

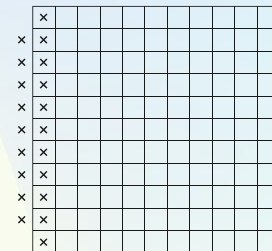
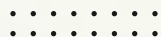
IND1001

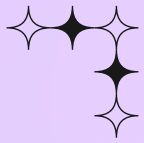
สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

Part 1



Tadchanon Chuman
Department of Electrical Technology, SSRU

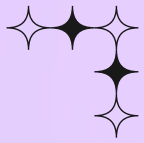




สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบ่งเป็น 4 รูปแบบ

1. รูปแบบตัวแปรแยกกันได้ (variables separable form)
2. รูปแบบเอกพันธ์ (homogenous form)
3. รูปแบบแม่ตรง (exact form)
4. รูปแบบเชิงเส้น (linear form)





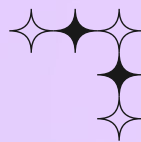
ลักษณะของรูปแบบตัวแปรแยกกันได้

รูปแบบนี้ คือสมการที่สามารถจัดรูปได้เป็น

$$f(x)dx = g(y)dy$$

- $f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x
- $g(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y

ข้อสังเกต รูปแบบนี้จะแยกตัวแปร x และ y ออกจากกันอย่างชัดเจน



การจัดรูปสมการแบบแยกกันได้

หมายเหตุ 1 โดยปกติ สมการอนุพันธ์จะไม่อยู่ในรูป $f(x)dx = g(y)dy$ จึงต้องอาศัยการจัดรูปสมการก่อน

ตัวอย่างที่ 1 จงจัดรูปสมการต่อไปนี้ เพื่อหาฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(y)$

$$(1 + y)^2 dx = \frac{1}{2x} dy$$

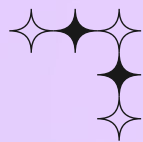
วิธีทำ

จะได้ $f(x) = 2x, \quad g(y) = (1 + y)^{-2}$

เทคนิค

ย้ายส่วนที่ติดกับ dx ไปทางซ้าย และย้ายส่วนที่ติดกับ dy ไปทางขวาแล้วจัดรูป





การจัดรูปสมการแบบแยกกันได้

หมายเหตุ 2 โดยทั่วไป สมการอนุพันธ์อาจอยู่ในรูป y'

จึงต้องแทน y' ด้วย dy/dx แล้วค่อยจัดให้อยู่ในรูป $f(x)dx = g(y)dy$

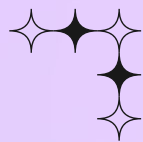
ตัวอย่างที่ 2 จงจัดรูปสมการต่อไปนี้ เพื่อหาฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(y)$

วิธีทำ

$$y' = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

จะได้ $f(x) = x$ และ $g(y) = y$





ผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้

- สำหรับสมการในรูปแบบ

$$f(x)dx = g(y)dy$$

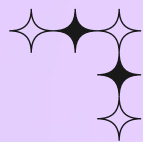
เราสามารถหาผลเฉลยได้โดยการอินทิเกรตดังนี้

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

- เมื่อได้ผลการอินทิเกรตแล้ว เราจะจัดรูปต่อไปให้ได้ $y = \dots\dots$





ผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$(1 + y)^2 dx = \frac{1}{2x} dy$$

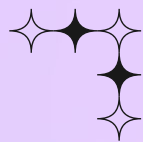
วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 1 เราจัดรูปได้

$$f(x)dx = g(y)dy \quad \text{เมื่อ} \quad f(x) = \frac{1}{2x}, \quad g(y) = (1 + y)^{-2}$$

ดังนั้น

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy =$$





ผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

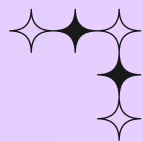
$$(1 + y)^2 dx = \frac{1}{2x} dy$$

วิธีทำ (ต่อ) ดังนั้น จาก

$$\int f(x) dx = \int g(y) dy + c$$

จะได้...





ผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y' = \frac{y}{x}$$

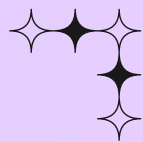
วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 2 เราจัดรูปได้

$$f(x)dx = g(y)dy \quad \text{เมื่อ} \quad f(x) = x, \quad g(y) = y$$

ดังนั้น

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy =$$





ผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

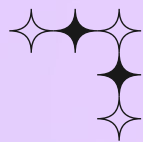
$$y' = \frac{y}{x}$$

วิธีทำ (ต่อ) ดังนั้น จาก

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$$

จะได้...





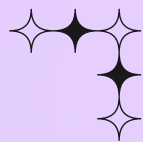
ผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y' = \frac{y^2 + 1}{x^2}$

วิธีทำ ในขั้นแรกจะต้องจัดสมการให้อยู่ในรูป

$$f(x)dx = g(y)dy$$





ผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y' = \frac{y^2 + 1}{x^2}$

วิธีทำ (ต่อ) จาก $f(x) =$

และ $g(y) =$

$$\int f(x) dx =$$

$$\int g(y) dy =$$

ดังนั้น

=

+ c

