IND1001
สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

Part 1

Tadchanon Chuman
Department of Electrical Technology, SSRU

สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบ่งเป็น 4 รูปแบบ

1. **รูปแบบตัวแปรแยกกันได้** (variables separable form)
2. **รูปแบบเอกพันธ์** (homogenous form)
3. **รูปแบบแม่ตรง** (exact form)
4. **รูปแบบเชิงเส้น** (linear form)

01

สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง รูปแบบตัวแปรแยกกันได้

ลักษณะของรูปแบบตัวแปรแยกกันได้

รูปแบบนี้ คือสมการที่สามารถจัดรูปได้เป็น

$$f(x)dx = g(y)dy$$

- f(x) เป็นฟังก์ชันของ x
- g(y) เป็นฟังก์ชันของ y

ข้อสังเกต รูปแบบนี้จะแยกตัวแปร x และ y ออกจากกันอย่างชัดเจน

การจัดรูปสมการแบบแยกกันได้

หมายเหตุ 1 โดยปกติ สมการอนุพันธ์จะไม่อยู่ในรูป f(x)dx = g(y)dy จึงต้องอาศัยการจัดรูปสมการก่อน

ตัวอย่างที่ 1 จงจัดรูปสมการต่อไปนี้ เพื่อหาฟังก์ชัน f(x) และ g(y)

$$(1+y)^2 dx = \frac{1}{2x} dy$$

เทคนิค
ย้ายส่วนที่ติดกับ dx ไปทางซ้าย และย้ายส่วนที่ติดกับ dy ไปทางขวาแล้วจัดรูป

<u>วิธีทำ</u>

จะได้ $f(x) = 2x, \quad g(y) = (1+y)^{-2}$

การจัดรูปสมการแบบแยกกันได้

หมายเหตุ 2 โดยทั่วไป สมการอนุพันธ์อาจอยู่ในรูป y′
จึงต้องแทน y′ ด้วย dy/dx แล้วค่อยจัดให้อยู่ในรูป f(x)dx = g(y)dy

ตัวอย่างที่ 2 จงจัดรูปสมการต่อไปนี้ เพื่อหาฟังก์ชัน f(x) และ g(y)

$$y' = \frac{x}{y}$$

วิธีทำ

$$y' = \frac{x}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

จะได้ f(x) = x และ g(y) = y

ผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้

- สำหรับสมการในรูปแบบ

$$f(x)dx = g(y)dy$$

เราสามารถหาผลเฉลยได้โดยการอินทิเกรตดังนี้

$$\boxed{\int f(x)dx = \int g(y)dy + c}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

- เมื่อได้ผลการอินทิเกรตแล้ว เราจะจัดรูปต่อไปให้ได้ y = ...

ผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$(1+y)^2dx = \frac{1}{2x}dy$$

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่างที่ 1 เราจัดรูปได้

$$f(x)dx = g(y)dy \quad \text{เมื่อ} \quad f(x) = 2x, \quad g(y) = (1+y)^{-2}$$

ดังนั้น

$$\int f(x)dx = \qquad \int g(y)dy \ =$$

ผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$(1+y)^2dx = \frac{1}{2x}dy$$

<u>วิธีทำ</u> (ต่อ) ดังนั้น จาก

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$$

จะได้...

ผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y' = \frac{y}{x}$$

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่างที่ 2 เราจัดรูปได้

$f(x)dx = g(y)dy$ เมื่อ $f(x) = x, \quad g(y) = y$

ดังนั้น

$$\int f(x)dx = \qquad \int g(y)dy \ =$$

ผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y' = \frac{y}{x}$$

<u>วิธีทำ</u> (ต่อ) ดังนั้น จาก

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$$

จะได้...

ผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y' = \frac{y^2+1}{x^2}$

<u>วิธีทำ</u> ในขั้นแรกจะต้องจัดสมการให้อยู่ในรูป

$$f(x)dx = g(y)dy$$

ผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y' = \frac{y^2+1}{x^2}$

<u>วิธีทำ</u> (ต่อ) จาก f(x) = และ g(y) =

$$\int f(x)dx =$$

$$\int g(y)dy =$$

ดังนั้น $=$ + c