

ตรรกศาสตร์และการพิสูจน์



ตรรกศาสตร์ในยุคโบราณ







ประพจน์และค่าความจริง

การสมมูลเชิงตรรกศาสตร์/สัจนิรันดร์

กฎการอนุมานและการพิสูจน์

การอ้างเหตุผล

ตัวบ่งปริมาณ

ประพจน์และค่าความจริง

- บทนิยาม1

ประพจน์ (proposition หรือ statement) คือ ประโยค หรือข้อความที่เป็น จริง หรือ เท็จ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

นิยมเขียนแทนด้วยตัวอักษรตัวพิมพ์เล็กในภาษาอังกฤษ เช่น **p, q, r** เป็นต้น

- บทนิยาม2

เรียกประพจน์ที่เป็นจริงว่า ประพจน์ที่มีค่าความจริง (true value) เป็นจริง (**true**) แทนด้วย **"T"**

และเรียกประพจน์ที่เป็นเท็จว่า ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ (**false**) แทนด้วย **"F"**

เกม : เป็นหรือไม่เป็นประพจน์

ดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศ
ตะวันออก

T

$\frac{22}{7}$ เป็นจำนวน

อตรรกยะ

F

ณเดชเป็นคนจังหวัด
ขอนแก่น

T

กรุงเทพฯ มี 76 จังหวัด

F

พรุ่งนี้พวกเรา
ไปกินต๋ายด้วยกัน

?

$2y - 1 \neq 5$

?

2.4 เป็นจำนวน

F

ไม่!!!!
ฉันไม่รักเขา

?

เขาได้รับเหรียญทอง
จากการแข่งขัน
5 เหรียญ

?

ประพจน์และค่าความจริง

- บทนิยาม3

ประโยคเปิด (Open Sentence) คือประโยคบอกเล่า หรือปฏิเสธ ที่มีตัวแปรอยู่ในรูปประโยค ยังไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ

การเขียนประโยคเปิดจะเขียนแทนประโยคด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่ และเขียนวงเล็บแสดงตัวแปรของประโยค เช่น

ให้ $P(x)$ แทน $x^2 - x + 2 \leq 0$ เมื่อ $x \in R$

$Q(x)$ แทน $2y - 3 \leq 0$ เมื่อ $y \in R$

ประพจน์เชิงเดียว
(single statement)

นิเสธของประพจน์

เมื่อกำหนดให้ p, q เป็นประพจน์ใด ๆ **นิเสธ (negation)** ของ p เขียนแทนด้วย $\sim p$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับ p

p	$\sim p$
T	F
F	T

p

$\sim p$

ตัวอย่างการเขียนนิเสธของประพจน์

- **1. อ.อ้น เป็นคนจังหวัดเชียงใหม่**
- นิเสธ :
- **2. อ.ป๋วย มีรายได้ทรัพย์สินมากกว่า อ.อ้น**
- นิเสธ :
- **3. $5x + 3 = 10$**
- นิเสธ :
- **4. $2x - 10 > 6$**
- นิเสธ :

การเชื่อมประพจน์

การนำประพจน์เชิงเดียวมาสร้างเป็นสถานการณ์ต่าง ๆ โดยใช้ตัวเชื่อม (connective) ทางตรรกศาสตร์ ที่มีด้วยกัน 4 ตัวเชื่อม เพื่อได้ประพจน์ใหม่ที่เรียกว่า “ประพจน์เชิงประกอบ” (compound statement)

ตัวเชื่อมประพจน์ทั้ง 4 ได้แก่

1. ข้อความร่วม (conjunction)
2. ข้อความเลือก (disjunction)
3. ข้อความแบบเงื่อนไข (conditional statement)
4. ข้อความแบบผันกลับได้ (biconditional statement)

ข้อความร่วม (conjunction)

บทนิยาม 4

ให้ p, q เป็นประพจน์ “ข้อความร่วม (conjunction)”

ของ p และ q เขียนแทนด้วย $p \wedge q$ อ่านว่า p และ q จะมีค่าความจริงเป็นจริงได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้นเมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นจริง

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ข้อความเลือก (disjunction)

บทนิยาม 5

ให้ p, q เป็นประพจน์ “ข้อความเลือก (disjunction)”

ของ p และ q เขียนแทนด้วย $p \vee q$ อ่านว่า p หรือ q จะมีค่าความจริงเป็นเท็จได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้นเมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ข้อความแบบเงื่อนไข (conditional statement)

บทนิยาม 6

ให้ p, q เป็นประพจน์ “ข้อความแบบเงื่อนไข (conditional statement)” ของ p และ q

เขียนแทนด้วย $p \rightarrow q$ อ่านว่า ถ้า p แล้ว q

จะมีค่าความจริงเป็นเท็จได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้นเมื่อ p มีค่าความจริงเป็นจริง และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ข้อความแบบเงื่อนไข (conditional statement)

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ข้อความแบบผันกลับได้ (biconditional statement)

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$(p \leftrightarrow q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

กิจกรรมหาความจริงอย่างรวดเร็ว

- | | |
|--|---|
| 1. $p \wedge T \equiv \dots\dots\dots$ | 11. $p \rightarrow T \equiv \dots\dots\dots$ |
| 2. $p \wedge F \equiv \dots\dots\dots$ | 12. $p \rightarrow F \equiv \dots\dots\dots$ |
| 3. $p \wedge p \equiv \dots\dots\dots$ | 13. $p \rightarrow p \equiv \dots\dots\dots$ |
| 4. $p \wedge \sim p \equiv \dots\dots\dots$ | 14. $p \rightarrow \sim p \equiv \dots\dots\dots$ |
| 5. $p \vee T \equiv \dots\dots\dots$ | 15. $T \leftrightarrow p \equiv \dots\dots\dots$ |
| 6. $p \vee F \equiv \dots\dots\dots$ | 16. $F \leftrightarrow p \equiv \dots\dots\dots$ |
| 7. $p \vee p \equiv \dots\dots\dots$ | 17. $p \leftrightarrow p \equiv \dots\dots\dots$ |
| 8. $p \vee \sim p \equiv \dots\dots\dots$ | 18. $\sim p \leftrightarrow p \equiv \dots\dots\dots$ |
| 9. $T \rightarrow p \equiv \dots\dots\dots$ | |
| 10. $F \rightarrow p \equiv \dots\dots\dots$ | |

ลำดับตัวเชื่อมประพจน์

ในบางครั้งเราอาจเจอประพจน์เชิงประพจน์ที่ไม่ได้เขียนวงเล็บแบ่งแยกตัวเชื่อมประพจน์ให้ อาจทำให้เกิดความสับสนในการหาค่าความจริงของประพจน์เชิงประพจน์นั้น ดังนั้นจึงได้กำหนดลำดับของตัวเชื่อมประพจน์ทางตรรกศาสตร์ไว้ ดังนี้

1. $\leftrightarrow$

2. $\rightarrow$

3. $\wedge, \vee$ (กรณีมีทั้งสองตัวเชื่อมต้องใส่วงเล็บ)

4. $\sim$

ตัวอย่างลำดับตัวเชื่อมประพจน์

1. $\sim p \wedge q \leftrightarrow r \rightarrow \sim p$

2. $\sim r \rightarrow p \wedge q \leftrightarrow r$

3. $\sim p \wedge \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$

4. $p \wedge \sim r \leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$

ตัวอย่างการหาค่าความจริงของประพจน์

กำหนดให้ p, r เป็นจริง และ q เป็นเท็จ
จงหาค่าความจริงของรูปแบบประพจน์ต่อไปนี้

1. $[(p \wedge s) \vee (p \wedge r)] \rightarrow (p \vee s)$

ตัวอย่างการหาค่าความจริงของประพจน์

กำหนดให้ p, r เป็นจริง และ q เป็นเท็จ
จงหาค่าความจริงของรูปแบบประพจน์ต่อไปนี้

2. $[(q \rightarrow s) \vee r] \vee [(q \leftrightarrow s) \wedge r]$

ตัวอย่างการหาค่าความจริงของประพจน์

กำหนดให้ p, r เป็นจริง และ q เป็นเท็จ
จงหาค่าความจริงของรูปแบบประพจน์ต่อไปนี้

$$3. [(r \leftrightarrow q) \vee (p \rightarrow q)] \rightarrow (p \vee \sim q)$$

ตัวอย่างการหาค่าความจริงของประพจน์

กำหนดให้ p, r เป็นจริง และ q เป็นเท็จ
จงหาค่าความจริงของรูปแบบประพจน์ต่อไปนี้

$$4. [(p \leftrightarrow q) \vee (q \rightarrow r)] \vee \sim s$$

การหาค่าความจริงของประพจน์โดยใช้ตารางแสดงค่าความจริง

1. $p \wedge q \rightarrow r$

2. $(\sim p \wedge q) \vee r$

3. $(p \vee r) \leftrightarrow (q \wedge r)$

4. $(\sim p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$

5. $\sim [(p \wedge \sim q) \vee \sim p]$

6. $\sim (p \wedge q)$ และ $\sim p \vee \sim q$

7. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ และ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

8. $[p \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \vee \sim r)$

$$1. p \wedge q \rightarrow r$$

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow r$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

$$2. (\sim p \wedge q) \vee r$$

$\sim p$	q	r	$(\sim p \wedge q)$	$(\sim p \wedge q) \vee r$
	T	T		
	T	F		
	F	T		
	F	F		
	T	T		
	T	F		
	F	T		
	F	F		

3. $(p \vee r) \leftrightarrow (q \wedge r)$

[illegible]

4. $(\sim p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$

[illegible]

$$5. \sim [(p \wedge \sim q) \vee \sim p]$$

						$\sim [(p \wedge \sim q) \vee \sim p]$

6. $\sim (p \wedge q)$ ແລະ $\sim p \vee \sim q$

p	q		$\sim (p \wedge q)$	$\sim q$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$

7. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ และ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

[illegible]

8. $[p \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \vee \sim r)$

[illegible]

การสมมูลเชิงตรรกศาสตร์/สัจนิรันดร์

บทนิยาม7

ให้ **p** และ **q** เป็นประพจน์ใด ๆ

ประพจน์ **p** สมมูล (equivalence) กับ **q** ก็ต่อเมื่อ
ประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงตรงกันทุกกรณี เขียนแทนด้วย “ $p \equiv q$ ”

บทนิยาม8

ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ เรียกว่า “สัจนิรันดร์” (tautology)
และเรียกนิเสธของสัจนิรันดร์ว่า “ข้อความขัดแย้ง” (contradiction)

กฎการสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

E1.	$\sim(\sim p) \equiv p$	กฎนิเสธซ้อน (Double negation)
E2.	$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	กฎนิเสธผล (Idempotent Law)
E3.	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	กฎสลับที่ (Commutative Law)
E4.	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's Law)
E5.	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative Law)
E6.	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	กฎการแจกแจง (Distributive Law)
E7.	$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	

กฎการสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

E8. $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

กฎการแย้งสลับที่ (Contrapositive Law)

E9. $\sim p \wedge p \equiv c$

กฎการขัดแย้ง (Contradiction Law)

E10. $\sim p \vee p \equiv t$

กฎนิรมัชฌิม (Excluded middle Law)

E11. $p \vee c \equiv p$

กฎเอกลักษณ์ (Identity Law)

$$p \wedge t \equiv p$$

E12. $p \wedge c \equiv c$

กฎครอบงำ (Domination Law)

$$p \vee t \equiv t$$

E13. $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

E14. $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

E15. $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

E16. $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$

E17. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

กฎการสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (q \leftrightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (\sim q \rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q) \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$$

$$p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

$$p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$$

$$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$

$$(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

การอ้างเหตุผล/การอนุมานและการพิสูจน์

บทนิยาม9

การอ้างเหตุผล (Argument) คือการอ้างว่าประพจน์ $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ซึ่งจะเรียกว่าเหตุ นั้น สามารถสรุปประพจน์ q ซึ่งจะเรียกว่าผลสรุป เขียนแทนด้วย

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \vdash q$$

การอ้างเหตุผลจะ “สมเหตุสมผล” (Valid) ก็ต่อเมื่อ

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$$

เป็นสัจนิรันดร์ นอกเหนือจากนี้เป็นการอ้างเหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล (Invalid)

ตัวอย่างการใช้กฎการสมมูล

จงตรวจสอบประพจน์เชิงประกอบต่อไปนี้ว่าสมมูลกันหรือไม่

1. $p \vee (p \wedge q)$ กับ p **ตัดข้อนี้**ออกจากตัวอย่าง เนื่องจากว่าข้อนี้เป็น **Absorption Law** :

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

ตัวอย่างการใช้กฎการสมมูล

จงตรวจสอบประพจน์เชิงประกอบต่อไปนี้ว่าสมมูลกันหรือไม่

2. $(p \vee q) \rightarrow p$ กับ $\sim q \vee p$

ตัวอย่างการใช้กฎการสมมูล

จงตรวจสอบประพจน์เชิงประกอบต่อไปนี้ว่าสมมูลกันหรือไม่

3. $(p \wedge q) \leftrightarrow p$ กับ $\sim p \vee q$

ตัวอย่างการใช้กฎการสมมูล

จงตรวจสอบประพจน์เชิงประกอบต่อไปนี้ว่าสมมูลกันหรือไม่

4. $\sim(p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$ กับ $\sim(p \wedge q)$

ตัวอย่างการใช้กฎการสมมูล

จงตรวจสอบประพจน์เชิงประกอบต่อไปนี้ว่าสมมูลกันหรือไม่

5. $\sim[(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee r)]$ กับ $p \wedge \sim(p \rightarrow r)$

ตัวอย่างสัจนิรันดร์

จงตรวจสอบประพจน์เชิงประพจน์ต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

1. $\sim(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ กับ $\sim p$

ตัวอย่างสัจนิรันดร์

จงตรวจสอบประพจน์เชิงประพจน์ต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$$2. [p \wedge (q \vee r)] \vee \sim[p \wedge \sim (q \vee r)]$$

ตัวอย่างสัจนิรันดร์

จงตรวจสอบประพจน์เชิงประกอบต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$$3. (p \wedge \sim q) \wedge (p \rightarrow q)$$

ตัวอย่างสัจนิรันดร์



ตัวอย่างสัจนิรันดร์



ตัวอย่างสัจนิรันดร์

จงตรวจสอบประพจน์เชิงประพจน์ต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$$4. [(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\sim q \wedge \sim s)] \rightarrow (\sim p \vee \sim r)$$

ตัวอย่างสัจนิรันดร์

จงตรวจสอบประพจน์เชิงประกอบต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$$5. (p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

การอ้างเหตุผล

บทนิยาม9

การอ้างเหตุผล (Argument) คือการอ้างว่าประพจน์ $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ซึ่งจะเรียกว่าเหตุ นั้น สามารถสรุปประพจน์ q ซึ่งจะเรียกว่าผลสรุป เขียนแทนด้วย

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \vdash q$$

การอ้างเหตุผลจะ “สมเหตุสมผล” (Valid) ก็ต่อเมื่อ

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$$

เป็นสัจนิรันดร์ นอกเหนือจากนี้เป็นการอ้างเหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล (Invalid)

การอ้างเหตุผล

ในการตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลใดมีความสมเหตุสมผลหรือไม่ สามารถทำได้โดยการตรวจสอบว่าประพจน์ $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยใช้วิธีการดังนี้

1. การสร้างตารางหาค่าความจริง
2. สมมุติให้ประพจน์นั้นมีค่าความจริงเป็นเท็จ จากนั้นก็หาข้อขัดแย้ง
3. ใช้กฎตรรกศาสตร์

กฎการอนุมานและการพิสูจน์

- **Modus ponens** is the argument form

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \therefore q \end{array}$$

- This is also called a **direct argument**.

กฎการอนุมานและการพิสูจน์

- **Modus tollens** is the argument form

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \therefore \sim p \end{array}$$

- This is also called an **indirect argument**.
- It is equivalent to replacing $p \rightarrow q$ with $\sim q \rightarrow \sim p$ and then using modus ponens.

กฎการอนุมานและการพิสูจน์

- Transitivity

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

- Elimination

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \therefore q \end{array}$$

กฎการอนุมานและการพิสูจน์

- From the specific to the general

$$\begin{array}{c} p \\ \therefore p \vee q \end{array}$$

- From the general to the specific

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \therefore p \end{array}$$

กฎการอนุมานและการพิสูจน์

- Constructive Dilemma

$$p \rightarrow q$$

$$r \rightarrow s$$

$$p \vee r$$

$$\therefore q \vee s$$

กฎการอนุมานและการพิสูจน์

- Destructive Dilemma

$$p \rightarrow q$$

$$r \rightarrow s$$

$$\sim q \vee \sim s$$

$$\therefore \sim p \vee \sim r$$

ตัวอย่างการตรวจสอบการอ้างเหตุผล

จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

ตัวอย่างที่ 1 เหตุ 1. $p \rightarrow q$
 2. $q \rightarrow \sim r$
 3. p
 ผล $\sim r$

วิธีที่ 1 การสร้างตารางหาค่าความจริง

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge p] \rightarrow \sim r$$

p	q	r	$\sim r$	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow \sim r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge p] \rightarrow \sim r$

จะเห็นได้ว่าการอ้างเหตุผลนี้..... เนื่องจากประพจน์ประกอบเป็น.....
แต่การใช้ตารางค่าความจริงเสียเวลามากในการอ้างเหตุผล

วิธีที่ 2 สมมติให้ประพจน์นั้นมีค่าความจริงเป็นเท็จ จากนั้นก็หาข้อขัดแย้ง

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge p] \rightarrow \sim r$$

วิธีที่ 3 ใช้กฎตรรกศาสตร์

เหตุ	1. $p \rightarrow q$	พิสูจน์
	2. $q \rightarrow \sim r$	
	3. p	
ผล	$\sim r$	

ตัวอย่างที่ 2 ใช้กฎตรรกศาสตร์

เหตุ

1. $p \rightarrow \sim q$

2. $\sim r \vee q$

3. r

ผล

$\sim p$

พิสูจน์

ตัวอย่างที่ 3 ใช้กฎตรรกศาสตร์

เหตุ 1. $p \vee q$

2. $p \rightarrow r$

3. $q \rightarrow s$

ผล $\sim r \vee s$

พิสูจน์

ตัวอย่างที่ 4 ใช้กฎตรรกศาสตร์

เหตุ	1. $(p \vee q) \rightarrow r$	พิสูจน์
	2. $\sim s$	
	3. $r \rightarrow s$	
ผล	$\sim p$	

ตัวอย่างที่ 5 ใช้กฎตรรกศาสตร์

เหตุ 1. $(p \wedge q) \rightarrow r$ | พิสูจน์

2. $r \rightarrow s$

3. $\sim s$

ผล $\sim p \vee \sim q$

ตัวอย่างที่ 6 ใช้กฎตรรกศาสตร์

เหตุ 1. $p \rightarrow (q \vee r)$ พิสูจน์

2. $q \rightarrow \sim p$

3. $s \rightarrow \sim r$

ผล $p \rightarrow \sim s$

ตัวอย่างที่ 7 ใช้กฎตรรกศาสตร์

เหตุ 1. $p \leftrightarrow q$

2. $r \rightarrow s$

3. $p \vee r$

ผล $s \rightarrow \sim q$

พิสูจน์

ตัวอย่างที่ 8 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

นักเรียนตั้งใจเรียน ก็ต่อเมื่อนักเรียนขยัน

ถ้านักเรียนตั้งใจเรียนและขยัน แล้วจะได้คะแนนสอบสูง

นักเรียนไม่ได้คะแนนสอบสูง หรือไม่ได้ทำแบบฝึกหัด

ดังนั้น ไม่จริงที่ว่า นักเรียนตั้งใจเรียนและทำแบบฝึกหัด

พิสูจน์

p แทน นักเรียนตั้งใจเรียน

q แทน นักเรียนขยัน

p แทน นักเรียนได้คะแนนสอบสูง

s แทน นักเรียนทำแบบฝึกหัด

จากข้อมูลสามารถนำมาเขียนเป็นเหตุและผลได้ดังนี้

เหตุ 1. $p \leftrightarrow q$

2.

3.

ผล

จากนั้นทำการตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่ ด้วยการตรวจสอบว่า

.....เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

ตัวบ่งปริมาณ

บทนิยาม10 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $p(x)$ เป็นประพจน์

แบบที่1 นำหน้า $p(x)$ ด้วยตัวบ่งปริมาณ

ทุก x ใน $\mathcal{U}$ / สำหรับแต่ละ x ใน $\mathcal{U}$ / ไม่ว่า x จะเป็น
อะไรก็ตามใน $\mathcal{U}$ / สำหรับแต่ละ x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติ $p(x)$
เขียนแทนด้วย

$$\forall x \in \mathcal{U}[p(x)] \text{ หรือ } \forall x[p(x)] \text{ หรือ } \forall x \in \mathcal{U}, p(x)$$

เรียก $\forall$ ว่า “ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด” (Universal quantifier)

ตัวบ่งปริมาณ

บทนิยาม10 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภาพสัมพัทธ์ และ $p(x)$ เป็นประพจน์

แบบที่2 นำหน้า $p(x)$ ด้วยตัวบ่งปริมาณ

มี x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่ง / บาง x ใน $\mathcal{U}$ มีสมบัติว่า / มีบาง x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติ $p(x)$ เขียนแทนด้วย

$$\exists x \in \mathcal{U}[p(x)] \text{ หรือ } \exists x[p(x)] \text{ หรือ } \exists x \in \mathcal{U}, p(x)$$

เรียก $\exists$ ว่า “ตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่ง” (Existential quantifier)

ค่าความจริงตัวบ่งปริมาณ

บทนิยาม 11 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $p(x)$ เป็นประพจน์

ข้อความ $\forall x \in \mathcal{U}, p(x)$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ ไม่ว่า x จะเป็นอะไรก็ตามใน $\mathcal{U}$ ทำให้ $p(x)$ มีค่าความเป็นจริง นอกนั้นข้อความนี้เป็นเท็จ

ข้อความ $\exists x \in \mathcal{U}, p(x)$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวใน $\mathcal{U}$ ทำให้ $p(x)$ มีค่าความเป็นจริง นอกนั้นข้อความนี้เป็นเท็จ

นิเสธตัวบ่งปริมาณ

บทนิยาม12 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ของประพจน์ $\mathbf{x}$ นิเสธของตัวบ่งปริมาณนิยามโดย

นิเสธของ $\forall x \in \mathcal{U}, p(x)$ คือ $\sim \forall x \in \mathcal{U}, p(x) \equiv \exists x \in \mathcal{U}, \sim p(x)$

นิเสธของ $\exists x \in \mathcal{U}, p(x)$ คือ $\sim \exists x \in \mathcal{U}, p(x) \equiv \forall x \in \mathcal{U}, \sim p(x)$

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $U = \{1,2,3,4\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1) $\forall x[x > 0]$

x	ข้อความ $x > 0$	ค่าความจริง
1		
2		
3		
4		

ดังนั้นข้อความ $\forall x[x > 0]$ มีค่าความจริงเป็น

2) $\exists x[x > 3]$

x	ข้อความ $x > 3$	ค่าความจริง
1		
2		
3		
4		

ดังนั้นข้อความ $\exists x[x > 3]$ มีค่าความจริงเป็น

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $U = \{-1, 0, 1, 2\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1) $\forall x[x > 0]$

x	ข้อความ $x > 0$	ค่าความจริง
-1		
0		
1		
2		

ดังนั้นข้อความ $\forall x[x > 0]$ มีค่าความจริงเป็น

2) $\exists x[x > 3]$

x	ข้อความ $x > 3$	ค่าความจริง
-1		
0		
1		
2		

ดังนั้นข้อความ $\exists x[x > 3]$ มีค่าความจริงเป็น

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และให้ $p(x)$ แทนข้อความ $x^2 = x$ และ $q(x)$ แทนข้อความ $x > 0$
 จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1) $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$

x	ข้อความ $(x^2 = x) \rightarrow (x > 0)$	ค่าความจริง
-2		
-1		
0		
1		
2		

ดังนั้นข้อความ $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ มีค่าความจริงเป็น.....

$$2) \forall x[p(x)] \rightarrow \forall x[q(x)]$$

x	ข้อความ $x^2 = x$	ค่าความจริง	x	ข้อความ $x > 0$	ค่าความจริง
-2			-2		
-1			-1		
0			0		
1			1		
2			2		

ดังนั้นข้อความ $\forall x[p(x)] \rightarrow \forall x[q(x)]$ มีค่าความจริงเป็น.....

ตัวอย่างที่ 4 ให้ $U = \{0,1,2,3\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1) พิจารณาค่าความจริงของ $\forall x \forall y [xy > 0]$

x	y	ข้อความ $xy > 0$	ค่าความจริง
0	0		
	1		
	2		
	3		
1	0		
	1		
	2		
	3		

ตัวอย่างที่ 4 ให้ $U = \{0,1,2,3\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

x	y	ข้อความ $xy > 0$	ค่าความจริง
2	0		
	1		
	2		
	3		
3	0		
	1		
	2		
	3		

ดังนั้น.....

ตัวอย่างที่ 4 ให้ $U = \{0,1,2,3\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

$$2) \forall x \exists y [x + y = 3]$$

x	y	ข้อความ $[x + y = 3]$	ค่าความจริง
0	0		
1	1		
2	2		
3	3		

ดังนั้น.....