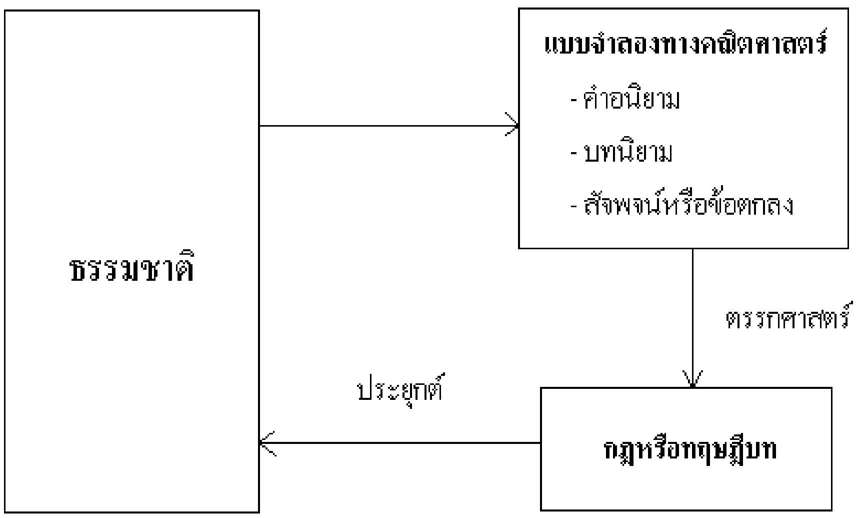
บทที่ 2
ระบบสัจพจน์และรูปแบบการพิสูจน์

ธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์นั้นเป็นวิชาที่มีการคิดเป็นระบบ ระบบการคิดของคณิตศาสตร์จะแบ่งเป็นระบบใหญ่ๆ ด้วยกัน 2 ระบบ ได้แก่ 1. ระบบโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ และ 2. ระบบการให้เหตุผล เป็นพื้นฐานความรู้ที่สำคัญอย่างยิ่งสำหรับผู้ที่ต้องการจะศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะในส่วนของเรขาคณิตซึ่งเป็นศาสตร์ที่จำเป็นจะต้องอาศัยระบบของคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์และให้เหตุผลเป็นอย่างยิ่ง

1. ระบบโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

โครงสร้างของคณิตศาสตร์ที่สมบูรณ์นั้นมีกำเนิดมาจากธรรมชาติ จากปรากฏการณ์ในธรรมชาติที่มนุษย์สังเกตเห็น แล้วนำมาสร้างเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เรียกกว่า ระบบสัจพจน์ โดยมีเป้าหมายเพื่อแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นของธรรมชาติ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วยคำอนิยาม บทนิยาม และสัจพจน์ซึ่งเป็นข้อตกลงเบื้องต้น จากนั้นใช้ความรู้เกี่ยวกับตรรกศาสตร์สรุปออกมาเป็นกฎหรือทฤษฎีบท แล้วนำกฎหรือทฤษฎีบทเหล่านั้นไปประยุกต์ใช้

แผนผังโครงสร้างทางคณิตศาสตร์



รูปที่ 12 แผนผังโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

ระบบสัจพจน์ประกอบด้วยคำอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท

1) **คำอนิยาม** (Undefined Terms) คือ คำทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ต้องให้ความหมาย เช่น คำว่า “จุด” “เส้นตรง” “ระนาบ” นักคณิตศาสตร์สมัยก่อนเคยให้ความหมายของคำว่า “จุด” ดังนี้

“**จุด** คือสิ่งที่ไม่มีความกว้าง ความยาว ความหนา มีแต่ตำแหน่ง”

จะเห็นว่าคำที่ใช้อธิบายความหมายบางคำต้องให้ความหมายต่อไปอีก เช่น ความกว้าง ความยาว ความหนา ตำแหน่ง ซึ่งคำเหล่านี้ถ้าให้ความหมายต่อไปอีกอาจใช้คำว่า “จุด” ช่วยอธิบาย เช่น

“**ความกว้าง** คือ ระยะระหว่างจุดสองจุดที่ไม่ยาวนัก”

คำที่จะต้องให้ความหมายต่อไปอีกคือ “ระยะ” “ระหว่าง” “จุด” “ยาว” เป็นต้น จะพบว่าปัญหาของการให้ความหมายของคำว่า “จุด” บางครั้งต้องอาศัยคำที่ให้ความหมายต่อไปอีก และบางครั้งต้องใช้คำที่กำลังจะให้ความหมายอยู่ หรือเป็นการให้ความหมายที่วกไปวนมา ดังนั้นนักคณิตศาสตร์จึงให้คำเหล่านั้นเป็นคำอนิยาม

2) **บทนิยาม** (Defined Terms) คือ คำทางคณิตศาสตร์ที่สามารถให้ความหมายได้ โดยใช้ คำอนิยาม และคำในภาษาพูดทั่วๆไป เช่น

บทนิยาม

เซต A เท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $A = B$ และเซต A ไม่เท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย $A \neq B$

บทนิยาม

กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ a จะเป็นจำนวนตรรกยะเมื่อมีจำนวนเต็ม m และ n ใดๆ ที่ทำให้ $a = \frac{m}{n}$ โดยที่ $n \neq 0$

การนิยามศัพท์หรือข้อความอาจจะกระทำได้โดยกำหนดลักษณะของสิ่งนั้นกว้างเสียก่อนแล้วจึงจำกัดลักษณะให้แคบลงจนกระทั่งไม่มีสิ่งอื่นที่สอดคล้องลักษณะดังกล่าวนอกจากสิ่งที่เราต้องการ เช่น

ตัวอย่างการให้บทนิยามคำว่า ดินสอ

ตาราง 2 การวิเคราะห์การให้บทนิยาม “ดินสอ”

ลักษณะของดินสอ	สิ่งที่มีลักษณะเหมือนกัน
อุปกรณ์ที่ใช้ในการจดบันทึกข้อมูล	ปากกา ดินสอกด ดินสอ กระดาษ เครื่องบันทึกเสียง ฯลฯ
มีลักษณะเป็นแท่งๆ ขนาดพกพา	ปากกา ดินสอ ดินสอกด เครื่องบันทึกเสียง ฯลฯ
เป็นอุปกรณ์ที่ต้องใช้มือในการกระทำ	ปากกา ดินสอ ดินสอกด ฯลฯ
วัสดุที่ทำจากไม้	ดินสอ

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าในขั้นแรกเรากำหนดลักษณะที่กว้างๆ ก่อน แต่ในการกำหนดนั้นต้องมีขอบเขตในสิ่งที่เกี่ยวข้องให้ชัดเจน จนได้บทนิยามดังนี้

“ดินสอ เป็นอุปกรณ์ที่ใช้ในการจดบันทึกข้อมูล มีลักษณะเป็นแท่งที่ทำมาจากไม้ขนาดพกพา ใช้มือในการเขียนบันทึกข้อมูล”

ลักษณะของบทนิยามที่ดีนอกจากต้องสั้นๆ กระชับแล้วยังต้องสามารถให้ความหมายแบบสลับไปมาได้ด้วย เช่น รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเท่ากันสองด้าน และมุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน หรือกล่าวอีกอย่าง รูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเท่ากันสองด้าน และมุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน เราเรียกรูปสามเหลี่ยมนั้นว่า “รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว” เป็นต้น

3) **สัจพจน์** (Axiom or Postulate) คือ ข้อความจริงหรือกติกาทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้เป็นหลักในการอ้างอิงความรู้อื่น ที่กำหนดขึ้นโดยไม่ต้องพิสูจน์ ถ้อยคำที่ใช้ในสัจพจน์ประกอบด้วยคำอนิยาม บทนิยาม และคำพูดทั่วๆไป เช่น

“เส้นตรงสองเส้น ตัดกันได้จุดตัดหนึ่งจุด”

“มุมฉากทุกมุมย่อมเท่ากัน”

“ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า a + b เป็นจำนวนจริง” เป็นต้น

4) **ทฤษฎีบท** (Theorem) คือ ข้อความจริงทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากการพิสูจน์โดยอาศัยหลักการให้เหตุผลทางตรรกวิทยา ในการพิสูจน์จะนำบทนิยาม สัจพจน์ หรือทฤษฎีที่เคยพิสูจน์มาก่อนมาประกอบการให้เหตุผล โดยปกติข้อความของทฤษฎีบทจะอยู่ในรูป “ถ้า...แล้ว” หรือ “...ก็ต่อเมื่อ...” เช่น

“ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งแล้วมุมตรงข้ามจะเท่ากัน”

หรือ “รูปสี่เหลี่ยมใดๆ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานก็ต่อเมื่อมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมนั้นมีขนาดเท่ากัน” เป็นต้น

1.1 ระบบสัจพจน์

จากที่กล่าวข้างต้นสัจพจน์เป็นองค์ประกอบที่สำคัญของโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ สัจพจน์มีความสำคัญต่อวิชาคณิตศาสตร์อย่างยิ่งเพราะเป็นสิ่งที่ช่วยให้เกิดองค์ความรู้ใหม่ๆ อย่างมากมายมหาศาลทุกทฤษฎีบทที่เกิดขึ้นนั้นล้วนมาจากการนำสัจพจน์มาใช้ทั้งสิ้น

ตัวอย่างระบบสัจพจน์

ตัวอย่าง 1

คำอนิยาม: คณะกรรมการ สมาชิก

สัจพจน์ A_1: ในคณะกรรมการแต่ละชุดต้องมีสมาชิก 3 คน

สัจพจน์ A_2: สมาชิกแต่ละคนสามารถเป็นคณะกรรมการได้ 2 คณะ

สัจพจน์ A_3: สมาชิก 2 คนที่อยู่ร่วมกันสามารถเป็นคณะกรรมการได้มากกว่า 1 ชุด

สัจพจน์ A_4: จะต้องมีคณะกรรมการอย่างน้อยหนึ่งชุด

ทฤษฎีบท 1 สามารถแต่งตั้งคณะกรรมการ 2 ชุด โดยมีสมาชิกเพียง 4 คน

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1, ให้ X_1 เป็นคณะกรรมการ	1. สัจพจน์ A_4
2. X_1 จะต้องมีสมาชิก 3 คนให้เป็น x_1, x_2, x_3	2. สัจพจน์ A_1
3. มี x_4ไม่อยู่ใน X_1	3. สัจพจน์ A_1
4. และ X_2 มี x_1, x_2, x_4 อยู่ใน X_2	4. สัจพจน์ A_2 และ A_3
5. X_1 ต่างกับ X_2 ดังนั้น สามารถแต่งตั้ง คณะกรรมการ 2 ชุด โดยมีสมาชิก เพียง 4 คน	5. เพราะถ้าเหมือนกันจะขัดแย้งกับสัจพจน์ A_3

ระบบสัจพจน์ที่ดีในเรขาคณิตมีสมบัติ 3 ประการ คือ 1. ความต้องกัน (Consistency) 2. ความเป็นอิสระต่อกัน (Independence) และ 3. ความบริบูรณ์ (Completeness)

1) **ความต้องกัน** (Consistency)

บทนิยาม ระบบสัจพจน์จะมีความต้องกัน ก็ต่อเมื่อไม่มีสองสัจพจน์ใดๆ ในระบบขัดแย้งซึ่งกันและกัน และระบบสัจพจน์ไม่มีความต้องกัน ถ้ามีบางสัจพจน์ใดๆ ในระบบขัดแย้งซึ่งกันและกัน

ในการตรวจสอบว่าเราจะรู้ได้อย่างไรว่าระบบสัจพจน์นั้นมีความต้องกันหรือไม่นั้น เราสามารถทำได้โดยใช้วิธีการพิสูจน์

ตัวอย่าง 2. **อนิยาม**: เซต S และ การดำเนินการ *

สัจพจน์ A_1 : ถ้า a และ b เป็นสมาชิกใดๆ ใน S แล้ว a * b = a

สัจพจน์ A_2 : ถ้า a และ b เป็นสมาชิกใดๆ ใน S แล้ว a * b = b * a

สัจพจน์ A_3 : S ประกอบด้วยสมาชิกอย่างน้อยสองตัว

ทฤษฎีบท 2 S ประกอบด้วยสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น

เราสามารถพิสูจน์ ทฤษฎีบท 2 ได้โดยอาศัย A_1 และ A_2 ดังนี้

พิสูจน์ (โดยวิธีขัดแข้ง) สมมติ ให้ S มีสมาชิกมากกว่า 1 ตัว ให้เป็น m และ n โดยที่ $m \neq n$

จะได้ว่า m * n = m และ n * m = n

แต่ m * n = n * m ดังนั้นจะได้ว่า m = n

ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะขัดแย้งกับที่สมมติให้ $m \neq n$

นั่นคือ S มีสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น

จากการพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้น ระบบสัจพจน์นี้เป็นระบบที่ไม่มีความต้องกันเพราะมีสองข้อความในระบบที่ขัดแย้งซึ่งกันและกัน ได้แก่ A_3 ขัดแย้งกับทฤษฎีบท 2

จากตัวอย่างที่กล่าวข้างต้นถ้าสามารถหาข้อความที่ขัดแย้งซึ่งกันและกันในระบบได้เพียงแค่ข้อความเดียว ก็สรุปได้ว่าระบบสัจพจน์ไม่มีความต้องกัน

2) **ความเป็นอิสระต่อกัน** (Independence)

บทนิยาม "ระบบสัจพจน์มีความเป็นอิสระต่อกัน ถ้าไม่มีสัจพจน์ข้อหนึ่งข้อใดเป็นทฤษฎีหรือเป็นผลที่ได้จากสัจพจน์ข้ออื่นๆ ในระบบสัจพจน์ที่มีความต้องกัน"

และ "ระบบสัจพจน์ที่ไม่มีความเป็นอิสระต่อกัน ถ้ามีสัจพจน์ข้อหนึ่งเป็นผลที่ได้จากสัจพจน์ข้ออื่นๆ ในระบบสัจพจน์ที่มีความต้องกัน"

ตัวอย่าง 3 อนิยาม: เซต K ความสัมพันธ์ R

สัจพจน์ A_1: ถ้า a และ b เป็นสมาชิกใดๆ ใน K แล้ว a R b หรือ b R a

สัจพจน์ A_2 : ถ้า a และ b เป็นสมาชิกใดๆ ใน K และ a R b แล้ว $a \neq b$

สัจพจน์ A_3 : ถ้า a R b และ b R c แล้ว a R c

สัจพจน์ A_4 : ระบบ K ประกอบด้วยสมาชิก 4 ตัวที่ต่างกัน

จากตัวอย่างจะเห็นว่าหากเราพิจารณาสัจพจน์ทุกตัวจะเห็นว่าไม่มีสัจพจน์ใดที่มีความสัมพันธ์ต่อกันเลย นั้นคือแต่ละสัจพจน์ไม่ส่งผลต่อกัน

3) **ความบริบูรณ์** (Completeness)

บทนิยาม ให้ A แทนสัจพจน์ใดๆ และ $\overline{A}$ แทนนิเสธของ A ซึ่งไม่อยู่ในระบบสัจพจน์ $\sum$ ระบบสัจพจน์ $\sum$ ใดๆ จะเรียกว่ามีสมบัติบริบูรณ์ก็ต่อเมื่อไม่มีข้อความใดๆ ที่ทำให้ $\sum + A$ และ $\sum + \overline{A}$ เป็นระบบที่มีความต้องกัน

หรือ กล่าวอีกนัยนึง "ระบบสัจพจน์มีความบริบูรณ์ ถ้าไม่สามารถเพิ่มสัจพจน์อิสระข้อใหม่เข้าไปอีก"

ตัวอย่าง 4 กำหนดระบบ $\sum$ ซึ่งมีสัจพจน์ 5 ข้อดังนี้

คำอนิยาม: จุด เส้น ตั้งอยู่บน

สัจพจน์ A_1 : เส้นแต่ละเส้นประกอบด้วยจุด

สัจพจน์ A_2 : มีจุดอย่างน้อยสองจุด

สัจพจน์ A_3 : ถ้า P, Q เป็นสองจุดใดๆ จะมีเส้นตรงผ่านเพียงเส้นเดียวเท่านั้น

สัจพจน์ A_4 : ถ้า l เป็นเส้นใดๆ จะมีจุดที่ไม่อยู่บน l

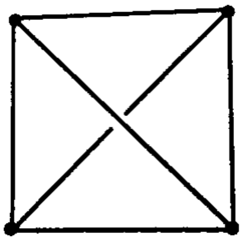
สัจพจน์ A_5 : ถ้า l เป็นเส้นใดๆ และ P เป็นจุดที่ไม่อยู่บน l จะมีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่าน P และไม่มีจุดร่วมกับ l

จากระบบ $\sum$ ที่กล่าวมา ถ้าเราเติมสัจพจน์ A_6 โดยที่ A_6 ไม่อยู่ใน $\sum$ ซึ่งมีใจความดังนี้

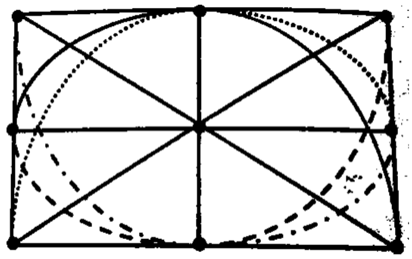
สัจพจน์ A_6 : มีจุดไม่เกินสี่จุด และจะได้ $\overline{A_6}$: มีจุดอย่างน้อยสี่จุด

จะได้ระบบสัจพจน์ใหม่ 2 ระบบ คือ $\sum + A_6$ และ $\sum + \overline{A_6}$ เราเอาระบบสัจพจน์ทั้งสองมาสร้างแบบจำลองได้เป็น

แบบจำลองของ $\sum + A_6$



แบบจำลอง $\sum + \overline{A_6}$



จะเห็นว่าระบบ $\sum + A_6$ และระบบ $\sum + \overline{A_6}$ เป็นระบบที่มีความต้องกัน ดังนั้น สรุปว่าระบบสัจพจน์ $\sum$ เป็นระบบที่ไม่บริบูรณ์

2. ระบบการให้เหตุผล

จากที่ได้กล่าวข้างต้นว่าระบบในทางคณิตศาสตร์นั้นประกอบด้วยกันอยู่ 2 ระบบ คือ 1. ระบบโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ และ 2. ระบบการให้เหตุผล โดยระบบการให้เหตุผลเป็นระบบหนึ่งที่มีความสำคัญเป็นอย่างมากในทางคณิตศาสตร์ การยอมรับว่าทฤษฎีใดๆ นั้นว่าเป็นจริงหรือไม่ ทางคณิตศาสตร์จะใช้กระบวนการให้เหตุผลเป็นตัวยอมรับทฤษฎีบทดังกล่าวว่าเป็นจริงหรือไม่ ในทางคณิตศาสตร์ได้แบ่งกระบวนการให้เหตุผลออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)
2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning)

2.1 การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)

นักคณิตศาสตร์ค้นหาความจริงในธรรมชาติโดยจะเริ่มสังเกตธรรมชาติก่อนและจะเชื่อเมื่อได้ทดสอบหลายๆ ครั้งจนมั่นใจ ในขณะที่สังเกตหรือทดสอบนักคณิตศาสตร์อาจค้นพบข้อเท็จจริงใหม่ๆ ที่ตนไม่เคยพบมาก่อน และจะนำข้อเท็จจริงใหม่ๆ เหล่านี้มาพิจารณาหาความสัมพันธ์กับข้อเท็จจริงเดิมที่มีอยู่ก่อนแล้วพัฒนาออกมาเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เมื่อผ่านขั้นการทดลองแล้วนักคณิตศาสตร์อาจจะประมวลสรุปเป็นความรู้ในรูปทั่วๆ ไป โดยใช้กระบวนการทางตรรกวิทยาเพื่อใช้อธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติต่อไป วิธีการสรุปผลค้นหาความจริงจากการสังเกตหรือทดลองหลายครั้งจากกรณีย่อยๆ แล้วสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไปเช่นนี้ เราเรียกว่า การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)

ในทางคณิตศาสตร์ มีการใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยเพื่อช่วยสรุปคำตอบ หรือช่วยในการแก้ปัญหา เช่น แบบรูปของจำนวน 2, 4, 6, 8, 10 ถามว่าจำนวนนับถัดจาก 10 อีก 5 จำนวน คือ

อะไร โดยสังเกตจากแบบรูปของจำนวน 2 –10 พบว่า มีค่าเพิ่มขึ้นทีละสอง ดังนั้น จำนวนอีก 5 จำนวนก็จะเป็น 12, 14, 16, 18 และ 20 จำนวน 5 จำนวนดังกล่าว จึงเป็นตัวอย่างการให้เหตุผลแบบอุปนัย

บทนิยาม การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) หมายถึง วิธีการสรุปผลการค้นหาความจริงจากการสังเกต หรือการทดลองหลายครั้งจากกรณีย่อย ๆ แล้วนำมาสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป

ตัวอย่าง 5 พิจารณาลำดับ 3, 5, 7, 9 จงหาพจน์ที่ n

วิธีทำ

พจน์ที่ 1 คือ 3 = 3

พจน์ที่ 2 คือ 5 = 3 + 2 มี 2 เพิ่มเป็น 1 ตัว

พจน์ที่ 3 คือ 7 = 3 + 2 + 2 มี 2 เพิ่มเป็น 2 ตัว

พจน์ที่ 4 คือ 9 = 3 + 2 + 2 + 2 มี 2 เพิ่มเป็น 3 ตัว

⋮

พจน์ที่ n คือ n = 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + … + 2 มี 2 เพิ่มเป็น (n – 1) ตัว

สรุปว่า พจน์ที่ n คือ 3 + 2(n – 1) = 2n + 1

ตัวอย่าง 6 จากแบบรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาคำตอบถัดไป พร้อมทั้งสรุปสมบัติที่ได้

3 x (-2) = -6

2 x (-2) = -4

1 x (-2) = -2

0 x (-2) = …………

(-1) x (-2) = …………

(-2) x (-2) = …………

(-3) x (-2) = …………

วิธีทำ จากการสังเกตผลลัพธ์ของแบบรูป ผลลัพธ์เพิ่มขึ้นทีละ 2 หรือ $a_n = a_{(n-1)} + 2$

จะได้ว่า $0 \times (-2) = 0 = -2 + 2$

$(-1) \times (-2) = 2 = 0 + 2$

$(-2) \times (-2) = 4 = 2 + 2$

$(-3) \times (-2) = 6 = 4 + 2$

จากแบบรูปการคูณจำนวนเต็มสังเกตเห็นว่า ถ้าตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ เมื่อคูณด้วยจำนวนเต็มที่ลดลง ผลลัพธ์ที่ได้จะมากขึ้นเรื่อยๆ จนได้ผลลัพธ์ในรูปของจำนวนเต็มบวก สรุปเป็นสมบัติได้ว่า "จำนวนเต็มลบ คูณกับจำนวนเต็มลบ จะได้ผลลัพธ์ในรูปจำนวนเต็มบวก"

ในการให้เหตุผลแบบอุปนัยนั้นหลายๆ คนมักสงสัยว่าจะต้องให้ตัวอย่างจำนวนเท่าไรถึงจะเพียงพอที่จะสรุปมาเป็นองค์ความรู้ ซึ่งก็ถือว่าเป็นจุดอ่อนที่สำคัญของการให้เหตุผลแบบอุปนัย เพราะถ้าสามารถหาตัวอย่างในกรณีที่ไม่เป็นจริง ก็จะทำให้ข้อสรุปนั้นไม่เป็นจริงในทันที

2.2 **การให้เหตุผลแบบนิรนัย** (Deductive Reasoning)

การให้เหตุผลแบบนิรนัยเป็นการให้เหตุผลที่ตรงกันข้ามกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย การให้เหตุผลแบบอุปนัยนั้นเป็นการให้เหตุผลเพื่อสรุปหาผลลัพธ์ในรูปทั่วไป แล้วสรุปมาเป็นทฤษฎีบทหรือสรุปเป็นองค์ความรู้ในเรื่องใดเรื่องหนึ่ง ซึ่งหากหาข้อขัดแย้งได้ก็จะทำให้ข้อสรุปนั้นไม่เป็นจริง

บทนิยาม การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นการนำความรู้พื้นฐานซึ่งอาจเป็นความเชื่อ ข้อตกลง กฎ หรือบทนิยาม ซึ่งเป็นสิ่งที่รู้มาก่อน และยอมรับว่าเป็นความจริงเพื่อหาเหตุผลนำไปสู่ข้อสรุป เป็นการอ้างเหตุผลที่มีข้อสรุปตามเนื้อหาสาระที่อยู่ภายในขอบเขตของข้ออ้างที่กำหนด

การให้เหตุผลแบบนิรนัย ประกอบด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วน คือ

1) **เหตุหรือสมมติฐาน** หมายถึงสิ่งที่เป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ ได้แก่ คำอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทที่พิสูจน์แล้ว กฎหรือสมบัติต่างๆ

2) **ผลหรือผลสรุป** หมายถึง ข้อสรุปที่ได้จากเหตุ หรือสมมติฐาน

ในการตรวจสอบการให้เหตุผลแบบนิรนัยนั้น เราสามารถทำการตรวจสอบได้โดยพิจารณาว่า เหตุหรือสมมติฐานที่กำหนดให้มา และผลหรือผลสรุปที่เกิดขึ้นนั้นสมเหตุสมผลหรือไม่ โดยใช้วิธีการอ้างเหตุผล หรือการตรวจสอบการเป็นสัจนิรันดร์ หรือการใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์

ตัวอย่าง 7 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. เด็กไทยทุกคนเป็นคนดี

2. เจ้าจุกเป็นคนไทย

ผล เจ้าจุกเป็นคนดี

เขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ได้ดังนี้

ดังนั้นข้อสรุปที่กล่าวว่าเจ้าจุกเป็นคนดีนั้นสมเหตุสมผล

ตัวอย่าง 8 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. นักกีฬาทุกคนมีสุขภาพดี

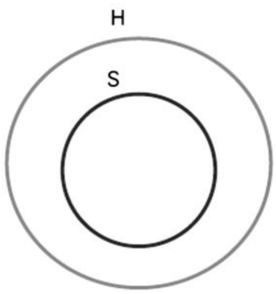
2. ตุ๊กตาสุขภาพดี

ผล ตุ๊กตาเป็นนักกีฬา

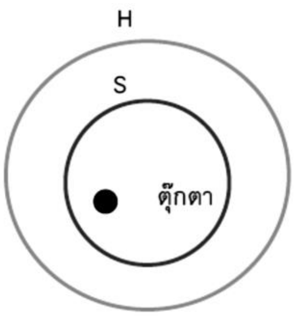
กำหนดให้ H แทนเซตของคนที่มีสุขภาพดี

S แทนเซตของนักกีฬา

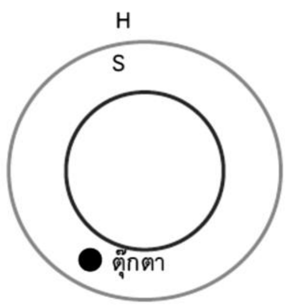
เขียนแผนภาพแทนนักกีฬาทุกคนที่มีสุขภาพดีได้ดังนี้



เขียนแผนภาพเพื่อแสดงว่าตุ๊กตามีสุขภาพดีได้ดังนี้



หรือ



ดังนั้นการอ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง 9 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. ถ้าดำเป็นสิ่งมีชีวิตแล้วดำต้องกินอาหารได้

2. ดำเป็นสิ่งมีชีวิต

ผลสรุป ดำต้องกินอาหารได้

วิธีทำ เปลี่ยนข้อความเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

1. $p \rightarrow q$
2. p

ผลสรุป q

นำมาเขียนเชื่อมประพจน์ใหม่ได้เป็น $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

สร้างตารางหาค่าความจริง จะได้

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	T

พบว่าประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น ผลสรุปจึงสมเหตุสมผล

จากตัวอย่างที่กล่าวข้างต้นจะเห็นว่ากระบวนการในการตรวจสอบการให้เหตุผลแบบนิรนัยนั้นสามารถทำได้หลายวิธีการ ซึ่งหากเรามีความรู้พื้นฐานในเรื่องของตรรกศาสตร์จะช่วยให้การตรวจสอบนั้นง่ายมากขึ้น การตรวจสอบความสมเหตุสมผลโดยหลักเบื้องต้นนิยมใช้รูปแบบของสัจนิรันดร์ไว้ใช้อ้างอิงดังนี้

1. $p \vee \sim p$ หรือ $\sim(\sim p \wedge p)$
2. $p \rightarrow p$
3. a) $p \leftrightarrow p \vee p$ กฎนิจพล

   b) $p \leftrightarrow p \wedge p$
4. $\sim(\sim p) \leftrightarrow p$ กฎทวีคูณนิเสธ (double negation)
5. a) $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ กฎการสลับที่ (commutative laws)

b) $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$

c) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$

6. a) $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (associative laws)

b) $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

7. a) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ กฎการแจกแจง (distributive laws)

b) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

8. a) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's laws)

b) $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

9. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ กฎการแย้งสลับที่ (law of contraposition)

10. $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$ กฎรูปแบบสมมูลของการแจกแจงเหตุสู่ผล

11. $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$ กฎนิเสธของการแจงเหตุสู่ผล

12. $p \rightarrow p \vee q$ กฎของการเติม (law of addition)

13. $p \wedge q \rightarrow p$ หรือ $p \wedge q \rightarrow q$ กฎการทำให้ง่าย (law of simplification)

14. $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ กฎการแจงผลตามเหตุ (modus ponens)

15. $\sim q \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow \sim q$ กฎการแจงผลค้านเหตุ (modus tollens)

16. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ กฎของตรรกบท (law of syllogism)

17. a) $\sim p \wedge (p \vee q) \rightarrow q$ กฎตรรกบทแบบตัดออก (disjunctive syllogism)

b) $\sim q \wedge (p \vee q) \rightarrow p$

18. a) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$

b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$

19. a) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r)$ กฎการอนุมานโดยกรณี (inference by cases)

b) $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$

20. $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

21. กำหนดให้ c และ t แทนข้อความขัดแย้งและข้อความสัจนิรันดร์ จะได้

a) $p \vee c \leftrightarrow p$

b) $p \wedge c \leftrightarrow c$

c) $p \vee t \leftrightarrow t$

d) $p \wedge t \leftrightarrow t$

22. $(p \rightarrow c) \rightarrow \sim p$ เมื่อ c คือข้อความขัดแย้ง กฎของการเป็นไปไม่ได้ (law of absurdity)
23. $\sim p \wedge c \rightarrow p$ เมื่อ c คือข้อความขัดแย้ง
24. $(\sim p \rightarrow c) \leftrightarrow p$ เมื่อ c คือข้อความขัดแย้ง

2.3 รูปแบบการพิสูจน์

ในตำราเรื่องเรขาคณิตสำหรับครูเล่มนี้ เนื้อหาส่วนใหญ่จะเป็นการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ ทางเรขาคณิตในระบบยุคลิด ความรู้ในเรื่องรูปแบบการพิสูจน์นั้นมีความสำคัญอย่างยิ่งเพราะจะช่วยให้เข้าใจรูปแบบประพจน์ของทฤษฎีและสามารถเลือกใช้วิธีการพิสูจน์ได้อย่างถูกต้อง ในบทนี้เราจะได้กล่าวถึงการพิสูจน์ในรูปแบบ $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$, $p \vee q$ และ $p \vee q \rightarrow r$ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.3.1. **การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูปแบบ $p \rightarrow q$**

การพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $p \rightarrow q$ นี้สามารถทำการพิสูจน์ได้ 3 วิธี ดังนี้

1. วิธีตรง (direct proof)
2. วิธีการแย้งสลับที่ (contrapositive proof)
3. วิธีขัดแย้ง (contradiction proof)

แบบที่ 1 วิธีตรง

การพิสูจน์วิธีนี้จะเริ่มโดยการสมมติว่า p เป็นจริง จากนั้นก็เขียนลำดับของข้อความซึ่งได้มาจากข้อความที่มีมาก่อนอย่างถูกต้องตามหลักตรรกศาสตร์ แล้วจบลงด้วยผลสรุป (q) ของสิ่งที่ต้องการ

บทนิยาม 2.1 ให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ จะกล่าวว่า

(1) a เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ a = 2k สำหรับจำนวนเต็ม k บางตัว

(2) a เป็นจำนวนคี่ก็ต่อเมื่อ a = 2k + 1 สำหรับจำนวนเต็ม k บางตัว

ตัวอย่าง 10 กำหนด a เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่

แล้ว $a + 4$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ให้ a เป็นจำนวนคู่ จากบทนิยาม (1) จะได้ $a = 2k$ สำหรับจำนวนเต็ม k บางตัว

จาก $a = 2k$

จะได้ $a + 4 = 2k + 4$

$= 2(k + 2)$

จากบทนิยาม (1) จะได้ว่า $a + 4$ เป็นจำนวนคู่ เพราะมี $k + 2$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ทำให้ $a + 4 = 2(k + 2)$

ดังนั้น ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $a + 4$ เป็นจำนวนคู่

ตัวอย่าง 11 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ

ถ้า a เป็นจำนวนคู่ และ b เป็นจำนวนคี่ แล้ว $a + b$ เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ กำหนด a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ ให้ a เป็นจำนวนคู่ จากบทนิยาม (1) จะได้ว่า $a = 2m$ สำหรับจำนวนเต็ม m บางตัว และให้ b เป็นจำนวนคี่จากบทนิยาม (2) จะได้ว่า $b = 2n + 1$ สำหรับจำนวนเต็ม n บางตัว

พิจารณา $a + b = (2m) + (2n + 1)$

$= 2(m + n) + 1$

จากบทนิยาม (2) จะได้ว่า $a + b$ เป็นจำนวนคี่ เพราะมีจำนวนเต็ม $m + n$ ที่ทำให้ $a + b = 2(m + n) + 1$

ดังนั้น ถ้า a เป็นจำนวนคู่ และ b เป็นจำนวนคี่ แล้ว $a + b$ เป็นจำนวนคี่

แบบที่ 2 วิธีการแย้งสลับที่

เนื่องจากประพจน์ $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ ดังนั้นในกรณีที่เราจะพิสูจน์ว่า $p \rightarrow q$ เราอาจจะแสดงว่า $\sim q \rightarrow \sim p$ เป็นจริงแทนก็ได้

ตัวอย่าง 12 กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคู่

เปลี่ยนรูปแบบของประพจน์ใหม่ได้เป็น ถ้า a เป็นจำนวนคี่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ กำหนดให้ a เป็นจำนวนคี่ โดยบทนิยาม (2) จะได้ว่า $a = 2k + 1$ สำหรับจำนวนเต็ม k บางตัว

จาก $a = 2k + 1$

$$a^2 = (2k+1)^2$$

$$= (2k)^2 + 2(2k)(1) + 1^2$$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

จากบทนิยาม (2) จะได้ว่า a^2เป็นจำนวนคี่ เพราะมีจำนวนเต็ม $2k^2 + 2k$ ที่ทำให้ $a^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

ดังนั้น ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนคี่

แบบที่ 3 วิธีขัดแย้ง

เป็นการพิสูจน์โดยสมมติว่าประพจน์ที่ต้องการพิสูจน์เป็นเท็จ อาศัยสมมติฐานนี้สืบหาข้อความที่ขัดแย้งกับสิ่งที่ทราบมาก่อนหรือขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้แล้วจึงสรุปว่าที่สมมติไว้เป็นไปไม่ได้

ถ้าข้อความที่ต้องการพิสูจน์ คือ $p \to q$ เราจะสมมติว่า $p \to q$ เป็นเท็จ นั่นคือ $\sim(p \to q)$ เป็นจริง แต่ $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$ ดังนั้น $p \wedge \sim q$ เป็นจริง

การพิสูจน์ $p \to q$ โดยข้อขัดแย้งจะเริ่มด้วยการสมมติ $p \wedge \sim q$ เป็นจริง แล้วนำไปสู่ข้อขัดแย้งเขียนแทนด้วย $(p \wedge \sim q \to c)$ เมื่อ c คือข้อความขัดแย้ง

ตัวอย่าง 13 สำหรับจำนวนเต็ม x ใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $x^2 > 0$ แล้ว $x \neq 0$

พิสูจน์ สมมติให้ $x = 0$

จะได้ $x \cdot x = x \cdot 0$

$$x^2 = x \cdot 0$$

$x^2 = 0$

ซึ่งขัดแย้งกับที่โจทย์กำหนดให้ว่า $x^2 > 0$ ดังนั้นที่สมมติให้จึงเป็นไปไม่ได้

นั่นคือสำหรับจำนวนเต็ม x ใดๆ ถ้า $x^2 > 0$ แล้ว $x \neq 0$

ตัวอย่าง 14 กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ สมมติให้ a เป็นจำนวนคี่ โดยบทนิยาม (2) จะได้ว่า a = 2k + 1 สำหรับจำนวนเต็ม k บางตัว

จาก $a = 2k + 1$

จะได้ $a^2 = (2k + 1)^2$

$= (2k)^2 + 2(2k)(1) + 1^2$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$

จากบทนิยาม (2) จะได้ a^2 เป็นจำนวนคี่ เพราะมี $2k^2 + 2k$ เป็นจำนวนเต็ม ที่ทำให้ $a^2 = 2k^2 + 2k$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ ดังนั้นที่สมมติให้จึงเป็นไปไม่ได้

นั้นคือ ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคู่

2.3.2. การพิสูจน์ข้อความในแบบ $p \leftrightarrow q$

เนื่องจาก $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ ดังนั้นการพิสูจน์ข้อความ $p \leftrightarrow q$ จะต้องแสดงการพิสูจน์ 2 ขั้นตอน คือ

1. พิสูจน์ $p \to q$ ขั้นตอนนี้เรียกว่า if part หรือ sufficient part
2. พิสูจน์ $q \to p$ ขั้นตอนนี้เรียกว่า only if part หรือ necessity part

ตัวอย่าง 15 สำหรับจำนวนเต็ม x ใดๆจงพิสูจน์ว่า x เป็นจำนวนเต็มคี่ ก็ต่อเมื่อ x^2 เป็นจำนวนเต็มคี่

กรณี 1. ถ้า x เป็นจำนวนคี่ แล้ว x^2 เป็นจำนวนคี่

กรณี 2. ถ้า x^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว x เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ (→) ถ้า x เป็นจำนวนคี่ แล้ว x^2 เป็นจำนวนคี่

จากบทนิยามจะได้ $x = 2n + 1$ สำหรับจำนวนเต็ม n บางจำนวน

$$x^2 = (2n+1)^2$$

$$= 4n^2 + 4n + 1$$

$$= 2(2n^2 + 2n) + 1$$

ดังนั้น x^2 เป็นจำนวนคี่

(←) ถ้า x^2 เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว x เป็นจำนวนเต็มคี่

สมมติให้ x เป็นจำนวนเต็มคู่ จากบทนิยามจะได้ $x = 2n$ สำหรับจำนวนเต็ม n บางจำนวน

จาก $x = 2n$

$$x^2 = (2n)^2$$

$$= 2(2n^2)$$

จะได้ x^2 เป็นจำนวนคู่ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ x^2 เป็นจำนวนเต็มคี่

ดังนั้นที่สมมติให้จึงเป็นไปไม่ได้ นั่นคือ x เป็นจำนวนเต็มคี่

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า x เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ x^2 เป็นจำนวนคี่

2.3.3. การพิสูจน์ข้อความในแบบ $p \vee q$

จากที่เรากล่าวมาแล้วในบทที่ 2 ว่า $p \vee q \equiv \sim p \to q$ ดังนั้นในการจะแสดงว่าข้อความ $p \vee q$ เป็นจริงเราอาจพิสูจน์ข้อความ $\sim p \to q$ เป็นจริงแทนโดยใช้วิธีตามแบบที่ 1

ตัวอย่าง 16 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $a \cdot b = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$

พิสูจน์ สมมติให้ $a \neq 0$ จะได้ว่ามี a^{-1} ที่ทำให้ $a(a^{-1}) = 1$

จากกำหนดให้ $a \cdot b = 0$

จะได้ $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1}(0)$

$$(a^{-1}a) \cdot b = a^{-1}(0)$$

$$1 \cdot b = 0$$

$$b = 0$$

ดังนั้น ถ้า $a \cdot b = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$

2.3.4. **การพิสูจน์แบบแจกแจงกรณี** (Proof by cases)

ในกรณีที่ข้อความที่ต้องการพิสูจน์อยู่ในแบบ $p \vee q \rightarrow r$ เราสามารถทำได้โดยใช้ข้อความที่สมมูลกันคือ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv p \vee q \rightarrow r$ เป็นจริง ซึ่งการพิสูจน์ในลักษณะนี้เราเรียกว่า “การพิสูจน์แบบแจกแจงกรณี”

ตัวอย่าง 17 จงพิสูจน์ว่า ถ้า x เป็นจำนวนเต็มแล้ว $x^2 + x$ เป็นจำนวนเต็มคู่

พิสูจน์ กรณี1 ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคี่จากบทนิยามจะได้ $x = 2n + 1$ สำหรับจำนวนเต็ม n บางจำนวน

จาก $x = 2n + 1$

จะได้ $x^2 = (2n + 1)^2$

$= 4n^2 + 4n + 1$

พิจารณา $x^2 + x = (4n^2 + 4n + 1) + (2n+1)$

$= 4n^2 + 6n + 2$

$= 2(2n^2 + 3n + 1)$

$= 2m$ ($m = 2n^2 + 3n + 1$ ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม)

เพราะฉะนั้น $x^2 + x$ เป็นจำนวนเต็มคู่

กรณี 2 ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคู่จากบทนิยาม จะได้ $x = 2n$ สำหรับจำนวนเต็ม n บางจำนวน

จาก $x = 2n$

จะได้ $x^2 = (2n)^2$

$= 4n^2$

พิจารณา $x^2 + x = (4n^2) + (2n)$

$= 2(2n^2 + n)$

$= 2m$ ($m = 2n^2 + n$ ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม)

เพราะฉะนั้น $x^2 + x$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ดังนั้น จากทั้งสองกรณีสรุปได้ว่าถ้า x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $x^2 + x$ เป็นจำนวนเต็มคู่

สรุป

ในบทที่ 2 จะกล่าวถึงระบบสัจพจน์ และรูปแบบการพิสูจน์ ซึ่งเป็นพื้นฐานความรู้ที่สำคัญที่จะนำไปใช้ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เนื่องด้วยการพิสูจน์ทางเรขาคณิตนั้นจะอยู่ในรูปแบบของประพจน์ทางตรรกศาสตร์ และการพิสูจน์ต้องใช้สัจพจน์มาช่วยในการสร้างรูปเรขาคณิตเพื่อนำมาใช้ในการพิสูจน์ จึงเป็นความรู้ที่สำคัญอย่างยิ่ง ที่จะต้องรู้ระบบสัจพจน์ และรูปแบบการพิสูจน์ โดยธรรมชาติคณิตศาสตร์จะแบ่งระบบออกเป็น 2 ระบบใหญ่ ได้แก่

1. ระบบโครงสร้างทางคณิตศาสตร์
   - อนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท
   - ลักษณะของสัจพจน์
2. ระบบการให้เหตุผล
   - การให้เหตุผลแบบอุปนัย
   - การให้เหตุผลแบบนิรนัย

นอกจากระบบสัจพจน์ที่กล่าวข้างต้น ในบทนี้ยังได้ทำการทบทวนเกี่ยวกับรูปแบบการพิสูจน์ที่มักจะพบบ่อยๆ ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิต ได้แก่

1. การพิสูจน์วิธีตรง ($p \rightarrow q$)
2. การพิสูจน์วิธีการแย้งสลับที่ ($p \rightarrow q \equiv {\sim}q \rightarrow {\sim}p$)
3. การพิสูจน์วิธีขัดแย้ง ($p \wedge {\sim}q \rightarrow c$)
4. การพิสูจน์ในรูปแบบก็ต่อเมื่อ ($p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$)
5. การพิสูจน์ในรูปแบบ $p \vee q$
6. การพิสูจน์แบบแจกแจงกรณี ($p \vee q \rightarrow r$)

เป็นรูปแบบการพิสูจน์ที่มักจะพบบ่อยๆ ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิต

คำถามท้ายบทที่ 2

ส่วนที่ 1 โครงสร้างทางคณิตศาสตร์

1) จงวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท

2) จงยกตัวอย่างอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทที่พบในวิชาคณิตศาสตร์

3) จงบอกความสำคัญของอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์

4) จงทำเครื่องหมาย √ ลงในช่องให้ตรงกับข้อความที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ

ข้อ	คำหรือข้อความ	อนิยาม	บทนิยาม	สัจพจน์	ทฤษฎีบท
1	จุด				
2	สิ่งมีชีวิตทุกชนิดต้องตาย				
3	กติกาฟุตบอลคือ มีผู้เล่นทีมละไม่เกิน 11 คน				
4	เส้นตรง				
5	คนเราเกิดมาย่อมมี เกิด แก่ เจ็บ ตาย				
6	มุมฉากคือมุมที่มีขนาด 90 องศา				
7	ดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออกเสมอ				
8	ดิน น้ำ ลม ไฟ				
9	รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านเท่ากัน 4 ด้าน และมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก				
10	เส้นตรง 2 เส้นตัดกันที่จุด ๆเดียว				
11	รัศมีของวงกลมวงเดียวกันมีขนาดเท่ากัน				
12	ในวงกลมใด ๆ มุมที่จุดศูนย์กลางย่อมมีขนาดเป็น 2 เท่าของมุมที่เส้นรอบวงที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน				
13	มุมในครึ่งวงกลมใด ๆ ย่อมเป็นมุมฉาก				
14	มุมฉากทุกมุมมีขนาดเท่ากัน				
15	ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ กำลังสองของด้านตรงข้ามมุมฉาก จะเท่ากับผลบวกของกำลังสองของด้านประกอบมุมฉาก				

ส่วนที่ 2 การให้เหตุผล

5) จงหาพจน์ที่อยู่ถัดไปอีก 3 พจน์

1) 1 , 3 , 9 , 27

2) 1 , 6 , 3 , 4 , 5 , 2

3) 3 , 6 , 12

4) 1, 6, 11, 16

5) 1, 4, 9, 16, 25

6) จงหาสมการถัดไป จากแบบรูปที่กำหนดให้โดยใช้หลักการอุปนัย แล้วตรวจสอบโดยการคำนวณ

$$9 \times 9 + 7 = 88$$

$$98 \times 9 + 6 = 888$$

$$987 \times 9 + 5 = 8,888$$

$$9,876 \times 9 + 4 = 88,888$$

…………………………… = ……………………..

7) จงตรวจสอบการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

7.1. เหตุ ผลไม้บางชนิดเปรี้ยว
สิ่งที่เปรี้ยวทำให้ปวดท้อง
ผล ผลไม้บางชนิดทำให้ปวดท้อง

7.2 เหตุ นกทุกตัวเป็นสัตว์มีปีก
เป็ดทุกตัวเป็นสัตว์มีปีก
ผล นกทุกตัวเป็นเป็ดชนิดหนึ่ง

7.3 เหตุ วัวมี 4 ขา
หมูไม่เป็นวัว
ผล หมูไม่มี 4 ขา

8) จงวิเคราะห์เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างการให้เหตุผลแบบอุปนัย และนิรนัย

9) จงยกตัวอย่างการใช้เหตุผลแบบอุปนัย และนิรนัยที่พบในชีวิตประจำวัน

ส่วนที่ 3 รูปแบบการพิสูจน์

10) กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

10.1 ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่แล้ว m + n จะเป็นจำนวนคู่

10.2 ถ้า m และ n เป็นจำนวนคี่แล้ว m + n จะเป็นจำนวนคู่

10.3 ถ้า m เป็นจำนวนคี่ และ n เป็นจำนวนคู่แล้ว m + n จะเป็นจำนวนคี่

10.4 ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่แล้ว mn จะเป็นจำนวนคู่

10.5 ถ้า m และ n เป็นจำนวนคี่แล้ว mn จะเป็นจำนวนคี่

10.6 ถ้า m เป็นจำนวนคี่ และ n เป็นจำนวนคู่แล้ว mn จะเป็นจำนวนคู่

10.7 ถ้า m เป็นจำนวนคี่ แล้ว m^3 เป็นจำนวนคี่

10.8 ถ้า m เป็นจำนวนคู่แล้ว m^4 เป็นจำนวนคู่

10.9 ถ้า m และ n เป็นจำนวนคี่ แล้ว $(m + n)^2$ จะเป็นจำนวนคู่

10.10 ถ้า $(m + n)^2$ เป็นจำนวนคู่แล้ว m เป็นจำนวนคู่ หรือ n เป็นจำนวนคี่

11) จงพิจารณาว่าการพิสูจน์ข้างล่างนี้ ถูกหรือไม่ ถ้าถูกจงบอกรูปแบบในการพิสูจน์ ถ้าผิดจงให้เหตุผล

ทฤษฎีบท ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว m – n เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์แบบที่ 1 สมมติให้ m และ n เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม j และ k ซึ่งทำให้ $m = 2j + 1$ และ $n = 2k + 1$

ดังนั้น $m – n = 2j + 1 –(2k + 1) = 2(j – k)$ ซึ่งเป็นจำนวนคู่

พิสูจน์แบบที่ 2 สมมติให้ m – n เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม j ซึ่งทำให้ $m – n = 2j + 1$

ถ้า n เป็นจำนวนคู่ จะได้เป็นจริงตามที่กำหนดให้

ถ้า n เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่งทำให้ $m = 2k +1$

ดังนั้น $m = m – n + n = 2j + 1 – (2k + 1) = 2(j – k)$

เพราะฉะนั้น m เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์แบบที่ 3 สมมติให้ m และ n เป็นจำนวนคู่และ m – n เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม j และ k ซึ่งทำให้ $m = 2j$ และ $n = 2k$

ดังนั้น $m – n = 2j – 2k = 2(j – k)$

จะได้ว่า $m - n$ เป็นจำนวนคู่ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานที่ว่า $m - n$ เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น ทฤษฎีบทที่กำหนดให้ไม่เป็นจริง

12) กำหนดให้ m, n และ p เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์แต่ละข้อต่อไปนี้

1. m เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ m^2 เป็นจำนวนคู่
2. m เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ $m^2 - 1$ เป็นจำนวนคู่
3. m เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ $m + 1$ เป็นจำนวนคู่
4. m เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ $m + 2$ เป็นจำนวนคู่
5. $m + n$ เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ $m - n$ เป็นจำนวนคู่

13) จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

14) ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $a^3 + a + 1$ เป็นจำนวนคี่

เอกสารอ้างอิง

กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). *หลักคณิตศาสตร์ พิมพ์ครั้งที่ 2*. กรุงเทพฯ.

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ มูลนิธิ สอวน. (2547). *พีชคณิต*. กรุงเทพฯ.

ชเอิญศรี อิศรางกูร ณ อยุธยา และวิโรจน์ นาคชาตรี. (2547). *การใช้เหตุผล* (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพฯ.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา. (2543). *รวมปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และสารพันปัญหาคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

นงนุช สุขวารี. (2548). *คณิตตรรกศาสตร์เบื้องต้น*. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

_______. (2555). *ตรรกะและระเบียบวิธีพิสูจน์*. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

ธีรวัฒน์ จิตธรรม. (2547). เอกสารประกอบการสอน. *การให้เหตุผล ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนมงฟอร์ตวิทยาลัย*. กรุงเทพฯ: โรงเรียนมงฟอร์ตวิทยาลัย.

ภัทรา เตชาภิวาทย์. (2540). *คณิตตรรกศาสตร์* (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ.

ศุภณัฐ ชัยดี. (2548). หนังสือออนไลน์ *เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2546). *หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์องค์การค้าของคุรุสภา.

______. *เอกสารเสริมความรู้สำหรับนักเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี*.กรุงเทพฯ.

สรศักดิ์ ลี้รัตนาวลี. (2543). เอกสารประกอบการเรียน. *คณิตตรรกศาสตร์เบื้องต้น*. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

สัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์. (2550). *หลักคณิตศาสตร์*. สืบค้นเมื่อ 15 กรกฎาคม 2558. จากเว็บไซน์ www.thai-mathpaper.net.

สิริวรรณ ตั้งจิตวัฒนะกุล. (2545). *รากฐานเรขาคณิต* (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพฯ. มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย. (2545). *ตรรกศาสตร์และระบบ จำนวนจริง*. สมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์.

Barsamian, M. (2015). *Introduction to Axiomatic Geometry*. สืบค้นเมื่อ 20 กรกฎาคม 2558. จากเว็บไซน์ http://www.ohio.edu/people/barsamia/geometry.text/geometry.text.chapters.1.through.16.pdf.

Hamblin. (2007). *Euclidean and Non-Euclidean Geometry*. สืบค้นเมื่อ 1 สิงหาคม 2558, จากเว็บไซน์ http://webspace.ship.edu/jehamb/f07/333/axsystems.pdf.