มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2568

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1305	ทฤษฎีจำนวน	เวลา 17:00 - 20:00 วันศุกร์ ที่ 30 มกราคม 2569	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**................................. **หมู่เรียน**................

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 15 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
    - **ตอนที่** 1 ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
    - **ตอนที่** 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
    - **ตอนที่** 3 ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ จำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								รวม
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\begin{array}{llll} 26 & \text{หาร} & a+b & \text{มีเศษเหลือเท่ากับ} \quad 25 \\ 26 & \text{หาร} & a-b & \text{มีเศษเหลือเท่ากับ} \quad 1 \end{array}$$

แล้ว 26 หารจำนวนใดต่อไปนี้มี **เศษเหลือมากที่สุด**

ก. $2a$

ข. $2b$

ค. $4ab$

ง. $a^2 - b^2$

จ. $2a^2 + 2b^2$

2. ให้ q_1, q_2 และ r เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

$$\begin{aligned} 69 &= 30q_1 + r \qquad \text{เมื่อ} \qquad 0 \le r < 30 \\ 30 &= rq_2 + 3 \end{aligned}$$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. $r = 1, 3, 9$ หรือ 27

ข. 2 หาร q_1 ลงตัว

ค. 3 หาร q_2 ลงตัว

ง. $q_1 + q_2 = 5$

จ. $q_1 q_2 = 6$

3. ให้ a, x และ y เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$a \mid (ax + y)$$

ข้อใดต่อไปนี้ **ไม่ถูกต้อง**

ก. $a \mid y$

ข. $a \mid (ay + y)$

ค. $a \mid (a + y)$

ง. $a \mid xy$

จ. $a \mid (x + ay)$

4. ให้ a, d เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่

$$\gcd(69, a) = d$$
$$\ell\text{cm}(69, a) = 138$$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าว **ถูกต้อง**

ก. $\gcd(69, a) \cdot \ell\text{cm}(69, a) = 414$

ข. d หาร a ลงตัว

ค. 138 หาร a ลงตัว

ง. $a < d$

จ. $a = d$

5. เลขโดด x ในข้อใดใดต่อไปนี้ทำให้ $2x9$ เป็นจำนวนเต็มสามหลักที่เป็น**จำนวนเฉพาะ (Prime number)**

ก. 0

ข. 1

ค. 2

ง. 4

จ. 7

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ______________________

จงหาเลขโดด a ที่ทำให้จำนวนเต็มหกหลัก $a123a2$ หารด้วย 11 ลงตัว

7. ______________________

จงหา**หลักหน่วย**ของจำนวนเต็ม 2569^{2025}

8. ______________________

ให้ d, q เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $d > 10$ โดยที่

$$(d+1) \mid (6q+9) \qquad \text{และ} \qquad (d+1) \mid (9q+6)$$

แล้ว d คือจำนวนใด

9. ______________________

จงหา**จำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้าย**ของจำนวนเต็ม $(10!)^{10}$

10. ______________________

จงหา**จำนวนตัวหาร**ของ $6! + 9!$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \qquad \text{สำหรับจำนวนนับ } n \text{ ใด ๆ}$$

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

มีจำนวนเต็ม**เพียงตัวเดียว** x ที่ทำให้ $xy = y$ ทุก ๆ จำนวนเต็ม y

12.2 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

$$3 \mid n(n+2)(n+4) \quad \text{ทุก ๆ จำนวนเต็ม } n$$

ข้อเสนอแนะ : ใช้ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

13. **(10 คะแนน)** บริษัทแห่งหนึ่งต้องการให้รางวัลแก่พนักงานในวันปีใหม่ 2569 โดยแจกสลากที่มีหมายเลข 9 หลักกำกับแต่ละใบที่อยู่ในรูป $2ab0b2ab6$ โดยผู้จัดงานจะให้รางวัลที่ผู้มีสลากหมายเลข 9 หลัก ก็ต่อเมื่อ

$$12 \text{ หาร } 2ab0b2ab6 \text{ ลงตัว}$$

ถามว่าผู้จัดงานต้องเตรียมรางวัลไว้ทั้งหมดกี่รางวัลและมีหมายเลขใดบ้างที่ได้รางวัล (a และ b เป็นเลขโดด)
ข้อเสนอแนะ : พิจารณา $12 = 3 \cdot 4$

14. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

14.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$26 \mid (3^{3n} - 1) \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

14.2 **(5 คะแนน)** ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ จงพิสูจน์ว่า

ถ้า $a \mid c$ และ $b \mid ac$ และ $\gcd(a, b) = 1$ แล้ว $ab \mid c$

15. **(10 คะแนน)** ให้ $d = \gcd(169, 226)$ มีจำนวนเต็ม x, y ที่สอดคล้องสมการ

$$d = 169x - 226y$$

จงหาตัวหารทั้งหมดของจำนวนเต็ม $d + x + y$

16. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่

$$\gcd(a, a+b) = b$$
$$\ell\text{cm}(a, a+b) = 6a$$

จงหาค่าของ $\gcd\left(\dfrac{a^2-b^2}{a-3b}, \dfrac{a^2-b^2}{a-2b}\right)$ (ตอบในรูป a หรือ b)

17. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

17.1 **(5 คะแนน)** จงใช้วิธียุคลิด หาตัวหารร่วมมากของ

10403 และ 11413

17.2 **(5 คะแนน)** จงหา**จำนวนตัวหาร**ทั้งหมด ที่ไม่ใช่จำนวนเฉพาะของ

$$9! - 8! - 7! - 6!$$

18. **(10 คะแนน)** ให้ p และ $p+2$ เป็นจำนวนเฉพาะ
เรียกจำนวนเฉพาะทั้งสองว่า **จำนวนเฉพาะคู่แฝด (Twin prime)** จงพิสูจน์ว่า

ถ้า $p > 3$ แล้ว 12 หารผลบวกของของ**จำนวนเฉพาะคู่แฝด**ลงตัว

ข้อเสนอแนะ : พิสูจน์ว่า $12 \mid [p + (p+2)]$ โดยใช้ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2568

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1305	ทฤษฎีจำนวน	เวลา 17:00 - 20:00 วันศุกร์ ที่ 30 มกราคม 2569	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\begin{array}{llll} 26 & \text{หาร} & a+b & \text{มีเศษเหลือเท่ากับ} \quad 25 \\ 26 & \text{หาร} & a-b & \text{มีเศษเหลือเท่ากับ} \quad 1 \end{array}$$

แล้ว 26 หารจำนวนใดต่อไปนี้มี **เศษเหลือมากที่สุด**

ก. $2a$

ข. $2b$

ค. $4ab$

ง. $a^2 - b^2$ Answer

จ. $2a^2 + 2b^2$

ตอบข้อ ง.

ก. 26 หาร $(a+b)+(a-b) = 2a$ เศษเหลือคือ $25+1$ หรือ 0

ข. 26 หาร $(a+b)-(a-b) = 2b$ เศษเหลือคือ $25-1$ หรือ 24

ค. 26 หาร $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$ เศษเหลือคือ $25^2-1^2 = 624$ หรือ 0

ง. 26 หาร $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ เศษเหลือคือ $25 \cdot 1$ หรือ 25

จ. 26 หาร $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2a^2+2b^2$ เศษเหลือคือ $25^2+1^2 = 626$ หรือ 2

2. ให้ q_1, q_2 และ r เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

$$69 = 30q_1 + r \qquad \text{เมื่อ} \qquad 0 \leq r < 30$$
$$30 = rq_2 + 3$$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. $r = 1, 3, 9$ หรือ 27 Answer

ข. 2 หาร q_1 ลงตัว

ค. 3 หาร q_2 ลงตัว

ง. $q_1 + q_2 = 5$

จ. $q_1 q_2 = 6$

ตอบข้อ ก. จาก $30 = rq_2 + 3$ จะได้ว่า $27 = rq_2$ หรือกล่าวได้ว่า $r \mid 27$ นั่นคือ $r = 1, 3, 9$ หรือ 27 เมื่อตรวจสอบกับเงื่อนไข

$$69 = 30q_1 + r \qquad \text{เมื่อ} \qquad 0 \leq r < 30$$

จะได้ว่า $r = 9$ และ $q_1 = 2, q_2 = 3$

3. ให้ a, x และ y เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$a \mid (ax + y)$$

ข้อใดต่อไปนี้ **ไม่ถูกต้อง**

ก. $a \mid y$

ข. $a \mid (ay + y)$

ค. $a \mid (a + y)$

ง. $a \mid xy$

จ. $a \mid (x + ay)$ Answer

ตอบข้อ จ. จาก $a \mid (ax + y)$ เนื่องจาก $a \mid a$ และ $a \mid ax$ สรุปได้ว่า $a \mid y$

ก. $a \mid y$ ถูกต้อง

ข. $a \mid (ay + y)$ ถูกต้อง

ค. $a \mid (a + y)$ ถูกต้อง

ง. $a \mid xy$ ถูกต้อง

จ. $a \mid (x + ay)$ ไม่ถูกต้อง เช่น $a = 2, x = 3, y = 4$

4. ให้ a, d เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่

$$\gcd(69, a) = d$$
$$\ell\text{cm}(69, a) = 138$$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าว **ถูกต้อง**

ก. $\gcd(69, a) \cdot \ell\text{cm}(69, a) = 414$

ข. d หาร a ลงตัว Answer

ค. 138 หาร a ลงตัว

ง. $a < d$

จ. $a = d$

ตอบข้อ ข. พิจารณา

$$\begin{aligned} 69 &= 2^0 \cdot 3^1 \cdot 23^1 \\ a &= 2^x \cdot 3^y \cdot 23^z \\ \ell\text{cm}(69, a) = 138 &= 2^1 \cdot 3^1 \cdot 23^1 \end{aligned}$$

โดยการหา ค.ร.น. แต่ละเลขชี้กำลังต้องมีค่ามากสุด ดังนั้น $x = 1$, $y = 0$ หรือ 1 และ $z = 0$ หรือ 1
a ที่เป็นได้คือ 4 แบบ

$$\begin{aligned} a &= 2^1 \cdot 3^0 \cdot 23^0 = 2 & d &= \gcd(69, 2) = 1 \\ a &= 2^1 \cdot 3^1 \cdot 23^0 = 6 & d &= \gcd(69, 6) = 3 \\ a &= 2^1 \cdot 3^0 \cdot 23^1 = 46 & d &= \gcd(69, 46) = 23 \\ a &= 2^1 \cdot 3^1 \cdot 23^1 = 138 & d &= \gcd(69, 138) = 69 \end{aligned}$$

ข้อ ข. ถูกต้อง เนื่องจาก $\gcd(69, a) = d$ ดังนั้น $d \mid a$

5. เลขโดด x ในข้อใดใดต่อไปนี้ทำให้ $2x9$ เป็นจำนวนเต็มสามหลักที่เป็น**จำนวนเฉพาะ (Prime number)**

ก. 0

ข. 1

ค. 2 Answer

ง. 4

จ. 7

ตอบข้อ ค. จะเห็นว่า $x = 2$ จำนวน 229 เป็นจำนวนเฉพาะ
พิจารณาจำนวนเฉพาะ $p < \sqrt{229} \approx 15$ จะได้ $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$ โดยที่

$$2 \nmid 229,\ 3 \nmid 229,\ 5 \nmid 229,\ 7 \nmid 229,\ 11 \nmid 229 \text{ และ } 13 \nmid 229$$

ดังนั้น 229 เป็นจำนวนเฉพาะ แต่จำนวน $209 = 11 \cdot 19$, $219 = 3 \cdot 73$, $249 = 3 \cdot 83$, $279 = 3^2 \cdot 31$ เป็นจำนวนประกอบ

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ตอบ 2

จงหาเลขโดด a ที่ทำให้จำนวนเต็มหกหลัก $a123a2$ หารด้วย 11 ลงตัว

แนวคำตอบ พิจารณา 11 หาร $2-a+3-2+1-a=4-2a$ ลงตัว นั่นคือ

$$\begin{aligned} 4-2a &= -22,-11,0,11,22 \\ a &= 13,2,-9 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a=2$ #

7. ตอบ 9

จงหา**หลักหน่วย**ของจำนวนเต็ม 2569^{2025}

แนวคำตอบ พิจารณา

10	หาร	2569	เศษเหลือเท่ากับ	-1
10	หาร	2569^{2025}	เศษเหลือเท่ากับ	$(-1)^{2025}=-1$ หรือ 9

ดังนั้น หลักหน่วยของจำนวนเต็ม 2569^{2025} เท่ากับ 9 #

8. ตอบ 14

ให้ d,q เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $d>10$ โดยที่

$$(d+1)\mid(6q+9) \qquad \text{และ} \qquad (d+1)\mid(9q+6)$$

แล้ว d คือจำนวนใด

แนวคำตอบ สมมติว่า $(d+1)\mid(6q+9)$ และ $(d+1)\mid(9q+6)$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม x,y ซึ่ง

$$6q+9=(d+1)x \qquad \text{และ} \qquad 9q+6=(d+1)y$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned} 9(6q+9)-6(9q+6) &= 9(d+1)x-6(d+1)y \\ 54q+81-54q-36 &= (d+1)[9x-6y] \\ 45 &= 3(d+1)(3x-2y) \\ 15 &= (d+1)(3x-2y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(d+1)\mid 15$ นั่นคือ $d+1=1,3,5,15$ หรือ $d=0,2,4,14$ เนื่องจาก $d>10$ สรุปได้ว่า $d=14$

9. ตอบ 20

จงหา**จำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้าย**ของจำนวนเต็ม $(10!)^{10}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} 10! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \\ &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \cdot 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times (2 \cdot 5) \\ &= 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \\ &= (2^2 \times 5^2) \times 2^6 \times 3^4 \times 7 \\ &= (2 \times 5)^2 \times 2^6 \times 3^4 \times 7 \\ &= 10^2 \times 2^6 \times 3^4 \times 7 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$(10!)^{10} = (10^2 \times 2^6 \times 3^4 \times 7)^{10} = 10^{20} \times 2^{60} \times 3^{40} \times 7^{10}$$

ดังนั้นจำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้ายของจำนวนเต็ม $(10!)^{10}$ มี 20 ตัว #

10. ตอบ 90

จงหา**จำนวนตัวหาร**ของ $6! + 9!$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} 6! + 9! &= 6! + 6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 6!(1 + 504) \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \cdot 505 \\ &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \cdot 3) \times 5 \times 101 \\ &= 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 101 \end{aligned}$$

จำนวนตัวหารของ $6! + 9!$ เท่ากับ

$$(4+1)(2+1)(2+1)(1+1) = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 90 \quad \text{ตัว}$$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \qquad \text{สำหรับจำนวนนับ } n \text{ ใด ๆ}$$

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $1 \cdot 1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1 = (1+1)! - 1$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! &= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! \\
&= [1 + (k+1)](k+1)! - 1 \\
&= (k+2)(k+1)! - 1 \\
&= (k+2)! - 1
\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n $\square$

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

มีจำนวนเต็ม**เพียงตัวเดียว** x ที่ทำให้ $xy = y$ ทุก ๆ จำนวนเต็ม y

แนวคำตอบ เขียนในรูปสัญลักษณ์คือ

$$\exists! x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z},\ xy = y$$

พิสูจน์ข้อความมีเพียงหนึ่งเดียว

บทพิสูจน์. พิจารณา
ขั้นที่ 1 มีอย่างน้อยหนึ่งตัว เลือก $x = 1$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม y จะได้ว่า

$$xy = 1y = y$$

ขั้นที่ 2 มีเพียงตัวเดียว ให้ $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ สอดคล้องเงื่อนไข

$$\begin{aligned} x_1 y &= y \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนเต็ม } y \qquad \ldots.(*) \\ x_2 y &= y \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนเต็ม } y \qquad \ldots.(**) \end{aligned}$$

เนื่องจาก x_2 เป็นจำนวนเต็ม จะสอดคล้องสมการ $(*)$ โดย $y = x_2$ นั่นคือ $x_1 x_2 = x_2$
เนื่องจาก x_1 เป็นจำนวนเต็ม จะสอดคล้องสมการ $(**)$ โดย $y = x_1$ นั่นคือ $x_2 x_1 = x_1$
ดังนั้น

$$x_2 = x_1 x_2 = x_2 x_1 = x_1$$

สรุปได้ว่า $x_1 = x_2$ $\square$

12.2 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

$$3 \mid n(n+2)(n+4) \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนเต็ม } n$$

ข้อเสนอแนะ : ใช้ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q ซึ่ง

$$n = 3q \qquad \text{หรือ} \qquad n = 3q+1 \qquad \text{หรือ} \qquad n = 3q+2$$

- กรณี $n = 3q$ จะได้ว่า

$$n(n+2)(n+4) = (3q)(3q+2)(3q+4) = 3[q(3q+2)(3q+4)]$$

  ดังนั้น $3 \mid n(n+2)(n+4)$
- กรณี $n = 3q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+4) &= (3q+1)(3q+1+2)(3q+1+4) \\ &= (3q+1)(3q+3)(3q+5) \\ &= (3q+1)3(q+1)(3q+5) \\ &= 3[(3q+1)(q+1)(3q+5)] \end{aligned}$$

  ดังนั้น $3 \mid n(n+2)(n+4)$

- กรณี $n = 3q + 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n+2)(n+4) &= (3q+2)(3q+2+2)(3q+2+4) \\ &= (3q+2)(3q+4)(3q+6) \\ &= (3q+2)(3q+4)3(q+2) \\ &= 3[(3q+2)(3q+4)(q+2)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid n(n+2)(n+4)$

$\square$

13. **(10 คะแนน)** บริษัทแห่งหนึ่งต้องการให้รางวัลแก่พนักงานในวันปีใหม่ 2569 โดยแจกสลากที่มีหมายเลข 9 หลักกำกับแต่ละใบที่อยู่ในรูป $2ab0b2ab6$ โดยผู้จัดงานจะให้รางวัลที่ผู้มีสลากหมายเลข 9 หลัก เมื่อคือเป็นเป็นจำนวนเต็ม 9 หลักแล้ว

$$12 \text{ หาร } 2ab0b2ab6 \text{ ลงตัว}$$

ถามว่าผู้จัดงานต้องเตรียมรางวัลไว้ทั้งหมดกี่รางวัลและมีหมายเลขใดบ้างที่ได้รางวัล (a และ b เป็นเลขโดด)
ข้อเสนอแนะ : พิจารณา $12 = 3 \cdot 4$

แนวคำตอบ ให้ $N = 2ab0b2ab6$ เนื่องจาก $12 = 3 \cdot 4$ และ $\gcd(3,4) = 1$ พิจารณา

$$3 \mid N \text{ และ } 4 \mid N \text{ จะสรุปได้ว่า } 3 \cdot 4 \mid N$$

กรณี $3 \mid N$ จะได้ว่า

$$3 \quad \text{หาร} \quad 2+a+b+0+b+2+a+b+6 = 10+2a+3b = (1+2a)+3(b+3) \quad \text{ลงตัว}$$

เนื่องจาก $3 \nmid 3(b+3)$ จะได้ว่า $3 \mid (1+2a)$ จะได้ว่า

$$1+2a = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21$$
$$\therefore \quad a = 1, 4, 7$$

กรณีที่ $4 \mid N$ พิจารณา $4 \mid b6$ เนื่องจาก

$$4 \mid 16, \quad 4 \mid 36, \quad 4 \mid 56, \quad 4 \mid 76, \quad \text{และ} \quad 4 \mid 96$$

ดังนั้น $b = 1, 3, 5, 7, 9$ สรุปจำนวนเต็ม N ที่เป็นไปได้ดังตารางต่อไปนี้

a	b	$N = 2ab0b2ab6$
1	1	211012116
1	3	213032136
1	5	215052156
1	7	217072176
1	9	219092196
4	1	241012416
4	3	243032436
4	5	245052456
4	7	247072476
4	9	249092496
7	1	271012716
7	3	273032736
7	5	275052756
7	7	277072776
7	9	279092796

ดังนั้นผู้จัดต้องเตรียมรางวัลไว้ 15 รางวัล โดยมีหมายเลขที่ถูกรางวัลดังตารางข้างต้น #

14. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

14.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$26 \mid (3^{2n} - 1) \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $26 \mid (3^{2n} - 1)$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $3^3 - 1 = 26$ ดังนั้น $26 \mid (3^{3\cdot 1} - 1)$ ทำให้ได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ นั้นคือ $26 \mid (3^{3k} - 1)$ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง

$$3^{3k} - 1 = 26q$$

นั่นคือ $3^{3k} = 26q + 1$ โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$$\begin{aligned} 3^{3(k+1)} - 1 &= 3^{3k+3} - 1) \\ &= 3^3 \cdot 3^{3k} - 1 \\ &= 27(26q + 1) - 1 \\ &= 27(26q) + 27 - 1 \\ &= 27(26q) + 26 \\ &= 26(27q + 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $26 \mid (3^{3(k+1)} - 1)$ สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า

$$26 \mid (3^{3n} - 1) \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

□

14.2 **(5 คะแนน)** ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid c \quad \text{และ} \quad b \mid ac \quad \text{และ} \quad \gcd(a,b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad ab \mid c$$

บทพิสูจน์. ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $a \mid c$ และ $b \mid ac$ และ $\gcd(a,b) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y และ k, q ซึ่ง

$$c = ak \qquad \text{และ} \qquad ac = bq \qquad \text{และ} \qquad 1 = ax + by$$

<u>วิธีที่ 1</u> พิจารณา

$$\begin{aligned} c \cdot 1 &= c(ax + by) = cax + cby = (ac)x + bcy = bq + bcy \\ c &= b(q + cy) \qquad .....(*) \end{aligned}$$

ใช้ $(*)$ อีกครั้ง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} c \cdot 1 &= c(ax + by) \\ c &= acx + bcy \\ &= a \cdot b(q + cy) \cdot x + b \cdot (ak) \cdot y \\ &= ab[(q + cy) + ky] \end{aligned}$$

ดังนั้น $ab \mid c$

วิธีที่ 2 พิจารณา

$$\begin{aligned} 1^2 &= (ax+by)^2 \\ 1 &= a^2x^2 + 2axby + b^2y^2 \\ 1 \cdot c &= c(a^2x^2 + 2axby + b^2y^2) \\ c &= (ac)ax^2 + 2(ab)xyc + (c)b^2y^2 \\ c &= (bq)ax^2 + 2(ab)xyc + (ak)b^2y^2 \\ c &= ab(qx^2 + 2xyc + kby^2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $ab \mid c$ $\square$

15. **(10 คะแนน)** ให้ $d = \gcd(169, 226)$ มีจำนวนเต็ม x, y ที่สอดคล้องสมการ

$$d = 169x - 226y$$

จงหาตัวหารทั้งหมดของจำนวนเต็ม $d + x + y$

แนวคำตอบ พิจารณาสมการ

$$\begin{array}{rcrcr|rrl} 226 & = & 226(1) & + & 169(0) & 1 & 0 & R_1 \\ 169 & = & 226(0) & + & 169(1) & 0 & 1 & R_2 \\ \hline 57 & = & 226(1) & + & 169(-1) & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2 \\ 55 & = & 226(-2) & + & 169(3) & -2 & 3 & R_4 = R_2 - 2R_3 \\ 2 & = & 226(3) & + & 169(-4) & 3 & -4 & R_5 = R_3 - R_4 \\ 1 & = & 226(-83) & + & 169(111) & -83 & 111 & R_6 = R_4 - 27R_5 \end{array}$$

จะได้ว่า $1 = 169(111) - 226(83)$ ดังนั้น $d = 1,\ x = 111$ และ $y = 83$
พิจารณา

$$d + x + y = 1 + 111 + 83 = 195 = 3 \times 5 \times 13$$

ดังนั้นตัวหารทั้งหมดของ $d + x + y$ เท่ากับ $(1+1)(1+1)(1+1) = 8$ #

16. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่

$$\gcd(a, a+b) = b$$
$$\ell\text{cm}(a, a+b) = 6a$$

จงหาค่าของ $\gcd\left(\dfrac{a^2-b^2}{a-3b}, \dfrac{a^2-b^2}{a-2b}\right)$ (ตอบในรูป a หรือ b)

แนวคำตอบ จากสมบัติของ ค.ร.น. จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\gcd(a, a+b) \cdot \ell\text{cm}(a, a+b) &= a(a+b) \\
b(6a) &= a^2 + ab \\
6ab &= a^2 + ab \\
0 &= a^2 - 5ab \\
0 &= a(a-5b)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $a \neq 0$ ฉะนั้น $a - 5b = 0$ หรือ $a = 5b$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\gcd\left(\frac{a^2-b^2}{a-3b}, \frac{a^2-b^2}{a-2b}\right) &= \gcd\left(\frac{(5b)^2-b^2}{(5b)-3b}, \frac{(5b)^2-b^2}{(5b)-2b}\right) \\
&= \gcd\left(\frac{25b^2-b^2}{2b}, \frac{25b^2-b^2}{3b}\right) \\
&= \gcd\left(\frac{24b^2}{2b}, \frac{24b^2}{3b}\right) \\
&= \gcd(12b, 8b) \\
&= b \cdot \gcd(12, 8) \\
&= b \cdot 4 \\
&= 4b \quad \#
\end{aligned}$$

17. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

17.1 **(5 คะแนน)** จงใช้วิธียุคลิด หาตัวหารร่วมมากของ

10403 และ 11413

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\gcd(10403, 11413) &= \gcd(10403, 10403 + 1010) \\
&= \gcd(10403, 1010) \\
&= \gcd(10(1010) + 303, 1010) \\
&= \gcd(303, 1010) \\
&= \gcd(303, 3(303) + 101) \\
&= \gcd(303, 101) \\
&= \gcd(3(101) + 0, 101) \\
&= \gcd(0, 101) = 101 \quad \#
\end{aligned}$$

17.2 **(5 คะแนน)** จงหา**จำนวนตัวหาร**ทั้งหมด ที่ไม่ใช่จำนวนเฉพาะของ

$$9! - 8! - 7! - 6!$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
9! - 8! - 7! - 6! &= 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6! - 8 \cdot 7 \cdot 6! - 7 \cdot 6! - 6! \\
&= 6!(9 \cdot 8 \cdot 7 - 8 \cdot 7 - 7 - 1) \\
&= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2(504 - 56 - 7 - 1) \\
&= (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (440) \\
&= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot (2^3 \cdot 5 \cdot 11) \\
&= 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11
\end{aligned}$$

ตัวหารที่เป็นจำนวนเฉพาะของ $9! - 8! - 7! - 6!$ คือ 2, 3, 5 และ 11 และจำนวนตัวหารทั้งหมดเท่ากับ

$$(7+1)(2+1)(2+1)(1+1) = 8(3)(3)(2) = 144$$

ดังนั้นจำนวนตัวหารทั้งหมดที่ไม่ใช่จำนวนเฉพาะของ $9! - 8! - 7! - 6!$ เท่ากับ $144 - 4 = 140$ #

18. **(10 คะแนน)** ให้ p และ $p+2$ เป็นจำนวนเฉพาะ
เรียกจำนวนเฉพาะทั้งสองว่า **จำนวนเฉพาะคู่แฝด (Twin prime)** จงพิสูจน์ว่า

ถ้า $p>3$ แล้ว 12 หารผลบวกของของ**จำนวนเฉพาะคู่แฝด**ลงตัว

ข้อเสนอแนะ : พิสูจน์ว่า $12 \mid [p+(p+2)]$ โดยใช้ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

บทพิสูจน์. ให้ p และ $p+2$ เป็นจำนวนเฉพาะคู่แฝด โดยที่ $p>3$
วิธีที่ 1 พิจารณา 12 หาร $p+(p+2)=2p+2$ โดยขั้นตอนวิธีการหาร จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q และ r ซึ่ง

$$2p+2=12q+r \qquad 0 \leq r < 12$$

สมมติ $r \neq 0$ เนื่องจาก $r=2p+2-12q=2(p+1-6q)$ เป็นจำนวนคู่ นั่นคือ $r=2,4,6,8,10$

- กรณี $r=2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2p+2 &= 12q+2 \\ p &= 6q \end{aligned}$$

  จะได้ว่า $6 \mid p$ เป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ

- กรณี $r=4$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2p+2 &= 12q+4 \\ 2p &= 12q+2 \\ p &= 6q+1 \\ p+2 &= 6q+3 = 3(2q+1) \end{aligned}$$

  จะได้ว่า $3 \mid (p+2)$ เนื่องจาก $p+2$ เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p+2=3$ หรือ $p=1$ เป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ

- กรณี $r=6$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2p+2 &= 12q+6 \\ 2p &= 12q+4 \\ p &= 6q+2 = 2(3q+1) \end{aligned}$$

  จะได้ว่า $2 \mid p$ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p=2$ เป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p>3$

- กรณี $r=8$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2p+2 &= 12q+8 \\ 2p &= 12q+6 \\ p &= 6q+3 = 3(2q+1) \end{aligned}$$

  จะได้ว่า $3 \mid p$ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p=3$ เป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p>3$

- กรณี $r = 10$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2p + 2 &= 12q + 10 \\ 2p &= 12q + 8 \\ p &= 6q + 4 = 2(3q + 2) \end{aligned}$$

  จะได้ว่า $2 \mid p$ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p = 2$ เป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p > 3$

ดังนั้น $r = 0$ สรุปได้ว่า $12 \mid [p + (p + 2)]$

<u>วิธีที่ 2</u> พิจารณา 4 หาร $p + (p + 2) = 2p + 2$ โดยขั้นตอนวิธีการหาร จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q และ r ซึ่ง

$$2p + 2 = 4q + r \qquad 0 \leq r < 4$$

สมมติ $r \neq 0$ เนื่องจาก $r = 2p + 2 - 4q = 2(p + 1 - 2q)$ เป็นจำนวนคู่ นั่นคือ $r = 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2p + 2 &= 4q + 2 \\ p &= 2q \end{aligned}$$

ฉะนั้น $2 \mid p$ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p = 2$ เป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p > 3$
ดังนั้น $r = 0$ สรุปได้ว่า $4 \mid [p + (p + 2)]$

พิจารณา 3 หาร $p + (p + 2) = 2p + 2$ โดยขั้นตอนวิธีการหาร จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q และ r ซึ่ง

$$2p + 2 = 3q + r \qquad 0 \leq r < 3$$

สมมติ $r \neq 0$ นั่นคือ $r = 1, 2$ จะได้ว่า

- กรณี $r = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2p + 2 &= 3q + 1 \\ 2p + 4 &= 3q + 3 \\ 2(p + 2) &= 3(q + 1) \end{aligned}$$

  ฉะนั้น $3 \mid 2(p + 2)$ เนื่องจาก $\gcd(3, 2) = 1$ นั่นคือ $3 \mid (p + 2)$ เนื่องจาก $p + 2$ เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p + 2 = 3$ หรือ $p = 1$ เป็นไปไม่ได้

- กรณี $r = 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2p + 2 &= 3q + 2 \\ 2p &= 3q \end{aligned}$$

  ฉะนั้น $3 \mid 2p$ เนื่องจาก $\gcd(3, 2) = 1$ นั่นคือ $3 \mid p$ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p = 3$ เป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $p > 3$

ดังนั้น $r = 0$ กล่าวได้ว่า $3 \mid [p + (p + 2)]$
เนื่องจาก $\gcd(3, 4) = 1$ สรุปได้ว่า $12 \mid [p + (p + 2)]$ $\square$