บทที่ 5 ปริพันธ์

5.1 ปฏิยานุพันธ์ ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

บทนิยามที่ 5.1 จะกล่าวว่าฟังก์ชัน F เป็น**ปฏิยานุพันธ์ของ**ฟังก์ชัน f บนช่วง S ก็ต่อเมื่อ $F'(x) = f(x)$ ทุกค่า x บนช่วง S

เช่น $\frac{1}{4}x^4, \frac{1}{4}x^4 + 5, \frac{1}{4}x^4 - \pi, \frac{1}{4}x^4 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ

ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ x^3 ในช่วง $(-\infty, \infty)$ เพราะแต่ละฟังก์ชันมีอนุพันธ์เป็น x^3

ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

สัญลักษณ์ $\int f(x)dx$ เป็นปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ $f(x)$ เทียบกับ x กระบวนการหาปริพันธ์ เรียกว่า **การหาปริพันธ์ ถ้า** $F'(x) = f(x)$ จะได้ $\mathrm{F}(x) + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ จะเขียนแทนด้วย $\int f(x)dx = \mathrm{F}(x) + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใดๆ

สมบัติของปริพันธ์

ให้ u, v เป็นฟังก์ชันของ x และ k เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

1. $\int(u \pm v)dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$
2. $\int ku\,dx = k\int u\,dx$

สูตรการหาปริพันธ์

ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์เทียบกับ x

1. $\int du = u + C$
2. $\int au(x)dx = a\int u(x)dx$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่
3. $\int(u \pm v)dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad , n \neq -1$
5. $\int \frac{1}{u} du = ln|u| + C$
6. $\int a^u du = \frac{a^u}{ln\, a} + C$
7. $\int e^u du = e^u + C$
8. $\int sin\, u\, du = -cos\, u + C$
9. $\int cos\, u\, du = sin\, u + C$
10. $\int sec^2\, u\, du = tan\, u + C$
11. $\int cosec^2\, u\, du = -cot\, u + C$
12. $\int sec\, u\, tan\, u\, du = sec\, u + C$
13. $\int cosec\, u\, cot\, u\, du = -cosec\, u + C$
14. $\int tan\, u\, du = ln|sec\, u| + C$
15. $\int cot\, u\, du = ln|sin\, u| + C = -ln|cosec\, u| + C$

16. $\int sec\, u\, du = ln|sec\, u + tan\, u| + C$

17. $\int cosec\, u\, du = ln|cosec\, u - cot\, u| + C$

18. $\int \frac{1}{u^2+a^2} du = \frac{1}{a} acrtan \frac{u}{a} + C$

19. $\int \frac{1}{u^2-a^2} du = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

20. $\int \frac{1}{a^2-u^2} du = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin \frac{u}{a} + C$

22. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln \left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

23. $\int \sqrt{a^2-u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} arcsin \frac{u}{a} + C$

24. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} ln \left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\int x^5 dx$

วิธีทำ

1.2 $\int \sqrt{x} dx$

วิธีทำ

1.3 $\int \frac{3}{x^4} dx$

วิธีทำ

1.4 $\int x^3 \sqrt{x} dx$

วิธีทำ

1.5 $\int (1-3x^2)^2 dx$

วิธีทำ

1.6 $\int \frac{1-2t^3}{t^4} dt$

วิธีทำ

1.7 $\int \frac{1}{(4-x^2)} dx$

วิธีทำ

1.8 $\int \sec\theta\,(\sec\theta + 1)d\theta$

วิธีทำ

1.9 $\int \frac{3-\cos\theta}{(\sin\theta)^2}d\theta$

วิธีทำ

ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ บางครั้งเราต้องจัดรูปก่อน โดยใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$\cos 2A = cos^2 A - sin^2 A = 2cos^2 A - 1 = 1 - 2sin^2 A$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ

2.1 $\int \frac{\cos 2x}{sin^2 x}dx$

วิธีทำ

2.2 $\int \sec x \sin 2x \, dx$

วิธีทำ

2.3 $\int \sqrt{1 + cos2t} dt$

วิธีทำ

2.4 $\int \frac{1}{1-\sin x} dx$

วิธีทำ

2.5 $\int \frac{dx}{1+secx}$

วิธีทำ

5.2 เทคนิคการหาปริพันธ์

5.2.1 วิธีแทนค่าตัวแปร

ในบางครั้ง การหา $\int (3x^2)\sqrt[3]{x^3+4}dx$ หรือ $\int \left(1-\frac{1}{\theta}\right) cos(\theta - ln\theta)\, d\theta$ เราไม่สามารถใช้สูตรได้ทันที เราจะต้องมีการจัดรูปหรือเปลี่ยนตัวแปรเพื่อใช้สูตรในการหาปริพันธ์ เช่น

$\int (3x^2)\sqrt[3]{x^3+4}dx$ เมื่อสังเกตจะเห็นว่า $d(x^3+4) = 3x^2dx$

ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ $u = x^3 + 4$ จะได้ $du = 3x^2dx$

นั่นคือ เมื่อเขียน $\int (3x^2)\sqrt[3]{x^3+4}dx$ ในรูปของ u

เราจะสามารถหาอินทิกรัลโดยใช้สูตรได้

$$\begin{aligned}
\int (3x^2)\sqrt[3]{x^3+4}dx &= \int (x^3+4)^{1/3}\,(3x^2dx) \\
&= \int (x^3+4)^{1/3}\,(3x^2dx) \\
&= \int u^{1/3}\,du \\
&= \frac{3}{4}u^{4/3} + \mathrm{c} \\
&= \frac{3}{4}(x^3+4)^{4/3} + \mathrm{c}
\end{aligned}$$

วิธีแบบนี้ เรียกว่า “วิธีแทนค่าตัวแปร”

ขั้นตอนการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตัวแปร เมื่อปริพันธ์ในรูป $\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx$

1. ให้ $u = g(x)$ ได้ $du = g'(x)dx$ และ $dx = \frac{du}{g'(x)}$
2. แทนค่า $g(x)$ และ $g'(x)dx$ จะได้ $\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du$
3. เมื่อหา $\int f(u)du$ ได้ ต้องแทนค่า $u = g(x)$ ตามเดิม

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ

3.1 $\int \sin(3x+4)\,dx$

วิธีทำ

3.2 $\int (6y-1)e^{3y^2-y+4}dy$

วิธีทำ

3.3 $\int \frac{e^{2\theta}}{3e^{2\theta}+4}d\theta$

วิธีทำ

3.4 $\int \frac{5^{\frac{t}{(t+1)}}}{(t+1)^2}dt$

วิธีทำ

3.5 $\int \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4 (เป็นการใช้สูตร 17-24)

4.1 $\int \frac{1}{9+16x^2} dx$

วิธีทำ

4.2 $\int \frac{\cos(3\theta)}{4-sin^2(3\theta)} d\theta$

วิธีทำ

4.3 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+5}}dx$

วิธีทำ

4.4 $\int x\sqrt{6+2x^2-x^4}dx$

วิธีทำ

4.5 $\int \frac{sec^2y}{tan^2y-4tany}dy$

วิธีทำ

4.6 $\int \frac{x+1}{x^2+6x+3} dx$

วิธีทำ

เมื่อมีความชำนาญในการแทนค่าตัวแปร เราอาจจะไม่จำเป็นต้องกำหนด u สามารถเขียน $\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx$ ในรูปของ $\int f\big(g(x)\big)dg(x)$ ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

5.1 $\int (2x+1)(x^2+x-5)^3 dx$

วิธีทำ

5.2 $\int e^{-ax+b} dx$

วิธีทำ

5.3 $\int x\sin(ax^2+b)\,dx$

วิธีทำ

5.4 $\int \frac{1}{ax+b}\,dx$

วิธีทำ

ในบางครั้ง เมื่อแทนค่า $g(x)=u$ และ $du=g'(x)dx$ แล้วตัวแปร x ยังเหลืออยู่ ดังนั้น ต้องเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของตัวแปร u ทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 6 จงหา

6.1 $\int x\sqrt{x-1}dx$

วิธีทำ

6.2 $\int \frac{t^3}{\sqrt[3]{t^2+4}}\,dx$

วิธีทำ

ในบางครั้ง เราไม่สามารถกำหนด u ได้ทันที จะต้องจัดรูปก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ

7.1 $\int \frac{3}{e^{2x}+1} dx$

วิธีทำ

7.2 $\int \sqrt{x^{3/2} + x}\ dx$

วิธีทำ

7.3 $\int e^{3x}(1 + e^{-2x})^{\frac{1}{2}} dx$

วิธีทำ

7.4 $\int \frac{x^4+x-16}{x^2+4} dx$

วิธีทำ

5.2.2 **วิธีการหาปริพันธ์ทีละส่วน**

ในบางกรณี ตัวถูกหาปริพันธ์ไม่อยู่ในรูปที่สามสารถใช้สูตรได้โดยตรง และไม่สามารถกำหนดตัวแปรใหม่ดังที่กล่าวมาแล้วได้ มีวิธีการหาปริพันธ์อีกแบบที่เรียกว่า **การหาปริพันธ์ทีละส่วน**

จากสูตรผลคูณของค่าเชิงอนุพันธ์ เมื่อ u, v เป็นฟังก์ชัน

$$d(uv) = udv + vdu$$

เมื่อหาปริพันธ์ทั้งสองข้างจะได้

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

จะได้สูตรในการหาปริพันธ์ทีละส่วน

$$\int udv = uv - \int vdu$$

จะให้โจทย์อยู่ในรูป $\int udv$ ซึ่งเราจะต้องกำหนดว่าตัวใดเป็น u และตัวใดเป็น dv

โดยที่ dv ต้องหาปริพันธ์ได้ จากนั้นหา du และหา v เพื่อแทนค่าในสูตรการหาปริพันธ์ทีละส่วน

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ

8.1 $\int xe^{x}dx$

วิธีทำ

8.2 $\int (3x+1)sin(2x)dx$

วิธีทำ

8.3 $\int x^3 cos(x^2)dx$

วิธีทำ

8.4 $\int \frac{lnx}{x^2}dx$

วิธีทำ

8.5 $\int arcsin(2x)dx$

วิธีทำ

8.6 $\int xarctanxdx$

วิธีทำ

ข้อสังเกต	1. ถ้าตัวถูกหาปริพันธ์อยู่ในรูป (ฟังก์ชันพหุนาม)(ฟังก์ชันตรีโกณมิติ) หรือ (ฟังก์ชันพหุนาม)(ฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชี่ยว) จะต้องกำหนดให้ $u =$ ฟังก์ชันพหุนาม 2. ถ้าตัวถูกหาปริพันธ์มี ฟังก์ชันลอการิทึม หรือฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน จะต้องกำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันเหล่านั้น

ในบางครั้งจะต้องหาปริพันธ์ทีละส่วนมากกว่า 1 ครั้ง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ

9.1 $\int x^2 \cos(2x)dx$

วิธีทำ

9.2 $\int e^{-x}sinxdx$

วิธีทำ

9.3 $\int sin(lnx)dx$

วิธีทำ

5.2.3 วิธีการหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติในบางรูปแบบ

การหา $\int \boldsymbol{sin^m\theta\, cos^n\theta d\theta}$

กรณีที่ 1 เมื่อ m เป็นจำนวนคี่บวก จะเปลี่ยน $d\theta$ ให้เป็น $d(\cos\theta)$

และ ตัวถูกหาปริพันธ์ให้อยู่ในรูป $cos^k\theta$

- เขียน $sin^m\theta$ เป็น $sin^{m-1}\theta$
- เปลี่ยน $sin\,\theta\, d\theta$ เป็น $-d(\cos\theta)$
- เขียน $sin^{m-1}\theta$ ให้อยู่ในรูป $cos^2\theta$ โดยใช้ $sin^2\theta = 1 - cos^2\theta$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าของ $\int sin^3x\, dx$

วิธีทำ

กรณีที่ 2 เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก จะเปลี่ยน $d\theta$ ให้เป็น $d(\sin\theta)$

แล้วตัวถูกหาปริพันธ์ให้อยู่ในรูป $sin^k\theta$

- เขียน $cos^n\theta$ เป็น $cos^{n-1}\theta$
- เปลี่ยน $cos\,\theta\, d\theta$ เป็น $d(\sin\theta)$
- เขียน $cos^{n-1}\theta$ ให้อยู่ในรูป $sin^2\theta$ โดยใช้ $cos^2\theta = 1 - sin^2\theta$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่าของ $\int sin^2(2x)\, cos^5(2x) dx$

วิธีทำ

กรณีที่ 3 เมื่อ m และ n เป็นจำนวนคู่บวก จะลดทอน m และ n ให้เป็นหนึ่ง โดยใช้เอกลักษณ์

$$sin^2\theta = \frac{1-cos2\theta}{2}$$

$$cos^2\theta = \frac{1+cos2\theta}{2}$$

$$\sin\theta cos\theta = \frac{sin2\theta}{2}$$

ตัวอย่างที่ 12 จงหาค่าของ $\int sin^2x\, cos^5xdx$

วิธีทำ

การหา $\int \boldsymbol{sin(m\theta)\, cos(n\theta) d\theta}, \int \boldsymbol{sin(m\theta)\, sin(n\theta) d\theta}$ และ $\int \boldsymbol{cos(m\theta)\, cos(n\theta) d\theta}$ เมื่อ $\boldsymbol{m \neq n}$

จะเปลี่ยนตัวหาปริพันธ์ในรู)ผลคูณให้เป็นผลบวกหรือผลต่างโดยใช้เอกลักษณ์

$$\sin A \cos B = \frac{sin(A-B)+\sin(A+B)}{2}$$

$$\sin A \sin B = \frac{cos(A-B)-cos(A+B)}{2}$$

$$\cos A \cos B = \frac{cos(A-B)+cos(A+B)}{2}$$

และอย่าลืมว่า $\sin(-A) = -\sin A$

$\cos(-A) = \cos A$

ตัวอย่างที่ 13 จงหาค่าของ $\int sin(2x)\, cos(3x) dx$

วิธีทำ

การหา $\int \boldsymbol{tan^m\theta\, d\theta}$ หรือ $\int \boldsymbol{cot^m\theta d\theta}$

เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก จะทำให้เกิด $d(tan\theta)$ หรือ $-d(cot\theta)$ โดย

- เขียน $tan^m\theta$ เป็น $tan^{m-2}\theta tan^2\theta$
  หรือเขียน $cot^m\theta$ เป็น $cot^{m-2}\theta cot^2\theta$
- เปลี่ยน $tan^2\theta = sec^2\theta - 1$ หรือเปลี่ยน $cot^2\theta = cosec^2\theta - 1$
- คูณกระจาย
- เปลี่ยน $sec^2\theta d\theta$ เป็น $d(tan\theta)\ 1$ หรือเปลี่ยน $cosec^2\theta d\theta$ เป็น $-d(cot\theta)$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาค่าของ $\int tan^3 x\, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 15 จงหาค่าของ $\int cot^4(2x)dx$

วิธีทำ

การหา $\int sec^n\theta\, d\theta$ หรือ $\int cosec^n\theta d\theta$

กรณีที่ 1 เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก จะทำให้เกิด $d(tan\theta)$ โดย

- เขียน $sec^n\theta$ เป็น $sec^{n-2}\theta sec^2\theta$
  หรือเขียน $cosec^n\theta$ เป็น $cosec^{n-2}\theta cosec^2\theta$
- เปลี่ยน $sec^2\theta d\theta$ เป็น $d(tan\theta)$ หรือเปลี่ยน $cosec^2\theta d\theta$ เป็น $-d(cot\theta)$
- เขียน $sec^{n-2}\theta d\theta$ ให้อยู่ในรูป $tan^2\theta$ โดยใช้ $sec^2\theta = tan^2\theta + 1$
  หรือเขียน $cosec^{n-2}\theta$ ให้อยู่ในรูป $cot^2\theta$ โดยใช้ $cosec^2\theta = cot^2\theta + 1$

กรณีที่ 2 เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก ใช้วิธีหาปริพันธ์ทีละส่วน

ตัวอย่างที่ 16 จงหาค่าของ $\int cosec^6 x dx$

วิธีทำ

การหา $\int \boldsymbol{tan^m\theta\, sec^n\theta d\theta}$ หรือ $\int \boldsymbol{cot^m\theta\, cosec^n\theta d\theta}$

กรณีที่ 1 เมื่อ m เป็นจำนวนคี่บวก จะทำให้เกิด $d(sec\theta)$ หรือ $d(cosec\theta)$

- เขียน $tan^m\theta sec^n\theta$ เป็น $tan^{m-1}\theta sec^{n-1}\theta tan\theta sec\theta$
  หรือเขียน $cot^m\theta cosec^n\theta$ เป็น $cot^{m-1}\theta cosec^{n-1}\theta cot\theta cosec\theta$
- เปลี่ยน $tan\theta sec\theta d\theta$ เป็น $d(sec\theta)$
  หรือเปลี่ยน $cot\theta cosec\theta d\theta$ เป็น $-d(cosec\theta)$
- เขียน $tan^{m-1}\theta$ ให้อยู่ในรูป $sec^2\theta$ โดยใช้ $tan^2\theta = sec^2\theta - 1$ หรือเขียน $cot^{m-1}\theta$ ให้อยู่ในรูป $cosec^2\theta$ โดยใช้ $cot^2\theta = cosec^2\theta - 1$

กรณีที่ 2 เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก จะทำให้เกิด $d(tan\theta)$ หรือ $d(cot\theta)$

- เขียน $sec^n\theta$ เป็น $sec^{n-2}\theta sec^2\theta$
  หรือเขียน $cosec^n\theta$ เป็น $cosec^{n-2}\theta cosec^2\theta$
- เปลี่ยน $sec^2\theta d\theta$ เป็น $d(tan\theta)$
  หรือเปลี่ยน $cosec^2\theta d\theta$ เป็น $-d(cot\theta)$
- เขียน $sec^{n-2}\theta d\theta$ ให้อยู่ในรูป $tan^2\theta$ โดยใช้ $sec^2\theta = tan^2\theta + 1$ หรือเขียน $cosec^{n-1}\theta$ ให้อยู่ในรูป $cot^2\theta$ โดยใช้ $cosec^2\theta = cot^2\theta + 1$

กรณีที่ 3 เมื่อ m เป็นจำนวนคู่บวก และ n เป็นจำนวนคี่บวก ใช้วิธีหาปริพันธ์ทีละส่วน

ตัวอย่างที่ 17 จงหาค่าของ $\int tan^3xsec^5xdx$

วิธีทำ

5.2.4 วิธีการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จาก $1 - sin^2\theta = cos^2\theta$

$sec^2\theta - 1 = tan^2\theta$

$1 + tan^2\theta = sec^2\theta$

เมื่อตัวถูกหาปริพันธ์อยู่ในรูป

$(a^2 - u^2)^{n/2}, (u^2 - a^2)^{n/2}, (a^2 + u^2)^{n/2}\ ; n \in I^+$

จะแทนค่า u ด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ ได้แก่

กรณีที่ 1 เมื่อมี $(a^2 - u^2)^{n/2}$

ให้ $u = asin\theta$ จะได้ $du = acos\theta d\theta$

และ $a^2 - u^2 = a^2 - a^2sin^2\theta$

$= a^2(1 - sin^2\theta)$

$\therefore a^2 - u^2 = a^2cos^2\theta$

กรณีที่ 2 เมื่อมี $(u^2 - a^2)^{n/2}$

ให้ $u = asec\theta$ จะได้ $du = asec\theta tan\theta d\theta$

และ $u^2 - a^2 = a^2sec^2\theta - a^2$

$= a^2(sec^2\theta - 1)$

$\therefore u^2 - a^2 = a^2tan^2\theta$

กรณีที่ 3 เมื่อมี $(a^2 + u^2)^{n/2}$

ให้ $u = atan\theta$ จะได้ $du = asec^2\theta d\theta$

และ $a^2 + u^2 = a^2 + a^2tan^2\theta$

$= a^2(1 + tan^2\theta)$

$\therefore a^2 - u^2 = a^2sec^2\theta$

สรุป

เมื่อมี	กำหนดให้	จะได้	
$a^2 - u^2$			
$u^2 - a^2$			
$a^2 + u^2$			

ตัวอย่างที่ 18 จงหาค่าของ $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 19 จงหาค่าของ $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+4x^2}} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 20 จงหาค่าของ $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-9x^2}}dx$

วิธีทำ

5.2.5 **วิธีการหาปริพันธ์โดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย**

เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามและเลขชี้กำลังสูงสุดของ x ใน $P(x)$ มีค่าน้อยกว่าเลขชี้กำลังสูงสุดของ x ใน $Q(x)$ จะเรียก $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ว่า ฟังก์ชันตรรกยะแท้ ซึ่งสามารถเขียนในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อย โดยพิจารณาจากตัวประกอบของ ดังนี้ $Q(x)$ ดังนี้

I. แต่ละตัวประกอบกำลังหนึ่ง $(ax+b)$ ที่ไม่ซ้ำกันของ $Q(x)$ จะได้เศษส่วนย่อยในรูป

$\frac{A}{ax+b}$; A เป็นค่าคงที่

เช่น $\frac{2x}{(3x+1)(x-5)} = \frac{A}{(3x+1)} + \frac{B}{(x-5)}$; A, B เป็นค่าคงที่

II. แต่ละตัวประกอบกำลังหนึ่งที่ซ้ำกัน $(ax+b)^n$ ของ $Q(x)$ จะได้ผลบวกเศษส่วนย่อย n ตัวดังนี้

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

โดยที่ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ เป็นค่าคงที่

เช่น $\frac{x^2}{(2x+1)^3} = \frac{A_1}{(2x+1)} + \frac{A_2}{(2x+1)^2} + \frac{A_3}{(2x+1)^3}$; A_1, A_2, A_3 เป็นค่าคงที่

แต่ละตัวประกอบกำลังสอง (ax^2+bx+c) ที่ไม่ซ้ำกันของ $Q(x)$ จะได้เศษส่วนย่อยในรูป

$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$; A, B เป็นค่าคงที่

เช่น $\frac{x}{(x^2+x-1)(x^2+5)} = \frac{Ax+B}{(x^2+x-1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+5)}$; A, B, C, D เป็นค่าคงที่

III. แต่ละตัวประกอบกำลังสอง (ax^2+bx+c) ที่ซ้ำกันของ $Q(x)$ จะได้เศษส่วนย่อยในรูป

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

โดยที่ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ และ $B_1, B_2, \cdots, B_n$ เป็นค่าคงที่

เช่น $\frac{1}{(3x^2+2)^2}=\frac{Ax+B}{3x^2+2}+\frac{Cx+D}{(3x^2+2)^2}$; A, B, C, D เป็นค่าคงที่

การหาค่าคงที่ที่กำหนดในเศษส่วนย่อย มีวิธีหา 2 แบบ คือ

1. วิธีเทียบสัมประสิทธิ์
2. วิธีแทนค่าตัวแปรด้วยค่าคงที่

ตัวอย่างที่ 21 จงเขียน $\frac{2x^2-5x-9}{(x-1)(x+1)(x+2)}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วนย่อย

วิธีทำ

หมายเหตุ 1. ถ้าตัวประกอบของ $Q(x)$ เป็นกำลังหนึ่ง การหาค่าคงที่โดยใช้วิธีแทนค่าตัวแปรด้วยค่าคงที่จะง่ายกว่า

2. เมื่อตัวถูกหาปริพันธ์อยู่ในรูปเศษส่วนตรรกยะไม่แท้ จะต้องทำให้เป็นเศษส่วนตรรกยะแท้ก่อนโดยการหารพหุนาม

ตัวอย่างที่ 22 จงหาค่าของ $\int \frac{2x^2-5x-9}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 23 จงหาค่าของ $\int \frac{2x^2-3x+1}{(x-3)(x^2-2x+2)}dx$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 24 จงหาค่าของ $\int \frac{x^2-5}{(x-3)(x-1)^2} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 25 จงหาค่าของ $\int \frac{x^3-7x-3}{x^2+2x-3} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 26 จงหาค่าของ $\int \frac{e^x}{e^{2x}-5e^x+6}dx$

วิธีทำ

5.2.6 **วิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ตัวแปรมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ**

เมื่อตัวหาปริพันธ์อยู่ในรูป V ที่มีเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วน จะใช้วิธีแทนค่าตัวแปร เพื่อให้ตัวแปรใหม่ u มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $V = u^{\text{ค.ร.น.ของส่วนของเลขชี้กำลังเดิม}}$

ตัวอย่างที่ 27 จงหาค่าของ

1. $\int \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x+x^{\frac{1}{2}}}dx$

วิธีทำ

$2. \int \frac{(2-x)^{\frac{1}{6}}}{(2-x)^{\frac{1}{2}}-(2-x)^{\frac{2}{3}}} dx$

วิธีทำ

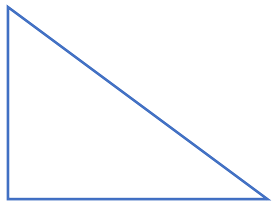
5.2.7 วิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปฟังก์ชันตรรกยะของ $\boldsymbol{\sin x}$ และ $\boldsymbol{\cos x}$

ฟังก์ชันที่ประกอบด้วยจำนวนจำกัดของผลบวกหรือผลต่าง หรือผลคูณ หรือผลหารของ $sin\,x$ และ $cos\,x$ เรียกว่า ฟังก์ชันตรรกยะของ $sin\,x$ และ $cos\,x$ เช่น $\frac{sinx+3cos^2x}{cosx+4sinx}, \frac{sinx}{1-cosx+cos^2x}$

ในการหาปริพันธ์ จะใช้ความรู้ เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$\sin x = 2sin\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)$ และ $\cos x = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

ถ้าให้ $z = tan\left(\frac{x}{2}\right)$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$ จากรูป จะได้



$sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ และ $cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

ดังนั้น $sinx = \frac{2z}{1+z^2}$ และ $cosx = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

จาก $z = tan\left(\frac{x}{2}\right)$ จะได้ $\frac{x}{2} = \arctan z$; $-\pi < x < \pi$

$\therefore x = 2\arctan z \quad \rightarrow \quad dx = \frac{2}{1+z^2}dz$

ดังนั้น ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะของ $sinx$ และ $cosx$ จะเปลี่ยนตัวแปร โดยให้ $z = tan\left(\frac{x}{2}\right)$; $-\pi < x < \pi$ จะได้

$sinx = \frac{2z}{1+z^2}$ $\qquad cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ $\qquad$ และ $\qquad dx = \frac{2}{1+z^2}dz$

ตัวอย่างที่ 28 จงหาคาของ

1. $\int \frac{1}{2sinx-cosx}dx$

วิธีทำ

2. $\int \frac{1}{sinx+tanx}dx$

วิธีทำ

3. $\int \frac{1}{2-\cos(2x)}dx$

วิธีทำ