม่ได้เกิดจากความเข้าใจในสถานการณ์อย่างแท้จริงของนักเรียน

### การหาร

การหารเศษส่วนเป็นหัวข้อสุดท้ายของการดำเนินการเศษส่วนและยังเป็นหัวข้อที่ซับซ้อนและมีกระบวนการที่แตกต่างจากการดำเนินการอื่น ๆ ซึ่งตัวชี้วัดได้กำหนดให้นักเรียนได้เรียนรู้ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 อาจเรียงเนื้อหาได้ดังนี้

- 1) ตัวตั้งเป็นจำนวนนับ ตัวหารเป็นเศษส่วน
- 2) ตัวตั้งเป็นเศษส่วน ตัวหารเป็นจำนวนนับ
- 3) ตัวตั้งและตัวหารเป็นเศษส่วน หรือจำนวนคละ หรือเศษเกิน

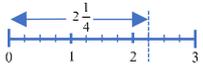
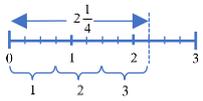
เมื่อครูวางแผนลำดับการจัดการเรียนรู้แล้ว อาจเริ่มจากทบทวนความหมายการหารเพื่อเชื่อมโยงไปยังการหารเศษส่วน เช่น  $20 \div 4$  ความหมายว่า มีอยู่ 20 หน่วย นำมาแบ่งเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 หน่วย ได้กี่กลุ่ม หรือมีอยู่ 20 หน่วย นำมาแบ่งเป็น 4 กลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน ได้กลุ่มละกี่หน่วย แล้วเชื่อมโยงไปยังการหารเศษส่วน และใช้สถานการณ์ไม่ซับซ้อน ใช้แบบจำลองต่าง ๆ ที่ได้นำเสนอมาช่วยในการหาคำตอบ และสถานการณ์ต่าง ๆ ที่นำเสนอกับนักเรียนควรมีความหมาย และเปิดโอกาสให้นักเรียนได้หาคำตอบในรูปแบบตนเอง ตัวอย่างสถานการณ์

สถานการณ์ 6 ธีระมีขนม 3 ชิ้น แบ่งให้เพื่อนคนจะได้  $\frac{1}{2}$  ชิ้น ได้กี่คน

สถานการณ์ 7 ฟ้าใสมีเชือกยาว  $\frac{3}{4}$  เมตร นำมาตัดเป็น 2 ส่วน ส่วนละเท่า ๆ กัน แต่ละส่วนยาวเท่าใด

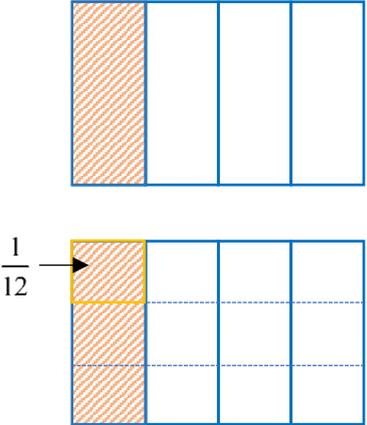
สถานการณ์ 8 ชาวานานำปุ๋ยคอก  $2\frac{1}{4}$  ถัง ไปใส่ต้นไม้ครั้งละ  $\frac{3}{4}$  ถัง ได้ทั้งหมดกี่ครั้ง

จากสถานการณ์ 6 – 8 สามารถเชื่อมโยงกระบวนการหาคำตอบได้ดังนี้

สถานการณ์	ขั้นแรก	ขั้นสอง	คำตอบ
สถานการณ์ 6 แบ่ง 3 ออกเป็น $\frac{1}{2}$ หรือ $3 \div \frac{1}{2}$	มี 3 หน่วย 	นำ 3 หน่วยมาแบ่งครึ่ง 	แบ่ง 3 ออกเป็น $\frac{1}{2}$ ได้ 6 ชิ้น นั่นคือ $3 \div \frac{1}{2} = 6$
สถานการณ์ 7 แบ่ง $\frac{3}{4}$ ออกเป็น 2 ส่วน หรือ $\frac{3}{4} \div 2$	ส่วนที่ระบายสีแสดง $\frac{3}{4}$ 	แบ่ง $\frac{3}{4}$ ออกเป็น 2 ส่วน 	แบ่ง $\frac{3}{4}$ ออกเป็น 2 ส่วน ได้ส่วนละ $\frac{3}{8}$ นั่นคือ $\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}$
สถานการณ์ 8 ลบ $2\frac{1}{4}$ ครั้งละ $\frac{3}{4}$ หรือ $2\frac{1}{4} \div \frac{3}{4}$	วาดรูปแสดง $2\frac{1}{4}$ 	ลบ $2\frac{1}{4}$ ครั้งละ $\frac{3}{4}$ 	ลบ $2\frac{1}{4}$ ครั้งละ $\frac{3}{4}$ ได้ 3 ครั้ง หรือ $2\frac{1}{4} \div \frac{3}{4} = 3$

การพัฒนาการหารเศษส่วนด้วยวิธีการทางเลขคณิต (arithmetic method)

จากมโนทัศน์พื้นฐานเกี่ยวกับการหารซึ่งเป็นการแบ่งกลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน นั้น สามารถขยายความคิดมาใช้กับเศษส่วนได้ เช่น  $\frac{1}{4} \div 3$  สามารถแสดงได้ดังภาพ 5.19



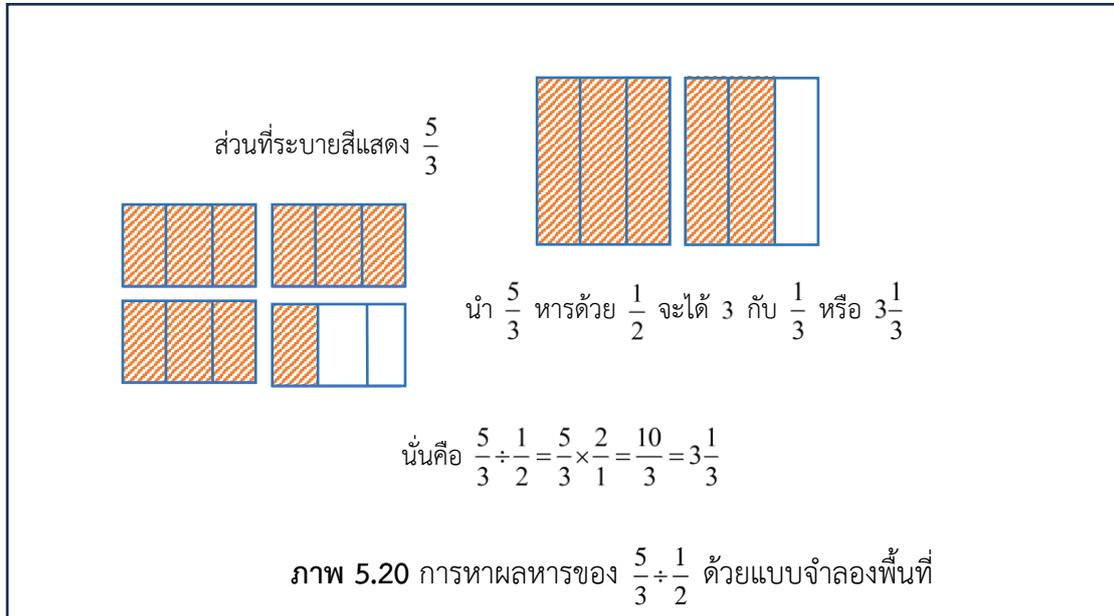
ส่วนที่ระบายสีแสดง  $\frac{1}{4}$  นำ  $\frac{1}{4}$

แบ่งเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน จะได้  $\frac{1}{12}$

นั่นคือ  $\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

ภาพ 5.19 การหาผลหารของ  $\frac{1}{4} \div 3$  ด้วยแบบจำลองพื้นที่

$$\text{หรือ } \frac{5}{3} \div \frac{1}{2}$$



จากภาพ 5.19 และ 5.20 พบว่า การหารเศษส่วน ผลหารจะเท่ากับการนำตัวตั้งไปคูณกับส่วนกลับของตัวหาร จากข้อสรุปนี้ควรอธิบายถึงส่วนกลับของเศษส่วน ซึ่งมีหมายความว่า เศษส่วนใดคูณกับส่วนกลับของเศษส่วนนั้น ผลคูณจะเท่ากับ 1 เช่น  $\frac{2}{3}$  เป็นส่วนกลับของ  $\frac{3}{2}$  เพราะ  $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$  หรือ  $\frac{1}{4}$  เป็นส่วนกลับของ 4 เพราะ  $4 \times \frac{1}{4} = 1$

ข้อควรระวังในการพัฒนามโนทัศน์เกี่ยวกับการหารเศษส่วนมีดังนี้

1. นักเรียนมโนทัศน์ผลหารจะน้อยกว่าตัวตั้งเสมอ เนื่องจากมโนทัศน์เกี่ยวกับการหารเป็นการแบ่งกลุ่ม เมื่อนำตัวตั้งมาแบ่งกลุ่มจึงมีค่าน้อย ในประเด็นนี้ครูอาจยกตัวอย่าง เช่น  $2 \div \frac{1}{3} = 6$  จะพบว่าตั้งตั้งเป็น 2 แต่ผลหารเป็น 6 ซึ่งผลหารมากกว่าตัวตั้ง
2. เมื่อได้ผลหารหรือคำตอบ ควรให้นักเรียนตรวจคำตอบทุกครั้งเพื่อเป็นการยืนยันว่าคำตอบที่ได้ถูกต้องหรือไม่ ในส่วนนี้ครูควรเน้นย้ำและเมื่อนักเรียนตรวจคำตอบแล้วไม่ถูกต้อง จะทำให้นักเรียนทราบถึงความผิดพลาดในการหาคำตอบด้วยตนเอง

## ตัวอย่างงานวิจัยเกี่ยวกับเศษส่วน

การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับเศษส่วน เป็นเนื้อหาที่สำคัญและเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้เรื่องต่าง ๆ ได้มีผู้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับเศษส่วน สามารถสรุปได้ดังนี้

นภัสสร แก้วมีชัย (2563) ได้จัดการเรียนรู้ที่เน้นการปฏิบัติจริงโดยใช้งานทางคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาการคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องเศษส่วนและจำนวนคละ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ผู้วิจัยได้พัฒนาการจัดการเรียนรู้ตามวงจรปฏิบัติการ 3 วงจร ตามขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นการปฏิบัติ 6 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน ขั้นศึกษาวิเคราะห์ ขั้นปฏิบัติขั้นสรุป ขั้นปรับปรุงการเรียนรู้และนำไปใช้ และขั้นการประเมินผล ผลการวิจัยพบว่า การจัดการเรียนรู้ควรเลือกใช้งานที่ส่งเสริมการคิดขั้นสูงที่เน้นการลงมือทำเพื่อให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลาย รวมทั้งควรเลือกสถานการณ์ที่สอดคล้องกับชีวิตประจำวันและบริบทในชุมชนของนักเรียนเพื่อให้นักเรียนสามารถนำประสบการณ์ของตนเองมาใช้ในการทำกิจกรรมได้ และผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ยังพบว่านักเรียนมีพัฒนาการทางการคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ เรียงจากมากไปน้อยได้ดังนี้ ด้านความคิดคล่อง ความคิดยืดหยุ่น และความคิดริเริ่ม

วิกิรานต์ จรทะผา (2562) ได้พัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง เศษส่วน ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบ 4 MAT ผู้วิจัยได้พัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้แบบ 4 MAT จำนวน 7 แผน โดยกิจกรรมการเรียนรู้ในแต่ละแผนจะมี 8 ขั้นตอน ดังนี้ 1) ขั้นสร้างประสบการณ์ 2) ขั้นวิเคราะห์ประสบการณ์ 3) ขั้นบูรณาการสังเกตไปสู่ความคิดรวบยอด 4) ขั้นพัฒนาทฤษฎีและความคิดรวบยอด 5) ขั้นปฏิบัติตามความคิดรวบยอด 6) ขั้นปรับแต่งเป็นแนวคิดของตนเอง 7) ขั้นวิเคราะห์เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ และ 8) ขั้นแลกเปลี่ยนความรู้ของตนเองกับผู้อื่น จากการพัฒนากิจกรรมดังกล่าวพบว่า นักเรียนมีความสุข สนุกสนาน มีความกระตือรือร้น มีความรับผิดชอบ รู้จักวางแผนการทำงาน รับผิดชอบในการทำงานกลุ่ม ยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น มีความรักสามัคคีในหมู่คณะ ตลอดจนได้แลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน นักเรียนมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมอย่างทั่วถึง มีโอกาสได้แสดงความคิดเห็นอภิปรายร่วมกับเพื่อน ได้ศึกษาค้นคว้า และลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง รู้จักคิดวิเคราะห์ คิดไตร่ตรอง หาเหตุผลและสามารถรวบรวมความรู้มาสรุปเป็นความคิดรวบยอดได้ อีกทั้งยังได้พัฒนาผลงานอย่างสร้างสรรค์ และภาคภูมิใจในผลงานที่สร้างขึ้น ได้ฝึกทักษะการสื่อสารและการนำเสนอ ส่งเสริมให้นักเรียนมีความเชื่อมั่น กล้าแสดงออก กล้าคิด และกล้าทำ อีกทั้งยังพบว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนด และมีนักเรียนผ่านเกณฑ์เฉลี่ยร้อยละ 80 สูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

ศศิพร ศิริราษฎร์ตระกูล และคณะ (2562) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ทักษะ การแก้ปัญหาและแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วน โดยการจัดการเรียนรู้ ที่บูรณาการแนวคิด CCR สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ผู้วิจัยได้พัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ 14 แผน ตามแนวการจัดการเรียนรู้ที่บูรณาการแนวคิด CCR โดยการจัดการเรียนรู้ที่บูรณาการ แนวคิด CCR เป็น การจัดการเรียนรู้ที่บูรณาการจิตตปัญญา (Contemplative Education) การสอน แนะหรือการชี้แนะ (Coaching) และการเรียนการสอนที่ใช้วิจัยเป็นฐาน (Researching base Learning) ซึ่งเป็นกระบวนการสอนที่เน้นให้นักเรียนได้เรียนรู้จากการปฏิบัติจริงได้ลงมือหาคำตอบ ด้วยตนเอง เพื่อให้เกิดกระบวนการคิด และการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ โดยครูเป็นเพียงผู้ชี้แนะให้นักเรียน ได้พัฒนาเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมได้ตามเป้าหมายที่กำหนดไว้ นอกจากนี้นักเรียนยังได้เรียนรู้ การพัฒนาจิตใจ การรู้จักตนเอง เกิดความรัก ความเมตตาต่อเพื่อนมนุษย์ เกิดจิตสำนึกต่อส่วนรวม อันนำไปสู่การอยู่ร่วมกันในสังคมอย่างมีความสุข มี 5 ขั้นตอนดังนี้ 1) เตรียมความพร้อม เป็นการที่ เด็กมีพัฒนาการทางด้านต่าง ๆ ทั้งทางร่างกาย อารมณ์ จิตใจ สังคม และสติปัญญา เพียงพอที่จะรับรู้ สิ่งต่างๆ ได้โดยไม่มีสิ่งใดเป็นอุปสรรค ก่อให้เกิดความพึงพอใจในการกระทำนั้น ๆ โดยใช้กระบวนการ จิตตปัญญาศึกษา เช่น การฟังอย่างลึกซึ้ง การสะท้อนการเรียนรู้ 2) แสวงหาความรู้ เป็นการใช้ คำถามที่กระตุ้นความคิดของนักเรียนให้อยากหาคำตอบ อยากแก้ปัญหา และอยากคิดต่อ ทำให้นักเรียนเกิดแนวความคิดความเข้าใจที่ถูกต้องและกว้างขวางยิ่งขึ้นเพราะนักเรียนจะเกิดทักษะซึ่งเป็น คำถามที่สอดคล้องกับแนวคิด RBL ในการค้นคว้าสิ่งที่ต้องการจากแหล่งเรียนรู้ต่าง ๆ เพื่อให้ทราบ คำตอบและสามารถเปรียบเทียบคำตอบที่ได้มาว่าควรเชื่อถือหรือไม่ 3) เชื่อมโยงสู่การปฏิบัติ เป็นการ ให้ปฏิบัติจริงเป็นวิธีการวัดผลที่เหมาะสมสำหรับการวัดพฤติกรรมที่เป็นทักษะภาคปฏิบัติ เป็นการ ทดสอบเพื่อพิจารณาความสามารถในการทำงานได้ตามจุดมุ่งหมาย การให้การปฏิบัติจริงเป็นการวัด ความสามารถที่เกี่ยวข้องกับกิจกรรมทั้ง 3 ด้าน คือพุทธิพิสัย จิตพิสัย และทักษะพิสัย 4) ประเมิน แลกเปลี่ยนเรียนรู้ เป็นกระบวนการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ที่เกิดขึ้นโดยที่นักเรียนได้ออกมานำเสนอวิธีคิด วิธีแก้ปัญหา ซึ่งวิธีการดังกล่าวนี้นักเรียนแต่ละคนอาจจะนำเสนอในรูปแบบเดียวกัน หรือแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับความรู้หรือมวลประสบการณ์ของผู้เรียนเอง และมีการอภิปรายร่วมกัน และ 5) สะท้อน การเรียนรู้สู่การพัฒนา เป็นกระบวนการคิดไตร่ตรองทบทวน (Reflective Thinking) โดยการเขียน สรุปความรู้หลังจากที่ได้เรียนรู้ไว้เป็นองค์ความรู้ของตนเอง

## สรุป

เศษส่วนเป็นมโนทัศน์ที่จะมุ่งเน้นการศึกษาเกี่ยวกับการนำสิ่งของหรือสิ่ง ๆ หนึ่งมาแบ่ง แต่ละส่วน ต้องมีขนาดเท่ากัน การแบ่งนี้สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ชนิดหนึ่ง นั่นคือ เศษส่วน โดยมี

มโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วน

การศึกษาเศษส่วนชนิดต่าง ๆ เช่น เศษส่วนที่น้อยกว่า 1 หรือมากกว่า 1 เศษเกิน หรือจำนวนคละ จากตัวชี้วัดได้กำหนดให้นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับเศษส่วน โดยเริ่มต้นที่ระดับประถมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งเป็นมโนทัศน์เกี่ยวกับเศษส่วนไม่เกิน 1 ซึ่งสามารถพัฒนาความเข้าใจโดยใช้แบบจำลองพื้นแบบจำลองความยาว หรือแบบจำลองกลุ่ม การเปรียบเทียบ เรียงลำดับ การบวกและการลบที่มีตัวส่วนเท่ากัน ระดับประถมศึกษาปีที่ 4 จะขยายมโนทัศน์เรื่องเศษเกิน จำนวนคละ และการดำเนินการบวกและการลบ เมื่อตัวส่วนของเศษส่วนตัวหนึ่งเป็นพหุคูณของอีกตัวหนึ่ง ระดับประถมศึกษาปีที่ 5 จะเน้นไปยังการสร้างมโนทัศน์เกี่ยวกับการคูณและการหารเศษส่วน ในขณะที่ระดับประถมศึกษาปีที่ 6 จำเป็นการนำความเข้าใจเกี่ยวกับ ค.ร.น. มาเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้นักเรียนสามารถทำตัวส่วนให้เท่ากัน

## บทที่ 6

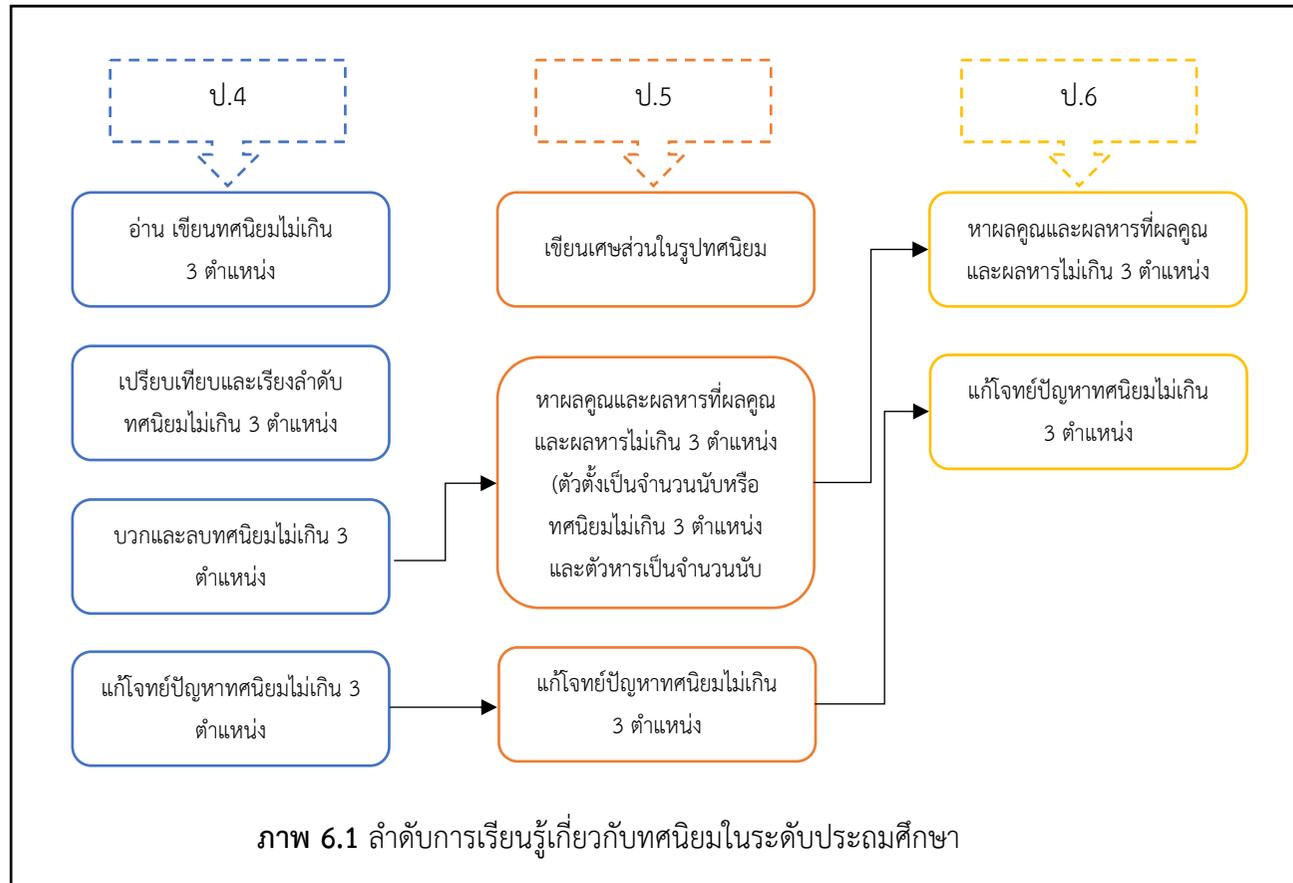
มโนทัศน์เกี่ยวกับทศนิยมและร้อยละ

ในชีวิตจริงนักเรียนอาจพบเจอสัญลักษณ์ต่าง ๆ ที่แสดงถึงปริมาณ ความยาว ราคาหรือค่าทางสถิติที่มีการนำจุดมาใช้ เช่น igitสูง 152.4 เซนติเมตร งบรายรายากิโลกรัมละ 125.75 บาท หรือวินิจมีผลการเรียนเฉลี่ย 3.81 จำนวนเหล่านี้เรียกว่า ทศนิยม (decimal) ซึ่งเป็นคำใหม่ทีนักเรียนจะได้เรียนรู้ในระดัประถมศึกษาปีที่ 4 โดยทศนิยมจะมี . เป็นจุดทศนิยม ตัวเลขหน้าจุดทศนิยมแสดงจำนวนนับหรือศูนย์ ตัวเลขหลังจุดทศนิยมแสดงจำนวนทีน้อยกว่า 1 ซึ่งทศนิยมสามารถแบ่งได้เป็นหลายประเภท แต่ในการจัดการเรียนรู้อะดัประถมศึกษาจะมุ่งเน้นศึกษาทศนิยมเข้าศูนย์ หรือบางครั้งจะเรียกว่าทศนิยมรู้จบ ทศนิยมเข้าศูนย์เป็นทศนิยมทีมี 0 อยู่หลังจุดทศนิยมเข้ากันไปเรื่อย ๆ อย่างไม่มีทีสิ้นสุด เช่น  $0.25 = 0.25000\dots$

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ได้กำหนดมาตรฐานและตัวชี้วัดเกี่ยวกับทศนิยมไว้ในสาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวน ระบบจำนวน การดำเนินการของจำนวน ผลทีเกิดขึ้นจากการดำเนินการ สมบัติของการดำเนินการ และนำไปใช้

ระดับชั้น	ตัวชี้วัด
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4	<ol style="list-style-type: none"> <li>อ่านและเขียนทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง แสดงปริมาณของสิ่งต่าง ๆ และแสดงสิ่งต่าง ๆ ตามทศนิยมทีกำหนด</li> <li>เปรียบเทียบและเรียงลำดับทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่งจากสถานการณ์ต่าง ๆ</li> <li>หาผลบวก ผลลบของทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง</li> <li>แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวก การลบ 2 ขั้นตอนของทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง</li> </ol>
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5	<ol style="list-style-type: none"> <li>เขียนเศษส่วนทีมีส่วนเป็นตัวประกอบของ 10 หรือ 100 หรือ 1,000 ในรูปทศนิยม</li> <li>หาผลคูณของทศนิยมทีผลคูณเป็นทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง</li> <li>หาผลหารทีตัวตั้งเป็นจำนวนนับหรือทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง และตัวหารเป็นจำนวนนับ ผลหารเป็นทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง</li> <li>แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวก การลบ การคูณ การหารทศนิยม 2 ขั้นตอน</li> </ol>
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6	<ol style="list-style-type: none"> <li>หาผลหารของทศนิยมทีตัวหารและผลหารเป็นทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง</li> <li>แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวก การลบ การคูณ การหารทศนิยม 3 ขั้นตอน</li> </ol>

เมื่อนำตัวชี้วัดทีกำหนดมาวิเคราะห์ลำดับการเรียนรู้เกี่ยวกับทศนิยมได้ดังภาพ 6.1

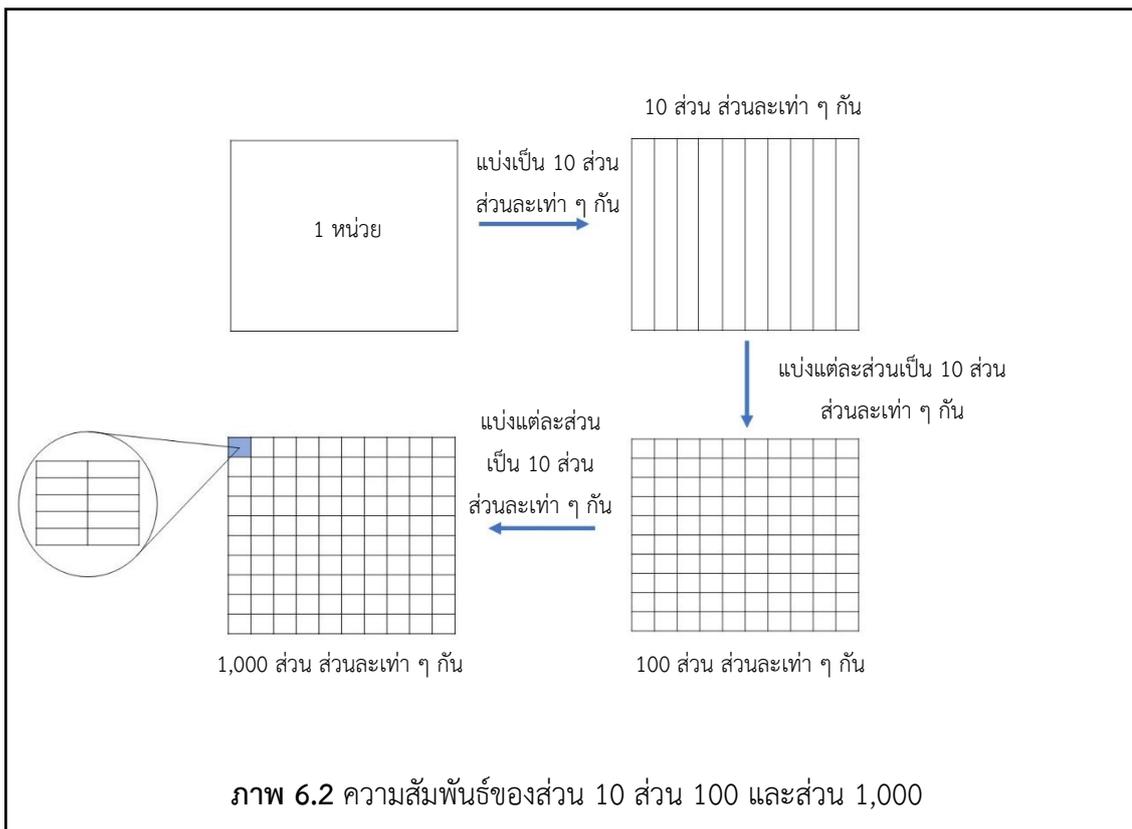


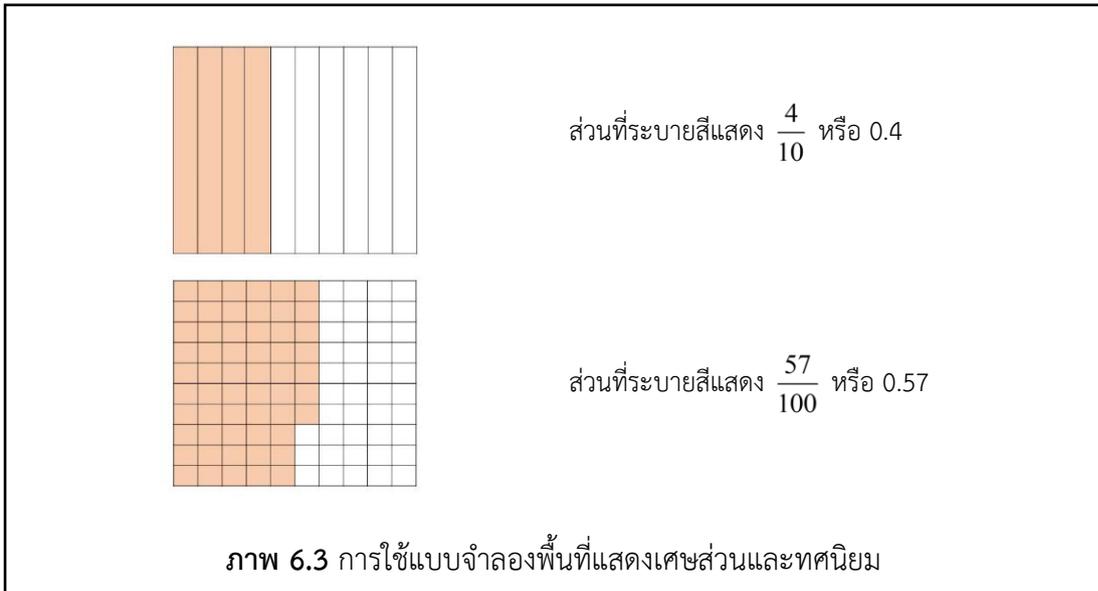
มโนทัศน์เกี่ยวกับทศนิยมและร้อยละ

## การพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับทศนิยม

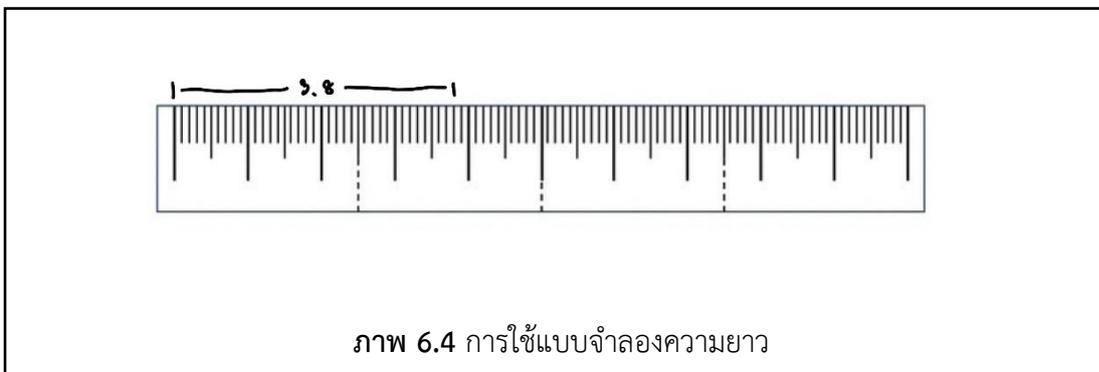
การอธิบายแนวคิดเกี่ยวกับทศนิยมจะนิยมใช้แบบจำลอง 2 ประเภท ได้แก่ แบบจำลองพื้นที่ กับแบบจำลองความยาว โดยแต่ละแบบจำลองมีรายละเอียดดังนี้

1. แบบจำลองพื้นที่ เป็นสื่อการสอนที่นิยมใช้ในการอธิบายความเข้าใจเกี่ยวกับทศนิยม โดยเป็นการนำสี่เหลี่ยมมุมฉากมาแบ่งเป็น 10 ส่วน ส่วนละ ๆ กัน แล้วนำแต่ละส่วนใน 10 ส่วนมาแบ่งเป็น 10 ส่วนที่เท่า ๆ กัน จะได้ 100 ส่วนที่เท่า ๆ กัน และนำแต่ละส่วนของ 100 ส่วน มาแบ่งเป็น 10 ส่วนที่เท่า ๆ กัน จะได้ 1,000 ส่วน ที่เท่า ๆ กัน (ภาพ 6.2) การสร้างความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทศนิยมนิยมให้นักเรียนระบายใส่ส่วนต่าง ๆ ที่แบ่งเป็น 10 ส่วน และ 100 ส่วน เพื่อแสดงทศนิยม 1 ตำแหน่ง และ 2 ตำแหน่ง ตามลำดับ (ภาพ 6.3) ในขณะที่การใช้แบบจำลองพื้นที่อธิบายทศนิยม 3 ตำแหน่งนั้นทำได้ยาก จึงอาจต้องใช้ความเข้าใจเกี่ยวกับเศษส่วนที่ตัวส่วนเป็น 1,000



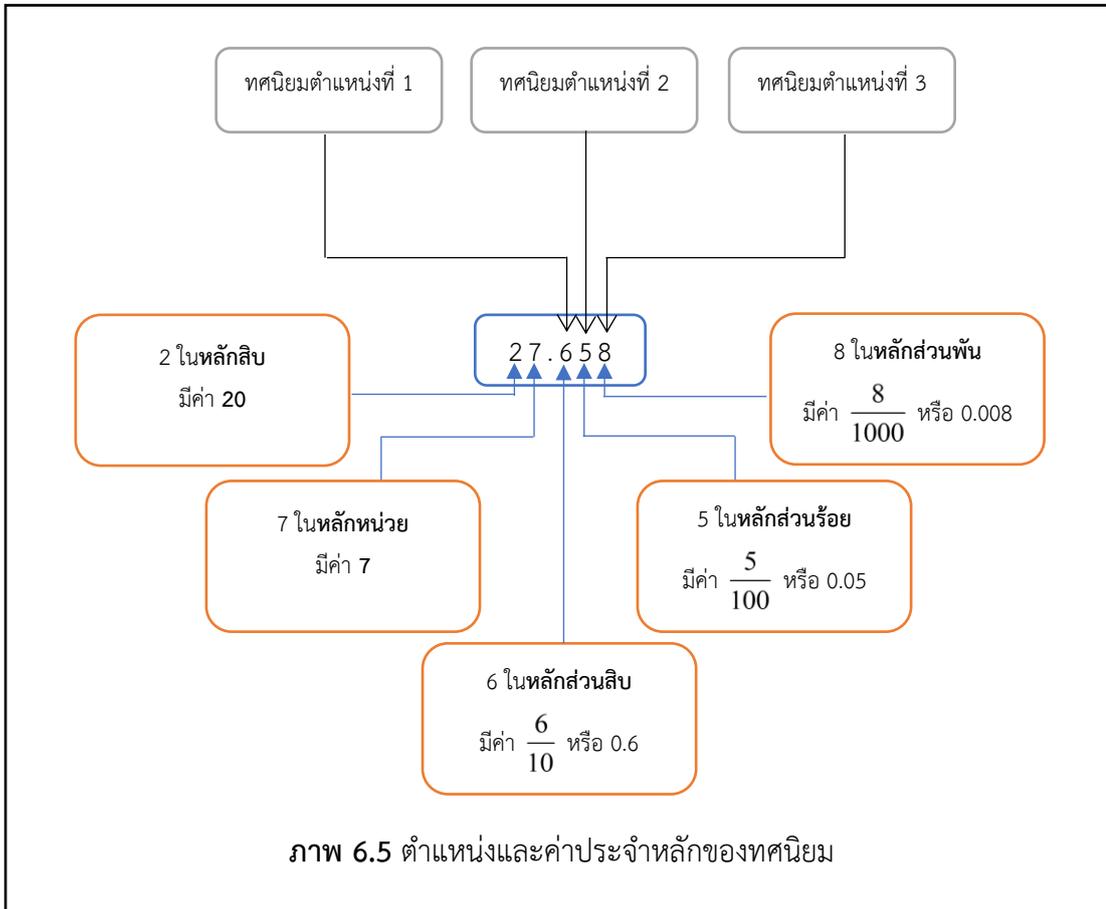


2. แบบจำลองความยาวเป็นการอธิบายทศนิยมด้วยไม้บรรทัดที่มีความยาวเป็นเซนติเมตรหรือเมตร โดยเชื่อมโยงกับหน่วยการวัดความยาว 10 มิลลิเมตร เท่ากับ 1 เซนติเมตร หรือ 100 เซนติเมตร เท่ากับ 1 เมตร (ภาพ 6.4)



สำหรับการอ่านทศนิยมสามารถอ่านได้ดังนี้ ตัวเลขที่อยู่หน้าจุดทศนิยมอ่านเช่นเดียวกับจำนวนนับหรือศูนย์ ตัวเลขหลังจุดทศนิยมอ่านเรียงตัว เช่น 0.4 อ่านว่า ศูนย์จุดสี่ หรือ 0.57 อ่านว่า ศูนย์จุดห้าเจ็ด หรือ 125.039 อ่านว่า หนึ่งร้อยยี่สิบห้าจุดศูนย์สามเก้า จากมโนทัศน์เกี่ยวกับทศนิยมพบว่าทศนิยมเป็นจำนวนชนิดหนึ่ง ดังนั้นแต่ละหลักจะมีค่าประจำหลัก และสามารถเขียนในรูปกระจายได้เช่นเดียวกับจำนวนนับ โดยค่าประจำหลักของหลักที่อยู่ทางซ้ายเป็น 10 เท่าของค่าประจำหลักของหลักที่อยู่ติดกันทางขวา เช่น 27.658 เป็นทศนิยม 3 ตำแหน่ง ซึ่ง 27.658 คือ 2 สิบ กับ 7

หน่วย กับ 6 ส่วนสิบ กับ 5 ส่วนร้อย กับ 8 ส่วนพัน (ภาพ 6.5) สามารถเขียนในรูปกระจายได้  $20 + 7 + 0.6 + 0.05 + 0.008$



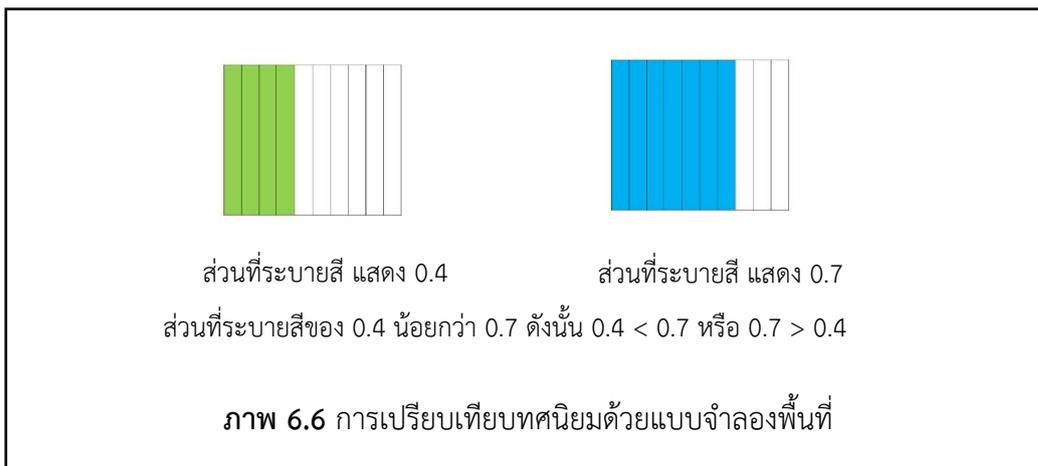
ทศนิยมเป็นมโนทัศน์ที่ต้องอาศัยพื้นฐานจากเศษส่วน มีการขยายแนวคิดเกี่ยวกับตัวส่วนเป็น 10 100 หรือ 1,000 ดังนั้นการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับทศนิยมนักเรียนต้องมีมโนทัศน์เศษส่วนก่อน มีการระบุในตัวชี้วัดให้นักเรียนสามารถเขียนเศษส่วนที่มีตัวส่วนเป็นตัวประกอบของ 10 หรือ 100 หรือ 1,000 ในรูปทศนิยม จากงานวิจัยของ Kloosterman (2010) ที่ศึกษาการเขียนเศษส่วนในรูปทศนิยม มีนักเรียนมากกว่า 30% ไม่สามารถเขียน 0.029 ในรูปเศษส่วนได้ ขณะที่ Shaughnessy (2009) พบว่า นักเรียนมากกว่า 46% ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ไม่สามารถเขียน  $\frac{3}{5}$  เป็นทศนิยมได้ จากการศึกษายังพบอีกว่านักเรียนเขียน  $\frac{3}{5}$  ได้เป็น 3.5 0.35 หรือ 0.3 และนักเรียนมากกว่า 25% ไม่สามารถเขียน  $\frac{3}{10}$  ในรูปทศนิยมได้ และเมื่อให้นักเรียนเขียนเศษส่วนเป็นทศนิยม นักเรียนก็ไม่สามารถเขียนได้เช่นเดียวกัน เช่น เขียน 4.5 ในรูปเศษส่วนได้  $\frac{4}{5}$  จากการศึกษาได้แนะนำ

มโนทัศน์เกี่ยวกับทศนิยมและร้อยละ

ให้ครูใช้แบบจำลองพื้นที่ ไม่ควรเร่งรีบข้ามไปยังการคิดที่เป็นนามธรรม และบางครั้งควรให้นักเรียนเปลี่ยนเศษส่วนให้อยู่ในรูปที่ตัวส่วนเป็น 10 100 หรือ 1,000

### การเปรียบเทียบและเรียงลำดับทศนิยม

เนื่องจากทศนิยมเป็นจำนวนชนิดหนึ่ง ดังนั้นการเปรียบเทียบทศนิยมทำได้เช่นเดียวกับการเปรียบเทียบจำนวน นั่นคือการพิจารณาค่าในแต่ละหลัก โดยครูอาจใช้แบบจำลองพื้นที่ (ภาพ 6.6) หรือแบบจำลองความยาวเพื่อพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับการเปรียบเทียบทศนิยมก่อน แล้วจึงสรุปเป็นนามธรรมที่ว่า ให้เปรียบเทียบทีละหลักเช่นเดียวกับการเปรียบเทียบจำนวนนับ โดยเปรียบเทียบจำนวนหน้าจุดทศนิยมก่อน ถ้าจำนวนหน้าจุดทศนิยมเท่ากัน ให้เปรียบเทียบจำนวนหลังจุดทศนิยมในหลักเดียวกัน โดยเริ่มจากหลักส่วนสิบ ถ้าหลักส่วนสิบเท่ากัน ให้เปรียบเทียบในหลักส่วนร้อยและหลักส่วนพัน ตามลำดับ จำนวนที่มีค่าของเลขโดดมากกว่า จำนวนนั้นจะมากกว่า



มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานทศนิยมมีดังนี้

1. นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับทศนิยม เช่น 2.03 นักเรียนคิดว่า 0.03 เท่านั้นที่เป็นทศนิยม 2 ที่อยู่หน้าจุดทศนิยมไม่เป็นทศนิยม
2. นักเรียนมีความสับสนกับคำศัพท์ เช่น ทศนิยมสามตำแหน่ง กับ ทศนิยมตำแหน่งที่ 3
3. นักเรียนมีมโนทัศน์คลาดเคลื่อนเรื่องจำนวนตำแหน่งของทศนิยม โดยมีมโนทัศน์ว่าจำนวนตำแหน่งทศนิยมมากจะมีค่ามาก เช่น 0.245 มากกว่า 0.79 เพราะ 0.245 เป็นทศนิยมสามตำแหน่ง ในขณะที่ 0.79 เป็นทศนิยมสองตำแหน่ง ดังนั้น 0.245 จึงมากกว่า 0.79

มโนทัศน์เกี่ยวกับทศนิยมและร้อยละ

4. จากสื่อสารที่ผิดพลาดของครู เช่น ครูนิยมสื่อสาร 0 ไม่มีความหมาย ทำให้บางครั้งนักเรียนเมื่อนักเรียนต้องการเปรียบเทียบทศนิยมจึงมีการผิดพลาด เช่น 0.058 กับ 0.078 นักเรียนคิดว่า 0 ไม่มีความหมาย ดังนั้น  $0.058 = 0.58$  และ  $0.078 = 0.78$

5. นักเรียนมีมโนทัศน์ว่าทศนิยมเป็นจำนวนที่น้อยกว่า 0 เช่น เปรียบ 0 กับ 0.12 นักเรียนจะตอบว่า 0 มากกว่า 0.12

6. นักเรียนมีมโนทัศน์ในการเขียนทศนิยมในรูปเศษส่วนที่คลาดเคลื่อน เช่น เปรียบเทียบ 0.4 กับ 0.6 นักเรียนเขียน 0.4 ในรูปเศษส่วนได้  $\frac{1}{4}$  และเขียน 0.6 ในรูปเศษส่วนได้  $\frac{1}{6}$  ดังนั้นจึงตอบว่า 0.4 มากกว่า 0.6

จากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนนี้จะพบว่า ส่วนใหญ่เกิดจากนักเรียนไม่เข้าใจเกี่ยวกับค่าประจำหลักของทศนิยม ดังนั้นในการจัดการเรียนรู้เรื่องค่าประจำหลักของทศนิยม ครูควรมีความระมัดระวัง และตรวจสอบความเข้าใจเรื่องค่าประจำหลักของนักเรียนตลอดเวลา

### การดำเนินการทศนิยม

จากมโนทัศน์ทศนิยมเป็นจำนวนชนิดหนึ่ง ดังนั้นการดำเนินการทศนิยมก็เหมือนกับจำนวนนับ นั่นคือมีการบวก ลบ คูณ และหาร แต่อย่างไรก็ตามการดำเนินการของทศนิยมมีความซับซ้อน และการจัดการเรียนรู้จะแตกต่างไปจากจำนวนนับในบางประเด็น นอกจากนี้สิ่งที่ครูควรสอดแทรกในการดำเนินการทุกครั้งคือการประมาณคำตอบเช่นเดียวกับการดำเนินการของจำนวนนับ เพราะการประมาณคำตอบจะช่วยฝึกกระบวนการคิดและการตรวจสอบคำตอบ

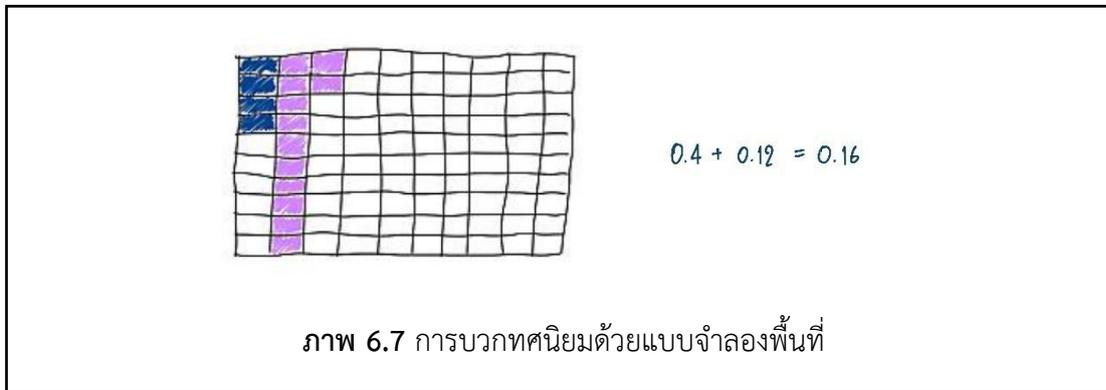
ตัวชี้วัดของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ได้กำหนดการดำเนินการทศนิยมดังนี้

การบวกและการลบ เป็นการดำเนินการที่นักเรียนจะได้เรียนรู้ในระดับประถมศึกษาปีที่ 4 โดยเป็นการบวกและลบทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง

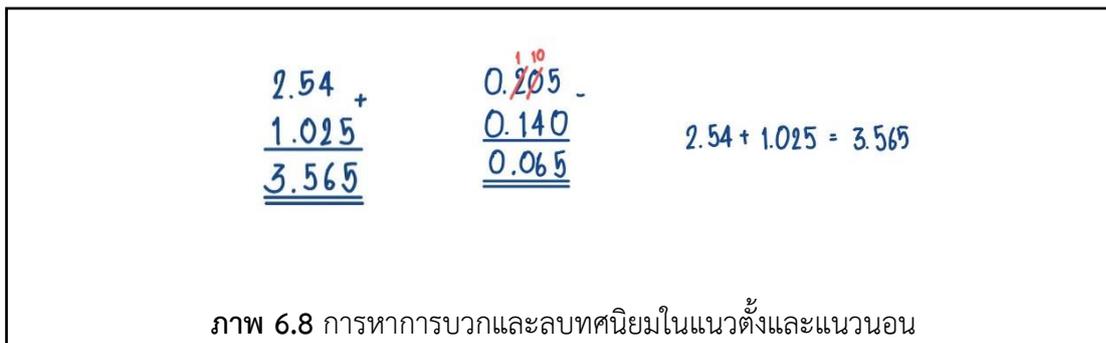
การคูณและการหาร เป็นการดำเนินการที่นักเรียนจะได้เรียนรู้ในระดับประถมศึกษาปีที่ 5 สำหรับการหารนั้นจะเป็นการหารที่ตัวตั้งเป็นจำนวนนับหรือทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง ตัวหารเป็นจำนวนนับ ผลหารเป็นทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง ส่วนการหารที่ตัวตั้งเป็นทศนิยมและตัวหารเป็นทศนิยมจะเรียนรู้ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6

### การบวกและการลบ

การบวกและการลบทศนิยมสามารถจัดการเรียนรู้ได้ง่ายจากแบบจำลองพื้นที่ ซึ่งจะช่วยให้ นักเรียนมีมโนทัศน์ที่ชัดเจน (ภาพ 6.7) และเมื่อนักเรียนมีความเข้าใจ ครูอาจใช้การเชื่อมโยงการบวก และการลบจากจำนวนนับ จนได้ข้อสรุปดังนี้ การบวกหรือการลบให้นำจำนวนในหลักเดียวกับมาบวก หรือลบกัน ในกรณีบวก ถ้าผลบวกครบสิบหรือมากกว่าสิบให้ทดไปหลักทางซ้ายหนึ่งหลัก ในกรณีลบ ถ้าตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ ให้กระจายตัวตั้งในหลักทางซ้ายมารวมกับหลักนั้นแล้วหาผลลบ โดยครูอาจ นำข้อสรุปมาเขียนแสดงแนวคิดเป็นการบวกแนวตั้ง หรือแนวนอนก็ได้ (ภาพ 6.8) สิ่งที่ครูควรเน้นย้ำ คือการบวกหรือการลบต้องบวกหรือลบในหลักเดียวกันเท่านั้น และครูควรให้นักเรียนบวกหรือลบใน แนวตั้งก่อน เมื่อนักเรียนเข้าใจหลักการหาคำตอบจึงพัฒนาการหาคำตอบในแนวนอน



ภาพ 6.7 การบวกทศนิยมด้วยแบบจำลองพื้นที่



ภาพ 6.8 การหาการบวกและลบทศนิยมในแนวตั้งและแนวนอน

### การคูณ

การคูณ ก่อนการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการคูณทศนิยม ครูควรวางแผนการจัดการ เรียนรู้โดยเริ่มจาก การคูณจำนวนนับด้วยทศนิยม และการคูณทศนิยมด้วยทศนิยม โดยอาจใช้ สถานการณ์ต่าง ๆ เพื่อพัฒนาความเข้าใจดังนี้

การคูณทศนิยมด้วยจำนวนนับ ครูควรเชื่อมโยงและทบทวนความหมายของการคูณ เช่น อธิบายความยาวที่มีความยาวเส้นละ 0.4 เมตร มาต่อกัน 3 เส้น จะมีความยาวเท่าใด จากสถานการณ์นี้สามารถหาคำตอบได้จาก  $3 \times 0.4$  นั่นคือ  $0.4 + 0.4 + 0.4 = 1.2$  หรือ เขียน 0.4 ในรูปเศษส่วน จะได้  $3 \times 0.4 = 3 \times \frac{4}{10} = \frac{12}{10} = 1.2$  การหาคำตอบของการคูณทศนิยมด้วยจำนวนนับจึงสามารถใช้ความหมายของการคูณ หรือการเขียนทศนิยมในรูปเศษส่วนแล้วจึงหาผลคูณ สำหรับการคูณทศนิยมด้วยจำนวนนับนั้นสิ่งที่ครูควรระวังคือจำนวนนับต้องไม่มากเกินไป เพราะอาจทำให้นักเรียนบวกทศนิยมผิดพลาด

การคูณทศนิยมด้วยทศนิยม ครูอาจนำความรู้การเขียนทศนิยมเป็นเศษมาช่วยในการหาผลคูณ เช่น แม่ซื้อแตงโม 3.7 กิโลกรัม ราคา กิโลกรัมละ 21.75 บาท แม่ต้องจ่ายเงินเท่าใด จากสถานการณ์สามารถหาคำตอบได้จาก  $3.7 \times 21.75$  ซึ่งเป็นการคูณทศนิยมด้วยทศนิยม วิธีการหาผลคูณที่ครูควรอธิบายคือการนำทศนิยมมาเป็นในรูปเศษส่วน แล้วจึงนำเศษส่วนมาคูณกัน แต่อย่างไรก็ตามเทคนิคนิยมใช้กันมากที่สุดนั่นคือการนำ  $37 \times 2,175$  เมื่อได้ผลคูณจึงไปพิจารณาว่าผลคูณที่ได้มาจากทศนิยมกี่ตำแหน่ง แล้วนำจำนวนทศนิยมเหล่านี้ไปบวกกัน แล้วได้เป็นคำตอบ (ภาพ 6.9)

$3.7 \times 21.75 = \frac{37}{10} \times \frac{2175}{100}$	$3.7 \times 21.75$ $\begin{array}{r} 2175 \\ \times 37 \\ \hline 15225 \\ 65050 \\ \hline 80275 \end{array}$
$= \frac{80275}{1000}$	$\text{ดังนั้น } 3.7 \times 21.75 = 80.275$
$= 80.275$	

**ภาพ 6.9** การหาผลคูณของ  $3.7 \times 21.75$

### การหาร

การหารเป็นการดำเนินการที่ค่อนข้างซับซ้อนและมีหลายขั้นตอน ทำให้นักเรียนสับสนและผิดพลาดได้ง่าย สำหรับการดำเนินการนี้ครูอาจใช้สถานการณ์ดังนี้ ชายมีเชือกยาว 1.25 เมตร นำมาตัดเป็น 5 ส่วน แต่ละส่วนยาวเท่าใด จากสถานการณ์สามารถหาคำตอบได้จาก  $1.25 \div 5$  โดยเริ่มจากการเขียน 1.25 ในรูปเศษส่วนได้  $\frac{125}{100}$  จะได้  $1.25 \div 5 = \frac{125}{100} \div 5 = \frac{125}{100} \times \frac{1}{5} = \frac{25}{100}$  ดังนั้น เชือกแต่ละส่วนยาว 0.25 เมตร ซึ่งวิธีการนี้จะสามารถหาผลหารได้ทุกกรณี อย่างไรก็ตามสำหรับระดับ

มโนทัศน์เกี่ยวกับทศนิยมและร้อยละ

ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ได้กำหนดให้ตัวหารเป็นทศนิยมนั้น ครูอาจนำเสนอโดยการเขียนทศนิยมเป็นเศษส่วน แล้วจึงหาผลหาร หรือการเปลี่ยนตัวหารให้เป็นจำนวนนับด้วยการคูณจำนวนนับทั้งตัวตั้งและตัวหาร แล้วจึงหาผลหาร เช่น  $0.27 \div 0.3$  นั่นคือการทำ 0.3 ให้เป็น 3 โดยการคูณด้วย 10 จะได้  $(0.27 \times 10) \div (0.3 \times 10) = 2.7 \div 3$  แล้วใช้วิธีการหารทศนิยมด้วยจำนวนนับก็จะสามารถหาคำตอบได้ ซึ่งนิยมเรียกวิธีนี้ว่า การเลื่อนจุด (ภาพ 6.10)

$$0.27 \div 0.3 = 2.7 \div 3$$

$$\begin{array}{r} 0.9 \\ 3 \overline{) 2.7} \\ \underline{2.7} \\ 0 \end{array}$$

ดังนั้น  $0.27 \div 0.3 = 0.9$

$$0.112 \div 0.04 = 11.2 \div 4$$

$$\begin{array}{r} 2.8 \\ 4 \overline{) 11.2} \\ \underline{8} \\ 3.2 \\ \underline{3.2} \\ 0 \end{array}$$

ดังนั้น  $0.112 \div 0.04 = 2.8$

ภาพ 6.10 การหาผลหารด้วยการเลื่อนจุด

บางครั้งการหาผลหารนักเรียนจะใช้วิธีหารยาว สิ่งที่มีผิดพลาดและครุควรให้นักเรียนตระหนักคือการเขียนแนวคิด โดยนักเรียนจะเขียนการสื่อสารที่ผิดพลาดและขาดความเข้าใจอย่างแท้จริง เช่น หาผลหารของ  $0.135 \div 5$  โดยนำ  $5 \times 0.02 = 0.10$  และ  $5 \times 0.007 = 0.035$  นักเรียนเขียนเป็น 10 และ 35 ตามลำดับ (ภาพ 6.11) ซึ่งเป็นมโนทัศน์ที่ผิดพลาด ครุควรให้นักเรียนอธิบายแนวคิด เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน

$$0.135 \div 5$$

$$\begin{array}{r} 0.027 \\ 5 \overline{) 0.135} \\ \underline{10} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 0 \end{array}$$

ภาพ 6.11 การหาผลหารของ  $0.135 \div 5$

### ร้อยละ

ร้อยละ หรือที่นิยมเรียกอีกอย่างว่า เปอร์เซนต์ (percent) เป็นมโนทัศน์ที่ได้กำหนดไว้ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 สารที่ 1 จำนวนและพีชคณิต มาตรฐาน ค 1.1 ซึ่งตัวชี้วัดได้ระบุดังนี้ แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาร้อยละไม่เกิน 2 ขั้นตอน และในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาร้อยละไม่เกิน 2 - 3 ขั้นตอน เมื่อพิจารณาตัวชี้วัดในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่

มโนทัศน์เกี่ยวกับทศนิยมและร้อยละ

5 พบว่าจะเป็นการเรียนรู้โดยเน้นไปยังการอ่าน การเขียนร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ พร้อมทั้งแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับร้อยละไม่เกิน 2 ขั้นตอน ในขณะที่ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เป็นการนำความรู้เรื่องร้อยละไปใช้แก้โจทย์ปัญหา 2 – 3 ขั้นตอน

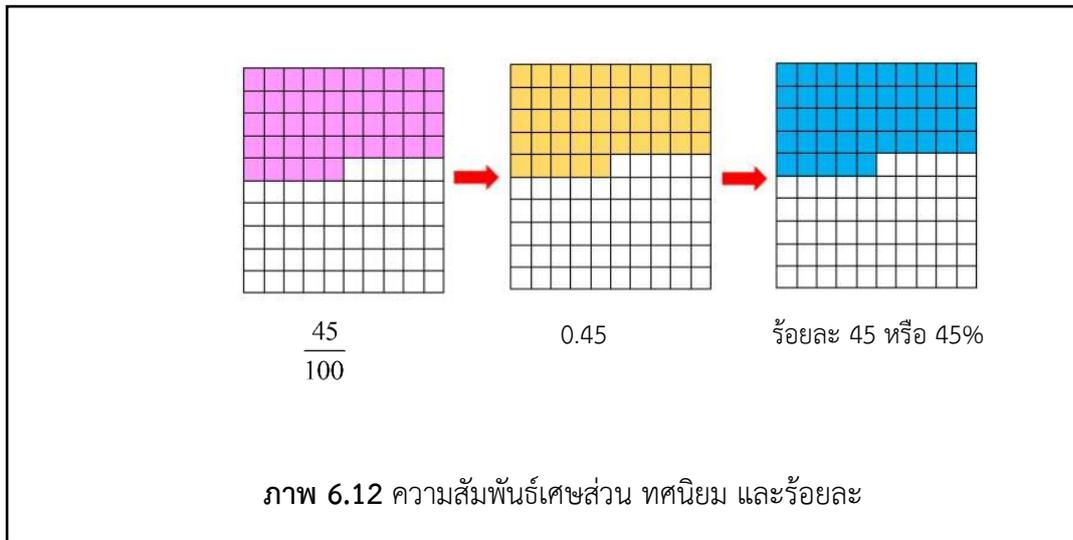
ร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์มีความสัมพันธ์กับเศษส่วนและทศนิยม ซึ่งเศษส่วนที่มีตัวส่วนเป็น 100 จะสามารถเขียนในรูปร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ได้ จากแนวคิดนี้สามารถขยายไปยังการเปรียบเทียบปริมาณหนึ่งกับ 100 ทำให้คำถามเกี่ยวกับร้อยละส่วนใหญ่จึงเป็นการนำปริมาณปริมาณหนึ่งเปรียบเทียบกับ 100 มีค่าเท่าใด หรือ ร้อยละเท่านี้จะมีค่าเท่าใด ซึ่งพบว่าจะมีความสัมพันธ์อยู่สามส่วนดังนี้ .....เป็น.....เปอร์เซ็นต์ของ..... เช่น

สถานการณ์ 1 นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4/2 จำนวน 40 คน ขาดเรียน 15% นักเรียนขาดเรียนกี่คน

สถานการณ์ 2 เด็กชายนิกรอ่านหนังสือได้ 60 หน้า จากทั้งหมด 180 หน้า เด็กชายนิกรอ่านหนังสือคิดเป็นกี่เปอร์เซ็นต์

สถานการณ์ 3 ร้านค้าลดราคา 30% คิดเป็นเงิน 150 บาท เดิมเสียราคากี่บาท

เนื่องจากเปอร์เซ็นต์หรือร้อยละเป็นมโนทัศน์ที่ต้องการเปรียบเทียบกับ 100 ดังนั้นแบบจำลองที่สามารถอธิบายเรื่องนี้ได้ดีจึงเป็นตารางร้อย (ภาพ 6.12) โดยตารางร้อยเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีขนาด  $10 \times 10$  แต่ละช่องรูปสี่เหลี่ยมเล็กจะแสดง 1% ของตาราง และในขณะเดียวกัน แต่ละแถวหรือแต่ละหลักจะแสดง 10% ของตารางด้วยเช่นกัน Zambo (2008) ได้แนะนำการเชื่อมโยงเศษส่วนกับเปอร์เซ็นต์ด้วยการใช้ตาราง  $10 \times 10$  โดยการทำเครื่องหมาย หรือระบายสีพื้นที่  $5 \times 5$  ที่มุมใดมุมหนึ่งของตาราง ซึ่งจะให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงได้ว่า  $\frac{25}{100}$  หรือ  $\frac{1}{4}$  เท่ากับ 25% จากกิจกรรมนี้สามารถพัฒนาความเข้าใจได้อีกว่า  $\frac{1}{8}$  เท่ากับ  $12\frac{1}{2}\%$  นอกจากนี้ในการจัดการเรียนรู้จะมีสัญลักษณ์ใหม่ที่นักเรียนต้องรู้จัก นั่นคือ % ครูควรแนะนำและอธิบายถึงความหมายควบคู่กับสถานการณ์



ข้อเสนอแนะสำหรับการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับร้อยละมีดังนี้

1. นักเรียนมีมโนทัศน์ว่าร้อยละเกิน 100 ไม่ได้ อาจเนื่องมาจากสถานการณ์ที่ครูใช้ในการจัดการเรียนรู้นิยมใช้ร้อยละไม่เกิน 100 ครูจึงควรเพิ่มความหลากหลายให้นักเรียนได้ เช่น สถานการณ์ที่ร้อยละเกิน 100 หรือ ร้อยละที่แสดงด้วยเศษส่วนหรือทศนิยม
2. ครูควรเน้นร้อยละของเศษส่วนที่นักเรียนคุ้นเคยและสัมพันธ์กัน เช่น 3 ใน 4 หรือ 1 ใน 25
3. ครูควรใช้สถานการณ์ที่สามารถหาคำตอบได้จากการวาดภาพหรือแบบจำลองต่าง ๆ เพื่อช่วยพัฒนาความเข้าใจ
4. ครูควรให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบทุกครั้ง และในบางครั้งสามารถตรวจสอบความเข้าใจด้วยการถาม – ตอบ นอกจากนี้ยังสามารถขยายความรู้ หรือเพิ่มเติมความรู้ให้กับนักเรียนได้อีกด้วย เช่น ทำไม่ตอบ 45% หรือ ถ้าอย่างนั้น 60% ของนักเรียนทั้งหมดเท่ากับเท่าใด หรือ 125% นักเรียนคิดว่าสมเหตุสมผลหรือไม่
5. สถานการณ์ที่ใช้ไม่ควรซับซ้อนมากเกินไปเพราะจะทำให้นักเรียนมีทัศนคติที่ไม่ดีต่อการเรียนรู้เกี่ยวกับร้อยละ
6. บางครั้งครูอาจอธิบายมโนทัศน์ที่ทำให้นักเรียนมีคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับร้อยละ เช่น สินค้าชำรุด 5% ครูจะอธิบายความหมาย ถ้ามีสินค้า 100 ชิ้น จะเป็นสินค้าที่ชำรุด 5 ชิ้น จากมโนทัศน์ดังกล่าวทำให้นักเรียนมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเป็น สินค้าทุก ๆ 100 ชิ้น จะมีสินค้าชำรุด 5 ชิ้น ซึ่งสอดคล้องกับผลการประเมิน PISA ในปี 2012 เกี่ยวกับร้อยละที่นักเรียนไทยมีความเข้าใจว่า ถ้า

มโนทัศน์เกี่ยวกับทศนิยมและร้อยละ

โรงงานผลิตเครื่องเล่นวิดีโอเกมที่สามารถผลิตได้ 2,000 เครื่องต่อวัน และชำรุดเฉลี่ยร้อยละ 5 หมายความว่าในแต่ละกลุ่มของเครื่องเล่นวิดีโอที่ผลิตทุก ๆ 100 เครื่อง จะมีเครื่องที่ชำรุด 5 เครื่อง ซึ่งนักเรียนไทยเพียงร้อยละ 11.03 ตอบถูกว่าไม่ใช่ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2557) ครูจึงควรสอดแทรกสถานการณ์จริง และบริบทต่าง ๆ เพื่ออธิบายความเข้าใจในการนำร้อยละไปใช้ในชีวิตจริง

### ตัวอย่างงานวิจัยเกี่ยวกับทศนิยมและร้อยละ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับทศนิยมหรือร้อยละส่วนมากจะเป็นการพัฒนาวัตกรรมการต่าง ๆ เพื่อช่วยให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทศนิยมและร้อยละ สามารถสรุปได้ดังนี้

#### ทศนิยม

อังคณา ทิพย์รุ่งโรจน์ (2566) ได้พัฒนาชุดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract และแนวคิด Model-Eliciting Activities เรื่อง ทศนิยม เพื่อยกระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยได้กำหนดการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) เป็นวิธีการสอนคณิตศาสตร์รูปแบบหนึ่งที่มีมุ่งเน้นให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ผ่านการลงมือทำเป็นรูปธรรมเชื่อมโยงไปยังสิ่งที่เป็นนามธรรม ประกอบไปด้วย ลำดับการสอน 3 ขั้น ซึ่งมีการเชื่อมโยงกันตามลำดับ ได้แก่ ขั้นการสอนเชิงรูปธรรม (Concrete) เป็นการสอนคณิตศาสตร์การใช้วัตถุที่จับต้องได้โดยให้นักเรียนได้มีโอกาสสัมผัสกับวัตถุนั้น ขั้นการสอนเชิงรูปภาพ (Pictorial) เป็นการสอนคณิตศาสตร์ที่ใช้รูปภาพหรือภาพวาดเป็นตัวแทนวัตถุที่จับต้องได้จากขั้นการสอนก่อนหน้า และขั้นการสอนเชิงนามธรรม (Abstract) เป็นการสอนคณิตศาสตร์ซึ่งมีจุดประสงค์เชื่อมโยงความรู้จากขั้นการสอนเชิงรูปภาพนำไปสู่การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ในขณะที่แนวคิด Model-Eliciting Activities การจัดการกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ปัญหาที่เลียนแบบจากสภาพความเป็นจริงที่ส่งเสริมให้นักเรียนนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการสร้างวิธีการในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง โดยครูจัดให้นักเรียนได้มีการวิเคราะห์ ประดิษฐ์ และจัดการกับวิธีการ อีกทั้งยังให้นักเรียนได้ทำการอธิบาย การกล่าวแย้ง การประเมิน และการปรับปรุงแก้ไขวิธีการ โดยมี 4 ชุดกิจกรรม ดังต่อไปนี้ ชุดกิจกรรมที่ 1 การบวกและการลบทศนิยม และโจทย์ปัญหาการบวกและการลบทศนิยม ชุดกิจกรรมที่ 2 การคูณทศนิยมและโจทย์ปัญหาการคูณทศนิยม ชุดกิจกรรมที่ 3 การหารทศนิยมและโจทย์ปัญหาการหารทศนิยม และชุดกิจกรรมที่ 4 การบวก ลบ คูณ หารระคนของทศนิยมและโจทย์ปัญหาการบวก ลบ คูณ หารระคนของทศนิยม โดยชุดกิจกรรมที่ได้สร้างขึ้นมีการ

วิเคราะห์ประสิทธิภาพของชุดกิจกรรมตามเกณฑ์ E1/E2 เท่ากับ 79.30/77.59 และเมื่อนำชุดกิจกรรมไปทดลองใช้พบว่า ผลการวิจัยพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนหลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 คะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนและสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และคะแนนเฉลี่ยระดับความพึงพอใจของนักเรียนมีค่าเท่ากับ 4.25 ซึ่งอยู่ในระดับมากที่สุด

พรทิพย์ ยอดบุตรดี (2565) ได้พัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ทศนิยม โดยใช้รูปแบบการแก้ปัญหาของโพลยาพร้อมกับเทคนิคกลุ่มแข่งขัน (TGT) สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยผู้วิจัยได้พัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดโดยใช้รูปแบบการแก้ปัญหาของโพลยาพร้อมกับเทคนิคกลุ่มแข่งขัน (TGT) จำนวน 15 แผน 15 ชั่วโมง โดยแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนั้นเป็นการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาการแก้โจทย์ปัญหาที่ใช้กระบวนการแก้ปัญหาตามรูปแบบของโพลยาเป็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาร่วมกับเทคนิคกลุ่มแข่งขัน (TGT) ที่ให้นักเรียนได้รวมกลุ่ม เพื่อทำงานร่วมกันและช่วยเหลือซึ่งกันและกัน สมาชิกในแต่ละกลุ่มประกอบด้วยสมาชิกที่มีความสามารถแตกต่างกัน คือ ความสามารถสูง ปานกลาง และต่ำมารวมกลุ่มกันในอัตราส่วน 1:2:1 สมาชิกของกลุ่มจะได้แข่งขันกันในเกม โดยความสำเร็จของกลุ่มจะขึ้นอยู่กับความสามารถของแต่ละบุคคลเป็นสำคัญ ซึ่งขั้นตอนในการจัดกิจกรรมประกอบด้วย ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการตามแผน ขั้นตรวจสอบคำตอบ ขั้นฝึกการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และขั้นการแข่งขันเกม โดยเมื่อนำแผนทั้ง 15 แผนไปจัดการเรียนรู้พบว่า นักเรียนมีค่าเฉลี่ยหลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 นอกจากนี้นักเรียนยังมีความพึงพอใจในระดับมากที่สุดอีกด้วย

จุฑามาศ สุบรรทม และคณะ (2562) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การคูณทศนิยมของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้สื่อสไลด์อิเล็กทรอนิกส์ร่วมกับการใช้ Interactive Notebook โดยผู้วิจัยได้สร้างตามแนวคิดดังกล่าวจำนวน 3 ชุด ใช้เวลา 6 ชั่วโมง แผนการจัดการเรียนรู้สื่อสไลด์อิเล็กทรอนิกส์ร่วมกับการใช้ Interactive Notebook เป็นกระบวนการจัดบันทึกด้วยภาพและภาษาเพื่อให้นักเรียน ๆ รู้จักมองสิ่งต่าง ๆ รอบตัวเองอย่างลึกซึ้ง สามารถสื่อความรู้สึกนึกคิดออกมาผ่านทางภาพและตัวอักษรให้ผู้อื่นได้รับรู้ และมีความสามารถในการอธิบายด้วยเหตุผลผลการวิจัยพบว่า เมื่อจัดการเรียนรู้โดยสื่อสไลด์อิเล็กทรอนิกส์ร่วมกับการใช้ Interactive Notebook นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องการคูณทศนิยมหลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ และสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ลลิตา ทองปรอด (2562) ได้ศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และการสร้างโจทย์ปัญหาโดยใช้โมเดลของลาสเลย์และแมทซินสกี เรื่อง ทศนิยม ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยผู้วิจัยได้พัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของลาสเลย์และแมทซินสกี จำนวน 14 แผน ใช้เวลา 14 ชั่วโมง

ในการวิจัยได้แบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม นั่นคือกลุ่มควบคุมกับกลุ่มทดลอง โดยกลุ่มทดลองจะใช้แผนการจัดการเรียนรู้ตามโมเดลของลาสเลย์และแมทซินสกี โดยแบบการจัดการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของลาสเลย์และแมทซินสกีเป็นการจัดการเรียนรู้ที่ใช้ในการศึกษามโนทัศน์และการสร้างโจทย์ปัญหา เรื่องทศนิยมซึ่งมี 5 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นตอนการผลิตข้อมูล ขั้นตอนจัดกลุ่มข้อมูล ขั้นขยายความประเภทข้อมูล ขั้นการสรุปปิด และขั้นการสร้างปัญหาที่เกี่ยวข้อง ผลการวิจัยพบว่าคะแนนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และคะแนนการสร้างโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีความแปรปรวนเท่ากัน

ธนิต ตะเคียนเกลี้ยง และคณะ (2557) ได้พัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการบวก การลบ การคูณทศนิยม สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ด้วยชุดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค TAI โดยผู้วิจัยได้พัฒนาชุดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค TAI จำนวน 13 ชุด ซึ่งแต่ละชุดกิจกรรมจะเป็นกิจกรรมที่ผสมผสานระหว่างการเรียนแบบร่วมมือ (Cooperrative Learning) และการสอนรายบุคคล (Individualization Instruction) เข้าด้วยกัน โดยให้นักเรียนได้ลงมือทำกิจกรรมในการเรียนได้ด้วยตนเองตามความสามารถของตนและส่งเสริมความร่วมมือภายในกลุ่ม มีการแลกเปลี่ยนประสบการณ์การเรียนรู้และปฏิสัมพันธ์ทางสังคม แล้วนำชุดการเรียนรู้ไปหาคุณภาพแล้วนำไปใช้พบว่า นักเรียนที่เรียนรู้ด้วยชุดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค TAI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และนักเรียนมีความพึงพอใจในระดับมาก

ศักดิ์สิทธิ์ มาประสม (2554) ได้ศึกษาการใช้สื่อการสอนอิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง ทศนิยม สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยผู้วิจัยได้พัฒนาสื่อการสอนอิเล็กทรอนิกส์จำนวน 7 หัวข้อ ได้แก่ การอ่านและการเขียนทศนิยมไม่เกินสามตำแหน่ง หลักและค่าประจำหลักของทศนิยม การเขียนทศนิยมในรูปกระจาย การเปรียบเทียบทศนิยม การเรียงลำดับทศนิยม การเขียนทศนิยมในรูปเศษส่วนและการเขียนเศษส่วนในรูปทศนิยม และการประมาณค่าใกล้เคียงเป็นทศนิยมหนึ่งตำแหน่งและสองตำแหน่ง ผลการศึกษาพบว่าสื่อการสอนอิเล็กทรอนิกส์ที่ผู้วิจัยพัฒนา มีประสิทธิภาพน้อยกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้ นั่นคือ 71.02/71.43 และนักเรียนมีความรู้เพิ่มขึ้นโดยดัชนีประสิทธิผลของสื่อการสอนซึ่งคิดจากคะแนนก่อนเรียนและหลังเรียน เท่ากับ 0.4937 และนักเรียนมีความพึงพอใจในระดับกลาง

### ร้อยละ

กตিকা ดวงลิตี (2564) ได้ศึกษาการพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา เรื่อง ร้อยละ โดยใช้การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดโพลยา ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ผู้วิจัยได้พัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดโพลยา เรื่อง ร้อยละ จำนวน 8 แผน มโนทัศน์เกี่ยวกับทศนิยมและร้อยละ

การจัดการเรียนแต่ละแผนจะประกอบไปด้วย 3 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นนำ ขั้นสอน และขั้นสรุป ในขั้นสอนจะแบ่งเป็น 4 ขั้นตอนย่อย ได้แก่ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นตรวจสอบคำตอบ ใช้เวลาในการจัดการเรียนรู้ 10 ชั่วโมง นำแผนการจัดการเรียนรู้ไปหาคุณภาพและทดลองพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 นอกจากนี้นักเรียนยังมีความพึงพอใจต่อการจัดกิจกรรมการเรียนรู้อยู่มาก

มนัส พรหมณี (2563) ได้ศึกษาการจัดการเรียนรู้แบบ Concrete – Pictorial – Abstract (CPA) ร่วมกับเกมกระดานเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ร้อยละ หรือเปอร์เซ็นต์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ผู้วิจัยได้ศึกษาแนวการจัดการเรียนรู้แบบ CPA ร่วมกับเกม โดยการจัดการเรียนรู้แบบ CPA จะประกอบไปด้วยทั้งหมด 3 ขั้น ได้แก่ ขั้นนำ ขั้นสอน จะมีขั้นย่อยคือ C - P - A ร่วมกับเกมกระดาน และขั้นสรุป โดยนำแนวคิดมาจัดทำเป็นแผนการจัดการเรียนรู้ 3 แผน จำนวน 9 ชั่วโมง ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในระดับมาก เมื่อพิจารณาความสามารถรายด้านพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีความสามารถขั้นทำความเข้าใจปัญหาในระดับมากที่สุด ขั้นการวางแผนแก้ปัญหา ดำเนินการตามแผน และขั้นทบทวนหรือตรวจสอบคำตอบอยู่ในระดับมาก นอกจากนี้จากงานวิจัยยังได้มีแนะนำ ดังนี้ สิ่งที่ควรเน้นในการจัดการเรียนรู้คือครูควรมีคำถามที่คอยกระตุ้นความคิดเพื่อให้นักเรียนหาความสัมพันธ์ของเนื้อหา และใช้คำถามที่ทำให้นักเรียนเห็นเป็นรูปธรรม เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจและทำความเข้าใจกับสิ่งที่เห็นเป็นรูปธรรมนั้นด้วยการทำซ้ำ ๆ หลังจากนั้นครูควรให้นักเรียนได้เขียนออกเป็นภาพเพื่อเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่เห็นเป็นรูปธรรมกับนามธรรม อีกทั้งต้องส่งเสริมให้นักเรียนมีความมั่นใจที่จะนำเสนอความเข้าใจออกมาเป็นภาษาของตนเอง

ยุวดี ศรีสังข์ (2563) ได้พัฒนาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิค KWDL เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาเรื่องร้อยละ สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ผู้วิจัยได้พัฒนาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิค KWDL เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาเรื่องร้อยละ จำนวน 6 ชุด พร้อมทั้งได้พัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้เรื่องร้อยละจำนวน 18 แผน โดยแต่ละแผนจะประกอบไปด้วย 6 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นที่ 1 ขั้นทบทวนความรู้เดิม เป็นการทบทวนความรู้เดิมก่อนที่จะเรียนเนื้อหาใหม่เพื่อให้นักเรียนมีพื้นฐานเพียงพอที่จะเรียนรู้เนื้อหาใหม่ ขั้นที่ 2 ขั้นสอน เป็นการจัดกิจกรรมที่ให้นักเรียนได้ศึกษาใบความรู้จากแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิค KWDL เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาเรื่องร้อยละที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ประกอบกิจกรรมการเรียนรู้ที่มุ่งให้นักเรียนเรียนรู้และเข้าใจเพื่อให้ความคิดรวบยอดในเนื้อหาของบทเรียนที่นำมาจัดไว้ในแผนการจัดการเรียนรู้ ขั้นที่ 3 ขั้นสรุป เป็นการให้นักเรียนสังเกตการปฏิบัติกิจกรรมแล้วสรุป

ความรู้และความคิดรวบยอด เชื่อมโยงนำไปสู่วิธีลัด เพื่อสะดวกในการนำไปใช้ครั้งต่อไป ชั้นที่ 4 ชั้นฝึกทักษะ เป็นการให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะจากแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิค KWDL เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาเรื่องร้อยละที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นหลังจากนักเรียนสรุปหลักการได้แล้ว ชั้นที่ 5 ชั้นการนำไปใช้ เป็นการให้นักเรียนฝึกแก้โจทย์ปัญหาที่ส่งเสริมการนำความรู้ไปใช้ใน ชีวิตประจำวัน โดยใช้เทคนิค KWDL และ ชั้นที่ 6 ชั้นประเมินผล เป็นการตรวจสอบเพื่อวินิจฉัยว่า นักเรียนบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้ที่กำหนดไว้หรือไม่ โดยตรวจสอบจากการทำแบบฝึกทักษะ หรือแบบทดสอบหลังเรียนของแบบฝึกทักษะแต่ละชุด เมื่อนำแผนการจัดการเรียนรู้และแบบฝึกหัด ไปหาคุณภาพ แล้วนำไปทดลองใช้พบว่านักเรียนที่เรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์โดยใช้ เทคนิค KWDL เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาเรื่องร้อยละ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับ .01 นอกจากนี้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้ยังผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และนักเรียนยังมีความพึงพอใจในระดับมากที่สุดอีกด้วย

ตรีชฎา ฉางตา และคณะ (2563) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องโจทย์ ปัญหาร้อยละ โดยใช้กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาพร้อมกับเทคนิค STAD สำหรับ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยผู้วิจัยได้พัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดโพลยาพร้อมกับ เทคนิค STAD จำนวน 8 แผน โดยในแต่ละแผนจะมี 5 ชั้น ดังนี้ ชั้นนำเสนอบทเรียน ชั้นการวางแผน การแก้ปัญหา ชั้นดำเนินการตามแผน (ทำความเข้าใจ วางแผนแก้ปัญหา ดำเนินการตามแผน ตรวจสอบคำตอบ) ชั้นประเมิน และชั้นยกย่องความสำเร็จของนักเรียน เมื่อนำแผนการจัดการเรียนไป ใช้พบว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 และ นักเรียนมีความพึงพอใจในระดับมาก

นันท์นภัส ศรีพรหมทอง และคณะ (2560) ได้การศึกษผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและ ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง “โจทย์ ปัญหาร้อยละ” โดยใช้รูปแบบ SSCS โรงเรียนบ้านหนองตะเภา จังหวัดประจวบคีรีขันธ์ ผู้วิจัยได้ พัฒนาการจัดการเรียนรู้ตามรูปแบบ SSCS โดยมี 4 ขั้นตอน ดังนี้ ชั้นที่ 1 Search: S ชั้นค้นหา เป็นขั้นตอนการค้นหาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหา และการแยกแยะประเด็นของปัญหา การแสวงหา ข้อมูลต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับปัญหา ชั้นที่ 2 Solve: S ชั้นแก้ปัญหา เป็นขั้นตอนการวางแผนและการดำเนินการ แก้ปัญหาด้วยวิธีการต่าง ๆ หรือการหาคำตอบของปัญหาที่เราต้องการ ชั้นที่ 3 Create: C ชั้น สร้างคำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหาเป็นขั้นตอนการนำผลที่ได้มาจัดกระทำเป็นขั้นตอนเพื่อให้เข้าใจต่อ ความเข้าใจ และเพื่อสื่อสารกับคนอื่นได้ ชั้นที่ 4 Share: S ชั้นแลกเปลี่ยนแนวทางในการแก้ปัญหา เป็นขั้นตอนการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับข้อมูลและวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้เวลาในการจัด

การเรียนรู้ 10 ชั่วโมง ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง “โจทย์ปัญหาร้อยละ” โดยใช้รูปแบบ SSCS ผลการวิจัยพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 โดยมีคะแนนเฉลี่ย 16.15 คิดเป็นร้อยละ 64.59 และนักเรียนส่วนใหญ่มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาอยู่ในระดับดีโดยได้คะแนนเฉลี่ย 4.70

### สรุป

ทศนิยมเป็นจำนวนชนิดหนึ่งที่ใช้บอกปริมาณหรือสิ่งต่าง ๆ นักเรียนจะเริ่มต้นเรียนรู้ทศนิยมในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 สำหรับในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จะเป็นการเรียนรู้ทศนิยมเกี่ยวกับการบวก ลบ คูณและหาร โดยเป็นทศนิยมไม่เกิน 3 ตำแหน่ง การจัดการเรียนรู้ทศนิยมต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเศษส่วน สำหรับการจัดการเรียนรู้การบวกและการลบทศนิยมสามารถทำได้เช่นเดียวกับจำนวนนับ โดยนำจำนวนในหลักเดียวกันมาบวกหรือลบกัน ส่วนการคูณนั้นอาจต้องอาศัยความเข้าใจเกี่ยวกับการคูณจำนวนนับในการอธิบายความหมาย หรือการเขียนทศนิยมในรูปเศษส่วน ส่วนการหารสามารถทำได้โดยเขียนทศนิยมในรูปเศษส่วนแล้วจะสามารถหาผลหารได้ ในหัวข้อร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์เป็นมโนทัศน์นักเรียนจะได้เรียนรู้ครั้งแรกในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่เน้นการนำความรู้ไปใช้แก้โจทย์ปัญหาไม่เกิน 2 ขั้นตอน และในระดับประถมศึกษาปีที่ 6 ที่เน้นการนำความรู้ไปใช้แก้โจทย์ปัญหา 2 - 3 ขั้นตอน ร้อยละจะเป็นมโนทัศน์ที่พัฒนาต่อเนื่องจากเศษส่วนและทศนิยม โดยร้อยละมุ่งเน้นศึกษาปริมาณหนึ่งเมื่อต้องการเปรียบเทียบกับ 100

## บทที่ 7

มโนทัศน์เกี่ยวกับการวัดและเรขาคณิต

เรขาคณิต หรือมาจากภาษาอังกฤษคำว่า Geometry ซึ่งมีรากศัพท์มาจากภาษากรีกโบราณจากคำว่า Geo ที่แปลว่า โลก กับ Metria ที่แปลว่า การวัด เมื่อนำมารวมกันจึงมีความหมายว่า การวัดเกี่ยวกับโลก ได้มีการศึกษาเกี่ยวกับเรขาคณิตมาตั้งแต่ยุคกรีกโบราณ และบุคคลสำคัญที่พัฒนาความรู้เรขาคณิตคือ ยูคลิด (Euclid) และได้รับเกียรติให้เป็นบิดาแห่งวิชาเรขาคณิต (The Father of Geometry) ทั้งนี้เพราะเขาเป็นผู้รวบรวมความรู้ต่าง ๆ ทางเรขาคณิตให้มีความสัมพันธ์กันทั้งผลงานของทลีส (Thales) พีทาโกรัส (Pythagorean) เพลโต (Plato) และของชาวอียิปต์ อีกทั้งได้ปรับปรุงวิธีการ จัดเรียงลำดับจากง่ายไปยาก และได้เพิ่มเติมบทพิสูจน์และทฤษฎีบทที่ขาดหายไป ตำราของเขามีมากมายและเก็บอยู่ที่ห้องสมุดที่เมืองอเล็กซานเดรีย แต่เนื่องจากห้องสมุดถูกทำลายไปหลายครั้งหลังจากผ่านสงครามมาหลายยุคหลายสมัย จึงเหลือมาให้เรียนกันในปัจจุบันเพียงบางส่วนเท่านั้น ผลงานบางชิ้นได้สูญหายไปแล้ว เช่น งานเขียนเกี่ยวกับภาคตัดกรวยที่ยูคลิดรวบรวมมาจากการค้นคว้าของอริสเตอัส (Aristaeus) ซึ่งเป็นนักเรขาคณิตยุคเดียวกับยูคลิด ผลงานของยูคลิดที่ยังคงอยู่ในปัจจุบันมี 5 ชิ้น คือ Division of Figures , Data , Phaenomena , Optic และ Elements ซึ่ง Elements เป็นผลงานที่มีชื่อเสียงที่สุด และได้รับการยอมรับว่าเป็นตำราที่สำคัญที่สุดเล่มหนึ่งในประวัติศาสตร์ของมนุษยชาติ ถ้าไม่นับคัมภีร์ไบเบิล (Bible) อาจกล่าวได้ว่าไม่มีหนังสือเล่มใดจะมีอิทธิพลต่อวิถีชีวิตของมนุษย์และถูกใช้อย่างกว้างขวางเท่ากับ Elements โดย Elements ประกอบด้วยหนังสือ 13 เล่ม และ 465 ทฤษฎีบท เนื้อหาส่วนใหญ่จะเกี่ยวกับเรขาคณิตแบบยูคลิด และพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ด้วยวิธีการพิสูจน์แบบนิรนัย (deduction) แต่ก็มีเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่น ๆ ด้วย โดยเฉพาะอย่างยิ่งทฤษฎีจำนวนซึ่งแนวคิดเหล่านี้มีอิทธิพลต่อการเรียนรู้เรขาคณิตจนถึงปัจจุบัน (บุญยพล จันทรฝอย, 2563; สิ้นชัย จันทรเสม, 2539)

จากแนวคิดเรขาคณิตแบบยูคลิดที่สามารถอธิบายหรือพิสูจน์ได้ทฤษฎีบทต่าง ๆ ได้เมื่อบุคคลทั่วไปได้เรียนรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตแล้วก็มักเกิดคำถามมากมาย เช่น เรขาคณิตในโลกจริงเป็นอย่างไร เรขาคณิตในระบบคณิตศาสตร์คืออะไร หรืออะไรคือความสวยงามของเรขาคณิต ซึ่งคำตอบเหล่านี้จำเป็นต้องใช้เวลาในการเรียนรู้ และต้องมีลำดับการเรียนรู้ที่ถูกต้องและเหมาะสม อย่างไรก็ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ได้กำหนดเนื้อหาหรือขอบเขตการเรียนรู้ไว้ในสาระที่ 2 การวัดและเรขาคณิต โดยจะเรียนรู้เกี่ยวกับ ความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตรและความจุ เงินและเวลา หน่วยวัดระบบต่าง ๆ การคาดคะเนเกี่ยวกับการวัด อัตราส่วนตรีโกณมิติ รูปเรขาคณิตและสมบัติของรูปเรขาคณิต การนิยาม แบบจำลองทางเรขาคณิต ทฤษฎีบททางเรขาคณิต การแปลงทางเรขาคณิตในเรื่องการเลื่อนขนาน การสะท้อน การหมุน และการนำความรู้เกี่ยวกับการวัดและเรขาคณิตไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ โดยมีมาตรฐานและตัวชี้วัดในระดับประถมศึกษาดังนี้

## สาระที่ 2 การวัดและเรขาคณิต

มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัด และนำไปใช้

ระดับ	ตัวชี้วัด
ประถมศึกษาปีที่ 1	<ol style="list-style-type: none"> <li>วัดและเปรียบเทียบความยาวเป็นเซนติเมตรเป็นเมตร</li> <li>วัดและเปรียบเทียบน้ำหนักเป็นกิโลกรัม เป็นขีด</li> </ol>
ประถมศึกษาปีที่ 2	<ol style="list-style-type: none"> <li>แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเวลาที่มีหน่วยเดียวและเป็นหน่วยเดียวกัน</li> <li>วัดและเปรียบเทียบความยาวเป็นเมตรและเซนติเมตร</li> <li>แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวก การลบ เกี่ยวกับความยาวที่มีหน่วยเป็นเมตรและเซนติเมตร</li> <li>วัดและเปรียบเทียบน้ำหนักเป็นกิโลกรัมและกรัม กิโลกรัมและขีด</li> <li>แสดงวิธีการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการบวก การลบเกี่ยวกับน้ำหนักที่มีหน่วยเป็นกิโลกรัมและกรัม กิโลกรัมและขีด</li> <li>วัดและเปรียบเทียบปริมาตรและความจุเป็นลิตร</li> </ol>
ประถมศึกษาปีที่ 3	<ol style="list-style-type: none"> <li>แสดงวิธีการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเงิน</li> <li>แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเวลา และระยะเวลา</li> <li>เลือกใช้เครื่องมือวัดความยาวที่เหมาะสมวัดและบอกความยาวของสิ่งต่างๆ เป็นเซนติเมตร และมิลลิเมตร เมตรและเซนติเมตร</li> <li>คาดคะเนความยาวเป็นเมตรและเป็นเซนติเมตร</li> <li>เปรียบเทียบความยาวระหว่างเซนติเมตรกับมิลลิเมตร เมตรกับเซนติเมตร กิโลเมตรกับเมตร จากสถานการณ์ต่างๆ</li> <li>แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับความยาว ที่มีหน่วยเป็นเซนติเมตรและมิลลิเมตร เมตรและเซนติเมตร กิโลเมตรและเมตร</li> <li>เลือกใช้เครื่องชั่งที่เหมาะสม วัดและบอกน้ำหนักเป็นกิโลกรัมและขีด กิโลกรัมและกรัม</li> <li>คาดคะเนน้ำหนักเป็นกิโลกรัมและเป็นขีด</li> <li>เปรียบเทียบน้ำหนักระหว่างกิโลกรัมกับกรัม เมตริกตันกับกิโลกรัม จากสถานการณ์ต่างๆ</li> <li>แสดงวิธีการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับน้ำหนักที่มีหน่วยเป็นกิโลกรัมกับกรัม เมตริกตันกับกิโลกรัม</li> <li>เลือกใช้เครื่องตวงที่เหมาะสม วัดและเปรียบเทียบปริมาตร ความจุเป็นลิตรและมิลลิลิตร</li> <li>คาดคะเนปริมาตรและความจุเป็นลิตร</li> </ol>

ระดับ	ตัวชี้วัด
	13. แสดงวิธีการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับปริมาตรและความจุที่มีหน่วยเป็นลิตร และมีลิลิตร
ประถมศึกษาปีที่ 4	1. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเวลา 2. วัดและสร้างมุม โดยใช้โพรแทรกเตอร์ 3. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับ ความยาวรอบรูปและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
ประถมศึกษาปีที่ 5	1. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับความยาวที่มีการเปลี่ยนหน่วยและเขียนในรูปทศนิยม 2. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับน้ำหนักที่มีการเปลี่ยนหน่วยและเขียนในรูปทศนิยม 3. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากและความจุของภาชนะทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก 4. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
ประถมศึกษาปีที่ 6	1. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับปริมาตรของรูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบด้วยทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก 2. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับความยาวรอบรูปและพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม 3. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับความยาวรอบรูปและพื้นที่ของวงกลม

มาตรฐาน ค 2.2 เข้าใจและวิเคราะห์รูปเรขาคณิต สมบัติของรูปเรขาคณิต ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิต และทฤษฎีบททางเรขาคณิต และนำไปใช้

ระดับชั้น	ตัวชี้วัด
ประถมศึกษาปีที่ 1	1. จำแนกรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม วงกลม วงรี ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ทรงกลม ทรงกระบอก และกรวย
ประถมศึกษาปีที่ 2	1. จำแนกและบอกลักษณะของรูปหลายเหลี่ยมและวงกลม
ประถมศึกษาปีที่ 3	1. ระบุรูปเรขาคณิตสองมิติที่มีแกนสมมาตรและจำนวนแกนสมมาตร
ประถมศึกษาปีที่ 4	1. จำแนกชนิดของมุม บอกชื่อมุม ส่วนประกอบของมุมและเขียนสัญลักษณ์แสดงมุม 2. สร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเมื่อกำหนดความยาวของด้าน
ประถมศึกษาปีที่ 5	1. สร้างเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ 2. จำแนกรูปสี่เหลี่ยมโดยพิจารณาจากสมบัติของรูป 3. สร้างรูปสี่เหลี่ยมชนิดต่าง ๆ เมื่อกำหนดความยาวของด้านและขนาดของมุมหรือเมื่อกำหนดความยาวของเส้นทแยงมุม

มโนทัศน์เกี่ยวกับการวัดและเรขาคณิต

ระดับชั้น	ตัวชี้วัด
	4. บอกลักษณะของปริซึม
ประถมศึกษาปีที่ 6	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. จำแนกรูปสามเหลี่ยมโดยพิจารณาจากสมบัติของรูป</li> <li>2. สร้างรูปสามเหลี่ยมเมื่อกำหนดความยาวของด้านและขนาดของมุม</li> <li>3. บอกลักษณะของรูปเรขาคณิตสามมิติชนิดต่าง ๆ</li> <li>4. ระบุรูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบจาก รูปคลี่ และระบุรูปคลี่ของรูปเรขาคณิตสามมิติ</li> </ol>

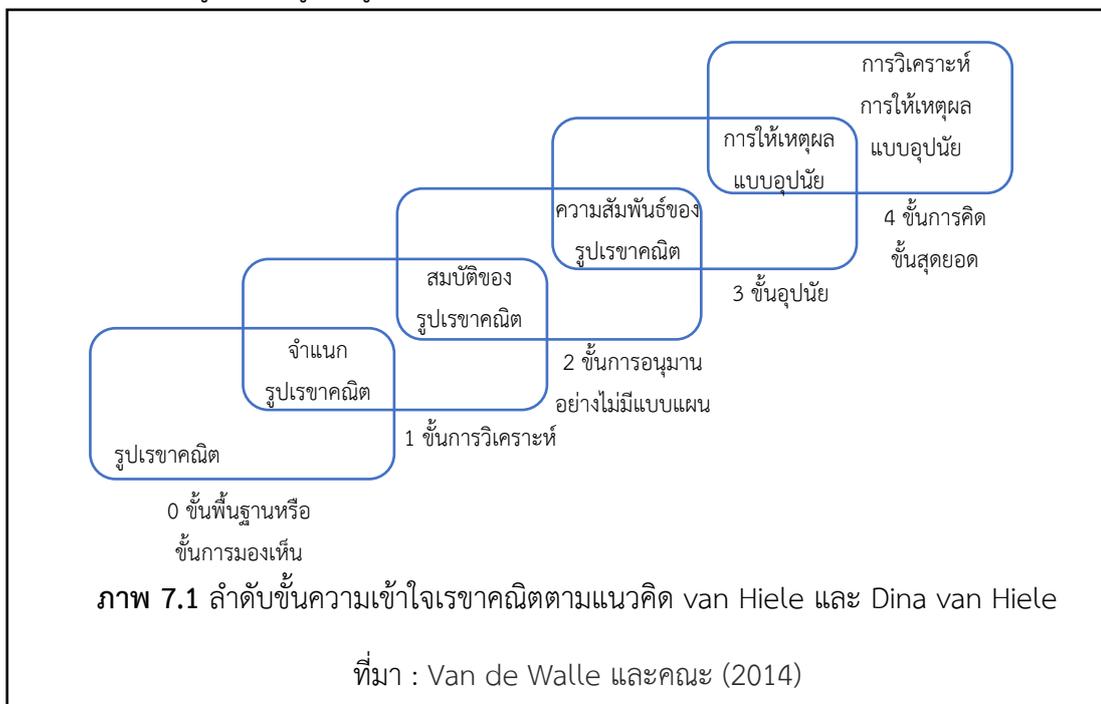
เมื่อพิจารณาจากตัวชี้วัดจะพบว่ามี 2 มาตรฐาน โดยมาตรฐานที่ 1 จะเน้นการเรียนรู้เกี่ยวกับการวัด ในขณะที่มาตรฐานที่ 2 จะเน้นการเรียนรู้เกี่ยวกับเรขาคณิต ซึ่งจะแตกต่างจากหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ได้จำแนกการวัดเป็นหนึ่งในสาระการเรียนรู้ หลังจากมีการปรับปรุงกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในปี 2560 จึงได้มีการนำสาระการเรียนรู้ไปรวมกับสาระเรขาคณิต ได้เป็น สาระการเรียนรู้การวัดและเรขาคณิต

### การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับเรขาคณิต

ในปี ค.ศ. 1945 van Hiele และ Dina van Hiele ซึ่งสนใจเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้เรขาคณิตได้วิจัยและสร้าง van Hiele Model ที่กล่าวถึง พัฒนาการทางความคิดทางเรขาคณิตและสาเหตุที่ทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียนรู้เรขาคณิต พบว่า ระดับการคิดเชิงเรขาคณิต (Level of Geometric Thought) ของนักเรียนเป็นอุปสรรคที่สำคัญต่อการสื่อสารระหว่างครูกับนักเรียนและเพื่อนด้วยตนเอง ถ้าระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนและครูต่างระดับกันจะทำให้สื่อสารไม่เข้าใจ หรือถ้าเนื้อหาหรือมโนทัศน์ที่กำหนดในหลักสูตรฯ สูงกว่าระดับการคิดของนักเรียน หรือครูใช้วิธีการจัดการเรียนรู้ที่ใช้แนวคิดที่สูงกว่าระดับการคิดของนักเรียนก็จะส่งผลให้นักเรียนไม่สามารถเข้าใจปัญหา ทำให้ไม่สามารถแก้ปัญหาหรือดำเนินกิจกรรมต่อไปได้ ต่อมาแนวคิดนี้ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวางในประเทศสหรัฐอเมริกา แต่ก็ยังไม่ได้มีการนำแนวคิดเกี่ยวกับทฤษฎีของระดับชั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของ van Hiele ไปใช้ในการจัดการเรียนรู้เรขาคณิตในโรงเรียน จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1989 สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกาได้มีการตีพิมพ์หนังสือ Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics มีการนำทฤษฎีของ van Hiele ไปใช้เป็นเครื่องมือในการจัดการเรียนรู้เรขาคณิตในโรงเรียน โดยเน้นให้เห็นความสำคัญของการจัดการเรียนรู้อย่างมีระดับชั้นในลักษณะเดียวกับระดับชั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของ van Hiele โดยเริ่มต้นให้นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตในลักษณะเป็นภาพรวม ๆ วิเคราะห์สมบัติที่มีลักษณะเฉพาะระหว่างรูปต่าง ๆ และใช้การนิรนัยแบบง่าย ๆ มีข้อเสนอแนะให้คำนึงถึงระดับการคิด นอกจากนี้ยัง

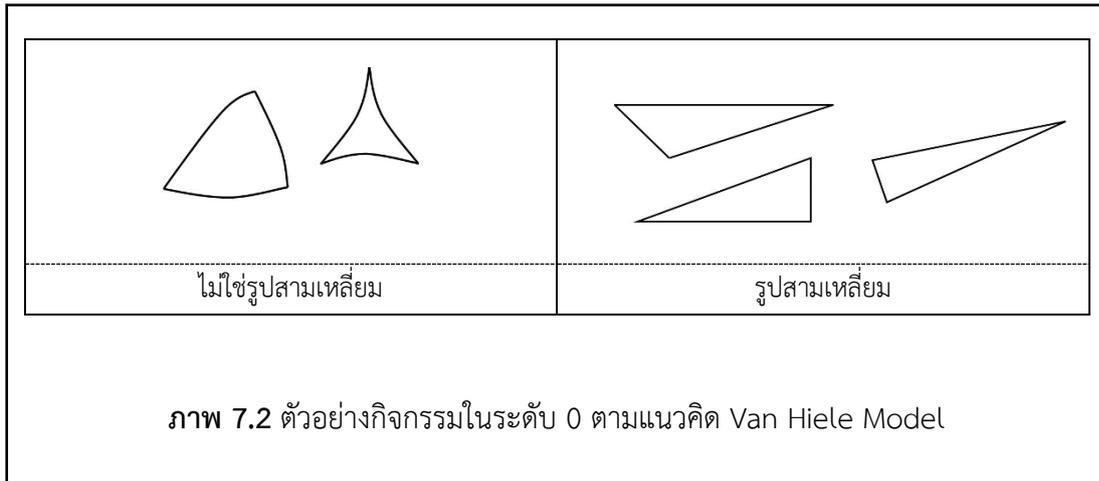
เสนอแนะวิธีการจัดการเรียนรู้ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดเกี่ยวกับระดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของ van Hiele โดยนำเสนอมุมมองของการจัดสิ่งแวดล้อมภายในห้องเรียนที่เอื้อให้นักเรียนมีความก้าวหน้าทางเรขาคณิต การได้ทำกิจกรรมในรูปแบบต่าง ๆ ได้แก่ การอภิปราย การอธิบาย และการสาธิต การบูรณาการ กระบวนการทางสังคม ใช้การสื่อสารโดยให้มีการแลกเปลี่ยนแนวคิด ทำการทดสอบ เพื่อยืนยันข้อคาดการณ์ ความรู้ที่ได้มาจากการสนทนา การเขียน การฟัง และการอ่าน สำหรับแนวคิด การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด van Hiele และ Dina van Hiele มีลักษณะเฉพาะ 3 ด้าน ดังนี้ (van Hiele, 1999)

van Hiele และ Dina van Hiele แบ่งระดับความเข้าใจเรขาคณิตของนักเรียนเป็น 5 ระดับ จากระดับต้นไปสู่ระดับที่สูงขึ้นสูงตามลำดับดังนี้

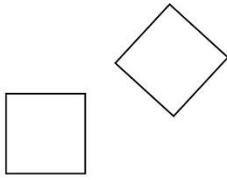
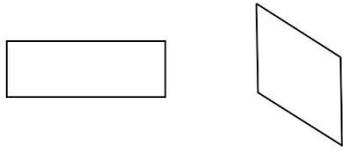


ระดับ 0 ขั้นพื้นฐานหรือขั้นการมองเห็น (Visualization) ความสามารถในระดับนี้ นักเรียนระลึกรูปร่างภายนอกของรูปเรขาคณิต มีการแสดงความคิดออกมาเป็นรูปธรรมภายนอกมากกว่าองค์ประกอบหรือคุณลักษณะของรูป เช่น ถ้ากำหนดรูปเรขาคณิตให้ นักเรียนสามารถบอกรูปร่างภายนอกได้แต่บอกสมบัติต่าง ๆ ของรูปไม่ได้ ไม่สามารถแยกส่วนประกอบเป็นด้านหรือมุมได้ นักเรียนที่มีระดับความคิดในระดับนี้สามารถเรียนคำศัพท์ทางเรขาคณิต บอกชื่อรูปได้เมื่อให้ดูรูปบนกระดานตะปู หรือวาดรูปคร่าว ๆ ได้ คำถามระดับนี้จะเป็นคำถามที่ถามเกี่ยวกับรูปร่างที่เห็นจากภายนอก เช่น เมื่อให้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามารถบอกได้ว่ารูปใดเป็นรูปสี่เหลี่ยม

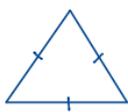
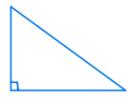
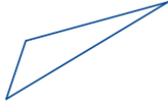
จัตุรัสหรือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เพราะมีลักษณะคล้ายกับรูปที่เคยเห็นมาก่อน แต่ไม่สามารถบอกได้ว่ามีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก หรือด้านตรงข้ามขนานกัน เมื่อพิจารณาจากตัวชี้วัดที่กำหนดในหลักสูตรฯ พบว่าจะสอดคล้องกับตัวชี้วัดในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่นักเรียนสามารถจำแนกรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม วงกลม วงรี ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ทรงกลม ทรงกระบอก และกรวย



ระดับ 1 ขั้นการวิเคราะห์ (Analysis) ความสามารถในระดับนี้เป็นการเริ่มต้นการคิดวิเคราะห์ มโนทัศน์ทางเรขาคณิต จากการสังเกตและการทดลอง นักเรียนเริ่มเห็นคุณลักษณะของรูป และจัดกลุ่มรูปตามลักษณะเฉพาะได้ สามารถแยกรูปชนิดต่าง ๆ ได้ จะมองรูปเรขาคณิตแบบแยกส่วนได้ เช่น เมื่อดูรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน สามารถบรรยายมุมที่มีขนาดเท่ากันได้ บอกได้ว่ามุมตรงข้ามเท่ากัน และเมื่อให้ตัวอย่างที่มากพอ นักเรียนสามารถบอกสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้ แต่ไม่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างรูปที่เห็นกับรูปที่ยังไม่เห็นได้ และยังไม่เข้าใจนิยาม

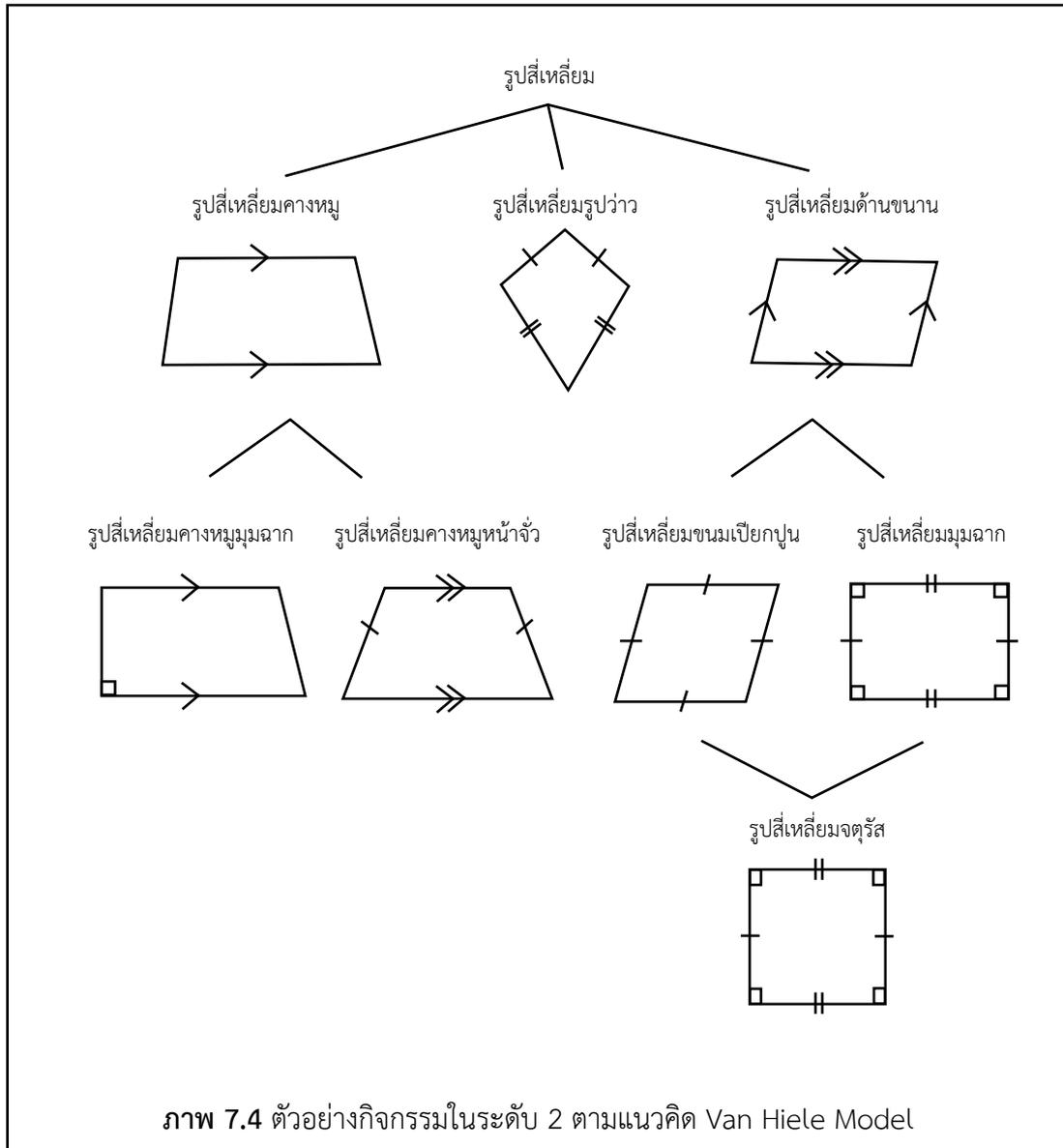
	
รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

รูปสามเหลี่ยม	
จำแนกจากขนาดของมุม	จำแนกจากความยาวด้าน
 <p style="margin-top: 5px;">รูปสามเหลี่ยม มุมแหลม</p>	 <p style="margin-top: 5px;">รูปสามเหลี่ยม ด้านเท่า</p>
 <p style="margin-top: 5px;">รูปสามเหลี่ยม มุมฉาก</p>	 <p style="margin-top: 5px;">รูปสามเหลี่ยม หน้าจั่ว</p>
 <p style="margin-top: 5px;">รูปสามเหลี่ยม มุมป้าน</p>	 <p style="margin-top: 5px;">รูปสามเหลี่ยม ด้านไม่เท่า</p>

**ภาพ 7.3** ตัวอย่างกิจกรรมในระดับ 1 ตามแนวคิด Van Hiele Model

ระดับ 2 การอนุมานอย่างไม่มีแบบแผน (Informal Deduction) ในขั้นนี้นักเรียนสามารถบอกรายละเอียดปลีกย่อยเกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิตชนิดต่าง ๆ และสร้างความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติของรูปได้ เปรียบเทียบและบอกความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกัน รวมทั้งบอกลักษณะที่แตกต่างกันได้ เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันและขนานกัน มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน นักเรียนสามารถสรุปสมบัติต่าง ๆ ของรูปได้ และแยกรูปเป็นกลุ่ม ๆ ได้ตามสมบัติที่เข้าใจ บอกความหมายได้ สามารถพิสูจน์อย่างไม่เป็นทางการจากสิ่งที่กำหนดให้ได้ แต่ไม่สามารถสรุปโดยใช้สัญพจน์ ทฤษฎีบท บทนิยามต่าง ๆ ได้ ไม่สามารถให้เหตุผลในลักษณะที่เป็นโครงสร้างได้



ระดับ 3 ขั้นการพิสูจน์อย่างเป็นแบบแผนหรือขั้นอุปนัย (Deduction) ในขั้นนี้นักเรียนจะสามารถสรุปมโนทัศน์เกี่ยวกับเรขาคณิตภายใต้สัจพจน์ ทฤษฎีบท อนิยาม และนิยามต่าง ๆ ได้อย่างเข้าใจและถูกโครงสร้างการให้ลำดับเหตุผล เห็นความสัมพันธ์ระหว่างสัจพจน์ ทฤษฎีบท อนิยาม และการพิสูจน์ เห็นความเป็นไปได้หลายรูปแบบภายใต้ข้อเท็จจริง สามารถทำทบทวนของทฤษฎีบทได้ และสามารถสรุปจากสิ่งที่กำหนดให้ได้ถูกต้องตามลำดับเหตุผล

ระดับ 4 ขั้นการคิดขั้นสุดยอด (Rigor) นักเรียนจะมีความรอบรู้ระบบสัจพจน์อย่างหลากหลาย เช่น สามารถศึกษาเรขาคณิตที่ไม่ใช่ของระบบยูคลิดได้ สามารถเปรียบเทียบเนื้อหา

ในระบบต่าง ๆ ได้ และสามารถมองเรขาคณิตในลักษณะของนามธรรม สามารถจัดทฤษฎีบทต่าง ๆ เข้าเป็นระบบ ระเบียบและสร้างทฤษฎีบทใหม่ ๆ ทางเรขาคณิต

Van de Walle และคณะ (2014) ได้อธิบายลักษณะเฉพาะของระดับการคิดเชิงเรขาคณิตตามแนวคิด van Hiele ได้ดังตาราง 7.1

**ตาราง 7.1** ลักษณะเฉพาะของระดับการคิดเชิงเรขาคณิตตามแนวคิด van Hiele

ลักษณะเฉพาะ	ความหมายโดยนัย
พัฒนาการ	นักเรียนแต่ละคนควรเรียนรู้เรขาคณิตที่ละขั้นตอน โดยแต่ละขั้นตอนจะต้องเรียนรู้อย่างสมบูรณ์ จะข้ามขั้นตอนไม่ได้ เพื่อให้ให้นักเรียนประสบผลสำเร็จในการเรียนรู้ ครูต้องมีความรู้เกี่ยวกับระดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของ van Hiele ที่จะช่วยให้การจัดการเรียนรู้เรขาคณิตมีความเหมาะสมกับความสามารถและพัฒนาการทางด้านสติปัญญา
อายุ	นักเรียนบางคนอาจอยู่ระดับประถมศึกษาปีที่ 6 แต่มีพัฒนาอยู่ในระดับ 1 หรือผู้ใหญ่บางคนอาจอยู่ในระดับ 0
ประสบการณ์	ความก้าวหน้าที่จะผ่านแต่ละระดับอาจต้องใช้ประสบการณ์ในการเรียนรู้เรขาคณิต เช่น นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 อยู่ในระดับ 0 อาจต้องเรียนรู้หรือทำกิจกรรมทางเรขาคณิตที่มากพอเพื่อช่วยให้นักเรียนข้ามอยู่ระดับ 1 หรือ 2

เมื่อพิจารณาจากมาตรฐานและตัวชี้วัดที่กำหนดในหลักสูตรฯ ระดับชั้นประถมศึกษาของไทย พบว่า การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตนั้นจะเป็นการเน้นระดับ 0 ถึง 2 โดยเป็นการปูพื้นฐานให้นักเรียนรู้จักและสมบัติพื้นฐานที่สามารถนำไปต่อยอดได้ในระดับมัธยมศึกษา นั่นคือระดับ 3 กับ 4 จากงานวิจัยของ van Hiele และ Dina van Hiele ยังได้ระบุการพัฒนาความคิดเรขาคณิตและข้อเสนอแนะในการแนวคิดใช้ในการจัดการเรียนรู้ดังนี้

1. นักเรียนจะต้องผ่านระดับขั้นของความคิดจากระดับแรกไปสู่ระดับที่สูงกว่าโดยไม่มีการข้ามระดับ
2. การที่นักเรียนจะผ่านแต่ละระดับขั้นขึ้นอยู่กับเนื้อหาและวิธีการสอนมากกว่าขึ้นอยู่กับอายุของนักเรียน ไม่มีวิธีการสอนใดที่จะช่วยให้นักเรียนข้ามระดับได้ เช่น ข้ามจากระดับ 1 ไประดับ 3
3. ลักษณะของสิ่งที่อยู่ในระดับหนึ่งจะกลายเป็นสิ่งที่ต้องศึกษาในระดับถัดไป เช่น ในระดับ 0 เพียงรู้จักรูป เมื่อถึงระดับ 1 จึงจะวิเคราะห์รูปและองค์ประกอบของรูป และค้นพบสมบัติต่าง ๆ

4. ในแต่ละระดับมีลักษณะเฉพาะของการนำไปใช้ และมีลักษณะของการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับการนำไปใช้

5. ถ้าใช้การสอนของระดับที่สูงกว่าไปสอนนักเรียนที่อยู่ระดับต่ำกว่าแล้ว ความก้าวหน้าทางการเรียนของนักเรียนจะไม่เกิดขึ้น

6. ในการจัดการเรียนรู้จากชั้น 0 ไปชั้น 1 นักเรียนจะเริ่มจากชั้น 0 ซึ่งการเรียนรู้โดยการท่องจำไม่สามารถทำให้นักเรียนสามารถไปชั้น 2 ได้ สิ่งที่ครูควรทำเพื่อให้นักเรียนไปยังชั้น 1 คือการให้ประสบการณ์เกี่ยวกับเรขาคณิตที่หลากหลาย ควรทำท่ายด้วยกิจกรรมใหม่ ๆ โดยใช้การวาดภาพที่มีรูปร่างหลากหลาย เช่น เมื่อครูวาดรูปสี่เหลี่ยมมุมมนให้ นักเรียนสามารถวาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจากรูปที่รูปกำหนดให้ได้หรือไม่

7. เน้นการใช้สมบัติมากกว่าการกำหนดตัวเลขให้กับความยาวด้าน เพื่อเป็นการฝึกการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

8. ควรฝึกให้นักเรียนวาด สร้าง ต่อภาพ หรือแยกชิ้นส่วนรูปเรขาคณิต รวมทั้งฝึกการมองรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติในมุมมองต่าง ๆ

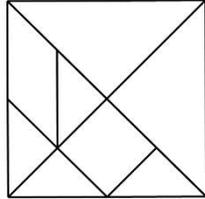
จากข้อเสนอแนะของ van Hiele พบว่าการจัดการเรียนรู้เรขาคณิตควรต้องผ่านทีละขั้นตอน โดยแต่ละขั้นตอนจะต้องเรียนรู้อย่างสมบูรณ์ จะข้ามขั้นตอนไม่ได้ เพื่อให้นักเรียนประสบผลสำเร็จในการเรียนรู้ ครูควรต้องมีความรู้เกี่ยวกับระดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของ van Hiele ที่จะช่วยให้การจัดการเรียนรู้เรขาคณิตมีความเหมาะสมกับความสามารถและพัฒนาการทางด้านสติปัญญาของนักเรียนต่อไป เมื่อครูเข้าใจมโนทัศน์ รู้ว่าควรใช้วิธีการจัดการเรียนรู้อย่างไรจึงเหมาะสมกับระดับความคิดของนักเรียน รู้พัฒนาการของระดับขั้นความรู้ทางเรขาคณิตของนักเรียนจากระดับหนึ่งไปสู่ระดับอีกระดับหนึ่ง จะช่วยให้ครูสามารถจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้สอดคล้องกับความสามารถและพัฒนาการทางด้านความรู้และสติปัญญาของนักเรียน จะทำให้นักเรียนสามารถเรียนวิชาเรขาคณิตด้วยความเข้าใจมากกว่าการท่องจำเพียงอย่างเดียว จะเห็นได้ว่ามาตรฐานและตัวชี้วัดที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตที่กำหนดไว้ในหลักสูตรฯ นั้น จะครอบคลุมความสามารถของนักเรียนตั้งแต่ระดับ 0 ถึงระดับ 3 ซึ่งการพิสูจน์ทางเรขาคณิตนั้นต้องการความคิดระดับขั้นอย่างน้อยที่สุดคือระดับ 3 และพบว่านักเรียนที่สามารถพิสูจน์ได้มีจำนวนน้อย และนักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถพัฒนาความสามารถของตนเองจนถึงระดับ 4 ของระดับ van Hiele ได้ ดังนั้นการจัดการเรียนรู้ควรให้นักเรียนพัฒนาในแต่ละระดับขั้นอย่างสมบูรณ์ มีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาวิชาเรขาคณิตที่กำลังเรียนอยู่อย่างถ่องแท้ก็จะช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาการเรียนรู้จากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งอย่างชัดเจน ทำให้นักเรียนทุก

คนสามารถพัฒนาความรู้ความสามารถของตนไปจนถึงระดับ 3 ซึ่งเป็นขั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ทางเรขาคณิตได้ถูกต้องหรือพัฒนาต่อไปจนถึงระดับ 4 ซึ่งเป็นขั้นสูงสุดของการเรียนเรขาคณิต

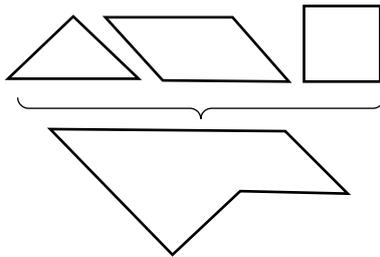
เมื่อนักเรียนมีการคิดเชิงเรขาคณิตตามแนวคิด van Hiele ที่ดีแล้ว ครูควรหากิจกรรมหรือเกมที่พัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตในรูปแบบต่าง ๆ เพื่อส่งเสริมและสร้างความรู้สึกระเบิด (Spatial Sense) ซึ่งความรู้สึกระเบิดเป็นความสามารถของนักเรียนในการรับรู้และเข้าใจเกี่ยวกับขนาด รูปร่าง ตำแหน่ง ทิศทางระยะทาง และความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2546)

### ตัวอย่าง กิจกรรมพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตและความรู้สึกร่วมกัน

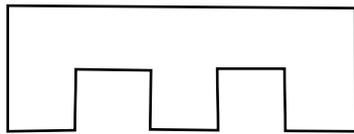
แทนแกรม (Tangram) เป็นตัวต่อปริศนาที่เกิดจากการนำรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมาแบ่งเป็นส่วนต่าง ๆ จนได้รูปเรขาคณิต 7 รูป โดยแต่ละรูปสามารถนำมาประกอบเป็นรูปใหม่ได้ เช่น คน สัตว์ สิ่งของ อย่างไรก็ตาม แทนแกรมยังเป็นที่ใช้ในการจัดการเรียนรู้เรขาคณิตได้อีกด้วย เช่น ชนิดของรูปเรขาคณิต แกนสมมาตร หรือแม้กระทั่งการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับเศษส่วน



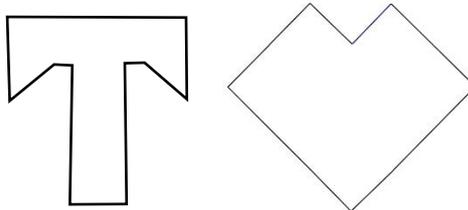
ระดับง่าย นำรูปเรขาคณิตทั้ง 3 รูปมาประกอบให้ได้รูปที่กำหนด



ระดับปานกลาง นำรูปเรขาคณิตทั้ง 7 รูปของแทนแกรมมาประกอบให้ได้รูปที่กำหนด



ระดับยาก นำรูปเรขาคณิตทั้ง 7 รูปของแทนแกรมมาประกอบให้ได้รูปที่กำหนด



กิจกรรม ฉันทน์เป็นอะไร

“เส้นทแยงมุมของฉันทน์ตัดกันเป็นมุมฉาก และแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน”

## การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการวัด

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ได้กำหนดการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการวัด โดยเป็นการวัดเกี่ยวกับความยาว พื้นที่ เงิน เวลา มุม ปริมาตร และความจุ โดย Van de Walle และคณะ (2014) ได้อธิบายลำดับการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการวัดไว้ 3 ชั้น ดังนี้

1. เปรียบเทียบ เป็นขั้นที่นักเรียนสามารถบอกได้ว่าอะไรยาวกว่า สั้นกว่า มีน้ำหนักมากกว่า หรือมีน้ำหนักน้อยกว่า โดยยังไม่ได้วัด การจัดการเรียนรู้ครูจึงเริ่มด้วยการให้นักเรียนนำสิ่งของมา เปรียบเทียบความยาว หรือน้ำหนัก เพื่อให้เกิดการเรียนรู้เกี่ยวกับลักษณะต่าง ๆ ของสิ่งของนั้น เช่น ยางลบของหยกยาวกว่ายางลบของพลอย หรือ นิวสูงกว่าโบว์ หรือ กระจเป่าของฟ้าหนักกว่ากระจเป่าของดาว สำหรับในขั้นนี้ครูยังไม่ควรสนใจหน่วยของความยาว หรือหน่วยของน้ำหนัก

2. ใช้แบบจำลอง ในขั้นนี้เป็นการเปรียบเทียบโดยใช้หน่วยมาอธิบาย แต่หน่วยที่ใช้อาจเป็นหน่วยที่ยังไม่เป็นมาตรฐาน อาจใช้แบบจำลองหรือสิ่งของต่าง ๆ มาเป็นตัวกลางในการเปรียบเทียบ ความยาวหรือน้ำหนัก เช่น ระยะจากประตูห้องเรียนด้านหน้าไปยังประตูด้านหลังยาวกี่ก้าว หรือนักเรียนต้องกางแขนกี่ครั้งจึงเท่ากับความกว้างของห้องเรียน สำหรับหน่วยการวัดที่ไม่เป็นมาตรฐาน นั้นจะช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ รอบตัวได้ง่าย เช่น ถ้านำแปรงลบกระดานมาต่อกันต้องใช้กี่อันจึงจะเท่ากับความยาวของกระดาน แต่อย่างไรก็ตามหน่วยที่ไม่เป็นมาตรฐานอาจสร้างมโนทัศน์หรือข้อขัดแย้งกับนักเรียนด้วยได้ เช่น ความยาวของก้าวของนักเรียนแต่ละคนไม่เท่ากัน ทำให้การวัดมีความคลาดเคลื่อนและเมื่อนำไปเปรียบเทียบจึงไม่เหมาะสมกับความเป็นจริง

3. ใช้เครื่องมือวัด ขั้นนี้เป็นการนำเครื่องมือที่เป็นมาตรฐานมาวัดหรือชั่งน้ำหนัก พร้อมทั้งมีการใช้หน่วยการวัดที่เป็นมาตรฐานอีกด้วย นอกจากนี้ในขั้นจะเป็นพัฒนาการที่นักเรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับเครื่องมือที่ใช้ในการวัดหรือชั่ง ครูควรสอดแทรกถึงความเหมาะสมของเครื่องมือชนิดต่าง ๆ เพื่อให้นักเรียนสามารถนำความรู้ไปใช้ในชีวิตจริง ในการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับหน่วยที่เป็นมาตรฐานมีคำแนะนำดังนี้

- ความคุ้นเคยกับหน่วย นักเรียนจะมีความคุ้นชินกับหน่วยที่เป็นมาตรฐานอาจเคยได้ยินหรือรู้จักโดยไม่รู้ตัว ครูควรใช้โอกาสนี้ในการนำเข้าสู่เนื้อหา และสามารถประเมินการคาดคะเนของนักเรียนได้ เช่น เตียงที่นักเรียนนอนมีความยาวกี่ฟุต หรือโทรทัศน์ที่บ้านของนักเรียนกี่นิ้ว (อาจสอดแทรกวิธีการวัดโทรทัศน์ในชีวิตจริง)
- ความสามารถในการเลือกหน่วยที่เหมาะสม ในชีวิตจริงนักเรียนอาจเรียนรู้เกี่ยวกับหน่วย แต่นักเรียนควรรู้ว่าในสถานการณ์ใดควรใช้หน่วยใด ในประเด็นอาจต้องใช้

สถานการณ์ต่าง ๆ เพื่อช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้และตัดสินใจเลือกหน่วยที่เหมาะสม

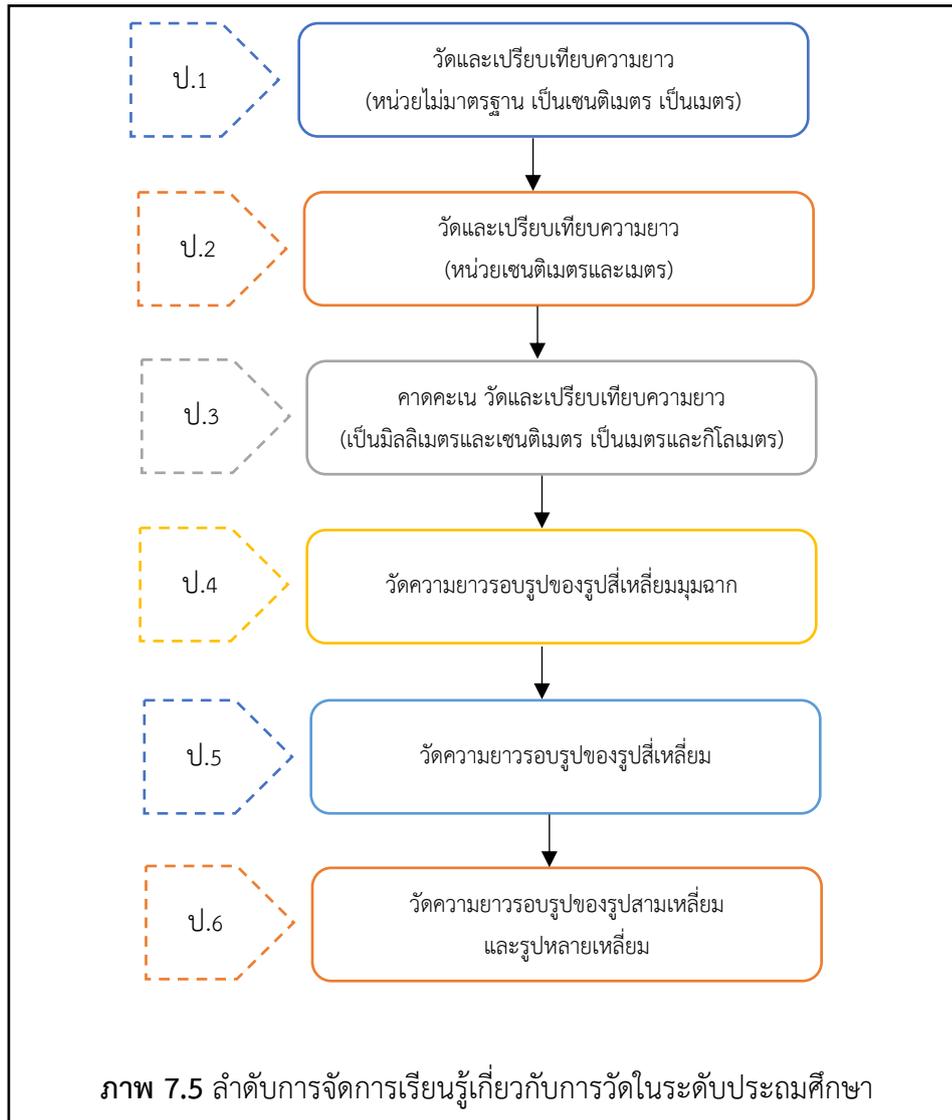
- ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างหน่วย นักเรียนควรเปลี่ยนหน่วยที่มีความสัมพันธ์กันได้ เช่น 120 เซนติเมตรยาวก็เมตร

ตาราง 7.2 ลำดับการเรียนรู้ตามแนวคิด Van de Walle และคณะ

ขั้น	เป้าหมาย	กิจกรรม	หมายเหตุ
1. เปรียบเทียบ	นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับการวัด	เปรียบเทียบความยาวหรือน้ำหนักของสิ่งต่าง ๆ รอบตัว	ถ้านักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับยาว สั้น หรือมีน้ำหนักมากกว่า ครูควรข้ามไปขั้นใช้แบบจำลอง
2. ใช้แบบจำลอง	นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับการเปรียบเทียบโดยใช้หน่วยที่ไม่เป็นมาตรฐาน	ใช้แบบจำลองหรือสิ่งของต่าง ๆ	ควรฝึกการประมาณค่าโดยอาจเริ่มจากสิ่งของที่เป็นหน่วยที่ไม่มาตรฐาน
3. ใช้เครื่องมือวัด	นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องมือ หน่วยการวัดและนำไปใช้ในชีวิตจริง	ใช้เครื่องมือวัด และใช้หน่วยการวัดที่เป็นมาตรฐานในการตอบและนำค่าที่ได้จากการวัดไปเปรียบเทียบกับหน่วยที่ไม่เป็นมาตรฐานในขั้นใช้แบบจำลอง	ควรมีการฝึกการประมาณค่าโดยใช้หน่วยที่เป็นมาตรฐาน

#### ความยาว

ความยาวเป็นมโนทัศน์พื้นฐานที่จะเรียนรู้เกี่ยวกับการหาความยาวของสิ่งของต่าง ๆ โดยจะเริ่มจากหน่วยที่ไม่เป็นมาตรฐาน บอกความยาวเป็นเซนติเมตร เป็นเมตร เป็นเมตรและเซนติเมตร จนถึงมิลลิเมตรกับเซนติเมตร กิโลเมตรกับเมตร และการนำความรู้ไปหาความยาวของรูปเรขาคณิตชนิดต่าง ๆ โดยเริ่มจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก รูปสามเหลี่ยม และรูปหลายเหลี่ยม (ภาพ 8.5)



ในชีวิตจริงนั้นมีการใช้หน่วยการวัดที่ค่อนข้างหลากหลายและอาจทำให้เกิดความสับสนกับนักเรียนได้ โดยมีการนำหน่วยในระบบต่าง ๆ มาใช้กันอย่างแพร่หลาย ดังนั้นครูควรอธิบายถึงหน่วยการวัดประเภทต่าง ๆ และเครื่องมือที่นิยมใช้ในการวัด พร้อมทั้งให้นักเรียนเข้าใจ และการนำไปใช้ในแต่ละบริบทในชีวิตจริง สำหรับหน่วยความยาวนิยมใช้ 2 ระบบ ดังนี้

ระบบเมตริก

10 มิลลิเมตร เท่ากับ 1 เซนติเมตร

100 เซนติเมตร เท่ากับ 1 เมตร

1,000 เมตร เท่ากับ 1 กิโลเมตร

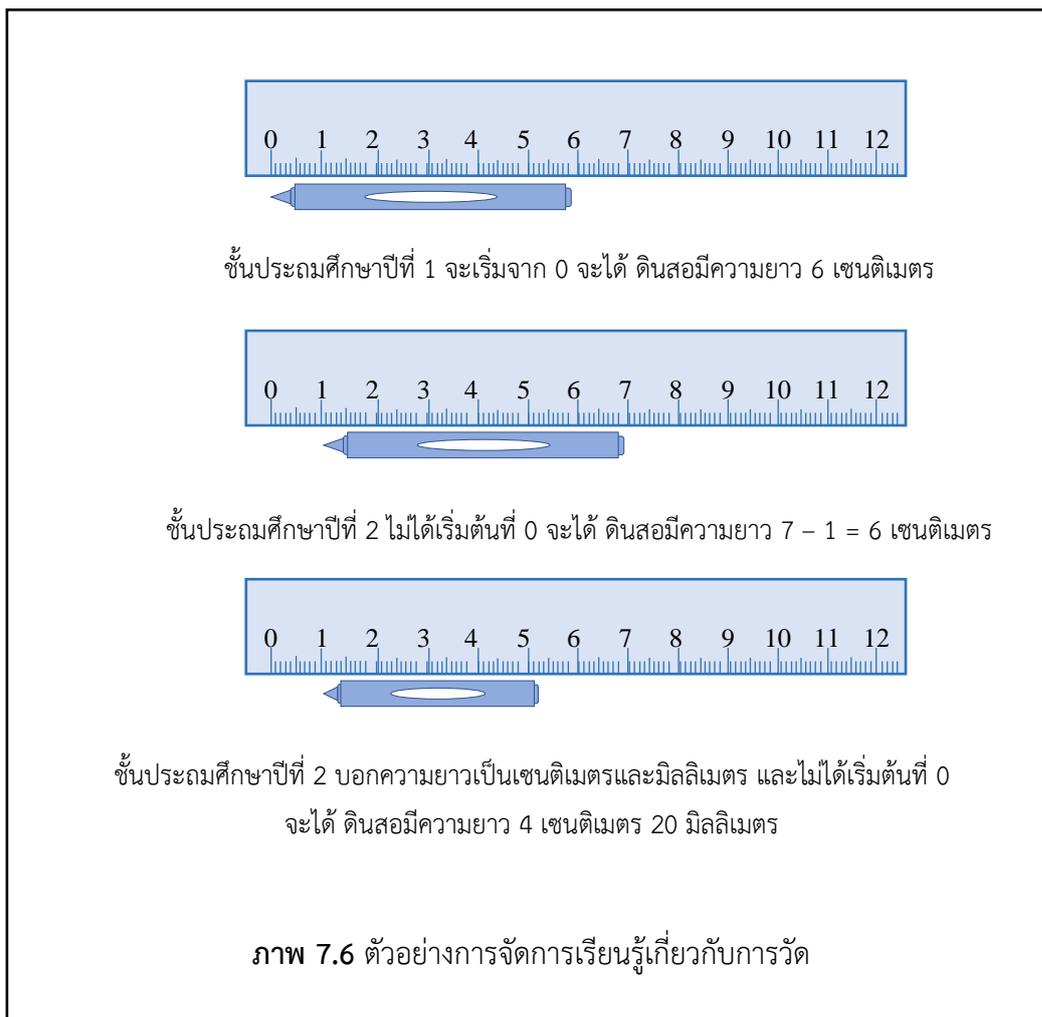
มโนทัศน์เกี่ยวกับการวัดและเรขาคณิต

ระบบอังกฤษ

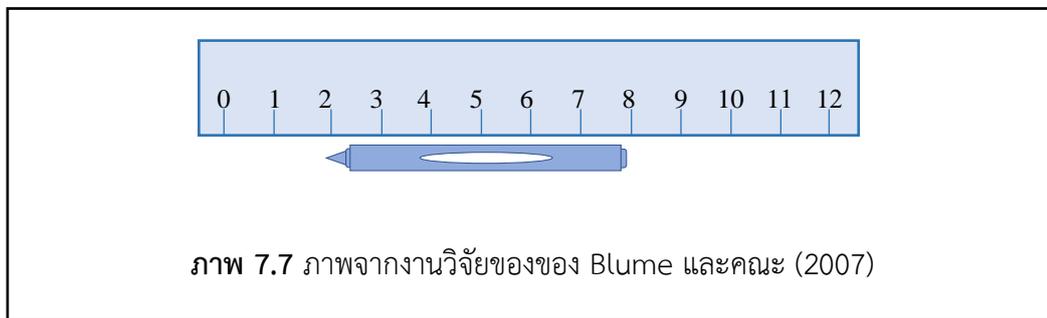
12 นิ้ว เท่ากับ 1 ฟุต

3 ฟุต เท่ากับ 1 หลา

ข้อสังเกตจากตัวชี้วัดในระดับประถมศึกษาปีที่ 1 และ 2 ตัวชี้วัดที่ปรากฏในหลักสูตรฯ จะเหมือนกัน หากครูไม่ได้สังเกตหรือวิเคราะห์จะทำให้การจัดการเรียนรู้ไม่มีความแตกต่าง โดยในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 เป็นการบอกความยาวโดยใช้หน่วยเดียว (single unit) เช่น สัมหนัก 12 กิโลกรัม มานะสูง 150 เซนติเมตร หรือโต๊ะยาว 1 เมตร และการวัดสิ่งของต่าง ๆ โดยใช้เครื่องมือวัดที่เริ่มที่ 0 ในขณะที่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 เป็นการวัดใช้หน่วยผสม (compound unit) เช่น ปลาหนัก 1 กิโลกรัม 200 กรัม สายฟ้าสูง 1 เมตร 61 เซนติเมตร อีกทั้งสิ่งที่จะนำมาวัดไม่จำเป็นต้องเริ่มต้นที่ 0 (ภาพ 7.6)



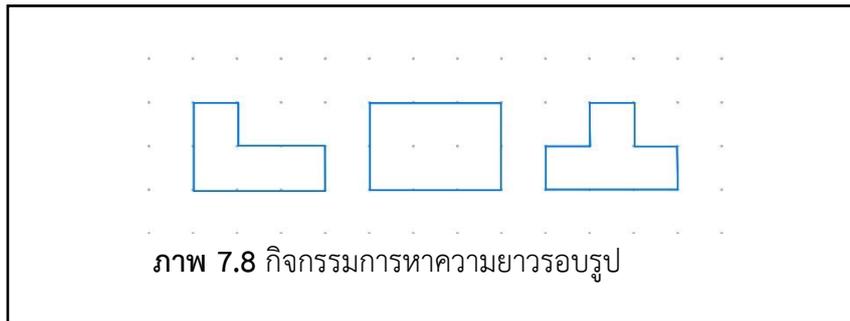
จากงานวิจัยของ Blume และคณะ (2007) ที่ศึกษาเกี่ยวกับการวัดความยาว พบว่า มีนักเรียน 20% ของเกรด 4 ที่สามารถบอกความยาวของดินสอได้ถูกต้อง (ภาพ 7.7) นอกจากนี้ งานวิจัยของ Kloosterman และคณะ (2009) ยังพบอีกว่า นักเรียนมักจะประสบปัญหาการใช้เครื่องมือที่ไม่ใช่หน่วยมาตรฐาน ผลการวิจัยนี้ชี้ให้เห็นถึงความแตกต่างของการใช้เครื่องมือและการอ่านค่าของเครื่องมือที่ถูกต้อง สำหรับข้อแนะนำของผู้วิจัยนั้น ครูควรให้นักเรียนใช้เครื่องมือที่นักเรียนคุ้นเคย เช่น คลิปหนีบกระดาษ หรือกระเบื้อง เป็นพื้นฐานในการเรียนรู้ก่อน แล้วค่อยพัฒนาไปยังเครื่องมือที่เป็นมาตรฐานที่ใช้ในปัจจุบัน นอกจากนี้ควรให้นักเรียนฝึกการประมาณค่าของคำตอบทุกครั้งก่อนที่จะมีการวัด



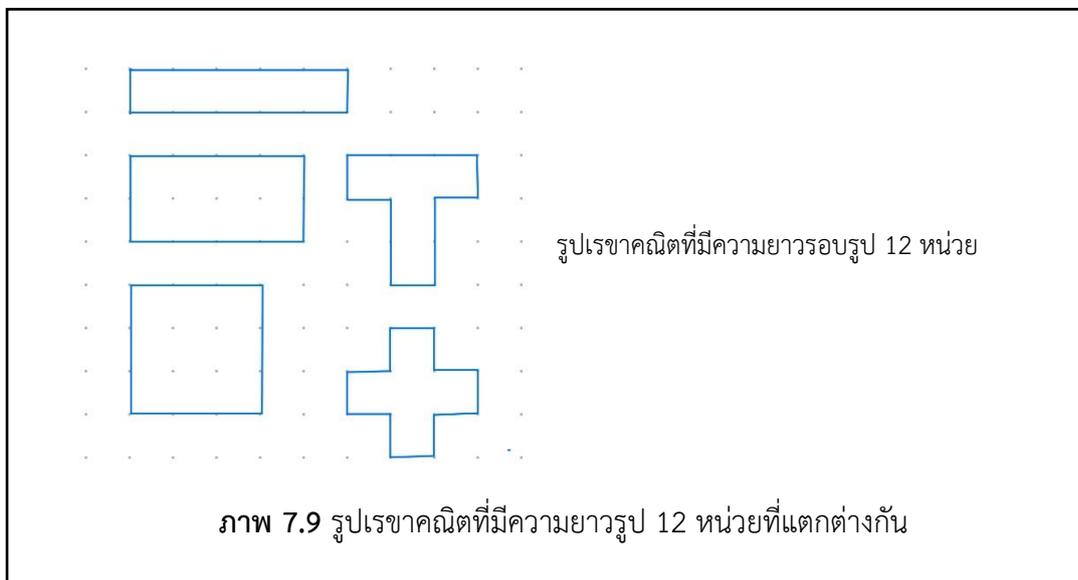
จากการวัดความยาว ครูควรสอดแทรกการประมาณค่าของความยาวก่อนที่นักเรียนลงมือวัดจริง สำหรับการประมาณค่าความยาว มีคำแนะนำดังนี้

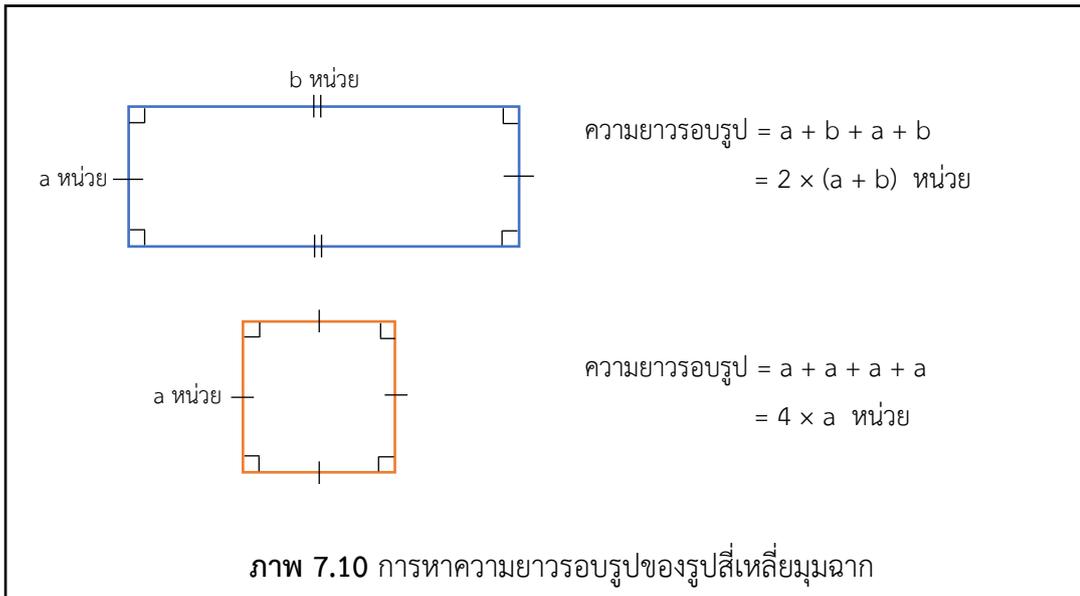
1. ควรสนใจวิธีหรือแนวคิดที่นักเรียนใช้ในการประมาณก่อนทำกิจกรรม
2. ครูควรนำการอภิปรายถึงค่าประมาณที่แตกต่างกัน และส่งเสริมให้นักเรียนแต่ละคนนำเสนอหรืออภิปรายถึงวิธีการประมาณของเพื่อน
3. ส่งเสริมให้นักเรียนประมาณค่าเป็นช่วง เช่น โต๊ะนี้สูงเท่าใด คำตอบที่ได้ประมาณ 100 เซนติเมตรแต่ไม่เกิน 120 เซนติเมตร
4. ควรมีกิจกรรมการประมาณค่าตลอดเวลา โดยทำกิจกรรมสม่ำเสมอไม่รู้สึว่าการประมาณค่าเป็นอีกหนึ่งกิจกรรม และการทำที่ต่อเนื่องแบบนี้จะช่วยฝึกให้นักเรียนประมาณค่าต่าง ๆ ในอนาคต เช่น การประมาณค่าน้ำหนัก การประมาณค่าเวลาที่ใช้ในการเดินทาง การประมาณค่าตอบ เป็นต้น
5. ครูควรมีความชัดเจนของคำที่ใช้ เช่น ให้นักเรียนวัดความยาวของสิ่งของ คำที่ได้จากการวัดไม่ใช่การประมาณค่า และให้นักเรียนประมาณค่าก่อนแล้วจึงค่อยวัด

การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับความยาวรอบรูปนั้น สื่อการสอนที่เป็นที่นิยมและสามารถทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ได้เป็นอย่างดีนั้นคือ กระดาษจุด (dot paper) กิจกรรมการเรียนรู้อาจเริ่มจากให้นักเรียนสำรวจความยาวรอบรูป โดยนับแต่ละด้านของรูป จนได้ข้อสรุปที่ว่า ความยาวรอบรูป คือ ระยะทางรวมของเส้นขอบของรูป (ภาพ 7.8)



เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับความยาวรอบรูปแล้ว ครูอาจใช้กิจกรรมเพื่อพัฒนาโมโนทัศน์ของนักเรียน เช่น ให้นักเรียนวาดรูปเรขาคณิตเมื่อกำหนดความยาวรอบรูปให้ กิจกรรมนี้จะช่วยสร้างมโนทัศน์ที่ว่า รูปเรขาคณิตที่มีความยาวรอบรูปเท่ากันอาจมีหลากหลายรูปแบบ (ภาพ 7.9)



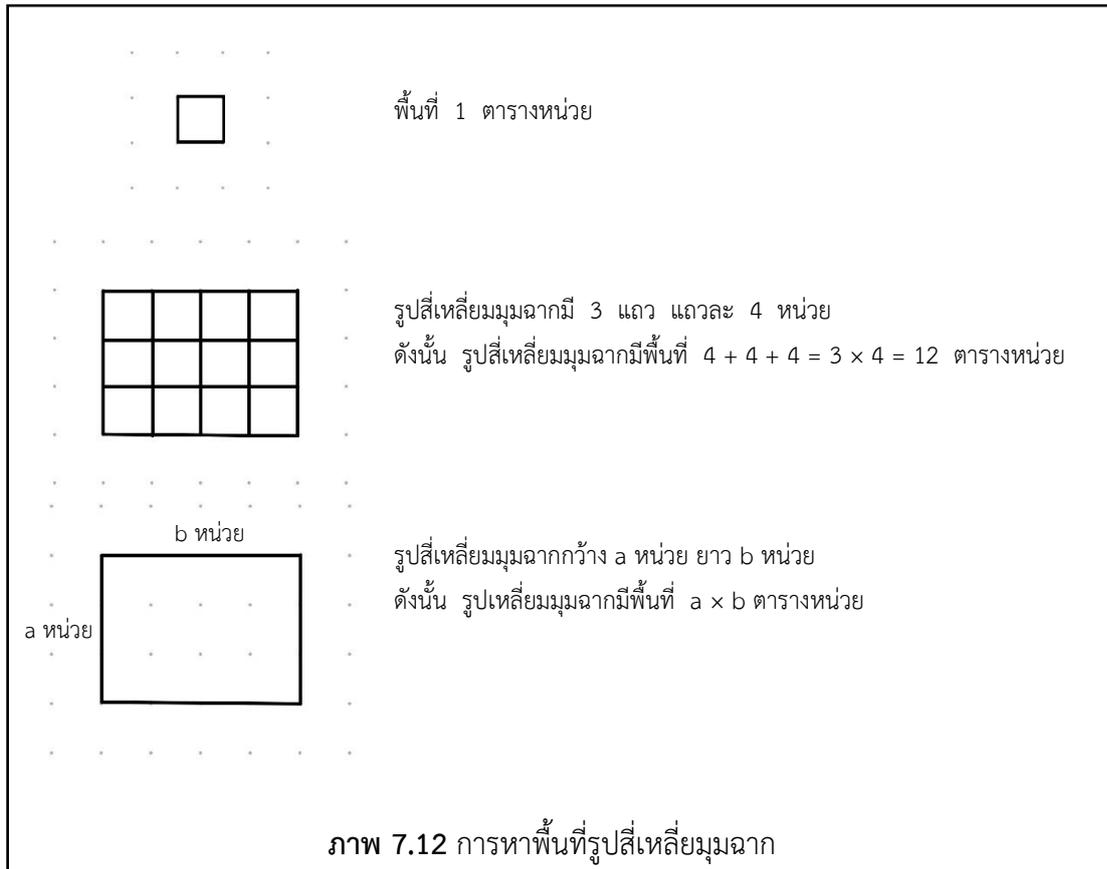


### พื้นที่

พื้นที่เป็นมโนทัศน์ที่เรียนรู้ต่อจากความยาวรอบรูป เริ่มจากชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 หาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน และชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 หาพื้นที่รูปหลายเหลี่ยมและวงกลม (ภาพ 7.11)



ความยาวรอบรูปกับพื้นที่มักเป็นเนื้อหาที่นักเรียนบางคนเกิดความสับสน จากงานวิจัยของ Parmar และคณะ (2011) พบว่าเมื่อกำหนดรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 จะมีนักเรียนเพียง 71% เท่านั้นที่สามารถหาความยาวรอบรูปและพื้นที่ถูกต้อง ผู้วิจัยจึงได้ตั้งข้อสังเกตว่า อาจเกิดจากนักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาเร็วเกินไปหรืออาจเกิดจากนักเรียนเรียนรู้สูตรในการหาความยาวรอบรูปกับพื้นที่ที่เร็วเกินไป

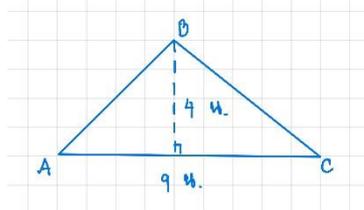


ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เกี่ยวกับการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ครูอาจใช้ความเข้าใจเกี่ยวกับการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก แล้วขยายความรู้ไปยังการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมโดยใช้กิจกรรมดังนี้

ตัวอย่างกิจกรรม พื้นที่รูปสามเหลี่ยม

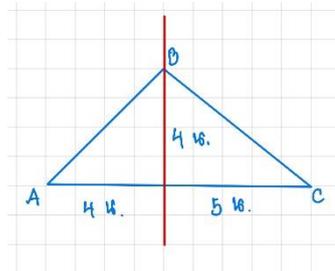
1. ครูให้นักเรียนวาดรูปสามเหลี่ยมพร้อมบนกระดาษที่เตรียมให้ พร้อมทั้งเขียนความยาวฐานและความสูง

ตัวอย่าง



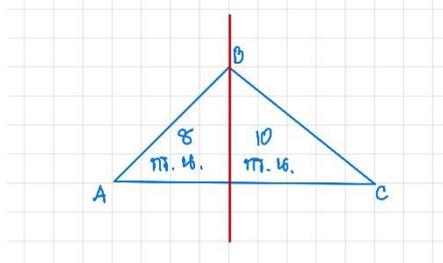
2. ให้นักเรียนลากเส้นตรงผ่านจุดยอดและตั้งฉากกับฐานของรูปสามเหลี่ยม

ตัวอย่าง



3. จากขั้นที่ 2 ให้นักเรียนหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมแต่ละรูป แล้วนำพื้นที่ทั้งสองรูปมาบวกกัน

ตัวอย่าง



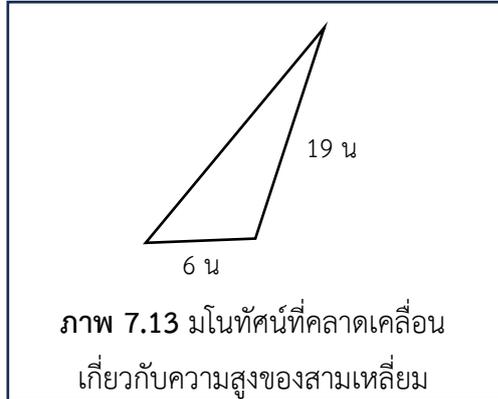
4. ให้นักเรียนเขียนความสัมพันธ์พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมกับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

จากกิจกรรมดังกล่าว นักเรียนจะวาดรูปสามเหลี่ยมที่ต่างกันไป แต่ทุกคนจะสามารถสรุปได้ ดังนี้ ถ้าความยาวฐานของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ ความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และความสูงของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก พื้นที่ของสามเหลี่ยมจะเท่ากับ ครึ่งหนึ่งของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับพื้นที่มีข้อแนะนำดังนี้

1. นักเรียนจะสับสนระหว่างความยาวรอบรูปกับพื้นที่ โดยเฉพาะการหาความยาวรอบรูปของวงกลมกับพื้นที่ของวงกลม

2. ในการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม นักเรียนมีความสับสนเกี่ยวกับความสูงของรูปสามเหลี่ยม จากภาพ 7.13 จะพบว่านักเรียนมีความเข้าใจว่ารูปสามเหลี่ยมสูง 19 หน่วย ในประเด็นนี้ครูควรอธิบายว่าความสูงคือการลากส่วนของเส้นตรงจากจุดยอดมาตั้งฉากกับฐาน ดังนั้นส่วนของเส้นตรงใดที่ลากจากจุดยอดไม่ได้ตั้งฉากกับฐานนั้นไม่ใช่ความสูงของรูปสามเหลี่ยม



3. ในการหาคำตอบของรูปเรขาคณิตที่มีการเติมคำตอบ หรือแสดงวิธีทำ นักเรียนมักจะลืมเขียนหน่วย เช่น ตารางหน่วย ตารางเมตร เป็นต้น ในประเด็นนี้ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนเขียนหน่วยของพื้นที่ทุกครั้ง เช่นเดียวกับการเขียนหน่วยของความยาวหรือปริมาตร

4. ในการหาพื้นที่วงกลม ครูไม่ควรใช้สูตร  $\pi r^2$  เพราะนักเรียนยังไม่มีความรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลัง ควรใช้  $\pi \times r \times r$  และเน้นย้ำถึงค่าประมาณของ  $\pi$  เพราะนักเรียนบางคนมีมโนทัศน์ค่าที่ใช้กันเป็นค่าที่แท้จริงของ  $\pi$

### เงิน

ตัวชี้วัดได้กำหนดให้นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับเงินในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เงินนั้นเป็นสิ่งที่นักเรียนรู้จักและใช้ในชีวิตจริงทุกวัน แต่การเรียนรู้เงินในชั้นนี้นั้นมุ่งเน้นไปยังการอ่าน เขียน เปรียบเทียบ การแลกเปลี่ยน และการทำบันทึกรายรับรายจ่ายเกี่ยวกับเงิน นอกจากนี้ยังมีการเขียนมูลค่าของเงินเป็นทศนิยม การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับเงินควรเป็นการนำสถานการณ์ที่อยู่รอบตัวนักเรียนมาช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ โดยจากงานวิจัยของ พยอม กุลสง และวรินทร์ พูนไพบูลย์พิพัฒน์ (2565) ที่ได้ศึกษาการจัดการเรียนรู้ที่เน้นการปฏิบัติโดยใช้งานทางคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาสมรรถนะคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน เรื่องเงินและบันทึกรายรับรายจ่าย สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 พบว่านักเรียนสามารถคิดในใจในการบวกลบคูณหารเงินได้อย่างคล่องแคล่วองไวแม่นยำเพื่อแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นในสถานการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตจริง นอกจากนี้วีระชัย สีทาน้อย (2561) ยังได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 เรื่องเงิน โดยการใช้เกมเพื่อการเรียนรู้ พบว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ที่ดีขึ้นและนักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยกับการ

จัดกิจกรรมการเรียนรู้ในรูปแบบของเกม หรืองานวิจัยของ อัจฉรา ชุโนมอค์ (2558) ที่พบว่านักเรียนมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ดีขึ้นหลังจากการวัดการเรียนรู้เรื่องเงินโดยใช้สถานการณ์จำลอง

### เวลา

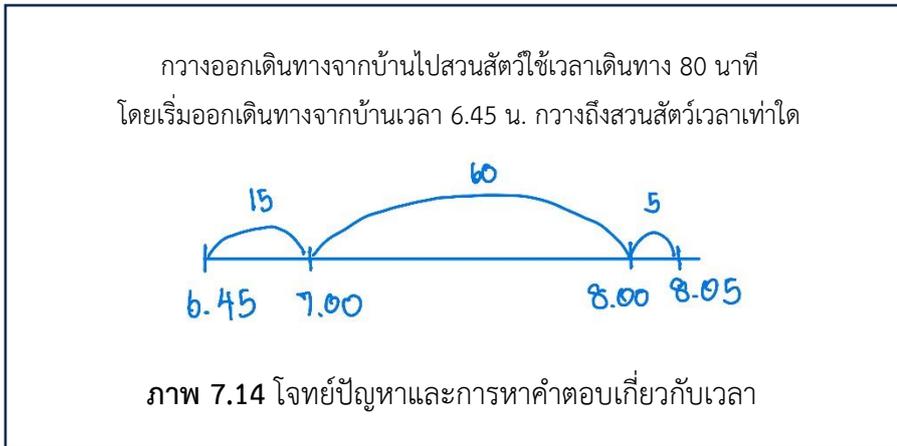
เวลาเป็นเนื้อหาที่ยากในการเรียนรู้ของนักเรียน เพราะเวลาเป็นสิ่งที่ไม่สามารถมองเห็นได้อย่างชัดเจน หรือเป็นรูปธรรม ดังนั้นการเรียนรู้เกี่ยวกับเวลาของนักเรียนจึงควรเป็นการเรียนรู้ผ่านกิจกรรมที่นักเรียนปฏิบัติเป็นประจำ เช่น นักเรียนใช้เวลาแปรงฟันนานเท่าใด นักเรียนออกเดินทางจากบ้านมาโรงเรียนในเวลาใด การเรียนรู้เกี่ยวกับเวลาจะมุ่งเน้นอยู่ 2 สิ่ง นั่นคือ การบอกเวลากับการบอกระยะเวลา

การบอกเวลาเป็นนาฬิกาและนาที จะใช้ มหัพภาค (.) หรือทวิภาค (:) เช่น 17.30 น. หรือ 17:30 น. บอกเวลา 17 นาฬิกา 30 นาที

การบอกระยะเวลา หมายถึง ช่วงเวลาที่ต่อเนื่องจากเวลาหนึ่งไปอีกเวลาหนึ่ง เครื่องหมายวรรคตอนที่ใช้คือ ทวิภาค (:) เช่น ฟังอ่านหนังสือ 2:15 หมายถึง ฟังใช้เวลาอ่านหนังสือ 2 ชั่วโมง กับ 15 นาที

สำหรับการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับเวลามีข้อเสนอแนะดังนี้

1. ควรเริ่มต้นด้วยการให้นักเรียนบอกเวลาที่ปรากฏบนหน้าปัดได้ และบางครั้งนักเรียนจะสื่อสารอย่างไม่เป็นทางการ เช่น เข็มสั้นชี้ระหว่าง 7 กับ 8 หรือ เข็มสั้นเกือบจะชี้ 9 เป็นต้น หลังจากนั้นจึงค่อยอธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างเข็มสั้นกับเข็มนยาว
2. อภิปรายเกี่ยวกับเข็มสั้นกับเข็มนยาว หรือเมื่อเข็มนยาวชี้ในช่องระหว่างตัวเลข
3. ควรสอนช่วงเวลา 5 นาที หรือ 10 นาที และพัฒนาความเข้าใจโดยอาจใช้กิจกรรมการประมาณค่ามาช่วย
4. ควรสอนการอ่านเวลาของนาฬิกาแบบดิจิตัล และอาจให้จับคู่นาฬิกาแบบหน้าปัดกับแบบดิจิตัล
5. ครูควรใช้การวาดเส้นจำนวนเพื่อช่วยให้นักเรียนสามารถหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเวลา (ภาพ 7.14)



### มุม

มุมเป็นเนื้อหาที่กำหนดไว้ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ก่อนที่จะเรียนรู้เกี่ยวกับมุม ต้องมีการเตรียมความพร้อมโดยเริ่มจาก ระนาบ จุด เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง และรังสี โดยมีโมโนทัศน์ดังนี้

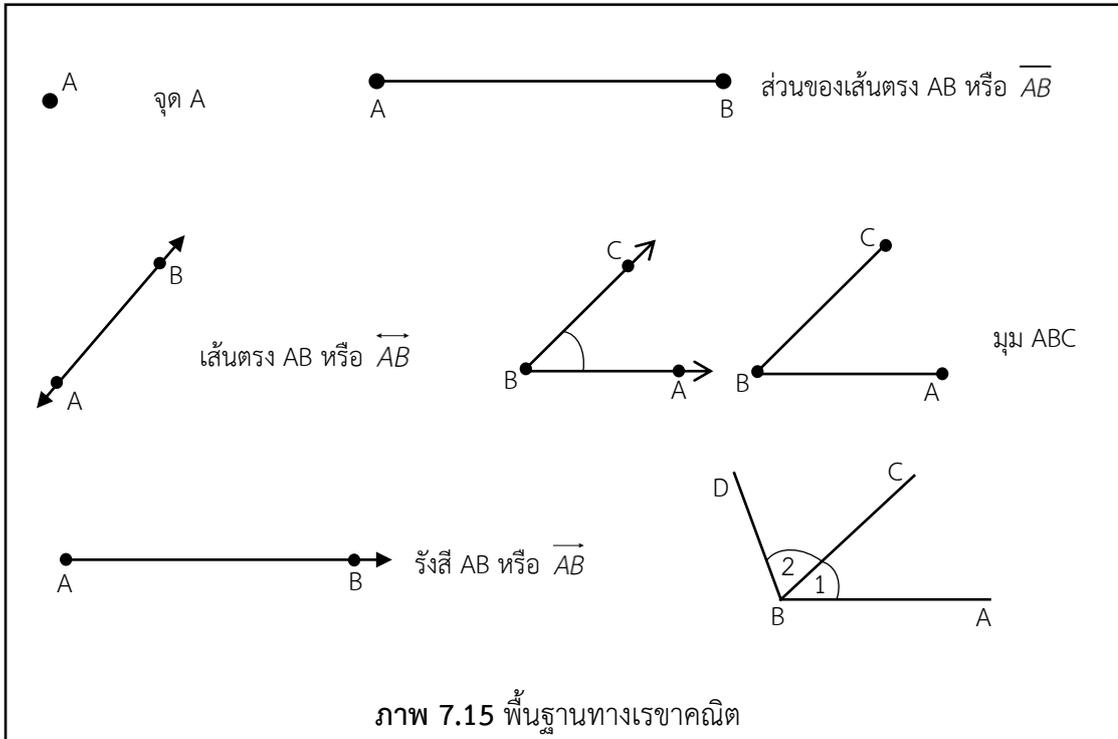
สิ่งที่ลักษณะแบนราบ เรียบ และมีอาณาบริเวณไม่จำกัด เรียกว่า ระนาบ และรูปเรขาคณิตบางอย่าง เช่น จุด เส้นตรง รูปสามเหลี่ยม วงกลม สามารถเขียนบนระนาบได้

จุด เป็นอนิยาม หรือคำที่ให้ความหมายไม่ได้ มีไว้เพื่อบอกตำแหน่ง โดยใช้ • เขียนบนระนาบ และนิยมใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ หรือพยัญชนะไทยเขียนกำกับไว้ เช่น จุด  $A$  และจุด  $B$  หรือ จุด ก

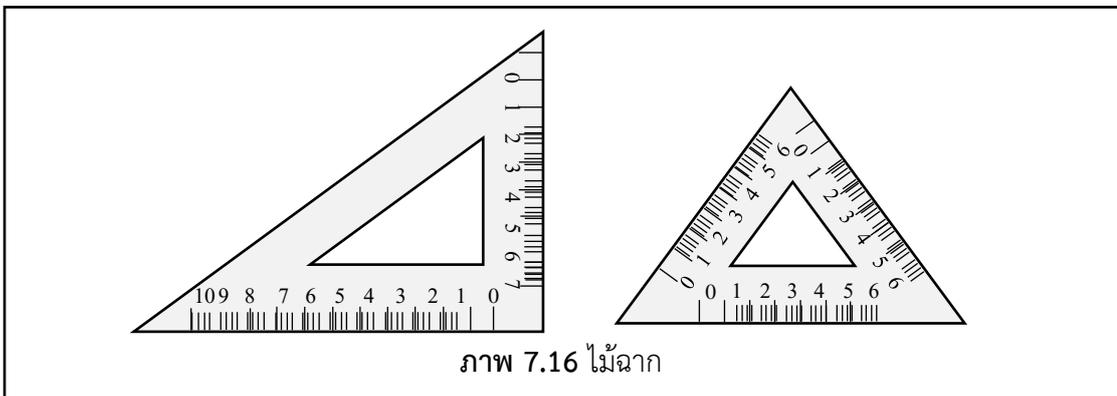
เส้นในแนวตรงที่มีความยาวไม่จำกัด เรียกว่า เส้นตรง และเมื่อกำหนดจุด  $A$  และจุด  $B$  บนระนาบ เส้นตรงที่ผ่านจุด  $A$  และจุด  $B$  จะเรียกว่า เส้นตรง  $AB$  หรือ เส้นตรง  $BA$  เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\overline{AB}$  หรือ  $\overline{BA}$  และเมื่อกำหนดส่วนหนึ่งของเส้นตรงให้มีจุดปลาย 1 จุด จะเรียกสิ่งนั้นว่ารังสี เช่น กำหนดจุด  $A$  เป็นจุดปลายของรังสี และจุด  $B$  เป็นจุดอีกจุดหนึ่งบนรังสี เรียกสิ่งนี้ว่ารังสี  $AB$  เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\overrightarrow{AB}$  และถ้ามีกำหนดให้เส้นตรงมีจุดปลาย 2 จุด จะเรียกว่าส่วนของเส้นตรง  $AB$  หรือส่วนของเส้นตรง  $BA$  เขียนแทนด้วย  $\overline{AB}$  หรือ  $\overline{BA}$  เนื่องจากส่วนของเส้นตรงมีจุดปลาย 2 จุด จึงมีความยาวที่จำกัด ทำให้สามารถวัดความยาวส่วนของเส้นตรงได้ และนิยมใช้  $m$  แทน ความยาวส่วนของเส้นตรง เช่น ความยาวของ  $\overline{AB}$  เขียนแทนด้วย  $m(\overline{AB})$  อ่านว่า ความยาวของส่วนของเส้นตรง  $\overline{AB}$  (ภาพ 7.15)

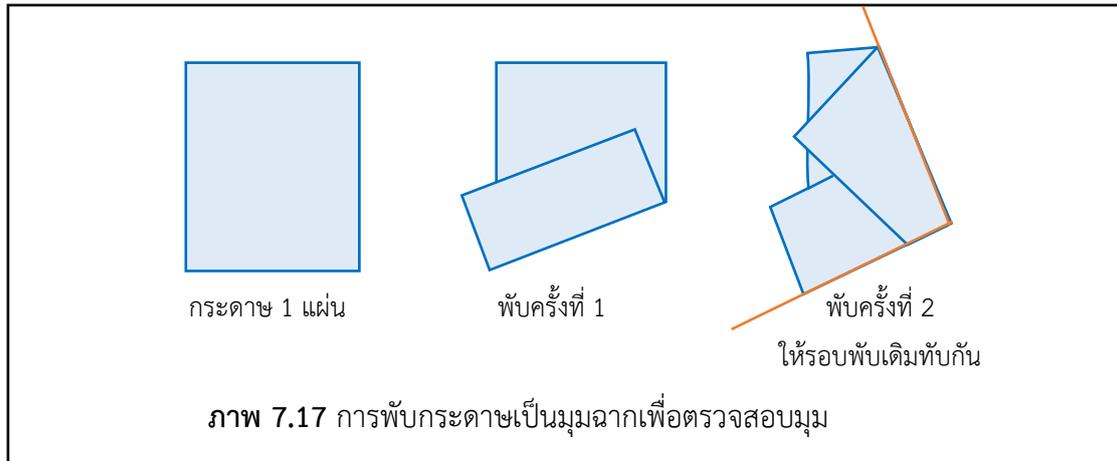
เมื่อนักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับองค์ประกอบพื้นฐานทางเรขาคณิตแล้วจึงสามารถนำความรู้เหล่านั้นมาเรียนรู้เนื้อหา ดังนี้ รังสี 2 เส้นที่มีจุดปลายเป็นจุดเดียวกัน เรียกว่า มุม และรังสี 2 เส้นนี้เรียกว่าแขนของมุม และจุดปลายที่เป็นจุดเดียวกันนี้เรียกว่า จุดยอดมุม ในกรณีที่มีจุดยอดมุมเป็นของมุมเพียงมุมเดียว การเรียกชื่อมุม อาจเรียกตามชื่อจุดยอดมุนั้น เช่น  $ABC$  มีจุด  $B$  เป็นจุดยอด

มุม อาจเรียกมุมนี้ว่า มุม  $B$  เขียนแทนด้วย  $B$  ในกรณีที่จุดยอดมุมเป็นมุมหลายมุม การเรียกชื่อมุม อาจใช้ตัวเลขกำกับเพื่ออ้างถึงมุมที่ต้องการ



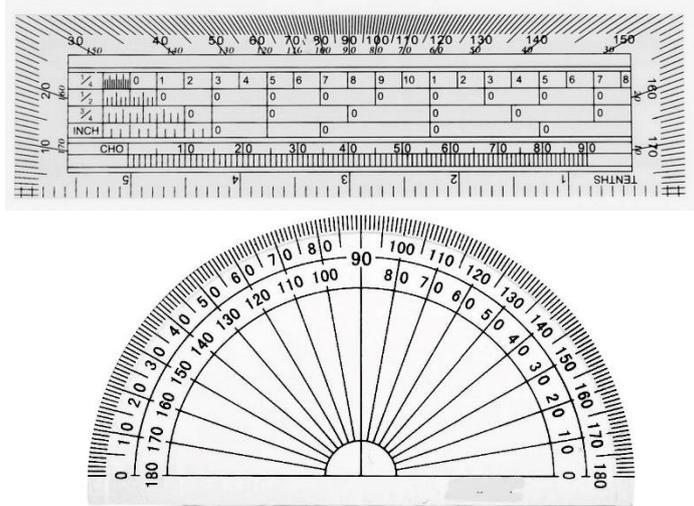
ในส่วนของการวัดมุนั้น อาจเริ่มจาก ไม้ฉาก (ภาพ 7.16) ซึ่งเป็นเครื่องมือที่ใช้ตรวจสอบว่า มุมที่ต้องการวัดเป็นมุมฉากหรือไม่ เมื่อต้องการกำหนดว่าเป็นมุมฉาก หรือเป็นมุมที่มีขนาด 1 มุมฉาก นิยมเขียนสัญลักษณ์  $\perp$  ไว้ที่บริเวณใกล้จุดยอดมุม และมุมที่มีขนาด 2 มุมฉาก เรียกว่า มุมสองมุมฉาก หรือ มุมตรง นอกจากนี้ไม้ฉากยังสามารถตรวจสอบได้อีกว่ามุมที่ต้องการวัดมีขนาดเล็กกว่ามุมฉากหรือไม่ ถ้ามุนั้นเล็กกว่ามุมฉาก เรียกว่า มุมแหลม และถ้ามุนั้นมีขนาดใหญ่กว่ามุมฉากแต่เล็กกว่ามุมตรง เรียกว่า มุมป้าน





สำหรับการวัดขนาดของมุมนั้น เป็นการหาปริมาณที่เกิดจากการหมุนแขนของมุมแขนใดแขนหนึ่งไปทับแขนของมุมอีกแขนหนึ่ง โดยมีจุดยอดมุมเป็นจุดหมุน หน่วยที่ใช้บอกขนาดของมุมคือ องศา เขียนแทนด้วย  $^{\circ}$  เมื่อหมุนแขนของมุมครบ 1 รอบ จะได้มุมที่มีขนาด 4 มุมฉาก ซึ่งกำหนดให้เท่ากับ 360 องศา หรือ  $360^{\circ}$  โดยจะเขียนส่วนโค้งของวงกลมที่บริเวณใกล้จุดยอดมุม เพื่อแสดงการหมุนแขนของมุม และมีการใช้  $m$  แทน ขนาดของมุม เช่น ขนาดของมุม  $ABC$  เขียนแทนด้วย  $m(ABC)$  หรือมุม  $XYZ$  มีขนาด 60 องศา เขียนแทนด้วย  $m(XYZ) = 60^{\circ}$  การวัดขนาดของมุมนั้นจะใช้โปรแทรกเตอร์ (ภาพ 7.18) สำหรับมุมที่ได้จากการวัดสามารถจำแนกได้ดังนี้

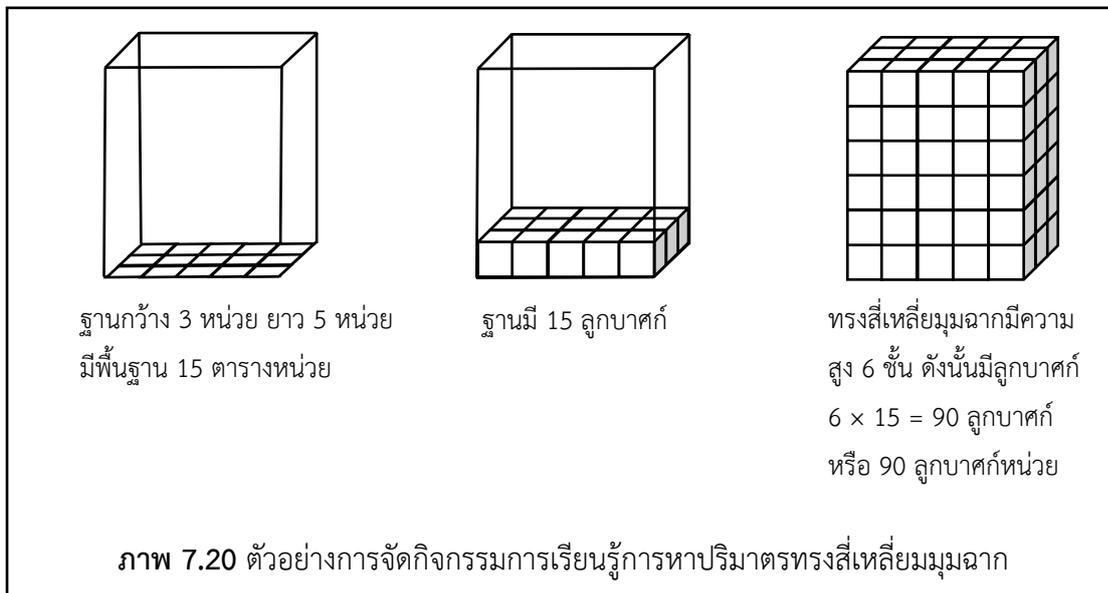
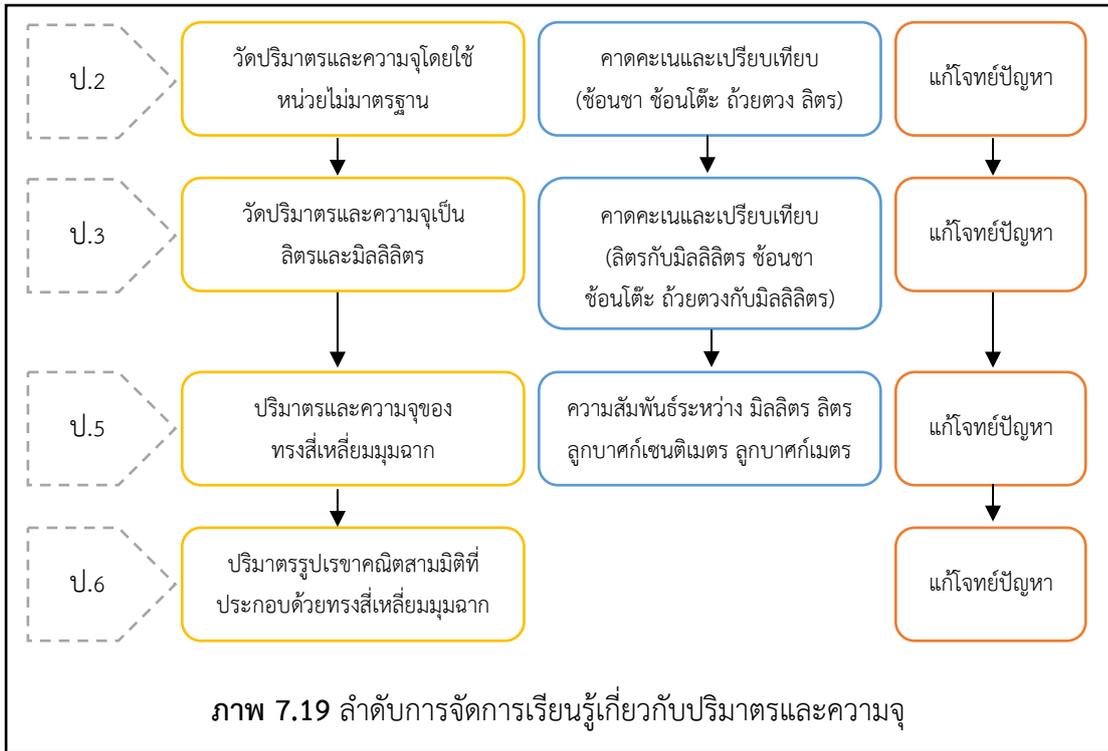
มุมศูนย์	มีขนาด $0^{\circ}$
มุมแหลม	มีขนาดมากกว่า $0^{\circ}$ แต่น้อยกว่า $90^{\circ}$
มุมฉาก	มีขนาด $90^{\circ}$
มุมป้าน	มีขนาดมากกว่า $90^{\circ}$ แต่น้อยกว่า $180^{\circ}$
มุมตรง	มีขนาด $180^{\circ}$
มุมกลับ	มีขนาดมากกว่า $180^{\circ}$ แต่น้อยกว่า $360^{\circ}$



ภาพ 7.18 โพรแทรกเตอร์ชนิดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และโพรแทรกเตอร์ชนิดครึ่งวงกลม

### ปริมาตรและความจุ

ปริมาตรและความจุเป็นการวัดของขนาดรูปเรขาคณิตสามมิติ ซึ่งการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในระดับประถมศึกษาปีที่ 2 ควรมุ่งเน้นการจัดโดยใช้กิจกรรมจริง หรือการทดลองเพื่อให้นักเรียนสังเกตผ่านการตวง สำหรับคำว่าปริมาตรและความจุเป็นคำพื้นฐานที่นักเรียนจะเรียนรู้ซึ่งมีความแตกต่างกันเล็กน้อย ครูอาจใช้กิจกรรมดังนี้เพื่ออธิบายความหมายของทั้งสองคำ เช่น ครูนำน้ำเทออกจากขวดใส่แก้ว พบว่าได้ 3 แก้วพอดี กล่าวได้ว่าน้ำในขวดมีปริมาตร 3 แก้ว ถ้าครูใส่น้ำในขวดจนเต็มแล้วนำมาเทใส่แก้ว พบว่าได้ 4 แก้ว แสดงว่า ขวดใบนี้มี ความจุ 4 แก้ว สำหรับการจัดการเรียนรู้จะมุ่งเน้นศึกษาการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก (ภาพ 7.19) ซึ่งสามารถทำได้โดยใช้สูตรการคำนวณ (ภาพ 7.20)



### ตัวอย่างงานวิจัยเกี่ยวกับการวัดและเรขาคณิต

สำหรับงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวัดและเรขาคณิตในระดับประถมศึกษา จะเป็นงานวิจัยที่มุ่งเน้นการนำแนวคิดของ van Hiele มาปรับและประยุกต์ใช้กับเครื่องมือหรือสื่อการสอน สามารถสรุปได้ดังนี้

ณัฐวดี จิตราพิเนตร (2565) ได้พัฒนากิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามรูปแบบแวนฮีลี โดยใช้โปรแกรมจีเอสพีเรื่อง วงกลม ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยจุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนา กิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามรูปแบบแวนฮีลีโดยใช้โปรแกรมจีเอสพี เรื่อง วงกลม ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 70/70 ศึกษาค่าดัชนีประสิทธิผล ศึกษาความคิดเชิงเรขาคณิตก่อนเรียน และหลังเรียน เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน กับเกณฑ์ร้อยละ 70 และศึกษาความพึงพอใจที่มีต่อการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ข้างต้น มีตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนบ้านหนองผือ จังหวัดมหาสารคาม จำนวน 1 ห้องเรียน ทั้งหมด 11 คน สำหรับแผนการจัดการเรียนรู้ที่พัฒนานั้นจะประกอบไปด้วย 5 ขั้นตอน ดังนี้ ขั้นที่ 1 ขั้นการรับข้อมูล (Information or Inquiry) เป็นขั้นที่นักเรียนลงมือปฏิบัติ มีการสำรวจข้อเท็จจริงและแสดงความคิดเห็นขณะปฏิบัติโดย ในขณะเดียวกันนักเรียนจะมีการสังเกต ตั้งคำถาม และตีความเกี่ยวกับรูปวงกลมที่กำลังเรียนในขณะนั้น ขั้นที่ 2 ขั้นการแนะนำสิ่งใหม่ (Directed orientation) นักเรียนสำรวจปัญหาและพัฒนาความคิดรวบยอดจากความรู้พื้นฐานที่สังเกตได้จากการปฏิบัติในขั้นที่ 1 นักเรียนจะมีการพูดคุยพร้อมก็นำข้อมูลที่สำรวจได้มาสร้างความเข้าใจเรื่องวงกลม ได้รับการอธิบายโดยตรงจากครูเกี่ยวกับความหมาย สัญลักษณ์ต่าง ๆ และสิ่งที่เป็นปัญหาที่เกิดขึ้นในขั้นที่ 1 โดยใช้โปรแกรม GSP ประกอบการอธิบาย ขั้นที่ 3 ขั้นการอธิบาย (Explication) นักเรียนจะต้องอธิบายรายละเอียดของความคิดรวบยอดของวงกลมโดยใช้ความคิดรวบยอดที่หลากหลายซึ่งเป็นผลจากการปฏิบัติในขั้นที่ 2 ในขั้นตอนนี้ครูสามารถที่จะแนะนำศัพท์เฉพาะที่ใช้ในการอธิบายสิ่งที่นักเรียนสังเกตได้ ขั้นที่ 4 ขั้นการกำหนดทิศทางอย่างมีอิสระ (Free orientation) นักเรียนทำกิจกรรมที่ต้องใช้ขั้นตอนการแก้ปัญหาที่ซับซ้อน นักเรียนจะใช้ความสามารถและประสบการณ์เดิมช่วยในการแก้ปัญหาและกิจกรรมนั้นต้องเป็นกิจกรรมที่ต้องมีการทำนายหรือคาดการณ์โดยใช้แบบฝึกทักษะ และขั้นที่ 5 ขั้นบูรณาการ (Integration) นักเรียนต้องอธิบาย ตีความ คาดการณ์หรือทำนายและสรุปสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้โดยการเชื่อมโยงแต่ละส่วนที่ได้จากการเรียนรู้ให้สัมพันธ์กัน ผู้วิจัยได้นำแผนที่พัฒนาไปหาประสิทธิภาพได้ 87.60/79.55 และค่าดัชนีประสิทธิผลเท่ากับ 0.7852 แสดงว่านักเรียนมีความก้าวหน้าเพิ่มขึ้นร้อยละ 78.52 อีกทั้งนักเรียนที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้ดังกล่าว มีความคิดเชิงเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน ร้อยละ 50.83 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคิดเป็นร้อยละ 79.55 สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 ที่ระดับนัยสำคัญ .05 นอกจากนี้ยังมีความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ในระดับมากที่สุด

ชณัญ แชมมมงคลธรรม (2563) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องรูปเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่มีความบกพร่องทางการได้ยิน จากการสอนตามแนวความคิดเชิงเรขาคณิต การวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องรูปเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่มีความบกพร่องทางการได้ยิน หลังการสอนโดยใช้การสอนตามแนวความคิดเชิงเรขาคณิต และเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องรูปเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่มีความบกพร่องทางการได้ยิน ก่อนและหลังการสอนโดยใช้การสอนตามแนวความคิดเชิงเรขาคณิต ตัวอย่าง ได้แก่ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่มีความบกพร่องทางการได้ยิน ในระดับ 56-90 เดซิเบลขึ้นไป และไม่มี ความพิการซ้อนที่กำลังศึกษาอยู่ที่โรงเรียนนครราชสีมาปัญญานุกูล จังหวัดนครราชสีมา ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2555 ที่ไม่เคยเรียนเรื่องรูปเรขาคณิตมาก่อน จำนวน 5 คน ผู้วิจัยได้พัฒนาแผน การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องรูปเรขาคณิตโดยใช้ทฤษฎีพัฒนาการทางความคิดเรขาคณิต ของแวน ฮีลี จำนวน 6 แผน ใช้เวลาในการทดลองแผนละ 1 ชั่วโมง รวมทั้งสิ้น 6 ชั่วโมง ผลการวิจัย พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องรูปเรขาคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่มีความบกพร่องทางการได้ยินหลังการสอนตามแนวความคิดเชิงเรขาคณิตอยู่ในระดับดี ค่ามัธยฐาน เท่ากับ 16 คะแนน จากคะแนนเต็ม 20 คะแนน และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่อง รูปเรขาคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่มีความบกพร่องทางการได้ยินหลังการสอนตาม แนวความคิดเชิงเรขาคณิตสูงขึ้น

## สรุป

การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตจะเริ่มจากการศึกษาจุด เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง รังสี โดยนำ ความรู้พื้นฐานเหล่านี้มาพัฒนาในการวัดมุม ความยาวรอบรูป พื้นที่ ซึ่งแนวคิดได้รับการยอมรับ กันมากที่สุดในการวัดการเรียนรู้เรขาคณิตคือ ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ van Hiele โดยมีทั้งหมด 5 ระดับ ได้แก่ ระดับ 0 ขั้นพื้นฐานหรือขั้นการมองเห็น ระดับ 1 ขั้นการวิเคราะห์ ระดับ 2 การอนุมานอย่างไม่มีแบบแผน ระดับ 3 ขั้นการพิสูจน์อย่างเป็นแบบแผนหรือขั้นอุปนัย ระดับ 4 ขั้นการคิดขั้นสุดยอด โดยในแต่ละระดับนักเรียนจะมีวิธีการเรียนรู้ที่แตกต่างกัน ดังนั้น การจัดการเรียนรู้ของครูก็ต้องแตกต่างกันด้วย และครูควรตรวจสอบว่านักเรียนมีความสามารถอยู่ใน ขั้นใด และจะทำให้ให้นักเรียนไปยังขั้นถัดไปได้อย่างไร สำหรับการวัดจะมุ่งเน้นศึกษาการวัดความยาว น้ำหนัก เงิน เวลา และปริมาตร โดยเป็นการวัดที่ต้องใช้เครื่องมือ และบอกความยาว น้ำหนัก และปริมาตรโดยใช้หน่วยไม่มาตรฐาน และพัฒนาการเป็นหน่วยมาตรฐาน โดยสามารถบอกเป็นหน่วย เดี่ยว หรือหน่วยผสม และสามารถเปลี่ยนหน่วยได้อย่างถูกต้อง

## บทที่ 8

### มโนทัศน์เกี่ยวกับสถิติ

ในปี 2565 ประเทศไทยมีจำนวนนักท่องเที่ยวต่างชาติเดินทางเข้าประเทศไทยรวม 11,818,727 คน สร้างรายได้ 1.5 ล้านล้านบาท โดยอันดับ 1 เป็นนักท่องเที่ยวชาวมาเลเซีย 257,684 คน รองลงมา เป็นนักท่องเที่ยวชาวรัสเซีย 202,642 คน จากข้อความเป็นการบอกข้อมูลที่นักเรียนสามารถอ่านหรือได้ยินจากชีวิตจริง หรือเป็นข้อมูลที่นักเรียนสามารถเข้าถึง หรือสืบค้นได้ง่าย แต่ก่อนที่นำข้อมูลเหล่านี้ มาใช้ให้เกิดประโยชน์นั้นควรสนใจว่าข้อมูลนี้มีความน่าเชื่อถือหรือไม่ มีการใช้วิธีการใดในการเก็บ รวบรวมข้อมูล ข้อมูลที่ได้มาสามารถนำไปใช้ประโยชน์อะไรได้บ้าง โดยเฉพาะในปัจจุบัน โลกของเรามี ข้อมูลจำนวนมาก และสามารถเข้าถึงข้อมูลเหล่านี้ได้ง่าย ครูหรือผู้ปกครองจะต้องเตรียมความพร้อม ให้ความรู้เกี่ยวกับการนำข้อมูลเหล่านี้มาใช้ให้เกิดประโยชน์กับตนเอง คนรอบข้างและสังคม โดย กระบวนการเหล่านี้นักเรียนจะเรียนรู้ในมโนทัศน์ที่เรียกว่า สถิติ (Statistics)

การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับสถิติที่ผ่านมาจะเน้นการคิดคำนวณมากกว่าความหมายที่แท้จริง และเน้นกระบวนการทางสถิติทั้งการเก็บรวบรวมข้อมูล การจัดการข้อมูล การนำเสนอข้อมูล และการ วิเคราะห์และแปลความหมายข้อมูล ทำให้นักเรียนไม่เห็นความสำคัญของการเรียนสถิติ ยิ่งสังคมใน ปัจจุบันที่มีข้อมูลมากมาย ทำให้การจัดการเรียนรู้ควรต้องทำให้นักเรียนมีกระบวนการคิดและการ ตัดสินใจที่ดี มีการนำข้อมูลไปใช้อย่างเกิดคุณค่ามากที่สุด กระบวนการนี้เรียกว่า *การคิดเชิงสถิติ (Statistical thinking)* (MacGillvray and Mendoza, 2011; Noll, 2011) สำหรับการคิดเชิงสถิติ ไม่ใช่เรื่องใหม่ ครูหรือนักการศึกษาพยายามหาวิธีหรือแนวทางในการพัฒนาการคิดรูปแบบนี้ เช่น รา มนตรี ภูมิดีบุตร และคณะ (2557) ได้พัฒนากรอบแนวคิดการคิดเชิงสถิติอันประกอบไปด้วย กระบวนการวางแผน (Process of planning) กระบวนการเก็บรวบรวมข้อมูล (Process of collecting data) กระบวนการวิเคราะห์ข้อมูล (Process of analyzing data) กระบวนการนำเสนอ ข้อมูล (Process of presentation data) และกระบวนการสรุปผล (Process of summary) หรือ ปรียานุช ปาลี และณัชชา กมล (2563) ที่ศึกษารูปแบบการพัฒนาการคิดเชิงสถิติตามแนวคิด Smith และ Stein ซึ่งประกอบไปด้วย การคาดการณ์ (Anticipating) การติดตามตรวจสอบ (Monitoring) การเลือก (Selecting) การจัดลำดับ (Sequencing) และการเชื่อมโยง (Connecting) เพื่อให้นักเรียน ได้รับการพัฒนาการคิดเชิงสถิติจนทำให้นักเรียนมี *ความฉลาดรู้ด้านสถิติ (Statistical literacy)* Shaughnessy (2007) อธิบายว่า ความฉลาดรู้ด้านสถิติ เป็นความสามารถทำความเข้าใจเกี่ยวกับ ข้อมูลรอบตัว และสามารถตั้งคำถามกับข้อมูลที่ได้รับจากสื่อต่าง ๆ อย่างมีคุณค่า วิจารณ์ พานิช (2563) ได้ขยายความเข้าใจเกี่ยวกับสถิติว่าเป็นการสื่อสารความเป็นจริงให้เข้าใจได้ง่าย และเข้าใจใน มิติที่ลึกและในขณะเดียวกันก็อาจมีคอนอัยสถิติสื่อสารความลวง หรือสื่อสารสาระกึ่งจริงกึ่งเท็จ ความฉลาดรู้ด้านสถิติจึงถือเป็นทักษะชีวิตในยุคปัจจุบันและอนาคตที่จะไม่ถูกโลกยุคข้อมูลข่าวสาร หลอกเอาง่าย ๆ หากไม่ระวัง ตัวเราเองก็อาจใช้สถิติอย่างผิด ๆ กลายเป็นคนลวงโลกโดยไม่รู้ตัวก็ได้ แม้วิชาสถิติจะถูกพัฒนาขึ้นในวิทยาศาสตร์ แต่ปัจจุบันนอกจากใช้ด้านวิทยาศาสตร์แล้ว ยังใช้มากใน มโนทัศน์เกี่ยวกับสถิติ

ด้านการเมือง และด้านสื่อมวลชน สถิติในวิทยาศาสตร์จึงเน้นใช้เพื่อความแม่นยำ บางครั้งอาจมีบุคคลใช้ความรู้ทางสถิติศาสตร์เพื่อบิดเบือนความเข้าใจหรือความเชื่อ นี่คือความฉลาดรู้ที่คนสมัยนี้ต้องมี

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ได้กำหนดมาตรฐานและตัวชี้วัดเกี่ยวกับสถิติในระดับชั้นประถมศึกษาดังนี้

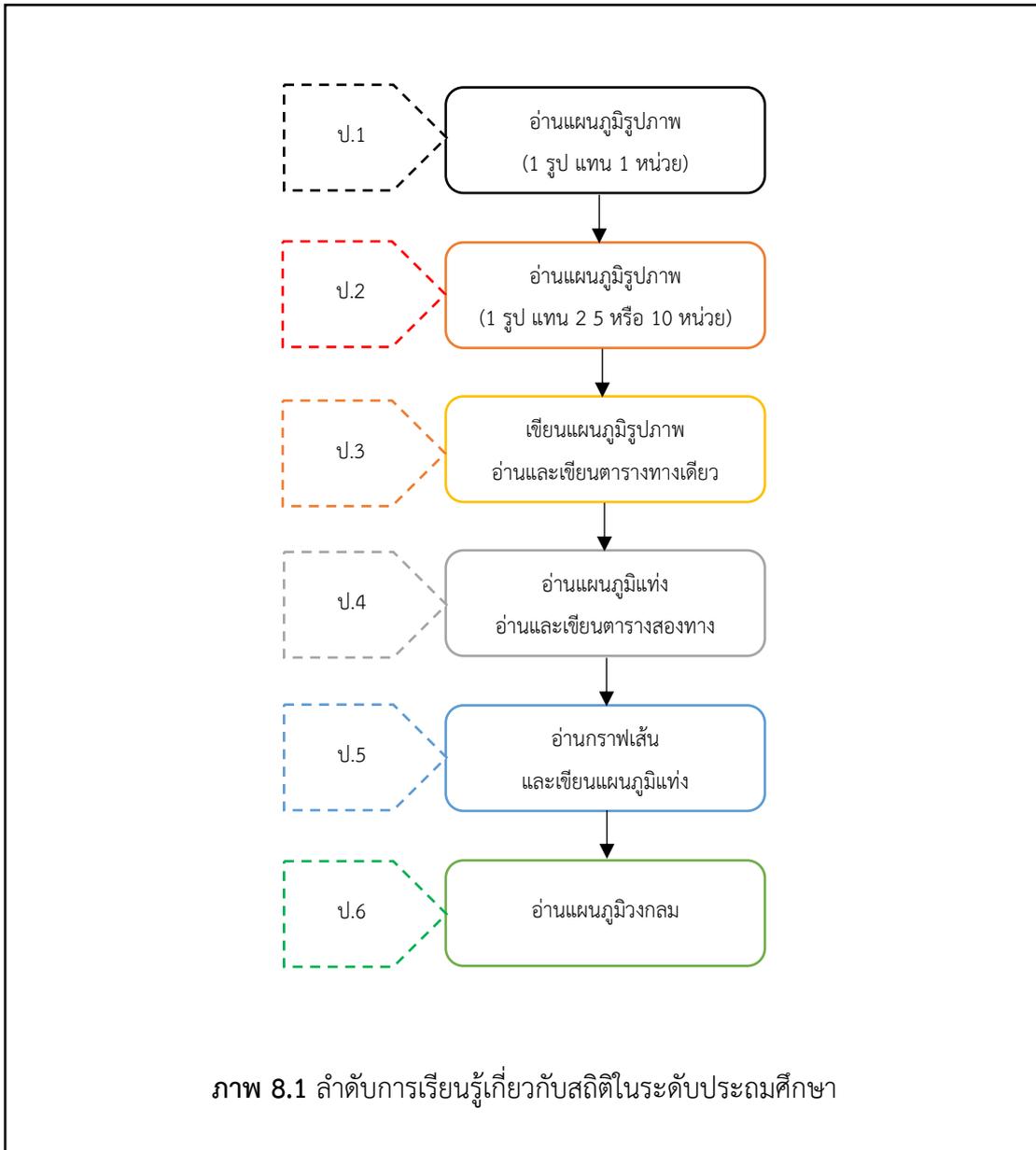
สาระการเรียนรู้ที่ 3 สถิติและความน่าจะเป็น เรียนรู้เกี่ยวกับ การตั้งคำถามทางสถิติ การเก็บรวบรวมข้อมูล การคำนวณค่าสถิติ การนำเสนอและแปลผลสำหรับข้อมูลเชิงคุณภาพและเชิงปริมาณ หลักการนับเบื้องต้น ความน่าจะเป็น การใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นในการอธิบายเหตุการณ์ต่าง ๆ และช่วยในการตัดสินใจ

มาตรฐาน ค 3.1 เข้าใจกระบวนการทางสถิติ และใช้ความรู้ทางสถิติในการแก้ปัญหา

ระดับ	ตัวชี้วัด
ประถมศึกษาปีที่ 1	1. ใช้ข้อมูลจากแผนภูมิรูปภาพในการหาค่าตอบของโจทย์ปัญหา เมื่อกำหนดรูป 1 รูป แทน 1 หน่วย
ประถมศึกษาปีที่ 2	1. ใช้ข้อมูลจากแผนภูมิรูปภาพในการหาค่าตอบของโจทย์ปัญหา เมื่อกำหนดรูป 1 รูป แทน 2 หน่วย 5 หน่วย หรือ 10 หน่วย
ประถมศึกษาปีที่ 3	1. เขียนแผนภูมิรูปภาพ และใช้ข้อมูลจากแผนภูมิรูปภาพในการหาค่าตอบของโจทย์ปัญหา 2. เขียนตารางทางเดียวจากข้อมูลที่เป็นจำนวนนับ และใช้ข้อมูลจากตารางทางเดียวในการหาค่าตอบของโจทย์ปัญหา
ประถมศึกษาปีที่ 4	1. ใช้ข้อมูลจากแผนภูมิแท่ง ตารางสองทางในการหาค่าตอบของโจทย์ปัญหา
ประถมศึกษาปีที่ 5	1. ใช้ข้อมูลจากกราฟเส้นในการหาค่าตอบของโจทย์ปัญหา 2. เขียนแผนภูมิแท่งจากข้อมูลที่เป็นจำนวนนับ
ประถมศึกษาปีที่ 6	1. ใช้ข้อมูลจากแผนภูมิวงกลมในการหาค่าตอบของโจทย์ปัญหา

มาตรฐาน ค 3.2 เข้าใจหลักการนับเบื้องต้น ความน่าจะเป็น และนำไปใช้

ในขณะที่มาตรฐาน ค 3.2 ที่เน้นเกี่ยวกับหลักการนับเบื้องต้น และความน่าจะเป็น ไม่ได้ถูกกำหนดให้จัดการเรียนรู้ในระดับประถมศึกษา เมื่อพิจารณาจากตัวชี้วัดที่กำหนดพบว่าการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับสถิติในระดับประถมศึกษจะเน้นการอ่าน เขียนและตีความข้อมูลจากแผนภูมิต่าง ๆ ดังภาพ 8.1



อย่างไรก็ตามก่อนการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับสถิตินั้นต้องทำความเข้าใจเกี่ยวกับความหมาย ก่อน พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน (2553) ได้ให้ความหมาย ค่าสถิติ (Statistic) ว่าเป็นจำนวนหรือสิ่งที่แสดงลักษณะเฉพาะของตัวอย่าง เช่น ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง ความแปรปรวนตัวอย่าง และวิธีเชิงสถิติ (Statistical method) เป็นกระบวนการทางสถิติที่ใช้ในการศึกษาข้อเท็จจริงของสิ่งต่าง ๆ ประกอบด้วยขั้นตอนที่สำคัญ คือ การเก็บรวบรวมข้อมูล การจัดกระทำข้อมูล การนำเสนอข้อมูล การวิเคราะห์ข้อมูล และการตีความหมายของข้อมูล เพื่อให้ได้ผลสรุปและนำไปใช้ ในขณะที่สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2563) ได้อธิบายว่า การได้ข้อมูลที่มีความน่าเชื่อถือ มีคุณค่าและนำไปใช้ประโยชน์ จะเรียกว่า สถิติ (Statistic) โดยมี

มโนทัศน์เกี่ยวกับสถิติ

กระบวนการที่สำคัญ ได้แก่ การเก็บรวบรวมข้อมูล การจัดการข้อมูล การวิเคราะห์ข้อมูล การแปลความหมายผลลัพธ์ และการนำเสนอข้อมูล

Schaffer (2006) อดีตประธานสมาคมสถิติแห่งอเมริกาได้ตั้งข้อสังเกตว่า คณิตศาสตร์เป็นเรื่องราวเกี่ยวกับตัวเลข จำนวนและการดำเนินการ โดยศึกษาเกี่ยวกับแบบรูปและนามธรรม พร้อมทั้งนำมาใช้ในการคำนวณต่าง ๆ เช่น พื้นที่ การวัด และการแปลง เป็นต้น ในขณะที่สถิติเกี่ยวข้องกับตัวเลข แต่เป็นตัวเลขที่อยู่ในบริบทหรือที่เรียกว่าข้อมูล (data) แต่สถิติเป็นการศึกษาเกี่ยวกับตัวแปร (variables) การกระจาย (distribution) และการแปรผัน (variation) การออกแบบหรือศึกษาอย่างมีจุดมุ่งหมาย พร้อมทั้งการตีความผลลัพธ์หรือผลการศึกษา

Schaffer ได้เสนอตัวอย่าง 2 ตัวอย่าง เพื่อให้เห็นความแตกต่างของการทำสถิติกับการทำคณิตศาสตร์ ดังนี้

สถานการณ์ 1 มะเขือเทศ 50 ผล มีน้ำหนักเฉลี่ย 2.36 ปอนด์ จงหาผลรวมของน้ำหนักมะเขือเทศทั้ง 50 ผล

สถานการณ์ 2 ในการบันทึกข้อมูลการวิ่งระยะทาง 100 เมตร ของนักเรียน 3 คน ทั้ง 7 รอบ ปรากฏผลดังตาราง ถ้าครูต้องการเลือกนักเรียนเพียงหนึ่งคนเป็นตัวแทนไปแข่งขันวิ่ง 100 เมตร ครูควรนักเรียนคนใดจึงจะเหมาะสมที่สุด

ชื่อ	รอบที่						
	1	2	3	4	5	6	7
Suzie	15.2	14.8	15.0	14.7	14.3	14.5	14.5
Tanisha	15.8	15.7	15.4	15.0	14.8	14.6	14.5
Dara	15.6	15.5	14.8	15.1	14.5	14.7	14.5

จากสถานการณ์ทั้ง 2 Schaffer อธิบายว่า ถ้าพิจารณาอย่างหยาบ ๆ พบว่าเป็นคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องสถิติทั้งสิ้น แต่สถานการณ์ 1 เป็นการคำนวณโดยอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์ หรือเป็นการทำคณิตศาสตร์ ดังนั้นจึงไม่ใช่การทำสถิติ ในขณะที่สถานการณ์ 2 ต้องมีการวิเคราะห์ข้อมูล หรือหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นข้อมูลพื้นฐานในการตัดสินใจเลือกนักเรียน โดยอาศัยการทำคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานในการได้มาซึ่งข้อมูลที่ใช้ในการตัดสินใจ ซึ่งกระบวนการเหล่านี้เป็นการทำสถิติ

## การเก็บรวบรวมข้อมูล

การเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นขั้นเริ่มต้นการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับสถิติ การเก็บรวบรวมข้อมูลสามารถทำได้หลากหลายวิธี เช่น การสำรวจ การสังเกต การสอบถาม การสัมภาษณ์ หรือการทดลอง ครูอาจเริ่มต้นเก็บรวบรวมข้อมูลจากกิจกรรมง่าย ๆ ในห้องเรียน การเก็บรวบรวมข้อมูลที่ง่ายที่สุดคือการเก็บรวบรวมข้อมูลที่อยู่กับใกล้ตัวนักเรียนมากที่สุด โดยอาจเริ่มจาก

ความชื่นชอบ : รายการทีวี เกม หนังสือ รสไอศกรีม กีฬา นักร้อง

จำนวน : สัตว์เลี้ยงที่บ้าน พี่น้อง ชั่วโมงที่นอน ชั่วโมงที่เล่นโทรศัพท์

การวัด : ความสูง เวลาที่ใช้ในการเดินทาง ระยะที่กระโดดได้

เมื่อนักเรียนมีความคุ้นเคยกับข้อมูลแล้ว ครูอาจขยายการเก็บรวบรวมข้อมูลโดยให้นักเรียนสังเกตและรวบรวมข้อมูลที่ใกล้ตัวนักเรียน โดยเป็นข้อมูลเกี่ยวกับโรงเรียน ชุมชน หรือข้อมูลทางวิทยาศาสตร์เบื้องต้น เช่น

ร้านอาหารในโรงเรียนมีกี่ประเภท (เช่น อาหารตามสั่ง ก๋วยเตี๋ยว สดวก)

ในปีที่ผ่านมา โรงเรียนมีไฟฟ้าดับกี่ครั้ง หรือ ในปีที่ผ่านมา เกิดเหตุการณ์ไฟไหม้ในชุมชนของนักเรียนกี่ครั้ง

จำนวนขวดพลาสติกหรือกระป๋องน้ำอัดลมในถังขยะรีไซเคิลแต่ละวันในหนึ่งสัปดาห์มีจำนวนเท่าใด

เมื่อโยนลูกบอลประเภทต่าง ๆ จากความสูงที่เท่ากัน ลูกบอลแต่ละประเภทจะแดงทั้งหมดกี่ครั้งก่อนหยุดนิ่ง

บางครั้งข้อมูลนำมาใช้ในการจัดการเรียนรู้ นักเรียนไม่จำเป็นต้องเก็บรวบรวมข้อมูลเอง แต่เป็นการนำข้อมูลที่มีอยู่ในแหล่งต่าง ๆ เช่น อินเทอร์เน็ต อย่างไรก็ตามสิ่งที่ครูควรสอดแทรกคือความน่าเชื่อถือของข้อมูล และการนำข้อมูลมาใช้ประโยชน์ในชีวิตจริง เช่น

รายได้ของภาพยนตร์ต่างประเทศที่เข้าฉายในประเทศไทยในปีที่ผ่านมา

จำนวนเหรียญรางวัลที่ประเทศไทยได้ตั้งแต่เข้าร่วมการแข่งขันกีฬาโอลิมปิก

จำนวนนักท่องเที่ยวที่เข้ามาท่องเที่ยวในประเทศไทยในปี 2566

Russell (2006) ได้อธิบายสิ่งที่ควรตระหนักหลังจากเก็บรวบรวมข้อมูลคือการนำข้อมูลเหล่านี้มาใช้ประโยชน์ โดยการออกแบบการนำเสนอข้อมูลในรูปแบบต่าง ๆ นำข้อมูลเหล่านี้ไปอธิบายสิ่งที่ได้จากการเก็บรวบรวมข้อมูลภายในห้องเรียน เปรียบเทียบกับนักเรียนต่างห้องเรียน หรือเปรียบเทียบข้อมูลกับปีที่ผ่านมา เมื่อนักเรียนเรียนในระดับที่สูงขึ้น สามารถอธิบายถึงประชากร ความแตกต่างของข้อมูลที่ได้จากการเก็บรวบรวมข้อมูล

### การนำเสนอข้อมูล

การนำเสนอข้อมูลที่กำหนดในตัวชี้วัดในระดับประถมศึกษาชั้นนั้น นักเรียนจะเรียนรู้เกี่ยวกับการนำเสนอข้อมูลอันประกอบไปด้วย แผนภูมิรูปภาพ ตารางทางเดียว และตารางสองทาง แผนภูมิแท่ง กราฟเส้น และแผนภูมิวงกลม ในขั้นตอนการนำเสนอด้วยรูปแบบต่าง ๆ นั้น ครูต้องมีความเข้าใจเกี่ยวกับการนำเสนอด้วยรูปแบบต่าง ๆ ความเข้าใจเรื่องประเภทของข้อมูล และความต้องการนำข้อมูลไปใช้เรื่องใดบ้าง เพราะการนำเสนอด้วยรูปแบบที่ต่างกักันจะทำให้การตีความสามารถทำได้โดยง่าย หรือการนำเสนอในบางรูปแบบไม่สามารถทำได้ ดังนั้นการเลือกรูปแบบในการนำเสนอที่สอดคล้อง และเหมาะสมกับข้อมูลจะช่วยให้ผลลัพธ์ถูกต้อง สามารถอธิบายข้อมูล สร้างข้อสรุป และแปลความหมายของข้อมูลให้เข้าใจ

1. แผนภูมิรูปภาพ (pictogram) เป็นมโนทัศน์ที่นักเรียนได้เรียนรู้การอ่านในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ภาพแทนข้อมูล 1 หน่วย ในขณะที่ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 จะใช้ภาพแทนข้อมูล 2 หน่วย 5 หน่วย หรือ 10 หน่วย สำหรับการเขียนนั้นจะเรียนรู้ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โดยแผนภูมิรูปภาพเป็นการนำเสนอข้อมูลด้วยรูปภาพแทนจำนวนของข้อมูล อาจแทนภาพแต่ละภาพด้วยข้อมูล 1 หน่วย หรือหลายหน่วยก็ได้ แต่อย่างไรก็ตามการใช้ภาพนั้นอาจทำได้ยากเมื่อนักเรียนต้องวาดภาพแทนข้อมูล หรือบางครั้งภาพที่ใช้อาจยากในการสื่อสาร ดังนั้นครูอาจให้นักเรียนสร้างภาพหรือสัญลักษณ์ง่าย ๆ แทนรูปภาพได้ สำหรับแผนภูมิรูปภาพนั้นมุ่งเน้นไปยังการนำเสนอที่ง่าย และสื่อความหมายโดยตรง



จากภาพ 8.2 เป็นการนำเสนอข้อมูลด้วยแผนภูมิรูปภาพที่แตกต่างกันตามตัวชี้วัดที่กำหนด ซึ่งการใช้ภาพแทนข้อมูลที่มีมากกว่า 1 ครูควรเน้นย้ำถึงภาพที่นำมาใช้ ต้องสามารถสื่อถึงข้อมูลที่ไม่ครบหน่วย และสามารถวาดได้โดยง่าย ในขณะเดียวกันครูไม่ควรเคร่งครัดในเรื่องที่ไม่จำเป็นมากเกินไป เช่น เส้นไม่ตรง วงกลมไม่สวย หรือสีที่ใช้ เพราะครูต้องไม่ลืมว่าการนำเสนอข้อมูลนั้น จุดมุ่งหมายคือสื่อสารกับบุคคลอื่น หรือให้ข้อมูลที่ตรงกับความเป็นจริงมากกว่าความสวยงาม

2. ตารางทางเดียว (one – way – table) เป็นมโนทัศน์ที่นักเรียนได้เรียนรู้การอ่านและเขียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ในขณะที่ตารางสองทาง (two – way – table) จะเรียนรู้การอ่านและเขียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โดยตารางทางเดียวเป็นตารางที่มีการจำแนกตามหัวเรื่องเพียงลักษณะเดียวเท่านั้น ส่วนตารางสองทางเป็นตารางที่มีการจำแนกรายการตามหัวเรื่องสองลักษณะ (ภาพ 8.3)

จำนวนนักเรียนของโรงเรียนแห่งหนึ่งจำแนกตามชั้นปี

ชั้น	จำนวน (คน)
ประถมศึกษาปีที่ 1	65
ประถมศึกษาปีที่ 2	70
ประถมศึกษาปีที่ 3	69
ประถมศึกษาปีที่ 4	62
ประถมศึกษาปีที่ 5	72
ประถมศึกษาปีที่ 6	60
รวม	398

จำนวนนักเรียนของโรงเรียนแห่งหนึ่งจำแนกตามชั้นปี และเพศ

ชั้น	เพศ		จำนวน (คน)
	ชาย	หญิง	
ประถมศึกษาปีที่ 1	38	27	65
ประถมศึกษาปีที่ 2	33	37	70
ประถมศึกษาปีที่ 3	32	37	69
ประถมศึกษาปีที่ 4	28	34	62
ประถมศึกษาปีที่ 5	32	40	72
ประถมศึกษาปีที่ 6	25	35	60
รวม	188	210	398

ภาพ 8.3 ตารางทางเดียวและตารางสองทาง

3. แผนภูมิแท่ง (Bar Charts) การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับแผนภูมิแท่ง จะเริ่มต้นในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โดยเป็นการอ่านหรือตอบคำถามเมื่อกำหนดแผนภูมิแท่งมาให้ ส่วนการสร้างแผนภูมิแท่งนั้นถูกกำหนดไว้ในตัวชี้วัดระดับประถมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งแผนภูมิแท่งเป็นการนำเสนอข้อมูลที่มีการจัดและแบ่งประเภทของข้อมูลออกเป็นหมวดหมู่แล้วแสดงข้อมูลด้วยสี่เหลี่ยมมุมฉาก แผนภูมิแท่งประกอบไปด้วยแนวตั้งและแนวนอน แนวหนึ่งจะแสดงชนิดหรือประเภทของข้อมูล อีกแนวหนึ่งจะแสดงขนาด (จำนวน) ของข้อมูล ขนาดของข้อมูลจะแสดงด้วยรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้างเท่ากัน แต่ความสูงหรือความยาวจะแตกต่างกันขึ้นอยู่กับขนาดของข้อมูล โดยจุดเริ่มต้นจะต้องเริ่มจากระดับเดียวกันเสมอ นอกจากนี้ยังมีส่วนประกอบอื่น เช่น ชื่อแผนภูมิ ชุดข้อมูล และป้ายชื่อข้อมูลในแต่ละแกนและหากแผนภูมิที่มีข้อมูลตั้งแต่ 2 ข้อมูลขึ้นไปจะต้องมีคำอธิบายแผนภูมิด้วย

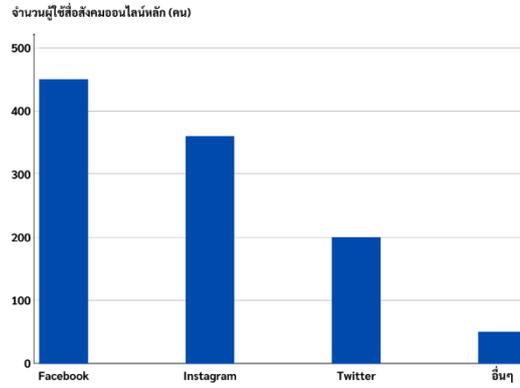
มโนทัศน์เกี่ยวกับสถิติ

การสร้างแผนภูมิแท่งนั้นจะพัฒนามาจากแผนภูมิรูปภาพ โดยแทนรูปภาพแต่ละรูปด้วยกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก อย่างไรก็ตามการนำเสนอด้วยแผนภูมิแท่งนั้นสามารถทำได้หลายหลากแบบ เช่น แผนภูมิแท่งเปรียบเทียบ (comparison bar chart) หรือแผนภูมิแท่งส่วนประกอบ (component bar chart) การนำเสนอด้วยแผนภูมิแท่งจะช่วยให้การเปรียบเทียบชุดข้อมูลต่าง ๆ ในกลุ่มต่าง ๆ ได้ อย่างง่ายดาย

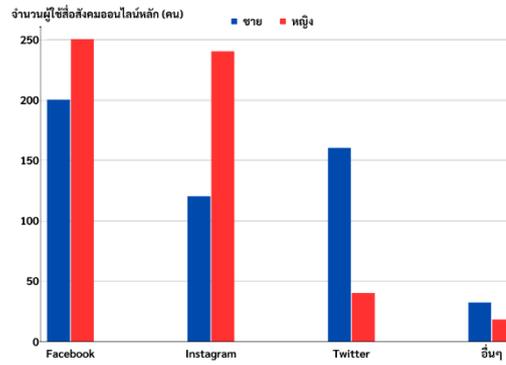
สำหรับข้อความระวังในการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับแผนภูมิแท่งมีดังนี้

1. การสร้างแผนภูมิแท่งเปรียบเทียบ ควรเน้นย้ำถึงสัญลักษณ์ที่ใช้ในแต่ละแผนภูมิ ควรมีความแตกต่างอย่างชัดเจน
2. ควรระบุขนาดของข้อมูลให้ชัดเจน เพราะขนาดจะเป็นตัวกำหนดความสูง หรือความยาวของแผนภูมิแท่ง
3. ในกรณีแผนภูมิแท่งส่วนประกอบ ความสูงหรือความยาวของข้อมูลอาจเท่ากัน แต่ในแต่ละส่วนประกอบอาจไม่เท่ากัน ครูควรเน้นย้ำในส่วนนี้

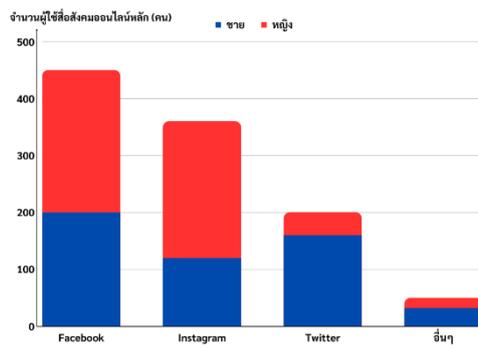
จำนวนผู้ใช้สื่อสังคมออนไลน์หลักของโรงเรียนแห่งหนึ่ง



จำนวนผู้ใช้สื่อสังคมออนไลน์หลักของโรงเรียนแห่งหนึ่งจำแนกตามเพศ

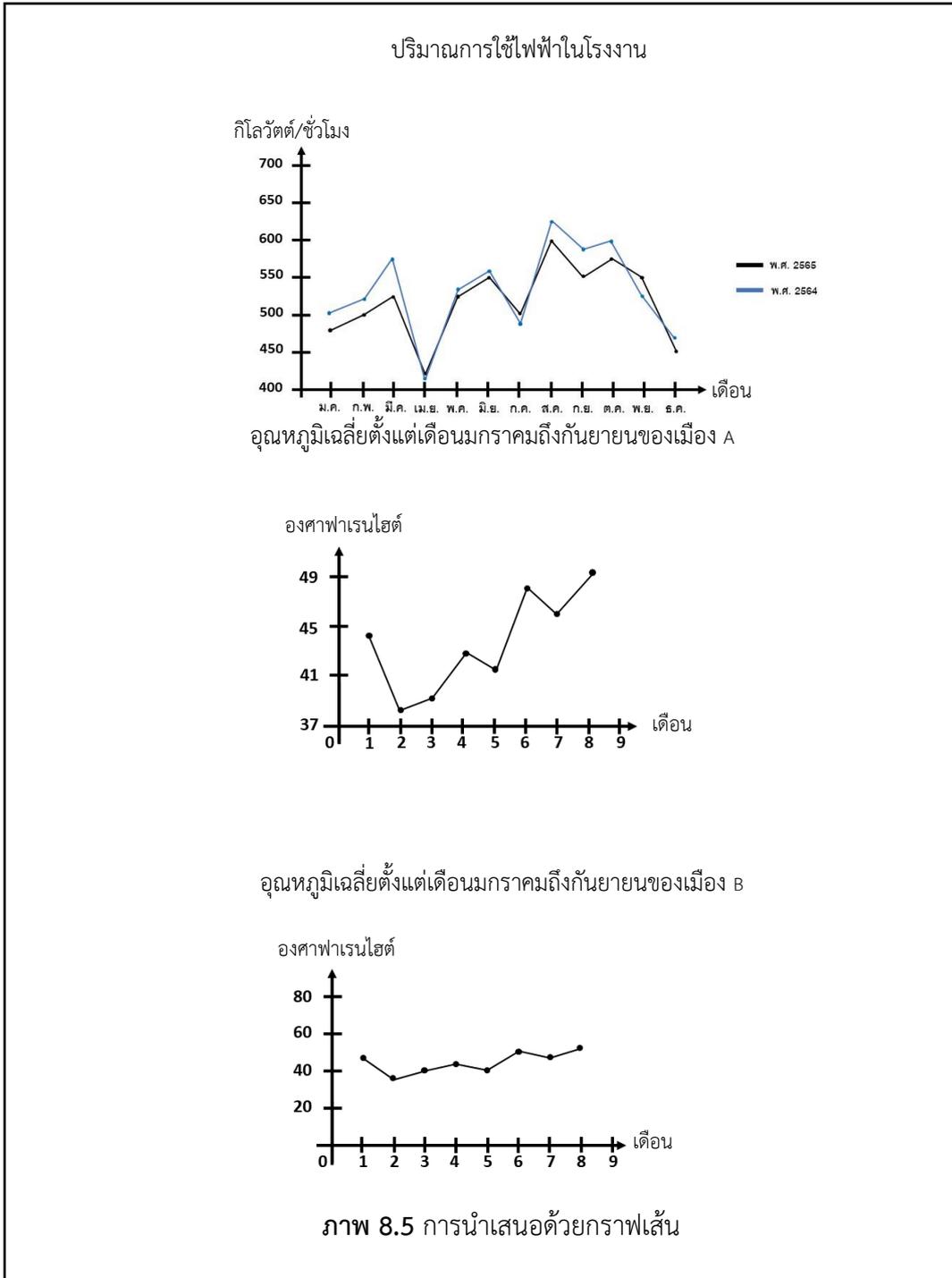


จำนวนผู้ใช้สื่อสังคมออนไลน์หลักของโรงเรียนแห่งหนึ่งจำแนกตามเพศ

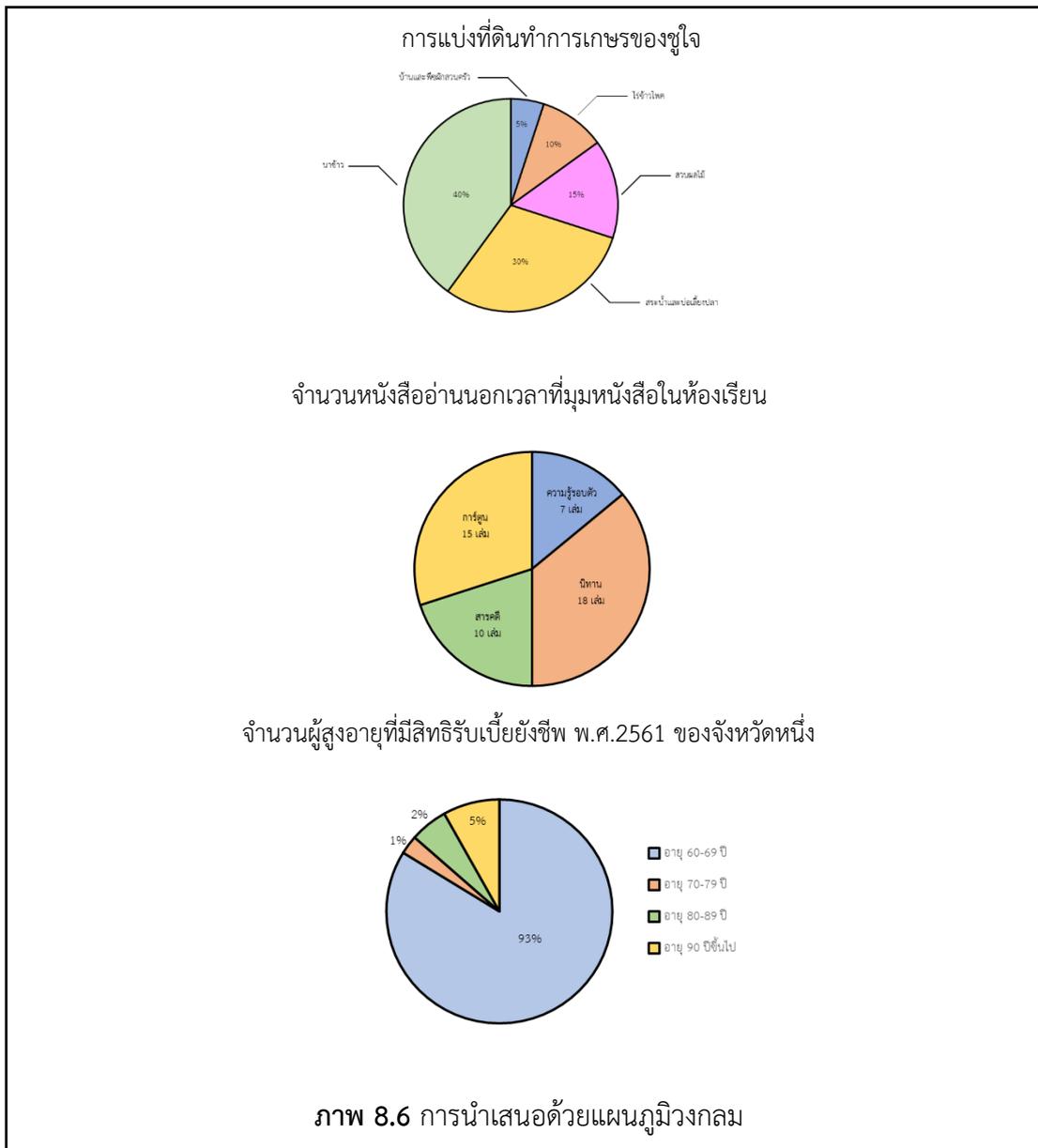


ภาพ 8.4 การนำเสนอด้วยแผนภูมิแท่งชนิดต่าง ๆ

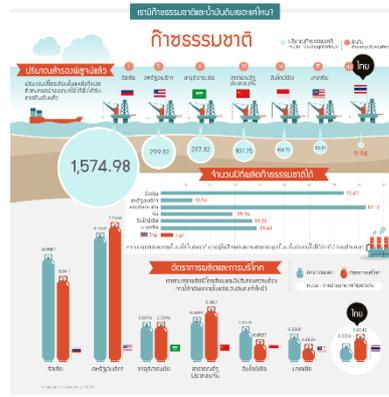
4. กราฟเส้น (Line Graph) เป็นมโนทัศน์ที่นักเรียนจะเรียนรู้การอ่านในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 สำหรับการเขียนนั้นยังไม่ได้เรียนรู้ในระดับประถมศึกษา โดยกราฟเส้นเป็นการนำเสนอข้อมูลที่นิยมแสดงเพื่อให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลเทียบกับเวลาที่เปลี่ยนแปลง นอกจากนี้ยังสามารถทำนายหรือคาดการณ์ข้อมูลที่จะเกิดขึ้นในอนาคตได้ บางครั้งกราฟเส้นยังแสดงการเปรียบเทียบข้อมูลตามช่วงเวลาที่น่าสนใจ



5. แผนภูมิวงกลม (Pie Chart) เป็นการนำเสนอข้อมูลที่นักเรียนจะได้เรียนรู้ในระดับประถมศึกษาปีที่ 6 โดยเป็นการนำเสนอข้อมูลด้วยวงกลมหนึ่งวง ในวงกลมจะประกอบไปด้วยส่วนต่าง ๆ ที่เกิดจากขนาดของข้อมูล การนำเสนอข้อมูลด้วยวิธีนี้จะมุ่งเน้นให้นักเรียนมองข้อมูลทั้งหมดเป็นชุดเดียว และสามารถเปรียบเทียบข้อมูลในชุดเดียวกันได้ง่าย บางครั้งอาจเขียนแต่ละส่วนด้วยขนาดของข้อมูล หรือเปอร์เซ็นต์ของข้อมูลในส่วนนั้น ๆ ข้อควรระวังการนำเสนอข้อมูลด้วยแผนภูมิวงกลมจะไม่เขียนขนาดมุมในการนำเสนอ สำหรับการเขียนแผนภูมิวงกลมนักเรียนจะได้เรียนรู้ในระดับมัธยมศึกษา



ปัจจุบันเป็นยุคที่มีข้อมูลมากมาย และนักเรียนมักเจอการนำเสนอข้อมูลที่สั้น กระชับ และเข้าถึงได้ นั่นคือ อินโฟกราฟิกส์ (Infographics) อินโฟกราฟิกส์เป็นการนำเสนอที่ผสมผสานกับ แผนภูมิ หรือกราฟชนิดต่าง ๆ ที่ช่วยให้สามารถสื่อสาร นำเสนอข้อมูลที่มีความซับซ้อนและยากต่อการทำความเข้าใจ ให้ผู้ฟังหรือผู้รับสารเกิดความสนใจในข้อมูล นอกจากนี้อินโฟกราฟิกส์ จะมีรูปภาพที่สวยงาม สีสันทันตึงดูดี และการออกแบบที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจรวมถึง เพื่อให้ผู้อ่านเกิดความเข้าใจข้อมูลทั้งหมดในระยะเวลารวดเร็ว ในการจัดการเรียนรู้ครูจึงยกตัวอย่าง การนำเสนอข้อมูลเพื่อให้นักเรียนสามารถมีความเข้าใจการนำเสนอที่ปรากฏหรือใช้ในชีวิตจริง

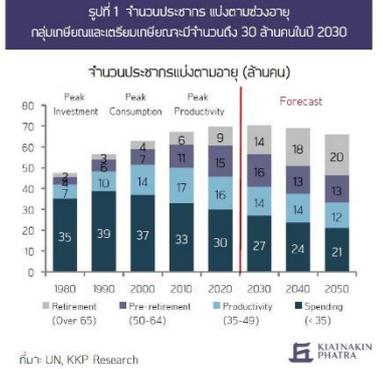


**ค่าโดยสารรถไฟฟ้าไทยอยู่ตรงไหน?**

เปรียบเทียบราคาตั๋วโดยสารรถไฟฟ้า BTS และ MRT ตามเมืองต่างๆ (คิดต่อ 4 สถานี, ณ สิ้นสุดของเส้นทาง)

คิดราคาตามจำนวนสถานี เป็นตามความยาวที่คิดสถานี

เฉพาะเชิงอัตราแบบเหมาจ่าย ราคาอื่น



ภาพ 8.7 การนำเสนอข้อมูลด้วยอินโฟกราฟิกส์ชนิดต่าง ๆ ที่ปรากฏบนสังคมออนไลน์

## การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเป็นขั้นตอนในหาคำตอบของคำถาม โดยคำตอบจะมาจากแผนภูมิหรือกราฟ แต่สิ่งทีหนึ่งสามารถทำได้และเป็นขั้นเริ่มต้นที่ดีในการวิเคราะห์ข้อมูลคือการฝึกให้นักเรียนจำแนกประเภทของข้อมูลที่ได้มาจากการเก็บรวบรวมข้อมูล ส่งเสริมให้นักเรียนมีการจัดระเบียบข้อมูลอย่างมีความหมาย เช่น แผนภาพ หรือตาราง ข้อมูลจะถูกวิเคราะห์โดยเน้นที่วิธีที่ข้อมูลตอบคำถามที่กำหนดไว้ในวัตถุประสงค์ในการเก็บรวบรวมข้อมูล โดยสิ่งนี้จะส่งเสริมให้นักเรียนเกิดกระบวนการวิเคราะห์และตัดสินใจในการนำข้อมูลที่ได้สามารถแสดงด้วยแผนภูมิหรือกราฟใด หลังจากนั้นจึงเป็นการวิเคราะห์ข้อมูลที่แสดงโดยแผนภูมิหรือกราฟชนิดต่าง ๆ Clements และ Sarama (2009) อธิบายว่า ในขั้นเริ่มต้น ครูควรใช้การนำเสนอข้อมูลอย่างง่าย เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ เช่น ในการเก็บข้อมูลเกี่ยวกับนักเรียนที่มาโรงเรียน อาจเก็บข้อมูลเป็นระดับชั้น หรือเพศ หรือชื่อของนักเรียน แล้วนำมาวิเคราะห์ เพราะข้อมูลที่ได้มักมีลักษณะเดียว และไม่ซับซ้อนมากเกินไป ในการกำหนดคำถามและตัดสินใจว่าจะแสดงข้อมูลที่ได้จากการเก็บรวบรวมข้อมูลอย่างไร นักเรียนควรมีส่วนในการตัดสินใจ เช่น ในการสำรวจสัตว์เลี้ยงของนักเรียนแต่ละคน อาจจำแนกตามชนิด สี ขนาด เป็นต้น

## การตีความ

การตีความการนำข้อมูลมาอภิปราย โดยเริ่มจากให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายการนำเสนอข้อมูลจากแผนภูมิ หรือกราฟ เช่น นักเรียนรู้อะไรบ้างจากกราฟที่กำหนดให้ หรือนักเรียนแสดงความคิดเห็นโดยอาศัยข้อมูลจากกราฟ Clements และ Sarama (2009) ได้อธิบายว่า เมื่อมีการสอบถามข้อมูลเกี่ยวกับแผนภูมิแท่ง นักเรียนมักจะมุ่งเน้นไปยังข้อมูลแต่ละส่วนเพื่อหาคำตอบ โดยอาจจะเลยการอ่านข้อมูลโดยภาพรวมกัน ในส่วนนี้ทำให้การตีความไม่สามารถนำไปใช้ได้อย่างเต็มประสิทธิภาพ อย่างไรก็ตามเมื่อมีแผนภูมิตำนำมาพิจารณา 2 แผนภูมิ คำถามที่มุ่งเน้นให้เกิดการอภิปรายจะเป็นการอธิบายลักษณะของข้อมูลทั้ง 2 แผนภูมิ และควรมุ่งเน้นไปยังการให้เหตุผลมากกว่าคำตอบว่าถูกหรือผิด และบางครั้งคำถามที่ครูใช้มักเป็นคำถามที่มุ่งไปยังคณิตศาสตร์มากกว่าสถิติ แม้ว่าการถามคณิตศาสตร์จะมีประโยชน์ แต่ก็มีข้อจำกัดบางอย่างที่ต้องถามสถิติ นั่นหมายความว่าควรใช้คำถามที่มุ่งเน้นไปที่บริบทของสถานการณ์ โดยให้นักเรียนเรียนรู้และคาดการณ์ หรืออนุมานจากข้อมูล บางครั้งการตีความของนักเรียนอาจมีความแตกต่างกัน แต่สิ่งนี้จะเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนแต่ละคนได้แสดงเหตุผลของตนเอง ทำให้เกิดการเรียนรู้ด้วยตัวเอง

จากกระบวนการเก็บรวบรวมข้อมูล การนำเสนอข้อมูล การวิเคราะห์ข้อมูล และการตีความ พบว่าเป็นกระบวนการเหล่านี้ที่ทำให้นักเรียนเกิดการคิดเชิงสถิติ และการพัฒนาให้นักเรียนเกิดการคิดเชิงสถิตินั้นก็เป็นสิ่งสำคัญ การคิดเชิงสถิตินั้นสามารถพัฒนาจากการใช้คำถามในการจัดการเรียนรู้ เช่น

- นักเรียนสามารถเรียนรู้เกี่ยวกับอะไรได้บ้าง จากข้อมูลในกราฟ (แผนภูมิ)
- ถ้าใช้คำถามเดียวกันกับนักเรียนห้องอื่น หรือกลุ่มอื่น นักเรียนคิดว่าข้อมูลที่ได้จะมีความเหมือนหรือแตกต่างอย่างไรกับห้องเรียนของเรา
- จากกราฟ (แผนภูมิ) นักเรียนไม่สามารถสรุปอะไรได้บ้าง

จากตัวอย่างคำถามเหล่านี้มักใช้กับข้อมูลที่จำนวนมาก หรือสามารถคาดการณ์คำตอบได้ สิ่งที่ครูควรให้ความสนใจนั้นคือหลักการจัดการเรียนรู้ว่าส่งเสริมให้นักเรียนเกิดกระบวนการคิด หรือการอภิปราย และเน้นการใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนสังเกตความแตกต่างของข้อมูลและให้เหตุผลที่เป็นไปได้สำหรับข้อมูลที่ให้มา (Franklin and Mewborn, 2008)

### ตัวอย่างงานวิจัยเกี่ยวกับสถิติ

สำหรับงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสถิติในระดับประถมศึกษาชั้นนั้น เป็นการวิจัยเพื่อพัฒนารอบแนวคิดการคิดเชิงสถิติ หรือพัฒนามโนทัศน์ทางสถิติด้วยรูปแบบต่าง ๆ สามารถสรุปได้ดังนี้

ปริญานูช ปาลี และณัชชา กมล (2563) ได้ศึกษาแนวปฏิบัติการสอนของ Smith และ Stein แล้วนำมาประยุกต์ใช้เพื่อส่งเสริมการคิดเชิงสถิติ ประกอบด้วย *การคาดการณ์ (Anticipating)* เป็นการที่ครูกำหนดการคาดการณ์แนวคิดที่เป็นไปได้ทั้งหมดของนักเรียน ในการตอบสนองต่องานทางคณิตศาสตร์ที่ครูสร้างขึ้นในเรื่อง สถิติ โดยเน้นกระตุ้นการคิดเชิงสถิติของนักเรียน เพื่อให้นักเรียนแสดงการคิดเชิงสถิติ ซึ่งอยู่ในขั้นตอนของการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ *การติดตามตรวจสอบ (Monitoring)* เป็นการที่ครูสังเกตการตอบสนองของนักเรียนต่องานทางคณิตศาสตร์ในเรื่อง สถิติที่ครูสร้างขึ้น ขณะที่นักเรียนลงมือทำงานทั้งงานกลุ่มและงานเดี่ยว พร้อมทั้งตรวจสอบแนวคิดของนักเรียนที่เกิดขึ้นทั้งหมด ทั้งที่สอดคล้องและไม่สอดคล้องกับที่ครูกำหนดไว้ เพื่อเป็นข้อมูลในการเลือกแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน *การเลือก (Selecting)* เป็นการที่ครูทำการเลือกแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในเรื่อง สถิติ ที่มีแนวคิดแตกต่างกัน โดยเลือกแนวคิดทางคณิตศาสตร์อย่างมีเป้าหมาย เพื่อนำไปใช้สำหรับการอภิปรายในชั้นเรียน *การจัดลำดับ (Sequencing)* เป็นการที่ครูนำแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในเรื่อง สถิติ ที่ครูได้เลือกไว้มาจัดลำดับอย่างมีเป้าหมายเพื่อนำเสนอแนวคิดของนักเรียนที่มีการตอบสนองต่องานทางมโนทัศน์เกี่ยวกับสถิติ

คณิตศาสตร์ และช่วยให้การอภิปรายบรรลุเป้าหมาย และ *การเชื่อมโยง (Connecting)* เป็นการที่ครูเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่จัดลำดับไว้ เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนสามารถสรุปแนวคิดทางคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติด้วยตนเองผ่านการอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน ในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ผู้วิจัยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สร้างองค์ความรู้ด้วยตนเองผ่านงานทางคณิตศาสตร์ที่ทำทนายพร้อมทั้งคาดการณ์แนวคิดที่เป็นไปได้ทั้งหมดของนักเรียน จากนั้นดำเนินการจัดกิจกรรมโดยเริ่มจากการติดตามตรวจสอบ การเลือก การจัดลำดับ และการเชื่อมโยงแนวคิดที่แตกต่างกันผ่านการอภิปรายร่วมกัน เพื่อให้นักเรียนเชื่อมโยงแนวคิดไปสู่จุดประสงค์หลักของบทเรียนวิเคราะห์ข้อมูลโดยหาค่าร้อยละและการพรรณนาความผลการวิจัยพบว่า นักเรียนจำนวน 24 คน มีการคิดเชิงสถิติอยู่ในระดับ 3 คิดเป็นร้อยละ 53.33 รองลงมา คือระดับ 4 จำนวน 17 คน คิดเป็นร้อยละ 37.78 ตามด้วยระดับ 2 จำนวน 3 คนและ ระดับ 1 จำนวน 1 คน คิดเป็นร้อยละ 6.67 และ 2.22 ตามลำดับ ในงานวิจัยชิ้นนี้ผู้วิจัยได้เก็บรวบรวมข้อมูลจากนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1/1 จำนวน 45 คน แต่ผู้อ่านสามารถนำรูปแบบกิจกรรมหรือลำดับการสอนไปประยุกต์ใช้กับนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาได้

พรทิพย์ เขียวขำ (2563) ได้พัฒนากิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้การสอนแนะให้รู้คิด (CGI) เพื่อส่งเสริมการรู้สถิติของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยผู้วิจัยได้พัฒนากิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้การสอนแนะให้รู้คิด (CGI) จำนวน 3 แผน แผนละ 4 ชั่วโมง ได้แก่ แผนภูมิแท่ง กราฟเส้น และโจทย์ปัญหา แล้วนำไปหาคุณภาพ หลังจากนั้นนำไปทดลองใช้พบว่า นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และหลังเรียนนักเรียนเกิดความสามารถในการรู้สถิติ สามารถเข้าใจภาษาในสถิติ เลือกยุทธวิธีและการดำเนินการแก้ปัญหาอย่างเป็นลำดับขั้นตอน สามารถตีความหมายเชิงวิพากษ์อย่างสมเหตุสมผล อภิปรายเพื่อหาข้อสรุปและการสร้างการคาดการณ์ที่เกิดขึ้นได้

## สรุป

การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับสถิติเป็นการจัดการเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนสามารถเก็บรวบรวมข้อมูล นำเสนอข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูล และตีความหมายของข้อมูล เพื่อให้ได้ผลสรุปและนำไปใช้ในการชีวิตจริง โดยชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 จะเรียนรู้การนำเสนอข้อมูลด้วยแผนภูมิรูปภาพ เมื่อกำหนดรูป 1 รูปแทน 1 หน่วย ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 เรียนรู้การนำเสนอข้อมูลด้วยแผนภูมิรูปภาพ เมื่อกำหนดรูป 1 รูปแทน 2 5 หรือ 10 หน่วย ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เรียนรู้การเขียนแผนภูมิรูปภาพ เขียนตารางทางเดียว ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 เรียนรู้การตอบคำถามจากแผนภูมิแท่ง ตารางสองทาง

ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 เรียนรู้การอ่านข้อมูลจากกราฟเส้น และการเขียนแผนภูมิแท่ง และชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เรียนรู้การอ่านแผนภูมิรูปภาพ นอกจากนี้ครูควรจัดการจัดการเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนเกิด การคิดเชิงสถิติ (Statistical thinking) ซึ่งเป็นกระบวนการคิดและการตัดสินใจที่ดี มีการนำข้อมูลไปใช้อย่างเกิดคุณค่ามากที่สุด และความฉลาดรู้ด้านสถิติอันเป็นความสามารถทำความเข้าใจเกี่ยวกับข้อมูลรอบตัว และสามารถตั้งคำถามกับข้อมูลที่ได้รับจากสื่อต่าง ๆ อย่างมีคุณค่า

## บทที่ 9

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เทอมนี้ผมได้คณิตศาสตร์เกรด 4 หรือ ทำไมเด็กชายคนหนึ่งถึงได้คณิตศาสตร์เกรด 2 สิ่งเหล่านี้เป็นคำพูดที่ครูจะได้ยินเป็นเมื่อสิ้นภาคเรียนหรือปีการศึกษาเป็นประจำ ซึ่งเกรดหรือผลการเรียนเป็นตัวที่แสดงคุณภาพของนักเรียนในแต่ละวิชาของภาคเรียนหรือปีการศึกษานั้น กว่าครูจะตัดสินผลการเรียนให้กับนักเรียน ครูต้องใช้เครื่องมือ เทคนิค หรือวิธีการต่าง ๆ ในการค้นหาศักยภาพหรือองค์ความรู้ทักษะ คุณลักษณะต่าง ๆ หรือสมรรถนะต่าง ๆ แล้วจึงนำสาระสนเทศต่าง ๆ เหล่านี้มาตัดสินกระบวนการเหล่านี้เรียกว่า การวัดและประเมินผล ซึ่งการวัดผล (measurement) เป็นกระบวนการหาปริมาณหรือจำนวนของสิ่งต่าง ๆ โดยใช้เครื่องมืออย่างใดอย่างหนึ่ง ผลจากการวัดจะออกมาเป็นตัวเลข หรือสัญลักษณ์ หรือข้อมูล ในขณะที่การประเมินผล (assessment) เป็นการนำผลที่ได้จากการวัดมาพิจารณา วิเคราะห์ หรือแปลความ เพื่อพัฒนาและปรับปรุงแก้ไข (สมนึก ภัททิยธนี, 2562)

นอกจากการวัดและประเมินผลจะมุ่งเน้นตัดสินหรือสรุปคุณภาพหรือคุณลักษณะต่าง ๆ แล้ว การวัดและประเมินผลยังเป็นกระบวนการรวบรวมหลักฐานข้อมูลเชิงประจักษ์เกี่ยวกับการเรียนรู้ของนักเรียนขณะเรียนรู้เพื่อช่วยให้นักเรียนตระหนักในการเรียนรู้ของตน สามารถวางแผน กำกับ วินิจฉัย ประเมินและปรับปรุงการเรียนรู้ของตน การให้นักเรียนออกแบบแผนการเรียนรู้และฝึกให้นักเรียนคิด ทบทวนเกี่ยวกับการเรียนรู้และกลยุทธ์ในการเรียนรู้ จะช่วยให้นักเรียนพัฒนาการเรียนรู้ของตนอย่างต่อเนื่อง เรียกกระบวนการเหล่านี้ว่า **การประเมินขณะเรียนรู้ (assessment as learning)** หรือ การวัดและประเมินผลเป็นกระบวนการรวบรวมหลักฐานข้อมูลเชิงประจักษ์ต่าง ๆ ตามสภาพจริงเกี่ยวกับกระบวนการการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นแก่นักเรียนในด้านการเรียนรู้เพื่อรู้ (learning to know) การเรียนรู้เพื่อปฏิบัติได้จริง (learning to do) การเรียนรู้เพื่อการอยู่ร่วมกัน (learning to live together) และการเรียนรู้เพื่อชีวิต (learning to be) โดยใช้วิธีการประเมินที่หลากหลายเพื่อให้เข้าใจกระบวนการ และแสวงหาวิธีการเรียนรู้ของนักเรียนในแง่มุมต่าง ๆ อย่างรอบด้าน ระบุ วินิจฉัย ปัญหาให้ข้อติชมที่มีคุณภาพและให้ข้อมูลย้อนกลับแก่นักเรียนเพื่อนำไปสู่การปรับกระบวนการการเรียนรู้ของนักเรียนให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น เรียกกระบวนการเหล่านี้ว่า **การประเมินเพื่อการเรียนรู้ (assessment for learning)** (ราชบัณฑิตยสภา, 2558)

## แนวคิดพื้นฐานของการวัดและประเมินผล

หลักสำคัญของการวัดและประเมินผล คือ ต้องวัดและประเมินผลให้เป็นไปตามจุดมุ่งหมายของรายวิชาที่จัดการเรียนรู้ ดังนั้น ครูต้องวิเคราะห์และแปลความหมายของจุดมุ่งหมายของรายวิชานั้น ๆ ให้ถูกต้อง ครอบคลุมและชัดเจน จึงจะสามารถวัดและประเมินผลได้ตรงกับสิ่งที่ต้องการ ซึ่งนักการศึกษาพยายามสร้างมาตรฐานในการวัดและประเมินผล เพื่อให้เกิดความน่าเชื่อถือ และสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้อย่างแท้จริง ในปี พ.ศ.2499 บลูม และคณะ (Benjamin S. Bloom) ได้เสนอผลการจำแนกจุดมุ่งหมายทางการศึกษาออกเป็น 3 ด้าน ได้แก่ ด้านพุทธิพิสัย (Cognitive Domain) ด้านจิตพิสัย (Affective Domain) และด้านทักษะพิสัย (Psychomotor Domain)

พิชิต ฤทธิจรูญ (2559) ได้อธิบายความหมายของทั้ง 3 ด้าน สามารถสรุปได้ดังนี้

ด้านพุทธิพิสัย เป็นสมรรถภาพทางด้านสมองหรือสติปัญญาของบุคคลในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ แบ่งเป็น 6 ระดับเรียงตามลำดับขั้นตอนการเกิดพฤติกรรมจากขั้นต่ำสุดถึงขั้นสูงสุด ได้แก่ ความรู้ - ความจำ ความเข้าใจ การนำไปใช้ การวิเคราะห์ การสังเคราะห์ และการประเมินค่า

ด้านจิตพิสัย เป็นพฤติกรรมที่เกี่ยวกับความรู้สึกนึกคิดทางจิตใจ อารมณ์ และคุณธรรมของบุคคลซึ่งต้องอาศัยการสร้างหรือการปลูกฝังคุณลักษณะนิสัยต่าง ๆ ให้เกิดขึ้น โดยเริ่มจากพฤติกรรมขั้นแรกที่ย่างไปหาขั้นสุดท้ายที่ยากขึ้นซึ่งมี 5 ระดับ ได้แก่ การรับรู้ การตอบสนอง การสร้างค่านิยม การจัดระบบค่านิยม และการสร้างลักษณะนิสัย

ด้านทักษะพิสัย เป็นพฤติกรรมที่เกี่ยวกับความสามารถเชิงปฏิบัติการซึ่งเกี่ยวกับระบบการใช้งานอวัยวะต่าง ๆ ในร่างกายที่ต้องอาศัยการประสานสัมพันธ์ของกล้ามเนื้อเกี่ยวกับการทำงานของระบบประสาทต่าง ๆ ซึ่งเป็นหน่วยสั่งการ เช่น การเคลื่อนไหวอวัยวะต่าง ๆ ในการเล่นกีฬา เล่นดนตรี

ในปี พ.ศ.2544 Andren และ Krathwohl ได้พัฒนาแนวคิดดังกล่าวด้านพุทธิพิสัย โดยมีการเปลี่ยนแปลงคำที่ใช้ใหม่ในแต่ละระดับพฤติกรรมเป็นคำกริยา และมีการจัดเรียง เพิ่มมิติของพุทธิพิสัยเป็น 2 มิติ ได้แก่ มิติลำดับขั้นทางสติปัญญา (cognitive knowledge dimension) ประกอบด้วย จำ เข้าใจ ประยุกต์ใช้ วิเคราะห์ ประเมินค่า และสร้างสรรค์ สำหรับมิติด้านความรู้ (knowledge dimension) ประกอบด้วย ความจริง มโนทัศน์ การดำเนินการ และอภิปัญญา โดยมีรายละเอียดดังตาราง 9.1 (Anderson et al., 2001)

ตาราง 9.1 ความสัมพันธ์มิติลำดับขั้นทางสติปัญญา นิยาม และตัวอย่างพฤติกรรมในวัตถุประสงค์

มิติลำดับขั้นทางสติปัญญา	นิยาม	ตัวอย่างพฤติกรรมในวัตถุประสงค์
จำ (remembering)	การจดจำข้อมูลสารสนเทศที่เกิดจากความจำระยะยาว	บอก ชี้ บ่ง ให้ความหมาย จับคู่ ให้นำม ระบุ
เข้าใจ (understanding)	การสร้างความหมายจากข้อความโดยการบรรยาย เขียน หรือวาดภาพเพื่อสื่อสาร	แปลความ อธิบาย ยกตัวอย่าง จัดหมู่ ย่อความ สรุป บอกใจความสำคัญ เปรียบเทียบ
ประยุกต์ใช้ (applying)	การนำความรู้ไปใช้ในสถานการณ์เฉพาะ	เปลี่ยนแปลงปัญหา เสนอ แก้ไข สร้าง
วิเคราะห์ (analysing)	การจำแนกสิ่งต่าง ๆ ให้เป็นองค์ประกอบย่อย ๆ และอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบเหล่านั้น	จำแนก แยกแยะ จัดประเภท บอกความต่าง หาความสัมพันธ์ หาเหตุและผล
ประเมินค่า (evaluating)	การตัดสินสิ่งต่าง ๆ โดยใช้เกณฑ์หรือมาตรฐาน	ตัดสิน เลือก เรียงลำดับ จัด อันดับ โต้แย้ง ทำนาย
สร้างสรรค์ (creating)	การสร้างสิ่งต่าง ๆ ให้เป็นรูปแบบใหม่หรือโครงสร้างใหม่ โดยการนำองค์ประกอบพื้นฐานต่าง ๆ มารวมกันเพื่อทำหน้าที่ใหม่ หรือมีการจัดเรียงเพื่อเป็นโครงสร้างหรือสิ่งใหม่	ออกแบบ สร้าง เสนอสิ่งใหม่ ประดิษฐ์

มิติด้านความรู้ ประกอบด้วยความรู้ 4 ประเภท ได้แก่

- 1) ความรู้ที่เป็นข้อเท็จจริง (fact) เป็นความรู้เบื้องต้นหรือหลักความรู้พื้นฐานที่ผู้เรียนควรมีความรู้เกี่ยวกับเรื่องใดเรื่องหนึ่ง เช่น ความรู้เฉพาะ คำศัพท์
- 2) ความรู้ที่เป็นความคิดรวบยอด (concept) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ต่าง ๆ ในโครงสร้างที่ใหญ่ขึ้น และแสดงถึงความเชื่อมโยงระหว่างความรู้พื้นฐานย่อย ๆ เหล่านั้น เช่น การจัดประเภทของหมวดหมู่ หลักการทั่วไป ทฤษฎี โครงสร้าง ความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิด

3) ความรู้ที่เป็นกระบวนการ (procedure) เป็นวิธีการในการค้นหาคำตอบ ทักษะและกระบวนการ เทคนิค วิธีที่ใช้ในการได้มาซึ่งคำตอบหรือความรู้ ความรู้เกี่ยวกับเกณฑ์ในการบอกระดับความเหมาะสมของกระบวนการ

4) ความรู้ที่เป็นอภิปัญญา (metacognitive) เป็นความรู้เกี่ยวกับพุทธิปัญญา มีความตระหนักในการคิดของตนเอง เช่น ความรู้เกี่ยวกับการแสวงหาความรู้ ความรู้เกี่ยวกับเงื่อนไขและบริบทที่เหมาะสม ความรู้เกี่ยวกับตนเอง

โดยสามารถนำทั้งสองมิติมาสัมพันธ์กันได้ดังตาราง 9.2

ตาราง 9.2 ความสัมพันธ์ระหว่างมิติด้านความรู้กับมิติด้านลำดับขั้นทางสติปัญญา

มิติด้านความรู้	มิติด้านลำดับขั้นทางสติปัญญา					
	จำ	เข้าใจ	ประยุกต์ใช้	วิเคราะห์	ประเมินค่า	สร้างสรรค์
ความรู้ที่เป็นข้อเท็จจริง						
ความรู้ที่เป็นความคิดรวบยอด						
ความรู้ที่เป็นกระบวนการ						
ความรู้ที่เป็นอภิปัญญา						

### เทคนิคในการวัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เครื่องมือหรือเทคนิคที่ใช้ในการวัดและประเมินผลมีหลายชนิด และมีลักษณะที่แตกต่างกันตามโอกาสหรือสถานการณ์ การที่มีเครื่องมือหรือเทคนิคหลายเช่นนี้ เพื่อให้ครูสามารถวัดและประเมินผลครอบคลุมด้านพุทธิพิสัย จิตพิสัย และทักษะพิสัย แม้การวัดและประเมินผลในปัจจุบันจะเน้นการวัดจากสภาพจริงหรือต้องการให้ครูเลือกเครื่องมือวัดอย่างหลากหลายนอกเหนือจากแบบทดสอบ แต่ครูควรมีความรู้ความเข้าใจ และเลือกเครื่องมือแต่ละชนิดอย่างเหมาะสม (สมนึก ภัททิยธนี, 2562)

### การสังเกต

การสังเกตเป็นเทคนิคหนึ่งของการวัดและประเมินผล การสังเกตจะใช้แบบสังเกตเป็นเครื่องมือวัดและประเมินผล ซึ่งสามารถวัดและประเมินผลได้ทั้งด้านพุทธิพิสัย จิตพิสัย และทักษะพิสัย ในการจัดการเรียนรู้แต่ละครั้งครูจะสังเกตการตอบคำถาม ความสนใจ หรือแม้กระทั่งการตั้งใจเรียน หรือมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม แต่ครูส่วนใหญ่มักไม่ค่อยนำผลที่ได้จากการสังเกตไปเป็นส่วนหนึ่งของการวัดและประเมินผลของนักเรียน จึงทำให้ผลของการสังเกตอาจถูกละเลยไป อย่างไรก็ตาม ผลของการสังเกตจะมีคุณค่ามากสำหรับครูเพราะข้อมูลเหล่านี้นอกจากจะใช้ในการวัดและประเมินผลแล้วยังเป็นข้อมูลพื้นฐานที่ช่วยให้ครูนำไปออกแบบการจัดการเรียนรู้ในครั้งต่อไป เช่น การสังเกตการมีส่วนร่วมของนักเรียนในกิจกรรมต่าง ๆ หรือการสังเกตการทำงานกลุ่ม

พิชิต ฤทธิจรูญ (2561) ได้แบ่งการสังเกตออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. การสังเกตแบบมีส่วนร่วม (participation observation) เป็นการสังเกตที่ครูจะเข้าไปอยู่ในกลุ่มกับนักเรียน และทำกิจกรรมกับนักเรียนด้วย โดยครูทำบทบาทและหน้าที่เสมือนสมาชิกคนหนึ่งในกิจกรรมนั้น
2. การสังเกตแบบไม่มีส่วนร่วม (non - participation observation) เป็นการสังเกตพฤติกรรมจากมุมมองของคนที่ไม่ได้อยู่ในกิจกรรมนั้น การสังเกตอาจทำได้โดยที่นักเรียนไม่รู้ตัวหรือรู้ตัวก็ได้ โดยปกติจะเป็นการสังเกตโดยที่นักเรียนไม่รู้ตัว เพราะถ้านักเรียนรู้ว่าครูกำลังสังเกตเพื่อประเมิน นักเรียนจะแสดงพฤติกรรมที่ไม่สอดคล้องกับความเป็นจริง หรือไม่เป็นธรรมชาติ

นอกจากนี้การสังเกตโดยใช้แบบสังเกตยังสามารถจำแนกได้เป็นแบบสังเกตแบบตรวจสอบรายการ (Check list) กับแบบมาตราส่วนประเมินค่า (rating scale) โดยแบบตรวจสอบรายการ จะเป็นแบบตรวจสอบที่ครูสามารถบันทึกได้อย่างรวดเร็ว และมีประสิทธิภาพ โดยครูจะไม่ประเมินคุณภาพ ระดับหรือความถี่ของพฤติกรรมที่เกิดโดยเฉพาะ แต่จะตรวจสอบว่ามีพฤติกรรมหรือเหตุการณ์ใดเกิดขึ้น เช่น มี/ไม่มี ทำ/ไม่ทำ ในขณะที่แบบมาตราส่วนประเมินค่าจะเป็นชุดของคำถามที่ออกแบบเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนให้ข้อมูลเชิงคุณภาพในการตอบคำถาม ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง แบบสังเกต (ปรับจาก Teaching Student-Centered Mathematics: Developmentally Appropriate Instruction for Grades 3-5 (Volume II) (2nd Edition))

ชื่อ วีรวัฒน์ ทินประภา ชั้น ป.6/2				
เศษส่วน	ทำไม่ได้	ทำได้ตามที่คาดหวัง	ทำได้สูงกว่าที่คาดหวัง	ความคิดเห็น
มีความเข้าใจเกี่ยวกับตัวเศษและตัวส่วน		✓		
หาผลบวกเศษส่วน			✓	ใช้โมเดลพื้นที่หรือโมเดลความยาว
หาผลลบเศษส่วน		✓		
เปรียบเทียบเศษส่วน		✓		
แก้ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนในสถานการณ์จริง	✓			

หัวข้อ	หาผลบวกจำนวนสองหลักกับจำนวนสองหลัก	ไม่สามารถหาผลบวกได้	หาผลบวกได้ (1 วิธี)	หาผลบวกได้ (มากกว่า 1 วิธี)	ความคิดเห็น
ชื่อ					
เจนนี่			✓ (22 มี.ย. 66)		นับให้ครบสิบ
ฟ้าใส	✓ (20 มี.ย. 66)		✓ (26 มี.ย. 66)		
ดุงดาว				✓ (23 มี.ย. 66) (26 มี.ย. 66)	
บอส			✓ (20 มี.ย. 66)		ใช้ตารางสิบ และตารางร้อย

### การสัมภาษณ์

การสัมภาษณ์เป็นวิธีการหรือเทคนิคที่เป็นการรวบรวมข้อมูล โดยครูจะใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนสื่อสาร หรือแสดงความเข้าใจเพราะบางครั้งสถานการณ์ที่ซับซ้อนนักเรียนไม่สามารถเขียนแสดงความเข้าใจได้อย่างชัดเจน ดังนั้นการสัมภาษณ์จึงเป็นอีกวิธีการหนึ่งที่จะช่วยให้ครูสามารถเข้าถึงนักเรียนได้มากยิ่งขึ้น การสัมภาษณ์นอกจากจะทำให้ครูทราบถึงมโนทัศน์ของนักเรียนแล้ว

ยังสามารถนำผลไปวางแผนการจัดการเรียนรู้ ช่วยให้นักเรียนกับครูมีความสัมพันธ์ที่ดี กล่าวถามในประเด็นที่สงสัยหรืออยากให้ครูอธิบายเพิ่มเติม และทำให้ทราบข้อเท็จจริงเกี่ยวกับนักเรียนในด้านบุคลิกภาพได้อีกด้วย เช่น วาจา เจตคติ อุปนิสัย หรือปฏิภาณไหวพริบ (Schmuck, 2006) สำหรับคำถามที่ใช้การสัมภาษณ์ควรเป็นคำถามที่นักเรียนสามารถสื่อสารได้โดยตรง นอกจากนี้ครูควรสร้างบรรยากาศที่เป็นกันเองกับนักเรียน เพราะบรรยากาศที่ไม่เครียดเกินไปจะช่วยให้เรียนสื่อสารได้ดี

Van de Walle และคณะ (2014) มีข้อเสนอแนะในการสัมภาษณ์มีดังนี้

1. ครูไม่ควรระบุคำตอบหรือแนวคิดที่นักเรียนตอบว่าถูกหรือผิด หรือไม่ควรแสดงสีหน้าหรือน้ำเสียงที่ดูตัดสิน เพราะการแสดงออกแบบนั้นทำให้นักเรียนขาดความมั่นใจ ในกรณีนี้นักเรียนตอบไม่ถูกต้อง ครูควรใช้คำถามใหม่ หรือใช้คำถามให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบอีกครั้ง
2. ในระหว่างการสัมภาษณ์ ครูควรตั้งใจฟัง รอคำตอบและเงียบ เพื่อให้เวลากับนักเรียนในการคิด หรือหาคำตอบ ถ้านักเรียนใช้เวลาานานเกินไป ครูควรใช้คำถามใหม่ในการสัมภาษณ์ และไม่ว่านักเรียนจะตอบถูกหรือไม่ ครูควรให้นักเรียนอธิบายแนวคิดอย่างละเอียดเพื่อเป็นการประเมินผลนักเรียนในประเด็นที่กำลังสัมภาษณ์
3. ครูไม่ควรชี้แนะหรืออธิบายแนวคิดกับนักเรียนระหว่างการสัมภาษณ์ เพราะการสัมภาษณ์เป็นการวัดและประเมินผลนักเรียน การที่ครูอธิบายเพิ่มเติมอาจทำให้ผลที่ได้จากการสัมภาษณ์ไม่ตรงกับความเป็นจริง
4. ควรให้นักเรียนอธิบายแนวคิดอย่างอิสระ และเมื่อนักเรียนอธิบายแนวคิดแล้วครูควรส่งเสริมให้นักเรียนเขียนสิ่งต่าง ๆ ที่อธิบาย ครูอาจใช้คำถามเพื่อสอดแทรกในประเด็นเล็ก ๆ ที่นักเรียนมีความเข้าใจคลาดเคลื่อน
5. ควรส่งเสริมให้นักเรียนมีวิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา เช่น ลองวาดภาพให้ครูดู หน้อยว่าเศษส่วนนั้นคืออะไร หรือสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้อย่างไร

#### การทดสอบ

การทดสอบเป็นเทคนิคที่ใช้เครื่องมือที่เรียกว่าแบบทดสอบ โดยแบบทดสอบเป็นชุดของคำถามที่มีสถานการณ์ ปัญหา หรือกิจกรรมที่นักเรียนต้องใช้ความรู้ ความเข้าใจ ทักษะ และสมรรถนะต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาหรือหาคำตอบ บางครั้งสถานการณ์อาจมีตัวเลือกให้เลือกตอบ เดิมคำตอบสั้น

ๆ หรือเป็นสถานการณ์ที่นักเรียนต้องแสดงแนวคิด โดยอาจจำกัดคำตอบ หรือไม่จำกัดคำตอบหรือเขียนอย่างอิสระ

ตัวอย่างคำถามของแบบทดสอบที่สอดคล้องกับตัวชี้วัด

มาตรฐาน ค 2.1 ตัวชี้วัด ป.4/3 แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับความยาวรอบรูปและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

จุดประสงค์การเรียนรู้ : นักเรียนสามารถแก้ปัญหาเกี่ยวกับความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

สถานการณ์ 1 จงหาความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านยาวยาว 10 เซนติเมตร และด้านกว้างยาว 8 เซนติเมตร

สถานการณ์ 2 สนามรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแห่งหนึ่งมีด้านยาวยาว 10 เมตร และด้านกว้างยาว 8 เมตร ถ้าอำนวยการนำเชือกยาว 30 เมตร ไปล้อมสนามแห่งนี้เพียงรอบเดียว จงแสดงแนวคิดว่าเชือกที่อำนวยการนำสามารถล้อมสนามดังกล่าวเพียงรอบเดียวได้หรือไม่

สถานการณ์ 3 บอสต้องการนำเชือกยาว 36 เมตรไปล้อมรอบสนามสี่เหลี่ยมมุมฉาก จะได้สนามที่มีด้านยาวและด้านกว้างยาวเท่าใด (กำหนดให้แต่ละด้านมีความยาวเป็นจำนวนนับ และหน่วยเป็นเมตร)

สถานการณ์ 4 แจนต้องการนำเชือกยาว 36 เมตร ไปล้อมสนามโดยให้ด้านยาวยาวกว่าด้านกว้าง 2 เมตร จะได้สนามที่มีด้านยาวและด้านกว้างยาวเท่าใด (กำหนดให้แต่ละด้านมีความยาวเป็นจำนวนนับ และหน่วยเป็นเมตร)

จากสถานการณ์ทั้ง 4 สามารถเป็นตัวแทนของจุดประสงค์การเรียนรู้ แต่มีความแตกต่างของคำถามดังนี้สถานการณ์ 1 เป็นคำถามที่สามารถหาคำตอบได้โดยวิธีการแทนค่าในสูตร หรือวาดรูป ซึ่งเป็นคำถามที่ไม่ซับซ้อนและนักเรียนคุ้นเคยกับคำถามแบบนี้ สถานการณ์ 2 เป็นการนำความรู้เกี่ยวกับความยาวรอบรูปไปใช้ในชีวิตจริงโดยมีเงื่อนไขกำหนดมาให้ ในขณะที่สถานการณ์ 3 และ 4 จะกำหนดมีเงื่อนไขที่ซับซ้อนในการหาคำตอบ ซึ่งนักเรียนต้องแสดงการคิดที่มีการถ่ายโอนความรู้จากเรื่องหนึ่งไปยังอีกเรื่องหนึ่ง และแสดงเหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบ

จากตัวอย่างคำถามของแบบทดสอบ พบว่าคำถามที่ 1 - 4 มีการใช้การคิดที่ซับซ้อนร่วมกับทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบ โดยมีความซับซ้อนที่เพิ่มขึ้นตามเงื่อนไขที่กำหนด ซึ่งสอดคล้องกับด้านพุทธิพิสัยที่เป็นด้านหนึ่งของพฤติกรรมการศึกษาตามแนวคิดบลูม

อย่างไรก็ตามเทคนิคการทดสอบต้องมีการใช้แบบทดสอบที่เป็นเครื่องมือ ก่อนที่ครูจะมีการนำเครื่องมือชนิดนี้ไปใช้ควรมีการพิจารณาหลายอย่าง ซึ่ง Gronlund (2009) ได้เสนอประเด็นที่ต้องพิจารณาก่อนนำแบบทดสอบไปใช้ ดังตาราง 9.3

ตาราง 9.3 ประเด็นที่ต้องพิจารณาก่อนนำแบบทดสอบไปใช้

ประเด็น	รายละเอียดการทบทวน
1. ความสมดุล (Balance)	คำถามเป็นตัวแทนของเนื้อหาการเรียนรู้หรือไม่ จำนวนคำถามมีสัดส่วนของข้อตรงตามตารางวิเคราะห์ข้อสอบหรือไม่
2. ความสอดคล้อง (Relevance)	คำถามมีความเกี่ยวข้องกับวัตถุประสงค์หรือไม่
3. ความชัดเจน (Conciseness)	คำถามที่ใช้ภาษาเข้าใจง่ายและชัดเจนหรือไม่
4. ความสมเหตุสมผล (Soundness)	ความยากของคำถามอยู่ในระดับที่เหมาะสม มีข้อบกพร่อง และมีคำตอบที่ถูกต้องไม่มีข้อโต้แย้งหรือไม่
5. ความเป็นอิสระ (Independence)	คำถามของข้อหนึ่งไม่เป็นคำตอบของอีกข้อหรือไม่
6. การจัดเรียง (Arrangement)	คำถามที่มีวัตถุประสงค์เดียวกันถูกจัดกลุ่มรวมกันหรือไม่ คำถามประเภทเดียวกันถูกจัดกลุ่มรวมกันหรือไม่ คำถามมีการจัดเรียงตามลำดับความยากหรือไม่
7. ลำดับตัวเลข (Numbering)	คำถามมีการจัดเรียงตัวเลขถูกต้องทั้งฉบับหรือไม่
8. คำชี้แจง (Directions)	มีคำชี้แจงการตอบในภาพรวม และในแต่ละตอนของแบบทดสอบหรือไม่ คำชี้แจงมีความชัดเจนและเหมาะสมต่อระดับการอ่านของนักเรียนที่รับการทดสอบหรือไม่ คำชี้แจงมีการบอกระยะเวลาในการทำแบบทดสอบและวิธีการทำข้อสอบหรือไม่
9. การเว้นระยะ (Spacing)	ระยะห่างของแต่ละข้อเหมาะสมกับการอ่านหรือไม่ คำถามที่แสดงวิธีทำมีที่ว่างสำหรับการตอบเพียงพอหรือเหมาะสมหรือไม่
10. การพิมพ์ (Typing)	คำถามมีการพิมพ์ผิดหรือไม่

## แนวทางการให้คะแนน

การให้คะแนนนั้นเป็นสิ่งที่ครูต้องมีความชัดเจน สอดคล้องกับรูปแบบของสถานการณ์ และวัตถุประสงค์ในการนำผลการประเมินไปใช้ เช่น นำไปตัดสินผลการเรียน หรือนำไปหาหมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

กฤษฎากาญจน์ โต้พิทักษ์ (ม.ป.ป.) ได้อธิบายแนวทางการให้คะแนนสามารถแยกได้ 2 แบบ ดังนี้

1. การให้คะแนนแบบถูกต้องได้ 1 คะแนน กับไม่ถูกต้องได้ 0 คะแนน การให้คะแนนแบบนี้เพื่อต้องการตรวจสอบเฉพาะคำตอบว่าถูกต้องหรือไม่ แต่ไม่สามารถตรวจสอบได้ว่านักเรียนมีความเข้าใจในกระบวนการหรือแนวคิดของนักเรียนได้ การให้คะแนนแบบนี้นิยมใช้กับแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ จับคู่ ถูกผิด หรือเติมคำตอบสั้น ๆ การให้คะแนนแบบนี้มีข้อดีคือสามารถตรวจได้ไว และมีความเป็นปรนัย

2. การให้คะแนนแบบพิจารณารายละเอียด การให้คะแนนแบบนี้สามารถทำได้หลากหลายรูปแบบ เช่น พิจารณารายละเอียดแบบองค์รวม หรือพิจารณารายละเอียดแบบย่อย การให้คะแนนแบบนี้เหมาะกับแบบทดสอบที่ต้องการให้นักเรียนเขียนแสดงแนวคิด หรืออธิบายการได้มาซึ่งคำตอบ โดยครูสามารถประเมินนักเรียนในประเด็นที่ต้องการนำไปปรับปรุงการจัดการเรียนรู้ และวินิจฉัยนักเรียนได้ ในการกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนจะประกอบไปด้วย 3 องค์ประกอบ ได้แก่ ประเด็นที่จะประเมิน (Criteria) ระดับความสามารถ (Performance Levels ) และคำอธิบายคุณภาพของแต่ละระดับความสามารถ (Quality Descriptors) อย่างไรก็ตามการให้คะแนนแบบนี้ครูต้องเขียนเกณฑ์การให้คะแนนอย่างชัดเจนว่าจะให้คะแนนนักเรียนในประเด็นใดบ้าง และเมื่อครูท่านอื่นอ่านจะเข้าใจตรงกันในประเด็นการให้คะแนน ขั้นตอนการเขียนแนวทางการให้คะแนนดังนี้

- กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ หรือประเด็นในการประเมินให้ชัดเจน หากมีการกำหนดองค์ประกอบหรือคุณลักษณะต่าง ๆ ควรบันทึกไว้เพื่อใช้เป็นแนวทางในการให้คะแนน
- อธิบายคุณลักษณะที่ต้องสังเกตเป็นพิเศษซึ่งครูต้องการเห็น (และที่ไม่ต้องการเห็น) นักเรียนแสดงออกในการทำงาน การแสดงการแก้ปัญหา กระบวนการหรือการปฏิบัติ นั่นคืออธิบายคุณลักษณะทักษะ หรือพฤติกรรมที่ครูต้องการเห็น รวมทั้งข้อผิดพลาดทั่ว ๆ ไปที่ไม่ต้องการให้เกิด

- หาวิธีการต่าง ๆ ที่จะอธิบายลักษณะการปฏิบัติที่สูงกว่าระดับค่าเฉลี่ย ระดับค่าเฉลี่ย และต่ำกว่าระดับค่าเฉลี่ย สำหรับแต่ละคุณลักษณะที่สังเกตจากก่อนหน้านี้
- การใช้เกณฑ์แบบองค์รวม เขียนรายละเอียดการปฏิบัติที่อยู่ในระหว่างกลางของระดับสูงกว่าค่าเฉลี่ย ระดับค่าเฉลี่ย และระดับต่ำกว่าค่าเฉลี่ย เพื่อให้การให้คะแนนสมบูรณ์ สำหรับแบบย่อยส่วนเขียนรายละเอียดสำหรับการปฏิบัติที่อยู่ระหว่างกลางของทุกเกณฑ์
- รวบรวมตัวอย่างผลงานของนักเรียน ซึ่งเป็นตัวแทนของแต่ละระดับ จะช่วยการให้คะแนนของครูในอนาคต

สถานการณ์ 1 จงหาความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านยาวยาว 10 เซนติเมตร และด้านกว้างยาว 8 เซนติเมตร

แนวทางการวัดและประเมินผล

แบบที่ 1 พิจารณาเพียงคำตอบ

คำตอบถูกต้องได้ 1 คะแนน (ผ่าน) คำตอบไม่ถูกต้อง/ไม่ตอบได้ 0 คะแนน (ไม่ผ่าน)

แบบที่ 2 พิจารณารายละเอียดแบบองค์รวม

คุณภาพ	คะแนน
เขียนแสดงแนวคิด หรือสูตรการหาความยาวรอบรูปถูกต้อง และมีการสรุปคำตอบถูกต้อง	2 (ดี)
เขียนแสดงแนวคิด หรือสูตรการหาความยาวรอบรูปถูกต้อง แต่คำนวณไม่ถูกต้อง	1 (พอใช้)
เขียนแสดงแนวคิดไม่ถูกต้อง/ไม่เขียนแสดงแนวคิด	0

สถานการณ์ 2 สนามสี่เหลี่ยมมุมฉากแห่งหนึ่งมีด้านยาวยาว 10 เมตร และด้านกว้างยาว 8 เมตร ถ้าอำนาจต้องการนำเชือกยาว 30 เมตร ไปล้อมสนามแห่งนี้เพียงรอบเดียว จงแสดงแนวคิดว่าจะเชือกที่อำนาจมีสามารถล้อมสนามดังกล่าวเพียงรอบเดียวได้หรือไม่

แนวทางการวัดและประเมินผล

แบบที่ 1 พิจารณาเพียงคำตอบ

คำตอบถูกต้องได้ 1 คะแนน (ผ่าน) คำตอบไม่ถูกต้อง/ไม่ตอบได้ 0 คะแนน (ไม่ผ่าน)

แบบที่ 2 พิจารณารายละเอียดแบบองค์รวม

คุณภาพ	คะแนน
เขียนแสดงแนวคิด หรือสูตรการหาความยาวรอบรูปถูกต้อง หาความยาวรอบสนามถูกต้อง และมีการสรุปคำตอบ	3 (ดีมาก)
เขียนแสดงแนวคิด หรือสูตรการหาความยาวรอบรูปถูกต้อง หาความยาวรอบสนามถูกต้อง แต่ไม่มีการสรุปคำตอบ	2 (ดี)
เขียนแสดงแนวคิด หรือสูตรการหาความยาวรอบรูปถูกต้อง แต่หาความยาวรอบสนามไม่ถูกต้อง	1 (พอใช้)
เขียนแสดงแนวคิดไม่ถูกต้อง/ไม่เขียนแสดงแนวคิด	0 (ควรปรับปรุง)

แบบที่ 3 พิจารณารายละเอียดแบบย่อยมี 3 ประเด็น ดังนี้ แนวคิด ความยาวรอบรูป และคำตอบ

แนวคิด

คุณภาพ	คะแนน
มีการเขียนแสดงแนวคิด หรือสูตรการหาความยาวรอบรูปถูกต้อง	2
มีร่องรอยการเขียนแสดงแนวคิด หรือสูตรการหาความยาวรอบรูปถูกต้อง บางส่วน	1
ไม่มีร่องรอยแสดงแนวคิด/ไม่เขียนแสดงแนวคิด	0

## ความยาวรอบสนาม

คุณภาพ	คะแนน
ถูกต้อง	1
ไม่ถูกต้อง	0

## คำตอบ

คุณภาพ	คะแนน
คำตอบถูกต้อง	1
คำตอบไม่ถูกต้อง	0

## การประเมินผล

คะแนน	การประเมินผล
4	ยอดเยี่ยม
3	ดีมาก
2	ดี
1	พอใช้
0	ไม่ผ่าน ควรปรับปรุง

สถานการณ์ 3 บอสต้องการนำเชือกยาว 36 เมตรไปล้อมรอบสนามสี่เหลี่ยมมุมฉาก จะได้สนามที่มีมีด้านยาวและด้านกว้างยาวเท่าใด (กำหนดให้แต่ละด้านมีความยาวเป็นจำนวนนับ และหน่วยเป็นเมตร)

แนวทางการวัดและประเมินผลแบบที่ 1 พิจารณาเพียงคำตอบ

คุณภาพ	คะแนน
คำตอบถูกต้องตั้งแต่ 5 คำตอบขึ้นไป	3 (ดีมาก)
คำตอบถูกต้อง 2 - 4 คำตอบ	2 (ดี)
คำตอบถูกต้องเพียงหนึ่งคำตอบ	1 (พอใช้)
คำตอบไม่ถูก/ไม่เขียนคำตอบ	0 (ควรปรับปรุง)

### แบบที่ 2 พิจารณารายละเอียดแบบองค์รวม

คุณภาพ	คะแนน
เขียนแสดงแนวคิด หรือยุทธวิธีในการหาคำตอบ พร้อมทั้งหาคำตอบถูกต้องครบทุกคำตอบ	5 (ยอดเยี่ยม)
เขียนแสดงแนวคิด หรือยุทธวิธีในการหาคำตอบ พร้อมทั้งหาคำตอบถูกต้อง 4 – 6 คำตอบ	4 (ดีมาก)
เขียนแสดงแนวคิด หรือยุทธวิธีในการหาคำตอบ พร้อมทั้งหาคำตอบถูกต้อง 2 – 3 คำตอบ	3 (ดี)
เขียนแสดงแนวคิด หรือยุทธวิธีในการหาคำตอบ พร้อมทั้งหาคำตอบถูกต้องเพียงคำตอบเดียว	2 (พอใช้)
เขียนแสดงแนวคิด หรือยุทธวิธีในการหาคำตอบ แต่คำตอบไม่ถูกต้อง	1 (ควรปรับปรุง)
เขียนแนวคิดหรือยุทธวิธีไม่ถูกต้อง/ไม่เขียนแนวคิด	0

### แบบที่ 3 พิจารณารายละเอียดแบบย่อยมี 2 ประเด็น ดังนี้ แนวคิด และคำตอบ

#### แนวคิด

คุณภาพ	คะแนน
มีการเขียนแสดงแนวคิด หรือสูตรการหาความยาวรอบรูปถูกต้อง	2
มีร่องรอยการเขียนแสดงแนวคิด หรือสูตรการหาความยาวรอบรูปถูกต้องบางส่วน	1
ไม่มีร่องรอยแสดงแนวคิด/ไม่เขียนแสดงแนวคิด	0

#### คำตอบ

คุณภาพ	คะแนน
คำตอบถูกต้องตั้งแต่ 5 คำตอบขึ้นไป	3
คำตอบถูกต้อง 2 - 4 คำตอบ	2
คำตอบถูกต้องเพียงหนึ่งคำตอบ	1
คำตอบไม่ถูก/ไม่เขียนคำตอบ	0

## การประเมินผล

คะแนน	การประเมินผล
5	ดีมาก
3-4	ดี
1-2	พอใช้
0	ไม่ผ่าน ควรปรับปรุง

สถานการณ์ 4 แจนต้องการนำเชือกยาว 36 เมตร ไปล้อมสนามโดยให้ด้านยาวยาวกว่าด้านกว้าง 2 เมตร จะได้สนามที่มีด้านยาวและด้านกว้างยาวเท่าใด (กำหนดให้แต่ละด้านมีความยาวเป็นจำนวนนับ และหน่วยเป็นเมตร)

แนวทางการวัดและประเมินผลแบบที่ 1 พิจารณาเพียงคำตอบ

คำตอบถูกต้องได้ 1 คะแนน (ผ่าน) คำตอบไม่ถูกต้อง/ไม่ตอบได้ 0 คะแนน (ไม่ผ่าน)

แบบที่ 2 พิจารณารายละเอียดแบบองค์รวม

คุณภาพ	คะแนน
เขียนแสดงแนวคิด หรือยุทธวิธีในการหาคำตอบที่มากกว่า 1 วิธี และคำตอบถูกต้อง	3 (ดีมาก)
เขียนแสดงแนวคิด หรือยุทธวิธีในการหาคำตอบเพียงวิธีเดียว และคำตอบถูกต้อง	2 (ดี)
เขียนแสดงแนวคิด หรือยุทธวิธีในการหาคำตอบ แต่คำตอบไม่ถูกต้อง	1 (พอใช้)
เขียนแนวคิดหรือยุทธวิธีไม่ถูกต้อง/ไม่เขียนแนวคิด	0 (ควรปรับปรุง)

แบบที่ 3 พิจารณารายละเอียดแบบย่อมี 2 ประเด็น ดังนี้ แนวคิด และคำตอบ

แนวคิด

คุณภาพ	คะแนน
มีการเขียนแสดงแนวคิด หรือสูตรการหาความยาวรอบรูปถูกต้อง	2
มีร่องรอยการเขียนแสดงแนวคิด หรือสูตรการหาความยาวรอบรูปถูกต้องบางส่วน	1
ไม่มีร่องรอยแสดงแนวคิด/ไม่เขียนแสดงแนวคิด	0

คำตอบ

คุณภาพ	คะแนน
คำตอบถูกต้อง	1
คำตอบไม่ถูก/ไม่เขียนคำตอบ	0

การประเมินผล

คะแนน	การประเมินผล
3	ดีมาก
2	ดี
1	พอใช้
0	ไม่ผ่าน ควรปรับปรุง

## สรุป

การวัดและประเมินผลเป็นส่วนวิธีการทำให้ครูสามารถตรวจสอบได้ว่าการจัดการเรียนรู้ของตนเองนั้น บรรลุตามมาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด หรือจุดประสงค์การเรียนรู้หรือไม่ นอกจากนี้ยังสามารถนำผลของการวัดไปพัฒนา ปรับปรุงวิธีการจัดการเรียนรู้ สื่อ เทคนิค หรือบรรยากาศ โดยเครื่องมือที่นิยมใช้ในการวัดและประเมินผลคือแบบทดสอบ นอกจากนี้ยังสามารถใช้แบบสังเกต และการสัมภาษณ์ได้อีกด้วย โดยครูต้องมีความเข้าใจเกี่ยวกับการวัดและประเมินผลตามแนวคิดของบลูมซึ่งประกอบไปด้วย 3 ด้านได้แก่ ด้านพุทธิพิสัย (cognitive domain) ด้านจิตพิสัย (affective domain) ด้านทักษะพิสัย

(psychomotor domain) โดยเฉพาะด้านพุทธิพิสัยที่มีลำดับชั้นทางสติปัญญา 6 ชั้น ได้แก่ จำ เข้าใจ ประยุกต์ใช้ วิเคราะห์ ประเมินค่า และสร้างสรรค์ และมิติหนึ่งนอกเหนือจากมิติด้านลำดับชั้นทางสติปัญญา 6 ชั้น ซึ่งประกอบด้วยความรู้ 4 ประเภท ได้แก่ ความรู้ที่เป็นข้อเท็จจริง ความรู้ที่เป็นความคิดรวบยอด (concept) ความรู้ที่เป็นกระบวนการ (procedure) และ ความรู้ที่เป็นอภิปัญญา (metacognitive)



## บรรณานุกรม

### ภาษาไทย

- กชกร พัฒเสมา. (2558). การพัฒนาชุดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง การบวก ลบ คูณ หาร ระคนสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี.
- กตिका ดวงลีตี. (2564). การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้และความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเรื่อง ร้อยละ โดยใช้การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดโพลยา ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.
- กมลวรรณ ใจอารีย์. (2556). ผลการจัดการเรียนรู้โดยใช้แบบ SSCS ร่วมกับเทคนิคเพื่อนคู่คิด (Think-Pair-Share) เรื่อง อัตราส่วนและร้อยละที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- กฤษฎากาญจน์ โตพิทักษ์. (ม.ป.ป.). การประเมินตามสภาพจริงและเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค. สืบค้นเมื่อวันที่ 14 ตุลาคม 2566 จาก <https://academic.rmutsv.ac.th/sites/academic.rmutsv.ac.th/files/05.pdf>
- กัญญาภัค ธรรมสุข. (2563). การพัฒนาแบบฝึกทักษะการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง การบวก ลบ คูณ หารระคน สำหรับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี.
- จิรนนท์ พึ่งกลิ่น. (2555). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนบ้านค่าย จังหวัดระยอง. (ปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

จุฑามาศ สุบรรทม และคณะ. (2562). ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การคูณทศนิยม ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้สื่อสไลด์อิเล็กทรอนิกส์ร่วมกับการใช้ Interactive Notebook. การประชุมวิชาการระดับชาติมหาวิทยาลัยทักษิณ ครั้งที่ 29 ประจำปี 2562 วิจัยและนวัตกรรมเพื่อการพัฒนาที่ยั่งยืน, สงขลา.

จรีพร มุลินี. (2565). ประสิทธิภาพการจัดการเรียนการสอนของครูในศตวรรษที่ 21 ของสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาชลบุรี เขต 1. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารการศึกษา). มหาวิทยาลัยเกริก.

เจริญ ภูวิจิตร. (2564). การจัดการเรียนรู้ทางออนไลน์อย่างมีประสิทธิภาพในยุคดิจิทัล. สืบค้นเมื่อวันที่ 25 มีนาคม 2566 จาก <http://www.nidtep.go.th/2017/publish/doc/20210827.pdf>

ชญัญ แชมมงคลธรรม. (2563). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องรูปเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่มีความบกพร่องทางการได้ยินจากการสอนตามแนวการคิดเชิงเรขาคณิต. การประชุมวิชาการ การพัฒนาชนบทที่ยั่งยืน 2556 ครั้งที่ 3 “ชุมชนท้องถิ่น ฐานราก การพัฒนาประชาคมอาเซียน” 9-10 พฤษภาคม 2556, 717-721.

ชัชวาล จิตรขุนทด และวิทยา ทองโสม. (2563). การแก้ปัญหาการท่องแม่สูตรคูณโดยใช้เกมตารางตัวเลขคณิตศาสตร์เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหาการเรียนคณิตศาสตร์ โรงเรียนวัดสันติธรรม อำเภอเมือง จังหวัดนครสวรรค์. วารสารครุศาสตร์ 3(3), 68-77.

ชุตินา แสนบุญยัง และปรีญา บุญญสิริ. (2563). การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่อง การบวก ลบ คูณ หารระคน โดยใช้การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดของโพลยาพร้อมกับบาร์โมเดล ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2. สืบค้นเมื่อวันที่ 10 เมษายน 2566 จาก <http://www.edu.journal.ru.ac.th/index.php/abstractData/viewIndex/2481.ru>

ณัฐฉา จิตราพิเนตร. (2565). การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามรูปแบบแวนฮีส โดย ใช้โปรแกรมจีเอสพี เรื่อง วงกลม ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารการศึกษา). มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.

ดารุณี แก้วบุญเรือง. (2560). การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางเรียนโดยการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค LT ประกอบแบบฝึกหัด เรื่อง การบวก ลบ คูณ หารระคน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารการศึกษา). มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.

- ตรีชญา ฉางตา, จิตรารภรณ์ บุญถนอม, และนพพร แหยมแสง. (2563). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องโจทย์ปัญหาร้อยละโดยใช้กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา ร่วมกับเทคนิค STAD สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. สืบค้นเมื่อวันที่ 25 มีนาคม 2566 จาก [http://www.edu.journal.ru.ac.th/AbstractPdf/256331\\_1626158320\\_6114621005.pdf](http://www.edu.journal.ru.ac.th/AbstractPdf/256331_1626158320_6114621005.pdf)
- ศิริวิรัช ทินประภา. (2557). การรู้เรื่องทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Literacy) ทักษะที่จำเป็นในศตวรรษที่ 21. *นิตยสาร สสวท.* 42(2), 23 – 27.
- \_\_\_\_\_. (2561). ข้อควรระวังในการสอนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา. *นิตยสาร สสวท.* 46(2), 25-27.
- \_\_\_\_\_. (2566). การพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้วยกระบวนการ Think Pair Share สำหรับนักศึกษาคณะศึกษาศาสตร์. รายงานการวิจัย คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.
- ธนิต ตะเคียนเกลี้ยง, อรธิดา ประसार, จำเริญ อุ่นแก้ว, และนพเรศน์ ธรรมศรีณกุล. (2557). การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการบวกการลบการคูณทศนิยมสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ด้วยชุดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ เทคนิค TAI. *การประชุมวิชาการ เสนอผลงานวิจัยระดับบัณฑิตศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2557*, 311-317.
- ธัญรดา คงฉิม. (2560). การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน เรื่อง การบวกและการลบ จำนวนนับที่ผลลัพธ์และตัวตั้งไม่เกิน 100,000 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้แบบฝึกทักษะ. รายงานการวิจัย สืบค้นเมื่อวันที่ 5 มีนาคม 2566 จาก [http://www.ska2.go.th/reis/data/research/25640704\\_102312\\_7600.pdf](http://www.ska2.go.th/reis/data/research/25640704_102312_7600.pdf)
- นพพร แหยมแสง. (2556). *พฤติกรรมการสอนคณิตศาสตร์ 1*. (พิมพ์ครั้งที่ 2). มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- นภัสสร แก้วมีชัย. (2563). การจัดการเรียนรู้ที่เน้นการปฏิบัติโดยใช้งานทางคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาการคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนและจำนวนคละ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. (การค้นคว้าอิสระมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยนเรศวร.

นฤมล ทิพย์พินิจ. (2560). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาการบวก ลบ คูณ หารระคนโดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เทคนิค KWDL ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนบ้านสามัคคีธรรม จังหวัดนครศรีธรรมราช. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี.

นัชชนัน แก้วประเสริฐสุข. (2557). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้มายด์ทูลที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

นันทน์ภัส ศรีพรหมทอง, ชนิศวรา เลิศอมรพงษ์, และสิริพร ทิพย์คง. (2560). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง “โจทย์ปัญหาร้อยละ” โดยใช้รูปแบบ SSCS โรงเรียนบ้านหนองตะเภาจังหวัดประจวบคีรีขันธ์. *วารสารศึกษาศาสตร์ปริทัศน์*, 32(3), 138-145.

นิตาวรรณ ทองไทย. (2562). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนขนาดเล็ก. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ปริญานูช ปาลี และณัชชา กมล (2563). การวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน เพื่อส่งเสริมการคิดเชิงสถิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ 5 แนวปฏิบัติการสอน. *วารสารวิจัยทางการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ*, 15(2). สืบค้นเมื่อวันที่ 1 มีนาคม 2566 จาก <https://ejournals.swu.ac.th/index.php/jre/article/view/13237>

พยอม กุลสง และวรินทร์ พูนไพบูลย์พิพัฒน์. (2565). การจัดการเรียนรู้ที่เน้นการปฏิบัติโดยใช้งานทางคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาสมรรถนะคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน เรื่อง เงินและบันทึกรายรับรายจ่าย สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3. *Journal of Roi Kaensarn Academi*. 7(11), 114-128.

พรทิพย์ เขียวขำ. (2563). การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้การสอนแนะให้รู้คิด (CGI) เพื่อส่งเสริมการรู้สถิติของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. (การค้นคว้าอิสระปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยนเรศวร.

- พรทิพย์ ยอดบุตรดี. (2565). การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ทศนิยม โดยใช้รูปแบบการแก้ปัญหาของโพลยาร์ร่วมกับเทคนิคกลุ่มแข่งขัน (TGT) สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์.
- พรพรรณ เสาร์คำเมืองดี. (2562). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยการเรียนรู้แบบร่วมมือ เทคนิค STAD. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยศิลปากร.
- พิชญาก็ค ทองม่วง. (2565). การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้แบบผสมผสานระหว่างแนวคิดคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริงร่วมกับการเรียนรู้แบบออนไลน์ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยนเรศวร.
- พิชิต ฤทธิจรรุญ. (2559). หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา. (พิมพ์ครั้งที่ 10). แฮาส์ ออฟ เคอร์มิสท์.
- \_\_\_\_\_. (2561). เทคนิคการวิจัยเพื่อพัฒนาการเรียนรู้. (พิมพ์ครั้งที่ 2). โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- บุญยพล จันทรฝอย. (2563). เรขาคณิตเบื้องต้น. เอกสารประกอบการสอน, คณะครุศาสตร์. มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.
- ภัณฑิรา ศรีใจ และสมบัติ ท้ายเรือคำ. (2564). การพัฒนากิจกรรมการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมความรู้สึกรักเรียนจำนวน สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษา. วารสารวิชาการและวิจัยสังคมศาสตร์ 17(2), 199-212.
- มนัส พรหมณี. (2563). การจัดการเรียนรู้แบบ Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) ร่วมกับเกมกระดานเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยนเรศวร.

ยุวดี ศรีสังข์. (2563). การพัฒนาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิค KWDL เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาเรื่อง ร้อยละ สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารการศึกษา). มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). พจนานุกรมศัพท์ศึกษาศาสตร์ อักษร M-Z. หจก ไอเดีย สแควร์.

\_\_\_\_\_. (2553). พจนานุกรมศัพท์ศึกษาศาสตร์ร่วมสมัย ฉบับราชบัณฑิตยสภา. ห้างหุ้นส่วนสามัญนิติบุคคลเจียฮั่ว.

รามนตรี ภูมิติบุตร, สมทรง สุวพานิช, และนิราช จันทระจิตร. (2557). การพัฒนารอบแนวคิดของการคิดเชิงสถิติ. ว.ม.ร.ม. (มนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์), 8(1), 223-237.

รุ่งนภา มีใจ. (2564). การพัฒนาแบบวัดความรู้สึกเชิงจำนวนสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารการศึกษา). มหาวิทยาลัยศิลปากร.

รุ่งนภา นุตราวงค์. (ม.ป.ป.). หลักสูตรอิงมาตรฐาน ... การพัฒนาสู่คุณภาพ. สืบค้นเมื่อวันที่ 3 ธันวาคม 2566 จาก <https://wachum.org/dewey/300/nec4.pdf>

ลลิตา ทองโปรด. (2562). การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และการสร้างโจทย์ปัญหา โดยใช้โมเดลของลาสเลย์และเมทซินสกี เรื่อง ทศนิยม ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารการศึกษา). มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.

วชิรญาณ สาดสว่าง, วันดี เกษมสุขพิพัฒน์, และต้องตา สมใจเพ็ง. (2565). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้แนวคิด Concrete Pictorial Abstract (CPA) ที่มีต่อมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในการเรียนรู้ การบวก การลบ การคูณ และการหารเศษส่วนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. วารสารศึกษาศาสตร์ มสธ., 15(2), 193-207.

วรรณิกา อ่อนน้อม. (2564). การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหอย่างสร้างสรรค์ โดยใช้การจัดการเรียนรู้ตามกระบวนการแก้ปัญหตามแนวคิดของโพลยา ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. Journal of Roi Kaensarn Academ,i 6(6), มหาวิทยาลัยภาคตะวันออกเฉียงเหนือ.

วรางคณา สำอางค์. (2560). การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน  
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยการจัดการเรียนรู้ ตามแนวคิดของโพลยา. *วารสารมนุษยศาสตร์และ  
สังคมศาสตร์*, 11(1), มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม.

วิกรานต์ จรทะผา. (2562). การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง เศษส่วน ของ  
นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบ 4 MAT. (วิทยานิพนธ์ปริญญา  
มหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.

วิจักษณ์ ปันสีมา. (2559). การศึกษาระดับการคิดเกี่ยวกับการคูณของนักเรียนระดับประถมศึกษา.  
(วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.

วิจารณ์ พานิช. (2555). *วิธีสร้างการเรียนรู้เพื่อศิษย์ ในศตวรรษที่ 21*. บริษัท ตลาดา พับลิเคชัน  
จำกัด.

\_\_\_\_\_. (2563). *ชีวิตที่ พอเพียง 3691. ความฉลาดรู้เรื่องสถิติ*. สืบค้นเมื่อวันที่ 3 เมษายน  
2566 จาก <https://www.gotoknow.org/posts/677395>

วิมล มานพ. (2562). การพัฒนากิจกรรมการสอนคณิตศาสตร์เรื่อง การบวกและการลบจำนวนที่มี  
ผลลัพธ์และตัวตั้งไม่เกิน 20 สำหรับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้รูปแบบ QSCCS. (วิทยานิพนธ์  
ปริญญามหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยพะเยา.

วิไลลักษณ์ ไร่ไสว. (2560). การสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยความบกพร่องทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์  
เรื่อง การบวกและการลบจำนวนนับที่มีผลลัพธ์และตัวตั้งไม่เกิน 100,000 สำหรับนักเรียนชั้น  
ประถมศึกษาปีที่ 3. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.

วิไลลักษณ์ สีประโคน. (2565). การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความสามารถในการแก้โจทย์  
ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้การแก้ปัญหาแบบร่วมมือ.  
*วารสารพุทธปรัชญาวิวัฒน์*, 6(2), มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.

วีระชัย สีทาน้อย. (2561). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่  
4 เรื่อง เงิน โดยการใช้เกมเพื่อการเรียนรู้. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต).  
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

เวธการต์ มีสุข. (2565). รายงานผลการดำเนินงานการจัดกิจกรรมชุมชนแห่งการเรียนรู้ทางวิชาชีพ (PLC) เรื่อง การคุณทำสนุกแบบโรงเรียนบ้านกกไทร. สืบค้นเมื่อวันที่ 5 มีนาคม 2566 จาก <https://anyflip.com/lhkti/tlpg/basic>

ศศิพร ศิริราษฎร์ตระกูล, ไพศาล แซ่โซ้ง, และเบญจวรรณ ชัยปลัด. (2562). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ทักษะการแก้ปัญหาและแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วน โดยการจัดการเรียนรู้ที่บูรณาการแนวคิด CCR สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4. *Processding 2019 การประชุมวิชาการระดับชาติ ครุศาสตร์ศึกษา ครั้งที่ 2 มหาวิทยาลัยราชภัฏ พิบูลสงคราม*. 441-454.

ศักดิ์สิทธิ์ มาประสม. (2554). การศึกษาการใช้สื่อการสอนอิเล็กทรอนิกส์เรื่องทศนิยมสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารการศึกษา). มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2546). เรขาคณิตและความรู้สึกเชิงปริภูมิ. เอส.พี.เอ็น.การพิมพ์.

\_\_\_\_\_. (2557). ตัวอย่าง ข้อสอบคณิตศาสตร์ PISA 2012. หางทุนสวนจำกัด วิ.เจ.พรินติ้ง.

\_\_\_\_\_. (2560). ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

\_\_\_\_\_. (2563). หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2560. โรงพิมพ์ สกสค ลาดพร้าว.

\_\_\_\_\_. (2564). คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2560. โรงพิมพ์ สกสค ลาดพร้าว.

สมนึก ภัททิยธนี. (2562). การวัดผลการศึกษา. (พิมพ์ครั้งที่ 12). ประสารการพิมพ์.

- สินชัย จันท์เสมอ. (2539). *การสำรวจกรุปของการแปลงเชิงเรขาคณิต*. (วิทยานิพนธ์ปริญญา มหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สุกัญญา หะยีสานและ. (2554). การศึกษาสภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการ แก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางเรขาคณิต ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. *วารสารวิจัยและพัฒนา หลักสูตร* 9(2), 176-201.
- สุธีรา จันท์เกตุ. (2562). *การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) เพื่อเสริมสร้างมโนทัศน์ ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ เรื่องทศนิยม สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4*. (การค้นคว้าอิสระปริญญา มหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยนเรศวร.
- สุพัตรา ชันทอง. (2562). *แนวทางการพัฒนาประสิทธิผลการจัดการศึกษาของโรงเรียนในสังกัด สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาลำพูน เขต 2*. (วิทยานิพนธ์ปริญญา มหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยศิลปากร.
- สุพัตรา อินทรเกษม, สุรชาติ เกิดศรี, และมนตรี หลินภู. (2565). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การบวกและการลบ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้แบบฝึกทักษะทาง คณิตศาสตร์ โรงเรียนบ้านไร่ จังหวัดกำแพงเพชร. *รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการ ระดับชาติ สำหรับนักศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร ครั้งที่ 2 15 มีนาคม 2565*, 435-444.
- สุภัตรา ทรัพย์อุปการ. (2563). *เข้าใจคณิตศาสตร์ให้ง่ายขึ้นกับหลักการ CPA*. สืบค้นเมื่อวันที่ 6 ตุลาคมจาก <https://uatscimath.ipst.ac.th/2021/article-mathematics/item/11483-2020-04-21-07-43-06>
- สุวรรณรักษ์ หงษ์สุด. (2562). *การศึกษาระดับการคิดเกี่ยวกับการคูณกับการแก้ปัญหาทาง คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6*. (วิทยานิพนธ์ปริญญา มหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัย ราชภัฏมหาสารคาม.

หนึ่งฤทัย เลี้ยงพันธุ์สกุล. (2559). การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้แบบฝึกทักษะ เรื่องการบวก ลบ คูณ หารระคน ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนอนุบาลเบตง (สุภาพอนุสรณ์) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559. รายงานวิจัย สืบค้นเมื่อวันที่ 1 มีนาคม 2566 จาก [http://www.anubanbetong.ac.th/attachments/view/?attach\\_id=132968](http://www.anubanbetong.ac.th/attachments/view/?attach_id=132968)

อณัฐญา แก้วไซเกิด. (2565). การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง การบวก การลบ การคูณ และการหาร โดยใช้เทคนิคคิดเลขเร็วแบบเวทคณิตร่วมกับเกมออนไลน์สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยศิลปากร.

อังคณา ทิพย์รุ่งโรจน์. (2566). การพัฒนาชุดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract และแนวคิด Model-Eliciting Activities เรื่อง ทศนิยม เพื่อยกระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา.

อัจฉรา ขุนโมกข์. (2558). การพัฒนาชุดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้สถานการณ์จำลองเรื่อง เงิน สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3. (การศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยนเรศวร.

อัจฉราพรรณ พลเยี่ยมแสน. (2565). การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการคูณ ด้วยเทคนิคการคูณแบบอินเดียโดยใช้ตารางร่วมกับเทคนิค Team Games Tournament (TGT) ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนในสังกัดสำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมการศึกษาเอกชนตรัง. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยหาดใหญ่.

อัมพร ม้าคนอง. (2554). ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ : การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ. (พิมพ์ครั้งที่ 2). โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อารีย์ สุขใจรวมเวทย์. (2553). การพัฒนาผลการเรียนรู้ เรื่อง การบวกและการลบของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ด้วยการจัดการเรียนรู้แบบวัฏจักรการเรียนรู้ 7E. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยศิลปากร.

อุษา ภิรมย์รักษ์. (2562). การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยการจัดการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ร่วมกับเทคนิคเพื่อนคู่คิด (Think-Pair-Share) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยศิลปากร.

### ภาษาอังกฤษ

Anderson, L.W. (Ed.), Krathwohl, D.R. (Ed.), Airasian, P.W., Cruikshank, K.A., Mayer, R.E., Pintrich, P.R., Raths, J., & Wittrock, M.C. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives (Complete edition)*. New York: Longman.

Blume, G., Galindo, E., & Walcott, C. (2007). Performance in measurement and geometry from the viewpoint of Principles and Standards for School Mathematics. In P. Kloosterman & F. Lester, Jr. (Eds.), *Results and interpretations of the 2003 mathematics assessment of the National Association of Educational Progress* (pp. 95-138). Reston VA: NCTM.

CCSSO (Council of Chief State School Officers). (2010). *Common Core State Standards*. Washington, DC: Authors

Clarke, D., Roche, A., & Mitchell, A. (2008). 10 practical tips for making fractions come alive and make sense. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(7), 373-380.

Clement, L. (2004). A model for understanding, using, and connecting representations. *Teaching Children Mathematics*, 11(2), 97-102.

Clements, D., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.

Cramer, K., Whitney, S. (2010). Learning rational number concepts and skills in elementary school classrooms. In D. V. Lambdin & F. K. Lester, Jr. (Eds). *Teaching*

*and learning mathematics: Translating research for elementary school teachers*, 15-22. Reston, VA: NCTM.

Dienes, Z. P. (2000). The theory of the six stages of learning with integers. *Mathematics in Schools*, 29(2).

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Franklin, D. A., & Mewborn, D. S. (2008). Statistics in the elementary grades: Exploring distribution of data. *Teaching Children Mathematics*, 15(1), 10-16.

Gronlund, N. E. (2009). *Assessment of student achievement*. 9<sup>th</sup> ed. Boston: Allyn and Bacon.

Kloosterman, P., Rutledge, Z., & Kenney, P. (2009). Exploring the results of the NAEP: 1980s to the present. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(6), 357-365.

Kloosterman, P. (2010). Mathematics skills of 17-year-olds in the United States: 1978 to 2004. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(1), 20-51.

Kouba, V. L., Brown, C. A., Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Silver, E. A., & Swafford, J. O. (1988). Results of the Fourth NAEP assessment of mathematics: Number, operations and word problem. *Arithmetic Teacher*, 35(8), 14-19.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teacher*. New York, NY: Routledge.

Lesh, R.A., Cramer, K., Doerr, H., Post, T., & Zawojewski, J. (2003). Model development sequences. In R.A. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A Models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving*, 35-58. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

- MacGillvray, H., & Mendoza, L. P. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. In G. Burrill, C. Reading, & C. Batanero (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics - Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study* (pp. 109-120). Germany: Springer.
- Martin, D.J. (2000). *Elementary Science Methods: A Constructivist Approach*. (2<sup>nd</sup> ed.). Belmont, CA: Wadsworth.
- Molina, M. & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 30(1), 61-80.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standard for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Research Council. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: The National Academies Press.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Implement Tasks That Promote Reasoning and Problem Solving. Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All* Produced.
- Neumer, C. (2007). Mixed numbers made easy: Building and converting mixed numbers and improper fraction. *Teaching Children Mathematics*, 13(9), 488-492.

- Noll, J. (2011). *Graduate Teaching Assistants' Statistical Content Knowledge of Sampling*. *Statistics Education Research Journal*, 10(2), 48-74.
- OECD. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, PISA, OECD Publishing, Paris.
- Ojose, B. (2008). Applying Piaget's of Cognitive Development to Mathematics Instruction. *The Mathematics Educator*, 1(18), 26-30.
- Parmar, R., Garrison, R., Clements, D., & Sarama, J. (2011). Measurement. In F. Fennell (Ed.), *Achieving fluency in special education and mathematics*, 197-216 Reston, VA: NCTM.
- Pesek, D., & Kirshner, D. (2002). Inference of instrumental instruction in subsequent relational learning. In J. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Lessons learned from research*, 101-107. Reston, VA: NCTM.
- Petit, M. M., Laird, R. E., & Marsden, E. L. (2010). *A focus on fraction: Bringing research to the classroom*. New York, NY: Taylor & Francis.
- Ping Wen. (2018). *Application of Bruner's Learning Theory in Mathematics Studies*. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research*, (283).
- Philipp, R., & Vincent, C. (2003). *Reflecting on learning fractions without understanding*. *OnMath*, 2(7).
- Piaget, J. (1983). *Piaget's theory*. P. Mussen (ed). *Handbook of Child Psychology*. 4th edition. Vol. 1. New York:Wiley.
- Polya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton University Press.

- Reys, Barbara J. and other. (1992). Developing Number Sense in the Middle Grades. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Edited by Curcio F.R. : The National Council of Teachers of Mathematics.
- Ronau, Robert N. (1988). Number sense. *Mathematics Teacher*. 81(6), 437-440.
- Russell, S. J. (2006). What does it mean that “5 has a lot”? From the world to data and back. In G. F. Burrill & P. C. Elliott (Eds.), *Thinking and reasoning about data and chance: 68<sup>th</sup> NCTM yearbook*, 17-30. Reston, VA: NCTM.
- Schaffer, R. L. (2006). Statistics and mathematics: On making a happy marriage. In G. F. Burrill & P. C. Elliott (Eds.), *Thinking and reasoning with data and chance, 68<sup>th</sup> yearbook*, 309-322. Reston, VA: NCTM.
- Schmuck, R. A. (2006). *Practical action research for change*. 2<sup>nd</sup> ed. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.
- Shaughnessy, J. M. (2007). Research on students’ understanding of some big concepts in statistics. In G. F. Burrill & P. C. Elliott (Eds.), *Thinking and reasoning about data and chance: 68<sup>th</sup> NCTM yearbook*, 77-98. Reston, VA: NCTM.
- Shaughnessy, M. (2009). *Students’ flexible use of multiple representations for rational numbers: Decimals, fractions, parts of area and number line*. Doctoral dissertation, University of California – Berkeley.
- Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., et al. (2010). *Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: A practice guide (NCEE #2010-4039)*. Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Retrieved May 15, 2022 from [https://ies.ed.gov/ncee/wwc/docs/practiceguide/fractions\\_pg\\_093010.pdf](https://ies.ed.gov/ncee/wwc/docs/practiceguide/fractions_pg_093010.pdf)

- Thompson, C.S. (1990). Place value and larger number. In J.N. Payne (Ed.), *Mathematics for Young Children*, 89-108. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Van de Walle, J.A. (2014). *Teaching student-centered mathematics. Developmentally appropriate instruction for grades 3-5*. Boston :Pearson.
- van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316.
- Williams, L. (2008). Tiering and scaffolding: Two strategies for providing access to important mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 14(6), 324-330.
- Wright, R., Marland, J. ,Stafford, A., & Stanger, G. (2008). *Teaching number in the classroom with 4-8-year-olds*. London: Sage.
- Zambo, R. (2008). Percents can make sense. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(7), 418-422.