

บทที่ 4

การเคลื่อนที่ในสองมิติ

(Motion in two dimensions)

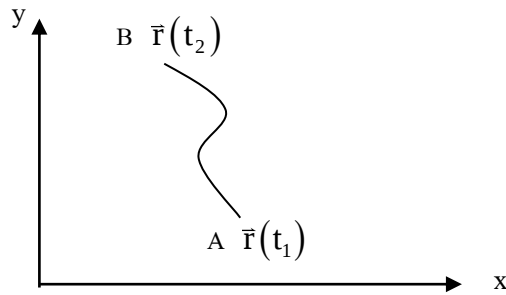
จากบทที่ผ่านมาเราได้ศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงในหนึ่งมิติ ทั้งในแนวราบหรือในแนวตั้ง และการคำนวณหาปริมาณที่เกิดจากการเคลื่อนที่ลักษณะดังกล่าวไปแล้ว สำหรับในบทนี้จะนำการเคลื่อนที่ของทั้งสองแนวแกนมาพิจารณารวมกันในกรณีที่เกิดการเคลื่อนที่ซึ่งเราเรียกว่า การเคลื่อนที่ในสองมิติ การเคลื่อนที่เช่นนี้เราจะพบได้บ่อย ๆ ในชีวิตประจำวัน เช่น ขว้างลูกบาสเกตบอลให้เข้าเป้า การเคลื่อนที่ของเครื่องบินขณะทยานขึ้นบนท้องฟ้า เป็นต้น โดยเราจะพิจารณาปริมาณต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ในสองมิติ รวมทั้งพิจารณาการเคลื่อนที่อีกรูปแบบหนึ่งนั่นคือ การเคลื่อนที่แนววงกลมสม่ำเสมอในช่วงท้ายของบทเรียน และบทปฏิบัติการทดลอง เรื่อง การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ เพื่อช่วยให้เข้าใจการเคลื่อนที่ในแบบสองมิตินี้มากยิ่งขึ้น

4.1 เวกเตอร์ตำแหน่ง (Position vector)

การอธิบายการเคลื่อนที่ในระนาบนั้น สิ่งแรกที่เราจะต้องทราบก่อนก็คือ เราจะต้องรู้ตำแหน่งของวัตถุหรืออนุภาคเสียก่อนว่าวัตถุหรืออนุภาคนั้นอยู่ตำแหน่งใด โดยเราสามารถกำหนดได้ด้วยฟังก์ชันที่เรียกว่า เวกเตอร์บอกตำแหน่ง ซึ่งจะมีทั้งตำแหน่งที่อยู่แนวระดับคือ แกน x และตำแหน่งที่อยู่ในแนวตั้งคือ แกน y เราสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \quad (4-1)$$

เมื่อ $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ในแกน x และแกน y ตามลำดับ พิจารณาวัตถุที่เคลื่อนที่อยู่ในระนาบ xy ดังรูปภาพที่ 4.1 เมื่อเวลา t_1 อนุภาคอยู่ที่ A และมีเวกเตอร์บอกตำแหน่งที่ $\vec{r}(t_1)$ และที่เวลา t_2 อนุภาคเคลื่อนที่มาอยู่ที่จุด B และมีเวกเตอร์บอกตำแหน่งคือ $\vec{r}(t_2)$



ภาพที่ 4.1 ลักษณะการเคลื่อนที่

พิจารณาภาพที่ 4.1 แสดงลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยเราสามารถหาดำแหน่งของอนุภาคที่เคลื่อนที่จาก

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \\
 \vec{r} &= [x(t_2)\hat{i} + y(t_2)\hat{j}] - [x(t_1)\hat{i} + y(t_1)\hat{j}] \quad (4-2) \\
 \vec{r} &= [x(t_2) - x(t_1)]\hat{i} + [y(t_2) - y(t_1)]\hat{j} \\
 \vec{r} &= \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.1 ทางเดินของอนุภาคชนิดหนึ่ง คือ $\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ โดย $x = at^2 + bt$ และ $y(t) = ct + d$ เมื่อ a, b, c, d เป็นค่าคงที่ จงหาการกระจัดของอนุภาคตัวนี้ที่เวลา 1 ถึง 3 วินาที

วิธีทำ จากสมการที่ 4.2 จะได้

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= \vec{r} = x(3)\hat{i} - y(1)\hat{j} + [y(3) - y(1)]\hat{j} \\
 x(3) &= 9a + 3b \quad x(1) = a + b \\
 y(3) &= 3c + d \\
 y(1) &= c + d \\
 \text{ดังนั้นจะได้} \quad \vec{r} &= (8a + 2b)\hat{i} + 2c\hat{j}
 \end{aligned}$$

4.2 ความเร็ว (Velocity)

การหาความเร็วของวัตถุในการเคลื่อนที่แบบสองมิตินั้นจะใช้หลักเดียวกันกับการเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติ นั่นก็คือ

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (4-3)$$

และในขณะเดียวกันก็สามารถที่จะหาความเร็วขณะใดขณะหนึ่งได้จากสมการ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4-4)$$

และเราสามารถหาค่าประกอบของความเร็วได้จาก

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} \quad (4-5)$$

และสามารถที่จะหาขนาดของความเร็วหรืออัตราเร็วได้จาก

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4-6)$$

ตัวอย่างที่ 4.2 หญิงคนหนึ่งกำลังปั่นจักรยาน โดยตำแหน่งของเธอเป็นจุดกำเนิดของพิกัดและพื้นผิวของสนามอยู่ในระนาบ xy หากแทนรถจักรยานด้วยจุดซึ่งมีพิกัด x และ y ที่แปรตามเวลาดังสมการ

$$x = 2\text{m} - (0.25\text{m/s}^2)t^2$$

$$y = (1\text{m/s})t + (0.025\text{m/s}^3)t^3$$

- (ก) จงหาพิกัดของรถและระยะทางที่รถอยู่ห่างจากหญิงคนหนึ่งที่ เวลา 2 วินาที
 (ข) จงหาการกระจัดของรถและเวกเตอร์ความเร็วเฉลี่ยจากเวลา 0 ถึง 2 วินาที
 (ค) จงหาเทอมทั่วไปสำหรับเวกเตอร์ความเร็วขณะหนึ่งของรถและหาความเร็วขณะหนึ่งที่เวลา 2 วินาที ให้เขียนความเร็วขณะหนึ่งในรูปขององค์ประกอบและในรูปของขนาดและทิศทางด้วย

วิธีทำ (ก) หาพิกัดของรถและระยะทางที่รถอยู่ห่างจากหญิงคนหนึ่งที่ เวลา 2 วินาที

$$x = 2\text{ m} - (0.25\text{m/s}^2)(2\text{s})^2 = 1\text{ m}$$

$$y = (1\text{m/s})(2\text{s}) + (0.025\text{m/s}^3)(2\text{s})^3 = 2.2\text{ m}$$

ระยะของรถจากจุดเริ่มต้นที่เวลา 2 วินาที นี้คือ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1.0\text{m})^2 + (2.2\text{m})^2} = 2.4\text{ m}$$

- (ข) หาการกระจัดของรถและเวกเตอร์ความเร็วเฉลี่ยจากเวลา 0 ถึง 2 วินาที

เขียนเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}$ เป็นฟังก์ชันของเวลา t

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= [2\text{m} - (0.25\text{m/s}^2)t^2]\hat{i} \\ &\quad + [(1\text{m/s})t + (0.025\text{m/s}^3)t^3]\hat{j} \end{aligned}$$

ที่เวลา 0 วินาที เวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}_0$ คือ

$$\vec{r}_0 = (2\text{m})\hat{i} + (0\text{m})\hat{j}$$

ที่เวลา 2 วินาที เวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}_2$ คือ

$$\vec{r}_2 = (1\text{m})\hat{i} + (2.2\text{m})\hat{j}$$

ดังนั้นการกระจัดจากเวลา $t=0\text{s}$ ถึง $t=2\text{s}$ คือ

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 = (1\text{m})\hat{i} + (2.2\text{m})\hat{j} - (2\text{m})\hat{i}$$

$$\Delta\vec{r} = (-1\text{m})\hat{i} + (2.2\text{m})\hat{j}$$

ในระหว่างช่วงเวลานี้รถได้เคลื่อนที่ไป 1.0 เมตร ในทิศ $-x$ และ 2.2 เมตร ในทิศ $+y$
ความเร็วเฉลี่ยระหว่างช่วงเวลา 0 ถึง 2 วินาที คือการกระจัดหารด้วยเวลาที่ผ่านไป

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(-1\text{m})\hat{i} + (2.2\text{m})\hat{j}}{2.0\text{s} - 0.0\text{s}}$$

$$\vec{v}_{av} = (-0.5\text{m/s})\hat{i} + (1.1\text{m/s})\hat{j}$$

(ค) องค์ประกอบของความเร็วขณะหนึ่งคืออนุพันธ์ของพิกัดเทียบกับเวลา

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-0.25\text{m/s}^2)(2t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1\text{m/s} + (0.025\text{m/s}^3)(3t^2)$$

ดังนั้นเขียนเวกเตอร์ความเร็วขณะหนึ่ง $\vec{v}$ ได้เป็น

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

$$\vec{v} = (-0.5\text{m/s}^2)t\hat{i} + [1\text{m/s} + (0.075\text{m/s}^3)t^2]\hat{j}$$

ที่เวลา $t=2.0\text{s}$ องค์ประกอบของความเร็วขณะหนึ่ง คือ

$$v_x = (-0.5\text{m/s}^2)(2\text{s}) = -1\text{m/s}$$

$$v_y = 1\text{m/s} + (0.075\text{m/s}^3)(2\text{s})^2 = 1.3\text{m/s}$$

ขนาดของความเร็วขณะหนึ่ง (อัตราเร็ว) ที่ $t=2.0\text{s}$ คือ

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-1.0\text{m/s})^2 + (1.3\text{m/s})^2}$$

$$v = 1.6\text{m/s}$$

ทิศของรถเทียบกับแกน $+x$ หาได้จาก

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1.3\text{m/s}}{-1.0\text{m/s}}\right) = 128^\circ$$

ตัวอย่างที่ 4.3 ทางเดินของเปิดตัวหนึ่งเป็นไปตามสมการ $\vec{r} = (5t^2 + 3t)\hat{i} + (2t^2 + 5t)\hat{j}$

จงหา (ก) ความเร็วของเปิดตัวนี้ที่ เวลา $t=2$ วินาที ถึง 3 วินาที และ (ข) หาค่าความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง ที่เวลา $t=1$ วินาที

วิธีทำ (ก) ความเร็วของเปิดตัวนี้ที่ เวลา $t=2$ วินาทีถึง 3 วินาที

$$\Delta \vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{(64-26)\hat{i} + (33-18)\hat{j}}{3-2}$$

$$\Delta \vec{v} = 38\hat{i} + 15\hat{j}$$

นั่นคือจะได้ความเร็วของเป็ดที่เวลา $t = 2$ วินาทีถึง 3 วินาที

คือ $38\hat{i} + 15\hat{j}$ เมตรต่อวินาที

(ข) หาความเร็วขณะใดขณะหนึ่งที่เวลา $t = 1$ วินาที

จากสมการ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}((5t^2 + 3t)\hat{i} + (2t^2 + 5t)\hat{j})$$

$$\vec{v} = (10t + 3)\hat{i} + (4t + 5)\hat{j}$$

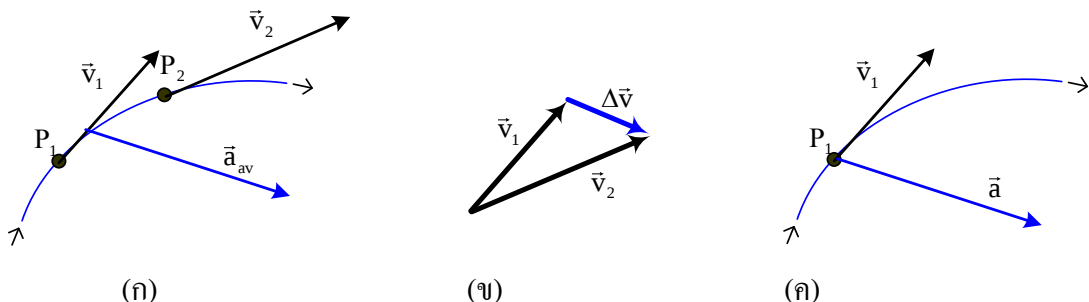
ดังนั้นจะได้ความเร็วที่เวลา $t = 1.0$ s คือ

$$\vec{v} = (10+3)\hat{i} + (4+5)\hat{j}$$

$$= 13\hat{i} + 9\hat{j} \text{ เมตรต่อวินาที}$$

4.3 เวกเตอร์ความเร่ง (Acceleration vector)

พิจารณาลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุดังแสดงในภาพที่ 4.5 วัตถุกำลังเคลื่อนที่เป็นวงโค้ง โดยมีค่าความเร็ว $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ แทนค่าความเร็วซึ่งเป็นปริมาณเวกเตอร์ที่เวลา t_1 เมื่อเริ่มต้นวัตถุอยู่ที่จุด P_1 และที่เวลา t_2 วัตถุเคลื่อนที่ไปอยู่ที่จุด P_2 ความเร็วทั้งสองอาจต่างกันทั้งขนาดและทิศทาง ความเร่งเฉลี่ย $\vec{a}_{av}$ ของวัตถุในขณะวัตถุเริ่มเคลื่อนที่จากจุด P_1 ไปยัง P_2 คือการเปลี่ยนแปลงความเร็ว $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ หาด้วยการเปลี่ยนแปลงเวลา $\Delta t = t_2 - t_1$



ภาพที่ 4.2 (ก) เวกเตอร์ $\vec{a}_{av} = \Delta \vec{v} / \Delta t$ แทนความเร่งเฉลี่ยระหว่าง P_1 และ P_2 (ข) การหาค่า

$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ และ (ค) ความเร่งขณะหนึ่งขณะใด $\vec{a}$ ที่จุด P_1

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (4-7)$$

ความเร่งเฉลี่ยเป็นปริมาณเวกเตอร์ที่มีทิศเดียวกับความเร็ว ดังแสดงในภาพที่ 4.5 (ก) สังเกตว่า $\vec{v}_2$ เป็นผลบวกเวกเตอร์ของความเร็วเดิม $\vec{v}_1$ กับการเปลี่ยนความเร็ว $\Delta \vec{v}$ ดังในภาพที่ 4.5 (ข)

เราเรียกความเร่งขณะใดขณะหนึ่ง ที่จุด P_1 ว่าเป็น ลิมิตของความเร่งเฉลี่ย เมื่อจุด P_2 เคลื่อนเข้าหาจุด P_1 โดยที่ $\Delta \vec{v}$ และ Δt มีค่าเข้าสู่จุดศูนย์กลางทั้งคู่ ความเร่งจะมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วเทียบกับเวลาขณะหนึ่งด้วย เนื่องจากว่าเราไม่สามารถจัดการเคลื่อนที่ให้อยู่เฉพาะในแนวเส้นตรง ความเร่งขณะหนึ่งจึงเป็นปริมาณเวกเตอร์

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4-8)$$

จากภาพจะเห็นได้ว่า $\vec{v}$ มีทิศสัมผัสกับเส้นทางการเคลื่อนที่ แต่ในภาพที่ 4.5(ค) แสดงให้ความเร่งขณะใดขณะหนึ่ง $\vec{a}$ มีทิศชี้เข้าหาด้านโค้งเว้าของเส้นทางเสมอ นั่นคือชี้เข้าหาด้านในการเลี้ยวใดๆ ที่อนุภาคกำลังเลี้ยว เรายังเห็นได้ด้วยว่าเมื่ออนุภาคกำลังเคลื่อนที่ในเส้นทางโค้ง อนุภาคมีความเร่งที่ไม่เป็นศูนย์เสมอ

องค์ประกอบของเวกเตอร์ความเร่งแต่ละองค์ประกอบคืออนุพันธ์เทียบกับเวลาขององค์ประกอบกับความเร็ว

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (4-9)$$

ในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \\ \vec{a} &= \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k} \end{aligned} \quad (4-10)$$

นอกจากนั้น เนื่องจากแต่ละองค์ประกอบของความเร็วคือ อนุพันธ์ของพิกัดที่สมนัยกัน เทียบกับเวลา เราสามารถเขียนองค์ประกอบ a_x , a_y และ a_z ของเวกเตอร์ความเร่ง $\vec{a}$ ว่า

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (4-11)$$

และเขียนเวกเตอร์ความเร่ง $\vec{a}$ เป็น

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k} \quad (4-12)$$

ตัวอย่างที่ 4.4 วัตถุชนิดหนึ่งมีฟังก์ชันของความเร็วเป็น $3t^2\hat{i} - 4t\hat{j}$ จงหา

- ก) ความเร็วที่เวลา $t = 1$ วินาที และ 3 วินาที
- ข) ความเร่งเฉลี่ยที่เวลา $t = 1$ วินาที ถึง 3 วินาที
- ค) ความเร่งที่เวลา $t = 1$ วินาที

วิธีทำ ก) หาคความเร็วที่เวลา $t = 1$ s และ 3 s คือ

ที่เวลา $t = 1$ วินาที $\vec{v} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ เมตรต่อวินาที

ที่เวลา $t = 3$ วินาที $\vec{v} = 27\hat{i} - 12\hat{j}$ เมตรต่อวินาที

- ข) หาคความเร่งที่เวลา $t = 1.0$ วินาทีถึง 3.0 วินาที

$$\Delta \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{a} = \frac{\vec{v}(3) - \vec{v}(1)}{2}$$

$$\Delta \vec{a} = \frac{(27-3)\hat{i}}{2} - \frac{(12-4)\hat{j}}{2}$$

$$\vec{a} = 12\hat{i} - 4\hat{j} \text{ เมตรต่อวินาที}^2$$

- ค) หาคความเร่งที่เวลา $t = 1.0$ วินาที

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(3t^2\hat{i} - 4t\hat{j})$$

$$\vec{a} = 6t\hat{i} - 4\hat{j}$$

นั่นคือที่เวลา $t = 1.0$ s วัตถุมีความเร่ง $\vec{a} = 6\hat{i} - 4\hat{j}$ เมตรต่อวินาที²

4.4 การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ (Projectile motion)

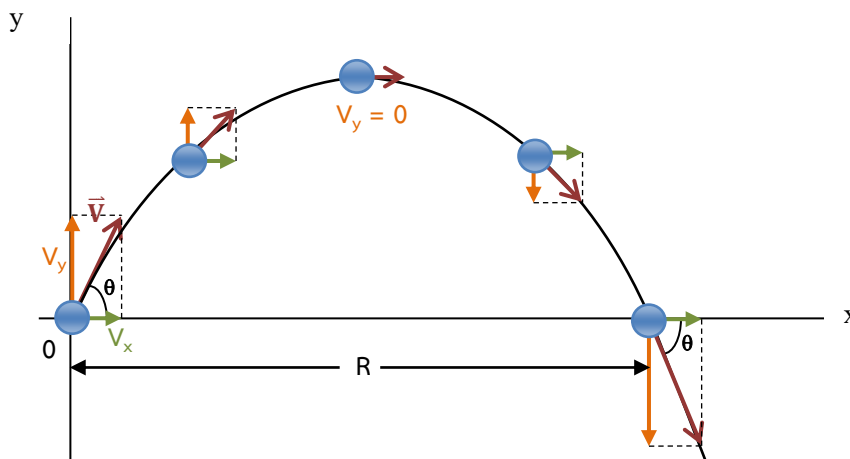
การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ คือการเคลื่อนที่ในสองมิติอีกรูปแบบหนึ่ง โดยลักษณะการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์นี้วัตถุจะเคลื่อนที่เป็นวิถีโค้ง ตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ เช่น การตีกอล์ฟ การนิตสายยางเพื่อรดน้ำต้นไม้ เป็นต้น การวิเคราะห์เส้นทางการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ นั้นจะต้องพิจารณาอยู่ในบริเวณที่ไม่กว้างนัก จนแรงโน้มถ่วงของโลกมีการเปลี่ยนแปลง และจะต้องไม่คิดแรงต้านจากอากาศ เมื่อกำหนดให้พิกัดฉากในแนวนอนเป็นแกน x แนวตั้งเป็นแกน y ความเร่งในแนวแกน x เป็นศูนย์ แรงโน้มถ่วงของโลกกระทำอยู่บนแกน y ส่วนประกอบย่อยตามแกน x และ y ของ ความเร่ง a คือ

$$a_x = 0, \quad a_y = -g \quad (4-13)$$

พิจารณารูปการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ดังภาพที่ 4.3 จากภาพการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์สามารถแยกการพิจารณาออกเป็น 2 แกนคือแกน x และแกน y โดยที่ทั้งสองแกนต้องไม่ขึ้นตรงต่อกัน ในแกน x มีความเร่งเป็นศูนย์ ความเร็วในแนวแกนนี้จึงคงตัว และในแกน y มีความเร่งเท่ากับความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ณ เวลา $t = 0$ วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง (x_0, y_0) จากสมการการเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติบนแกน x แทนค่า v ด้วย v_x , v_0 ด้วย v_{0x} และ a ด้วย a_x ซึ่งเท่ากับศูนย์ จะได้

$$v_x = v_{0x} \quad (4-14)$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \quad (4-15)$$



ภาพที่ 4.3 ลักษณะการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

แทนแบบเดียวกันบนแกน y แทน v ด้วย v_y , v_0 ด้วย v_{0y} และ a ด้วย $-g$ จะได้

$$v_y = v_{0y} - gt \quad (4-16)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4-17)$$

เส้นทางการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์จากภาพที่ 4.3 หากแบ่งช่วงเวลาการเคลื่อนที่ให้เท่ากัน จะสังเกตเห็นตำแหน่งและความเร็วของวัตถุ ณ ช่วงเวลานั้นๆ โดยเฉพาะความเร็วในแนวแกน x (v_x) คงที่ตลอดเส้นทางการเคลื่อนที่ ส่วนความเร็วในแนวแกน y (v_y) เปลี่ยนแปลงเนื่องจากความเร่งโน้มถ่วงของโลก วัตถุที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์มีความเร็วเริ่มต้น v_0 ทำมุม θ_0 กับแกน x ส่วนประกอบย่อยของความเร็วต้น (v_0) ในแนวแกน x (v_{0x}) และแกน y (v_{0y}) คือ

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$$

แทนลงในสมการ (4-14) ถึง (4-17) และให้ $x_0 = y_0 = 0$ จะได้

$$x = (v_0 \cos \theta_0) \times t \quad (4-18)$$

$$y = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4-19)$$

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 \quad (4-20)$$

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt \quad (4-21)$$

สมการ (4.21) ข้างบน สามารถคำนวณหาตำแหน่งและความเร็วของโพรเจกไทล์ ณ เวลา t ใด ๆ ได้ทั้งหมด ขนาดของการกระจัดลัพธ์ r วัดจากจุดตั้งต้น ณ เวลาใด ๆ หาได้จาก

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4-22)$$

อัตราเร็วลัพธ์ของโปรเจกไทล์ คือ

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4-23)$$

มุมของความเร็ว v เทียบกับแกน x คือ

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} \quad (4-24)$$

จากสมการ (4-19) ได้ $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta_0}$ แทน t ลงไปในสมการ (4-19) จะได้

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2 \quad (4-25)$$

v_0 , $\tan \theta_0$, $\cos \theta_0$ และ g ทั้งหมดเป็นค่าคงตัว ดังนั้น สมการบนจะมีรูปแบบเหมือนกับสมการกำลังสองดังนี้

$$y = ax - bx^2$$

a และ b เป็นค่าคงตัว โดย

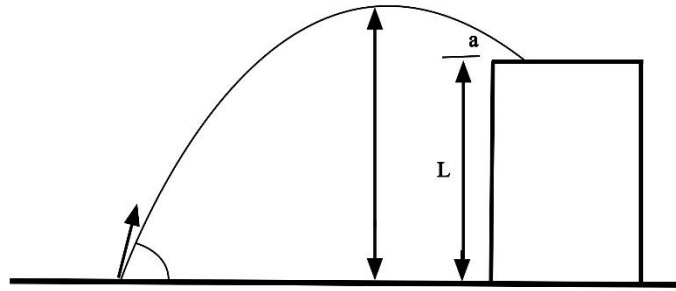
$$a = \tan \theta_0$$

$$b = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0}$$

สมการนี้จึงเป็น สมการรูปพาราโบลา

ตัวอย่างที่ 4.5 จากภาพที่ 4.4 เป็นการขว้างก้อนหินขึ้นไปยังหน้าที่มีความสูงเป็น h ด้วยอัตราเร็วต้น 42 เมตรต่อวินาทีในทิศทางมุม $\theta_0 = 60^\circ$ กับแนวระดับ ถ้าก้อนหินเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ไปตกลงบนหน้าผาที่จุด a ใช้เวลาทั้งสิ้น 5.5 วินาที จงคำนวณหา

- (ก) ความสูงของหน้าผา
- (ข) อัตราเร็วของก้อนหินก่อนกระทบกับหน้าผาที่จุด a
- (ค) ความสูงที่ก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุด



ภาพที่ 4.4 ขว้างก้อนหินไปยังหน้าผาที่มีความสูง h

วิธีทำ (ก) จากสมการที่ (4-18) กำหนดให้ $y = h$ จะได้

$$h = y_0 + v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = 0 + (42.0 \text{ m/s})(\sin 60^\circ)(5.50 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)(5.50 \text{ s})^2$$

$$h = 51.8 \text{ m}$$

หน้าผาสูง 51.8 เมตร

(ข) การเคลื่อนที่ในแนวแกน x (แนวราบ) ความเร็วมีค่าคงตัวตลอดและมีค่าเท่ากับ

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_x = (42.0 \text{ m/s}) \cos 60^\circ = 21 \text{ m/s}$$

ส่วนการเคลื่อนที่ในแนวแกน y (แนวตั้ง) ความเร็วขึ้นอยู่กัค่าแรงโน้มถ่วงของโลก

$$v_y = v_{0y} - g t = v_0 \sin \theta_0 - g t$$

$$v_y = (42.0 \text{ m/s})(\sin 60^\circ) - (9.8 \text{ m/s}^2)(5.50 \text{ s}) = -17.53 \text{ m/s}$$

ดังนั้นอัตราเร็วของก้อนหินก่อนกระทบกับหน้าผาที่จุด A

$$v = \sqrt{(21 \text{ m/s})^2 + (-17.53 \text{ m/s})^2}$$

$$v = 27.4 \text{ m/s}$$

อัตราเร็วของก้อนหินก่อนกระทบหน้าผาเท่ากับ 27.4 เมตรต่อวินาที

(ค) ความสูง ที่ก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุด

$$\text{จาก} \quad v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$$

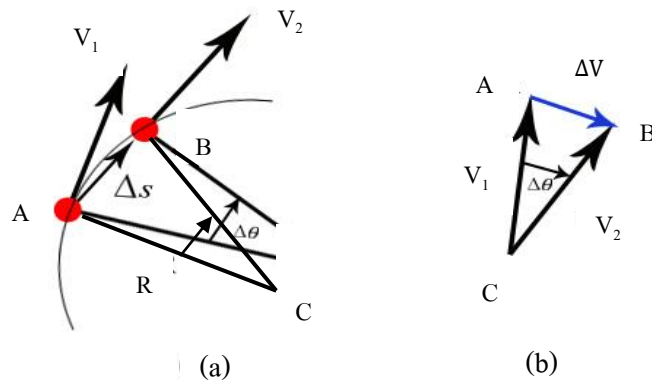
$$0 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(H - 0)$$

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{(v_0 \sin \theta_0)^2}{2g} \\
 &= \frac{(42.0 \text{ m/s})^2 (\sin 60^\circ)^2}{2(9.8 \text{ m/s}^2)} \\
 H &= 67.5 \text{ m}
 \end{aligned}$$

นั่นคือก้อนหินไปได้สูงสุด 67.5 เมตร

4.5 การเคลื่อนที่แบบวงกลม (Circular motion)

การเคลื่อนที่แบบวงกลมคือ การที่วัตถุเคลื่อนที่รอบจุดศูนย์กลางใด ๆ โดยหากพิจารณาการเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอ จะได้ว่าอัตราเร็วของวัตถุนั้นจะมีค่าคงตัว แต่มีทิศทางเปลี่ยนตลอดเวลา ซึ่งจะได้ว่ามีความเร่งเชิงเส้นเป็นศูนย์ จึงเหลือเฉพาะความเร่งในแนวที่ตั้งฉากกับการเคลื่อนที่เท่านั้นที่เปลี่ยนแปลงตลอดเวลา



ภาพที่ 4.5 ลักษณะเคลื่อนที่เป็นวงกลมของวัตถุรอบจุดศูนย์กลาง C

พิจารณาวัตถุที่มีการเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี R รอบจุดศูนย์กลาง C ดังภาพที่ 4.5 ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่จากจุด A ไปจุด B ในช่วงเวลาใดๆ สามเหลี่ยม ABC จากภาพที่ 4.5 (a) และสามเหลี่ยม ABC จากภาพที่ 4.5 (b) จะมีลักษณะเป็นสามเหลี่ยมคล้ายเนื่องจากมีมุมสามมุมเท่ากัน จากหลักของเรขาคณิตลักษณะของสามเหลี่ยมคล้าย จะได้ว่า

$$\frac{\Delta v}{v_1} = \frac{\Delta s}{R}$$

หรือ
$$\Delta v = \frac{v_1}{R} \Delta s \quad (4-26)$$

ความเร่งแนวตั้งฉากเฉลี่ย ในช่วงเวลา Δt คือ

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{v_1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

เนื่องจาก
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

จะได้
$$a = \frac{v^2}{R} \quad (4-27)$$

4.5.1 ความเร่งขณะหนึ่ง (Instantaneous acceleration)

พิจารณาจากภาพที่ 4.5 ความเร่งขณะหนึ่ง ที่จุด A หาได้จากการเลื่อนจุด B เข้าใกล้จุด A จนทั้งสองจุดเกือบเท่ากัน หรือที่เวลา Δt มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จะได้สมการของความเร่งคือ

$$\begin{aligned} a &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \frac{v}{R} \frac{ds}{dt} \end{aligned}$$

เนื่องจาก
$$\frac{ds}{dt} = v$$

จะได้

$$a = \frac{v^2}{R}$$

เนื่องจากทิศของความเร่งมีทิศตั้งฉากกับการเคลื่อนที่หรือมีทิศพุ่งเข้าสู่ศูนย์กลางของการเคลื่อนที่เสมอจึงเรียกความเร่งในการเคลื่อนที่ลักษณะเป็นวงกลมนี้ว่า ความเร่งสู่ศูนย์กลาง (Centripetal acceleration)

ตัวอย่างที่ 4.6 วัตถุชนิดหนึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลมโดยมีรัศมีความโค้งเท่ากับ 2 เมตร ด้วยความเร็ว 10 m/s จงหาความเร่งของอนุภาคนี้อย่างไร

วิธีทำ จากสมการ

$$a = \frac{v^2}{R}$$

จะได้

$$a = \frac{10^2}{2}$$

$$= 25 \text{ m/s}^2$$

4.5.2 แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง (Centripetal acceleration)

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมจะมีแรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมเรียกว่า แรงเข้าสู่ศูนย์กลาง พิจารณาจากสมการของแรง

$$F = ma$$

และจากสมการ

$$a = \frac{v^2}{R}$$

ดังนั้นจะได้

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

ตัวอย่างที่ 4.7 รถบรรทุกคันหนึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยความเร็วคงตัว โดยมีรัศมีของวงกลม 5 เมตร เมื่อเคลื่อนที่ครบ 1 รอบ ใช้เวลา 4 วินาที ความเร่งจะเป็นเท่าไร

วิธีทำ ความเร็วหาได้จาก ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ครบวง หาค่าด้วยคาบเวลา T

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$= \frac{2\pi (5\text{m})}{4\text{s}}$$

$$= 7.85 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

ความเร่งสู่ศูนย์กลาง

$$a = \frac{v^2}{R}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(7.85 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{5.0 \text{ m}} \\
 &= 12.3 \text{ เมตรต่อวินาที}^2
 \end{aligned}$$

บทสรุป

การเคลื่อนที่ในสองมิติคือ การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นที่ประกอบไปด้วยการเคลื่อนที่ทั้งแนวแกน x และแนวแกน y ตัวอย่างของการเคลื่อนที่ในสองมิติที่เห็นง่ายที่สุดคือ การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ โดยปัจจัยที่มีผลต่อการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์คือ ความเร็วเริ่มต้นที่ทำมุมกับแนวระดับหรือแกน x การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์จะมีความเร่งในแนวระดับเป็นศูนย์ แต่มีความเร่งคงตัวตามแนวดิ่งหรือแกน y ซึ่งมีค่าเท่ากับความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกในกรณีนี้ อีกรูปแบบหนึ่งของการเคลื่อนที่ในบทนี้คือ การเคลื่อนที่แนววงกลมสม่ำเสมอ ซึ่งมีลักษณะของการเคลื่อนที่มากกว่าสองมิติ การเคลื่อนที่แนววงกลมสม่ำเสมอนี้จะมีความเร่งที่มีค่าคงตัวในทิศตั้งฉากกับแนวการเคลื่อนที่ เรียกว่าความเร่งในแนวเข้าสู่ศูนย์กลาง ซึ่งเกิดจากการเปลี่ยนแปลงทิศทางของความเร็วตลอดเวลา แต่มีขนาดของความเร็วคงตัว

กิจกรรมการทดลอง

แบบบันทึกกิจกรรมการทดลอง

การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

วันที่.....เดือนพ ศ 25.....สาขาวิชา..... กลุ่มเรียน

ผู้ร่วมงานรหัส

ผู้ร่วมงานรหัส

ผู้ร่วมงานรหัส

ผู้ร่วมงานรหัส

ผู้ร่วมงานรหัส

วัตถุประสงค์

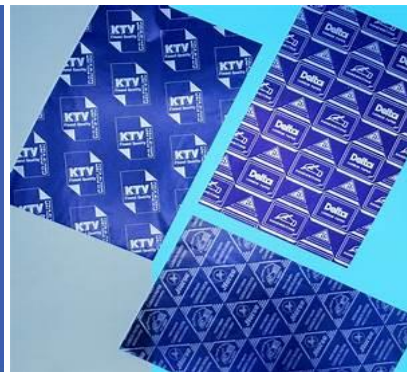
1. เพื่อศึกษาลักษณะการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์
2. เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดในแนวระดับและการกระจัดในแนวดิ่งได้

วัสดุและอุปกรณ์การทดลอง

ประกอบด้วย แผ่นไม้ที่มีกราฟติดกับรางเหล็ก และลูกเหล็กดังรูปที่ 1 (ก) และกระดาศคาร์บอน ดังภาพที่ 4.6 (ข)



(ก)



(ข)

ภาพที่ 4.6 ชุดอุปกรณ์การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ (ก) และ (ข)

วิธีการทดลอง

1. ติดกระดาษกราฟลงบนแผ่นไม้ และนำแผ่นอลูมิเนียมที่ติดกระดาษสีขาวทับบนกระดาษคาร์บอนแล้วมาหนีบกระดาษกราฟให้ติดกับแผ่นไม้ (อาจใช้เทปกาวช่วยในการติดกระดาษ) ดังภาพที่ 4.6 (ก)

2. เลื่อนแผ่นอลูมิเนียมมาที่ตำแหน่ง x ค่าต่าง ๆ โดยเริ่มจากจุดที่ใกล้กับปลายของรางลูกอลูมิเนียมมากที่สุดก่อน
3. นำลูกกลมโลหะปล่อยที่ปลายด้านบนสุดของรางอลูมิเนียม ให้ลูกกลมโลหะกลิ้งมากระทบแผ่นกั้นอลูมิเนียม จากนั้นทำการบันทึกรอยจุดบนกระดาษที่แผ่นอลูมิเนียมให้ตรงกับตำแหน่งในกระดาษกราฟ บันทึกค่าพิกัด (x,y) ที่ได้บนกระดาษกราฟลงในตารางบันทึกผล
4. ทำการทดลองซ้ำ โดยเปลี่ยนตำแหน่งของแผ่นอลูมิเนียม
5. ลากเส้นโค้งที่ได้บนกระดาษกราฟ
6. เขียนกราฟระหว่าง y กับ x^2 เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของกราฟที่ได้

ผลการทดลอง

จุดที่	x (cm)	x^2 (cm)	y (cm)

การวิเคราะห์ผลการทดลอง

ตอนที่ 1

กระดาษกราฟแสดงเส้นโค้งการเคลื่อนที่ในสองมิติ

ตอนที่ 2

กราฟระหว่าง y กับ x^2

สรุปผลการทดลอง

.....

.....

.....

.....

คำถามท้ายกิจกรรม

1. เพราะเหตุใดการทดลองนี้จึงต้องปล่อยลูกกลมโลหะจากตำแหน่งเดียวกันทุกครั้ง
.....
2. แนวการเคลื่อนที่ของลูกกลมโลหะจากกระดานกราฟบนเป็นไม่มีลักษณะอย่างไร
.....
3. จากกราฟระหว่างการกระจัดในแนวดิ่ง y กับกำลังสองของการกระจัดในแนวระดับ x^2
จะสามารถสรุปลักษณะการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ได้อย่างไร
.....
4. ค่าความเร็วในแนวดิ่งและแนวระดับที่ตำแหน่งต่าง ๆ ของโปรเจกไทล์เป็นอย่างไร
.....

แบบฝึกหัด

1. มดตัวหนึ่งกำลังเคลื่อนที่และมีพิกัด x และ y เป็น (1.1 เมตร, 3.4 เมตร) ที่ $t_1 = 0$ s และมีพิกัด (5.3 เมตร, - 0.5 เมตร) ที่ 3.0 วินาที สำหรับช่วงเวลานี้จงหา (ก) องค์ประกอบของความเร็วเฉลี่ย (ข) ขนาดและทิศของความเร็วเฉลี่ย
2. สมชายกำลังเคลื่อนที่ไปข้างหน้าโดยเขามีตำแหน่งเปลี่ยนตามเวลาเป็นไปตามสมการ $\vec{r} = [4\text{cm} + (2.5\text{cm/s}^2)t^2]\hat{i} + (5\text{cm/s})t\hat{j}$ (ก) จงหาขนาดและทิศของความเร็วเฉลี่ยของจุดระหว่าง เวลา 0 วินาที และ 2 วินาที (ข) จงหาขนาดและทิศของความเร็วขณะหนึ่งที่เวลา 0 วินาที 1 วินาที และ 2 วินาที
3. จรวดลำหนึ่งกำลังบินอยู่ที่ระดับสูง ที่ $t_1 = 0$ s ถ้าจรวดลำนี้มีองค์ประกอบความเร็ว $v_x = 90\text{m/s}$, $v_y = 110\text{m/s}$ ที่ $t_2 = 30$ s มีองค์ประกอบความเร็วคือ $v_x = -170\text{m/s}$, $v_y = 40\text{m/s}$ (ก) จงคำนวณหาองค์ประกอบของความเร่งเฉลี่ย (ข) ขนาดและทิศของความเร่งเฉลี่ย
4. กระต่ายตัวหนึ่งซึ่งกำลังวิ่งอยู่ในทุ่งกว้างมีองค์ประกอบความเร็วเป็น $v_x = 2.6\text{m/s}$, $v_y = -1.8\text{m/s}$ ที่ $t_1 = 10$ s สำหรับช่วงเวลามาจาก $t_1 = 10$ s ถึง $t_2 = 20$ s ความเร่งเฉลี่ยของสุนัขมีขนาด 0.45m/s^2 และมีทิศ 31° วัดจากแกน $+x$ เข้าหาแกน $+y$ ที่ $t_2 = 20$ s (ก) จงหาองค์ประกอบตามแกน x และ y ของความเร็วของกระต่าย (ข) ขนาดและทิศของความเร็วของกระต่ายมีค่าเท่าใด
5. สมุดเล่มหนึ่งไถลหลุดจากพื้นโต๊ะระดับด้วยอัตราเร็ว 1.1 m/s และตกกระทบพื้นห้องในเวลา 0.35 s ถ้าไม่มีการคิดแรงต้านอากาศ จงหา (ก) ความสูงของพื้นโต๊ะจากพื้นห้อง (ข) ระยะตามแนวระดับจากขอบโต๊ะไปยังจุดที่สมุดกระทบพื้นห้อง และ (ค) องค์ประกอบตามแนวนอนและแนวตั้งของความเร็วของหนังสือและขนาดและทิศของความเร็วสมุดก่อนที่จะกระทบพื้นห้องพอดี
6. ลูกบอลลูกหนึ่งกำลังตกจากขอบโต๊ะซึ่งสูง 0.75 เมตร เหนือพื้นและตกกระทบพื้นห้องที่จุดห่างอยู่ในอากาศ (ข) จงหาขนาดของความเร็วต้น (ค) จงหาขนาดทิศของความเร็วของลูกบอลก่อนที่จะตกกระทบพื้นพอดี
7. ยิงดอกไม้วีไฟออกไปด้วยอัตราเร็วต้น 120 กิโลเมตร ถ้ายิงดอกไม้วีไฟออกไปทำมุม 55° เหนือแนวระดับ ตำแหน่งตามแนวระดับของดอกไม้วีไฟจะเป็นเท่าไร ไม่ต้องคำนึงถึงแรงต้านอากาศ

เอกสารอ้างอิง

ก่องกัญจน์ ภัทรากาญจน์ และชนกาญจน์ ภัทรากาญจน์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2552).

ฟิสิกส์ 1 ตัวอย่างและโจทย์พร้อมคำเฉลย. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

คณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2549). **ฟิสิกส์ 1.** กรุงเทพฯ:

สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เชิญโชค ศรีขวัญ และคณะ, มหาวิทยาลัยมหิดล. (2546). **ฟิสิกส์ทั่วไป 1.** กรุงเทพฯ: คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล.

ทวี นิมอ้อย, มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์. (2541). **ฟิสิกส์พื้นฐานระดับมหาวิทยาลัย 1.**

กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

ปรเมษฐ์ ปัญญาเหล็ก, มหาวิทยาลัยศรีปทุม. (2553). **ปฏิบัติการฟิสิกส์ 1.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยศรีปทุม.

สุชาติ สุภาพ, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี. (2558). **ฟิสิกส์ทั่วไป.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ทริปเพิ้ล เอ็ดดูเคชั่น.

Raymond A. Serway, & Chris Vuille. **College Physics 10nd ed.** CT, USA: Cengage Learning, 2015.

Halliday, D., Resnick, R. & Walker, J. **Fundamentals of Physics 10th ed.** Boston: John Wiley and Sons, 2007.

Serway, R. A., and Jewett, J. W. **Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics 9th ed.** Belmont: Brooks/Cole-Thomson Learning, 2014.

Serway, R.A., Vuille, C., and Hughes, J., **College Physics 10th ed.** Stamford: Cengage Learning, 2015.

Thornton, T.S., and Rex, A., **Modern Physics for Scientists and Engineers 4th ed.** Boston: Brooks/Cole- Cengage Learning, 2013.

Young, H.D., and Freedman, R.A., **Sear's & Zemansky's University Physics with Modern Physics 14th ed.** Essex: Pearson Education Limited, 2016.