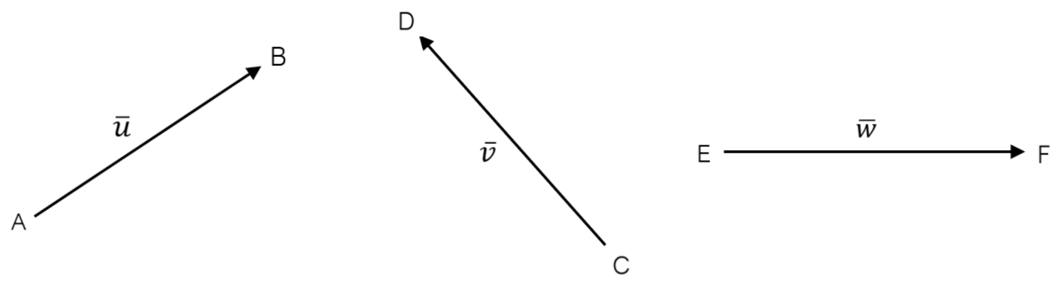
บทที่ 5 เวกเตอร์

5.1 **การบอกปริมาณ** (Quantity) การบอกปริมาณต่างๆสามารถบอกได้ 2 รูปแบบด้วยกัน

1. **บอกขนาดอย่างเดียว** เรียกการบอกปริมาณแบบนี้ว่า สเกลาร์ หรือปริมาณสเกลาร์ (Scalar quantity) เช่น ความสูง น้ำหนัก ปริมาตร อุณหภูมิ เป็นต้น

2. **บอกขนาดและทิศทาง** เรียกการบอกแบบนี้ว่า เวกเตอร์ หรือปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantity) เช่น ความเร็ว ความเร่ง แรงโมเมนตัม เป็นต้น

เวกเตอร์ในระนาบนั้น ในการศึกษาใช้ส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางกำกับ โดยอาศัยลูกศรประกอบเข้ากับเส้นตรง เป็นตัวบอกทิศทาง ดังเช่น เวกเตอร์ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ ในรูปภาพ



ในส่วนของเส้นตรง AB , CD , EF แทนเวกเตอร์ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ เขียนเป็นสัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{CD} = \bar{v}$, $\overrightarrow{EF} = \bar{w}$ ความยาวของเส้นตรงแต่ละเส้นตรงแต่ละเส้นแทนขนาดของ vector

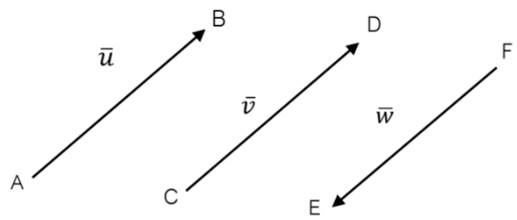
$\overrightarrow{AB}$ เรียกว่า เวกเตอร์ AB , $\overrightarrow{CD}$ เรียกว่า เวกเตอร์ CD , $\overrightarrow{EF}$ เรียกว่า เวกเตอร์ EF

พิจารณาเฉพาะ $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$

A เรียกว่า จุดเริ่มต้น (Initial point) ของ $\overrightarrow{AB}$, B เรียกว่า จุดสิ้นสุด (Terminal point) ของ $\overrightarrow{AB}$ขนาดของ $\overrightarrow{AB}$ เขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $|\overrightarrow{AB}|$ หรือ $|\bar{u}|$ หรือ $|\vec{u}|$

5.2 เวกเตอร์ขนานกัน

เวกเตอร์ตั้งแต่ 2 เวกเตอร์ขึ้นไปที่มีทิศทางเดียวกัน หรือตรงข้ามกัน เรียกเวกเตอร์เหล่านี้ว่า เวกเตอร์ขนานกัน

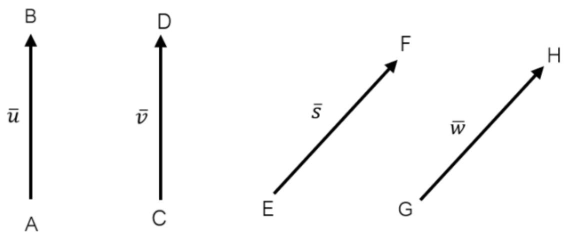


เช่น $\overrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overrightarrow{CD}$ และขนานกับ $\overrightarrow{FE}$

หรือ $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ และขนานกับ $\bar{w}$

5.3 เวกเตอร์เท่ากัน

คือ เวกเตอร์ใดๆที่มีทิศทางเดียวกันและมีขนาดเท่ากันด้วย

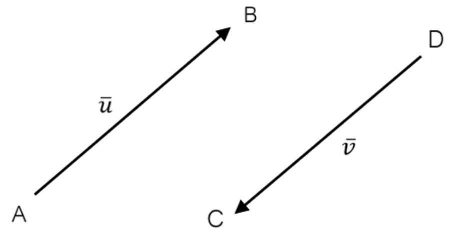


จากรูป $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ หรือ $\bar{u} = \bar{v}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$ หรือ $\bar{s} = \bar{w}$

5.4 **นิเสธของเวกเตอร์**

นิเสธของ $\overrightarrow{AB}$ ใดๆ เขียนแทนด้วย $-\overrightarrow{AB}$ ซึ่งหมายถึง เวกเตอร์ ที่มีขนาดเท่ากับ $|\overrightarrow{AB}|$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{AB}$



เช่น $\overrightarrow{AB}$ เป็นนิเสธของ $\overrightarrow{DC}$

หรือ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC}$

$$\bar{u} = -\bar{v}$$

5.5 **เวกเตอร์ศูนย์** (Zero vector)

คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 0 เขียนแทนด้วย $\bar{0}$

จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของ $\bar{0}$ เป็นจุดๆเดียวกัน นิเสธของ $\bar{0}$ คือ $\bar{0}$, นั่นคือ $\bar{0}$ คือ $-\bar{0}$

ตัวอย่างที่ 5.1 $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

จงหา

1) เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$

2) เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AD}$

3) เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{BC}$

4) เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{CD}$

5) เวกเตอร์ใดบ้างที่ขนานกับ $\overrightarrow{CD}$

6) เวกเตอร์ใดบ้างที่เท่ากับ $\overrightarrow{CD}$

7) เวกเตอร์ใดบ้างที่เป็นนิเสธกับ $\overrightarrow{BC}$

แนวคิด 1. เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ $\overrightarrow{DC}$

2. เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AD}$ คือ $\overrightarrow{BC}$

3. เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{BC}$ คือ $\overrightarrow{CB}$ และ $\overrightarrow{DA}$

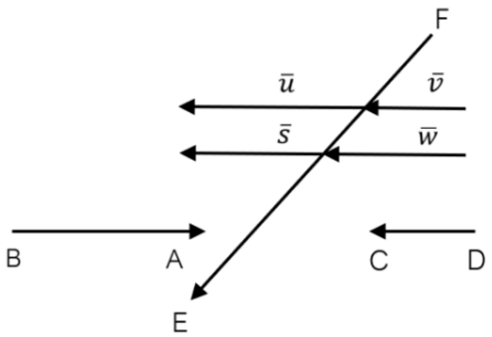
4. เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{CD}$ คือ $\overrightarrow{DC}$ และ $\overrightarrow{AB}$

5. เวกเตอร์ที่มีทิศทางขนานกับ $\overrightarrow{CD}$ คือ $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$

6. เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\overrightarrow{CD}$ คือ $\overrightarrow{BA}$

7. เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกับ $\overrightarrow{BC}$ คือ $\overrightarrow{CB}$ และ $\overrightarrow{DA}$

ตัวอย่างที่ 5.2 จากรูป



จงหา

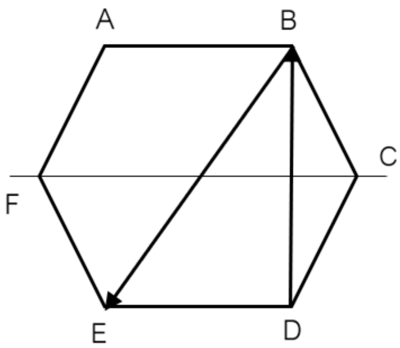
1. เวกเตอร์ใดบ้างที่มีทิศทางเดียวกัน
2. เวกเตอร์ใดบ้างที่มีทิศทางตรงข้ามกัน
3. เวกเตอร์ใดบ้างที่เท่ากัน

แนวคิด เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกันคือ $\overrightarrow{DC}$,$\bar{u}$,$\bar{v}$,$\bar{w}$,$\bar{s}$

เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{BA}$ คือ $\overrightarrow{DC}$,$\bar{u}$,$\bar{v}$,$\bar{w}$,$\bar{s}$

เวกเตอร์ที่เท่ากันคือ $\bar{s}$ กับ $\bar{w}$

ตัวอย่างที่ 5.3 เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าจากรูป



จงหา

1. เวกเตอร์ที่เป็นตัวแทนของ $\overrightarrow{AB}$
2. เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\overrightarrow{BC}$
3. เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\overrightarrow{BE}$
4. นิเสธของ $\overrightarrow{DB}$
5. นิเสธของ $\overrightarrow{AB}$

แนวคิด 1. เวกเตอร์ที่เป็นตัวแทนของ $\overrightarrow{AB}$ ได้คือ $\overrightarrow{ED}$

2. เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\overrightarrow{BC}$ คือ $\overrightarrow{FE}, -\overrightarrow{EF}$

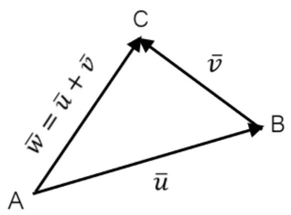
3. เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\overrightarrow{BE}$ คือ $-\overrightarrow{EB}$

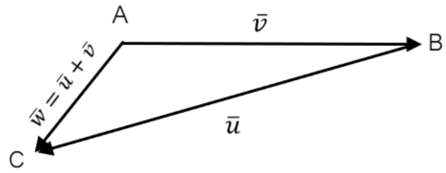
4. นิเสธของ $\overrightarrow{DB}$ คือ $\overrightarrow{BD}$

5. นิเสธของ $\overrightarrow{AB}$ คือ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}$

5.6 การบวกเวกเตอร์ การบวกเวกเตอร์สองเวกเตอร์มีหลักดังนี้

1. ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ จุดเริ่มต้นของ $\bar{v}$ เป็นจุดเดียวกันกับจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ แล้ว $\bar{u} + \bar{v}$ คือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และมีจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$



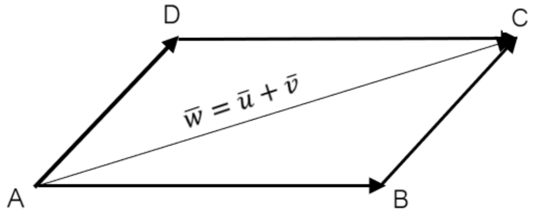


$\bar{w}$ เป็นผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ $\quad \bar{w} = \bar{u} + \bar{v} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

หมายเหตุ $\bar{u}$, $\bar{v}$ มีทิศทางวนตามกัน แต่ $\bar{w}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

2. ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน แล้วผลบวกของ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$หาได้จาก "ขนาดของ $\bar{w}$ ซึ่งเป็นเส้นทแยง ข ของ ซึ่งมีขนาดของ $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นด้านประชิด" จุดเริ่มต้นของ $\bar{w}$ คือจุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ และจุดสิ้นสุดของ $\bar{w}$ คือจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เช่นกัน

พิจารณารูปภาพประกอบ

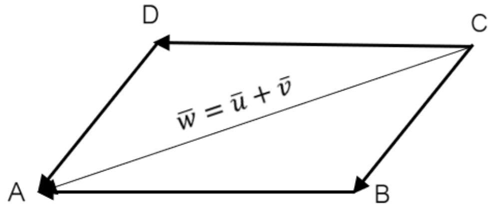


$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

แต่ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$



$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$

แต่ $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

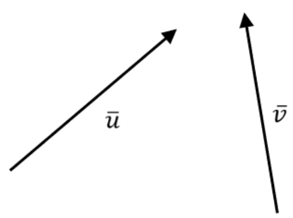
$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

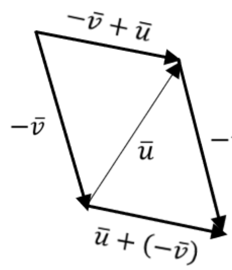
$\therefore \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$

5.7 การลบเวกเตอร์

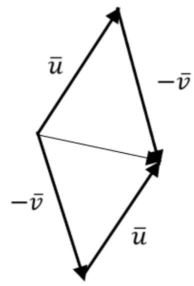
ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ แล้ว $\bar{u} - \bar{v} = \bar{u} + (-\bar{v})$ หรือ $\bar{u} - \bar{v}$ เท่ากับ $\bar{u}$ บวกกับนิเสธของ $\bar{v}$

พิจารณารูปภาพประกอบ





รูปแบบการบวกที่ 1



รูปแบบการบวกที่ 2

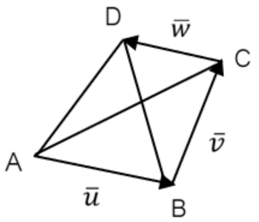
$$
\begin{aligned}
\bar{u} - \bar{v} &= \bar{u} + (-\bar{v}) \\
&= (-\bar{v}) + \bar{u}
\end{aligned}
$$

5.8 คุณสมบัติของการบวกเวกเตอร์

ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

1. $\bar{u} + \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ คุณสมบัติปิด
2. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$ คุณสมบัติการสลับที่
3. $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$ คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
4. $\bar{0} + \bar{u} = \bar{u} + \bar{0}$ เมื่อ $\bar{0}$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์ คุณสมบัติการมีเอกลักษณ์
5. สำหรับทุกๆ $\bar{u}$ จะมี $-\bar{u}$ ซึ่ง $(-\bar{u} + \bar{u}) = \bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$ คุณสมบัติมีอินเวอร์ส

ตัวอย่างที่ 5.4 ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมใดๆ ให้หาผลรวมของเวกเตอร์ต่อไปนี้



1. $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD}$
2. $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right)$
3. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$

แนวคิด 1. $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

$\therefore \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

2. $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \bar{0}$

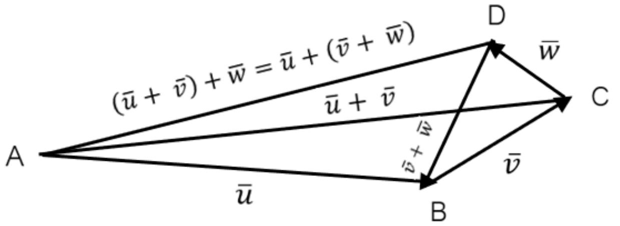
$\therefore \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) = \bar{0}$

3. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

ตัวอย่างที่ 5.5 ให้ ABCD เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่ง $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{BC} = \bar{v}$, $\overrightarrow{CD} = \bar{w}$

จงพิสูจน์ $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$



แนวคิด ในการพิสูจน์ $\bar{u} + \bar{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ....(1)

และ $\bar{v} + \bar{w} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$

$\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ ....(2)

$\therefore$ จาก (1) และ (2) $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

ตัวอย่างที่ 5.6 จงแสดงว่า $-(\bar{u}+\ \bar{v})=-\bar{u}-\bar{v}$

แนวคิด พิจารณา $(-\bar{u}-\bar{v})+(\bar{u}+\ \bar{v})=[(-\bar{u})+(-\bar{v})]+(\bar{u}+\ \bar{v})$

$=(-\bar{u})+[(-\bar{v})+(\bar{u}+\ \bar{v})]$ การจัดกลุ่มการบวก

$=(-\bar{u})+[(-\bar{v})+(\bar{v}+\ \bar{u})]$ การสลับที่การบวก

$=(-\bar{u})+[(-\bar{v}+\bar{v})+\bar{u}]$ การจัดกลุ่มการบวก

$=(-\bar{u})+[\bar{0}+\bar{u}]$ อินเวอร์สการบวก

$=(-\bar{u})+\bar{u}$ เอกลักษณ์การบวก

$=\bar{0}$ เอกลักษณ์การบวก

$\therefore (-\bar{u}-\bar{v})+(\bar{u}+\ \bar{v})=\bar{0}$

แต่ $-(\bar{u}+\ \bar{v})+(\bar{u}+\ \bar{v})=0$ อินเวอร์สการบวก

$\therefore (-\bar{u}-\bar{v})+(\bar{u}+\ \bar{v}) \quad =-(\bar{u}+\ \bar{v})+(\bar{u}+\ \bar{v})$

นั่นคือ $-\bar{u}-\bar{v} \quad =-(\bar{u}+\ \bar{v})$

หรือ $-(\bar{u}+\ \bar{v}) \quad =-\bar{u}-\bar{v}$

5.9 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ a เป็นเลขจำนวนจริง

1. ถ้า $a>0$ แล้ว $a\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด $a\,|\bar{u}|$ มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$
2. ถ้า $a<0$ แล้ว $a\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด $a\,|\bar{u}|$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$
3. ถ้า $a=0$ แล้ว $a\bar{u}=\bar{0}$
4. $a(\bar{u}+\bar{v})=a\bar{u}+a\bar{v}$ เมื่อ $\bar{u}\neq 0\,,\bar{v}\neq 0$ และ $a\neq 0$
5. ถ้า $a,b\in R\,,\bar{u}\neq 0\,,\bar{v}\neq 0\,,\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$ และ $a\bar{u}+b\bar{v}=\bar{0}$

   แล้ว $a=0$ และ $b=0$

เช่น $5(6v) \;=\; 30v$

$$-2(5\bar{v}) \;=\; -10\bar{v}$$
$$3(2\bar{v}+\bar{u}) \;=\; 6\bar{v}+3\bar{u}$$
$$3(2\bar{v}-\bar{u}) \;=\; 6\bar{v}+3(-\bar{u}) \;=\; 6\bar{v}-3\bar{u}$$
$$8\bar{w} \;=\; 5\bar{w}+3\bar{w}$$

ตัวอย่างที่ 5.7 จงหาความยาวของเส้นมัธยฐานของ Δ ใดๆ

แนวคิด ให้ AO เป็นเส้นมัธยฐานของ ΔABC

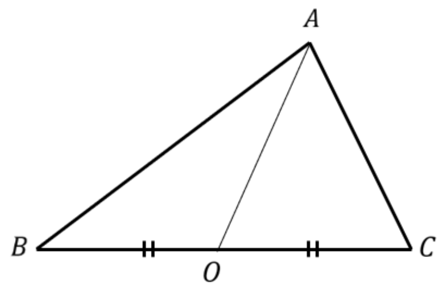
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \qquad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$= 2\overrightarrow{AO} + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BO}\right) = 2\overrightarrow{AO}$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$$

$$\left|\overrightarrow{AO}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right|$$



ตัวอย่างที่ 5.8 กำหนด $|\bar{u}| = 13$, $|\bar{v}| = 2$, $|\bar{u} + \bar{v}| = 14$ จงหา $2\,\bar{u}\,\bar{v}$

แนวคิด $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = (\bar{u} + \bar{v})(\bar{u} + \bar{v})$

$$(14)^2 = \bar{u}\bar{u} + 2\bar{u}\bar{v} + \bar{v}\bar{v}$$

$$196 = |\bar{u}|^2 + 2\bar{u}\bar{v} + |\bar{v}|^2$$

$$196 = 169 + 2\bar{u}\bar{v} + 4$$

$$2\bar{u}\bar{v} = 23$$

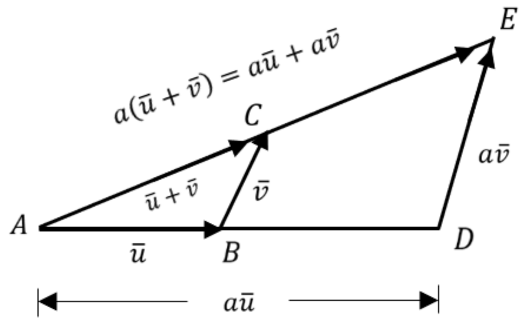
ตัวอย่างที่ 5.9 จงแสดงว่า $a(\bar{u}+\bar{v}) = a\bar{u}+a\bar{v}$

แนวคิด ถ้า $a > 0$ จากรูป $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{BC} = \bar{v}$ (ใน ΔABC)

$\therefore \bar{u}+\bar{v} = \overrightarrow{AC}$

ต่อ AB ออกไปถึง D ให้ AD ยาวเท่ากับ $a\bar{u}$ ลาก DE // BC ลาก AC ต่อออกไปตัดกับ DE ที่ E

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADE$ จะได้ว่า ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากัน ย่อมเป็นสัดส่วนต่อเนื่องกัน



จะได้ $\overrightarrow{DE} = a\bar{v}$ และ $\overrightarrow{AE} = a(\bar{u}+\bar{v})$ ………………. (1)

แต่ $a\bar{u}+a\bar{v} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ (ใน ΔADE)

$\therefore \overrightarrow{AE} = a\bar{u}+a\bar{v}$ ………………. (2)

นั่นคือ $a(\bar{u}+\bar{v}) = a\bar{u}+a\bar{v}$ (จาก (1), (2))

ถ้า $a < 0$ จากรูป $\bar{u}+\bar{v} = \overrightarrow{AC}$ (ใน ΔABC)

โดยการสร้างรูปช่วยเหมือนกับการพิสูจน์ตอนแรกที่กล่าวมา

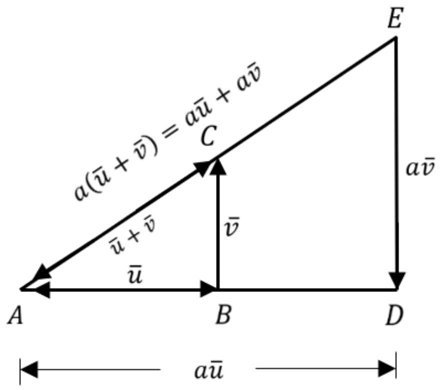
จะได้ $a(\bar{u}+\bar{v}) = a\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EA}$ …………….. (3)

แต่ $a\bar{u}+a\bar{v} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA}$ …………….. (4)

นั่นคือ $a(\bar{u}+\bar{v}) = a\bar{u}+a\bar{v}$ (จาก (3), (4))

ถ้า $a = 0$ $a\bar{u} = 0$, $a\bar{v} = \bar{0}$ และ $a(\bar{u}+\bar{v}) = \bar{0}$

นั่นคือ $a(\bar{u}+\bar{v}) = a\bar{u}+a\bar{v}$



$\therefore a(\bar{u}+\bar{v})=a\bar{u}+a\bar{v}$ ทุกค่าของ a ที่เป็นจำนวนจริง

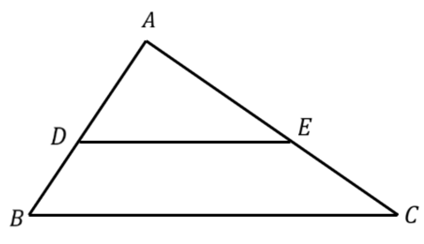
5.10 การใช้เวกเตอร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทในเรขาคณิต

เวกเตอร์ช่วยในการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิตบางบทให้ง่ายแก่การทำความเข้าใจและง่ายต่อการพิสูจน์

ตัวอย่างที่ 5.10 จงพิสูจน์ว่าถ้าลากเส้นตรงจากจุดกึ่งกลางของด้านหนึ่งของสามเหลี่ยม ให้ขนานกับอีกด้านหนึ่ง ไปตัดด้านที่เหลือ ย่อมแบ่งครึ่งด้านที่เหลือ

แนวคิด ของการพิสูจน์ ให้ ABC เป็น Δ Dเป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB ลาก DE ขนานกับ BC

ตัด AC ที่ E



จะต้องพิสูจน์ว่า E เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

เนื่องจาก $\overrightarrow{DE}$ ขนานกับ $\overrightarrow{BC}$ ให้ $\overrightarrow{DE}=a\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{EA}$ ขนานกับ $\overrightarrow{CA}$ ให้ $\overrightarrow{EA}=b\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{DA}$ ขนานกับ $\overrightarrow{BA}$ ให้ $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

แต่ $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{CA}$

และ $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{CA}$ .... (1)

เห็นได้ว่า $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{CA}$

$\therefore \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 2a\,\overrightarrow{BC} + 2b\,\overrightarrow{CA}$ หรือ $(2a-1)\overrightarrow{BC} + (2b-1)\overrightarrow{CA} = \bar{0}$

แต่ $\overrightarrow{BC} \neq 0$, $\overrightarrow{CA} \neq 0$ และ $\overrightarrow{BC}$ ไม่ขนานกับ $\overrightarrow{CA}$

$\therefore 2a - 1 = 0$ ได้ $a = \frac{1}{2}$ และ $2b - 1 = 0$ ได้ $b = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

นั่นคือ E เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

ตัวอย่างที่ 5.11 ถ้า O เป็นจุดตัดของเส้นมัธยฐานของ ΔABC แล้ว $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$

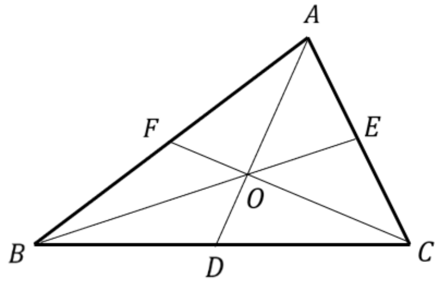
แนวคิด เนื่องจาก $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$

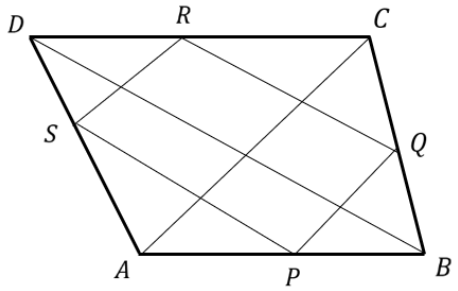
$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

ในทำนองเดียวกันอาจแสดงได้ว่า $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ และ $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$



$\therefore \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \bar{0}$

ตัวอย่างที่ 5.12 กำหนด P, Q, R และ S เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC, CD และ DA ของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $PQRS$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน



แนวคิด ในการพิสูจน์

เนื่องจาก $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ และ $\overrightarrow{PQ} \,//\, \overrightarrow{AC}$

นั่นคือ $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ และ $\overrightarrow{SR} \,//\, \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ}$ และ $\overrightarrow{SR} \,//\, \overrightarrow{PQ}$ ด้วย ………………. (1)

และเนื่องจาก $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ และ $\overrightarrow{QR} \,//\, \overrightarrow{BD}$ นั่นคือ $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ และ $\overrightarrow{PS} \,//\, \overrightarrow{BD}$

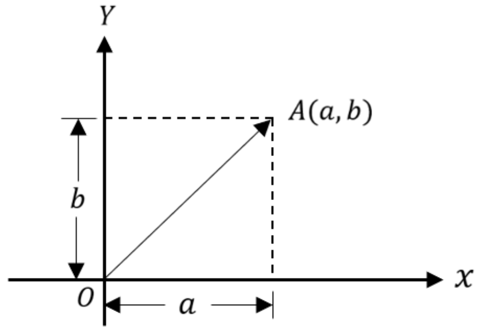
$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ และ $\overrightarrow{PS} \,//\, \overrightarrow{QR}$ ด้วย ……………….. (2)

นั่นคือ $\overrightarrow{PS}$ ขนาน $\overrightarrow{QR}$ และเท่ากัน , $\overrightarrow{PQ}$ ขนาน $\overrightarrow{SR}$ และเท่ากัน

ดังนั้น $PQRS$ เป็นด้านขนาน

5.11 เวกเตอร์ในระบบมุมฉาก

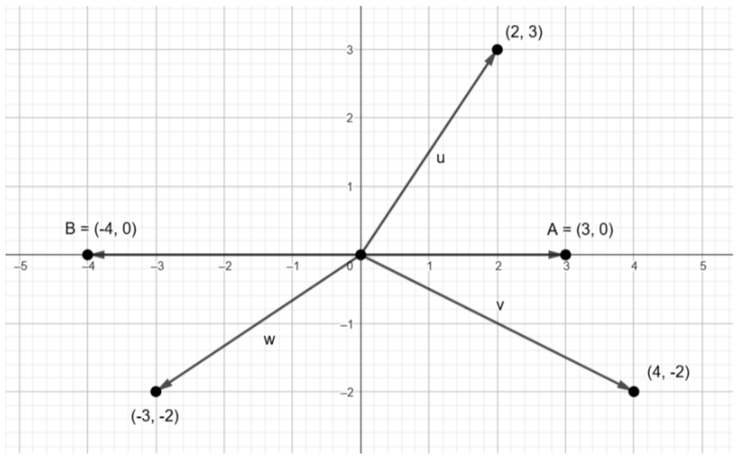
1. ถ้า a, b เป็นจำนวนจริง แกน xox' และ yoy' ตั้งฉากซึ่งกันและกัน (a, b) แทนค่าเลขคู่อันดับ แล้ว $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ แทนเวกเตอร์ โดย a แทนได้ด้วยระยะทาง $|a|$ หน่วย ตามแนวนอนไปทางขวามือ $a > 0$ และ ไปทางซ้ายเมื่อ $a < 0$ b แทนได้ด้วยระยะทาง $|b|$ หน่วยตามแนวดิ่งไปด้านบนเมื่อ $b > 0$ และไปด้านล่างเมื่อ $b < 0$



$\overrightarrow{OA}$ เป็นเวกเตอร์ที่มี 0 เป็นจุดเริ่มต้น และมี $A(a, b)$ เป็นจุดสิ้นสุด เขียนแทนได้ด้วย สัญลักษณ์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

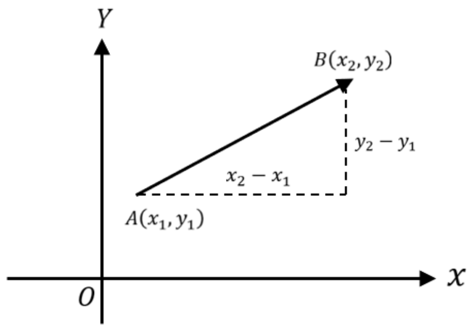
เช่น $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\bar{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$,$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

แต่ละเวกเตอร์สามารถแสดงบนพิกัดได้ดังรูป



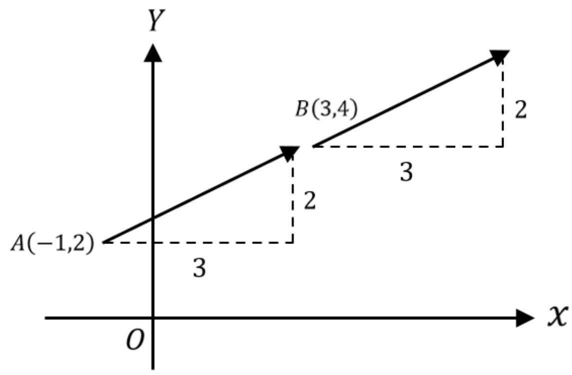
2. ถ้า $A(x_1, y_1)$ เป็นจุดเริ่มต้น และ $B(x_2, y_2)$ เป็นจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์แล้ว

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$



ตัวอย่างที่ 5.13 ให้ $A(-1,2)$ และ $B(3,4)$ จงแสดงตำแหน่งของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ซึ่งมี A, B เป็นจุดเริ่มต้น

แนวคิด $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีค่าความยาวตามแนวระดับจากจุดเริ่มต้นเป็น 3 และตามแนวดิ่งจากจุดเริ่มต้นเป็น 2



) , $D(-3,-2)$ จงหาเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$

แนวคิด $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 0+2 \\ 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} -3 & -0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$; $\overrightarrow{DA} = \begin{bmatrix} 1+3 \\ 5+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

5.12 การบวกเวกเตอร์และการลบเวกเตอร์

ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

$\bar{u} + \bar{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$

$\bar{u} - \bar{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - c \\ b - d \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ศูนย์ $\bar{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

เวกเตอร์นิเสธ เวกเตอร์นิเสธของ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $-\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$

5.13 ขนาดของเวกเตอร์ (Magnitude of Vector)

1. ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ แล้วขนาดของ $\bar{u}$ นิยามว่า $|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. ถ้า $\bar{v} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$ แล้วขนาดของ $\bar{v}$ นิยามว่า $|\bar{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

5.14 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit of Vector)

คือเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยได้แก่ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

ให้ $\bar{\imath}$ แทน $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $-\bar{\imath}$ แทน $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{\jmath}$ แทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $-\bar{\jmath}$ แทน $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

พิจารณา $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = ai + bj$

ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq \bar{0}$ แล้ว

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\bar{u}$ คือ $\frac{1}{|\bar{u}|}\cdot\bar{u} = \frac{1}{(a^2+b^2)}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{(a^2+b^2)} \\ \frac{b}{(a^2+b^2)} \end{bmatrix}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$ คือ $-\frac{1}{|\bar{u}|}\cdot\bar{u} = -\frac{1}{(a^2+b^2)}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a}{(a^2+b^2)} \\ \frac{-b}{(a^2+b^2)} \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 5.15

ก. จงหา $|\bar{u}|$ เมื่อ $\bar{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ข. จงหาเวกเตอร์ 1 หน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\bar{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ค. จงหาเวกเตอร์ 1 หน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

ง. จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น 5 และมีทิศทางเดียวกันกับ $\bar{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$

จ. จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

แนวคิด ก. $\bar{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $|\bar{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

ข. เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\bar{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$

ค. เนื่องจาก $|\bar{v}|$ คือ $|\bar{v}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$\therefore$ เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ คือ $-\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

ง. เนื่องจาก $|\bar{w}|$ คือ $|\bar{w}| = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $|\bar{w}| = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{68}}\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{68}} \\ \frac{8}{\sqrt{68}} \end{bmatrix}$

$\therefore$ เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น 5 และมีทิศทางเดียวกันกับ $\bar{w}$ คือ

$$5\cdot\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{68}} \\ \frac{8}{\sqrt{68}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{68}} \\ \frac{40}{\sqrt{68}} \end{bmatrix}$$

จ. เนื่องจากขนาดของ $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \sqrt{5}$ และขนาดของ $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = 5$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ คือ $-\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$

∴ เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ และมีขนาดเท่ากับ $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ คือ

$$5 \cdot \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\sqrt{5}\\-2\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

5.15 **เวกเตอร์อิสระ** (Free Vector)

คือ เวกเตอร์ที่ไม่กำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด ได้แก่ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ ฯลฯ

5.16 **ผลคูณเชิงสเกลาร์** มีคุณสมบัติสำคัญดังต่อไปนี้

1. ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ แล้ว $\bar{u}\cdot\bar{v} = (a_1b_1 + a_2b_2)$

2. $\bar{\imath}\cdot\bar{\imath} = 1 = \bar{\jmath}\cdot\bar{\jmath}$ และ $\bar{\imath}\cdot\bar{\jmath} = 0 = \bar{\jmath}\cdot\bar{\imath}$

3. $\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{u}$

4. $\bar{u}\cdot\bar{u} = |\bar{u}|^2$

5. ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ และ $m \in R \quad (m\bar{u})\bar{v} = \bar{u}(m\bar{v}) = m(\bar{u}\bar{v})$

6. $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง $\bar{u}\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|cos\theta$

7. ถ้า $\bar{u} \neq 0$ และ $\bar{v} \neq 0$ แล้ว $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}\bar{v} = 0$

ตัวอย่างที่ 5.16 จงหา $\bar{u} \cdot \bar{v}$ จาก

ก. $\bar{u} = 3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$, $\bar{v} = 4\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}$

ข. $\bar{u} = -6\bar{\imath} + 9\bar{\jmath}$, $\bar{v} = 9\bar{\imath} - 6\bar{\jmath}$

ค. $\bar{u} = 2\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}$, $\bar{v} = \bar{0}$

แนวคิด ก. $\bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = (3 \times 4) + (2 \times 5) = 12 + 10 = 22$

ข. $\bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix} = (-6 \times 9) + (9 \times -6) = -54 - 54 = -108$

ค. $\bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

ตัวอย่างที่ 5.17 กำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\bar{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

จงหา $(\bar{u} + \bar{v})\bar{w}$, $\bar{u}(\bar{v} - \bar{w})$, $[(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v})]$ และ $[(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v})]\bar{w}$

แนวคิด $\bar{u} + \bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$; $\bar{u} - \bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}$

$\bar{v} - \bar{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $(\bar{u} + \bar{v})\bar{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 - 27 = -25$

$\bar{u}(\bar{v} - \bar{w}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix} = -6 + 20 = 14$

$[(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v})] = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} = -7 - 45 = -52$

$[(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v})]\bar{w}$ ไม่มีนิยามจึงไม่สามารถหาค่าได้

ตัวอย่างที่ 5.18 ถ้า $|\bar{u}| = 3$, $|\bar{v}| = 5$ และ $|\bar{u} - \bar{v}| = 7$ แล้ว จงหา $|\bar{u} + \bar{v}|$

แนวคิด เนื่องจาก

$$|\bar{u} + \bar{v}|^2 = (\bar{u} + \bar{v})(\bar{u} + \bar{v}) = (\bar{u} + \bar{v})\bar{u} + (\bar{u} + \bar{v})\bar{v}$$

$$= \bar{u} \cdot \bar{u} + \bar{v}\bar{u} + \bar{u}\bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{v} = |\bar{u}|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{v} + |\bar{v}|^2$$

ดังนั้น $|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\bar{v} + |\bar{v}|^2$

แทนค่า $49 = 9 - 2\bar{u}\bar{v} + 25$

$$2\bar{u}\bar{v} = -49 + 9 + 25 = -15$$

แต่ $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{v} + |\bar{v}|^2 = 9 - 15 + 25 = 19$

นั่นคือ $|\bar{u} + \bar{v}| = \sqrt{19}$

ตัวอย่างที่ 5.19 กำหนดให้ ABC เป็น Δ $A(5,2)$ $B(8,7)$ และ $C(3,10)$

จงแสดงว่า ABC เป็น Δ มุมฉาก

แนวคิด จะได้ $\overrightarrow{AB} = (8-5)\bar{\imath} + (7-2)\bar{\jmath} = 3i + 5j$

$$\overrightarrow{BC} = (3-8)\bar{\imath} + (10-7)\bar{\jmath} = -5i + 3j$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (3)(-5) + (5)(3) = -15 + 15 = 0$$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉาก $\overrightarrow{BC}$ นั่นคือ ΔABC เป็น Δ มุมฉาก

5.17 เวกเตอร์สเปซ

มีคุณสมบัติดังนี้

กำหนดให้ $\bar{u}$,$\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ a และ b เป็นจำนวนจริง และ R เป็นเซตของเวกเตอร์ในสเปซ

1. $\bar{u} + \bar{v} \in R$ คุณสมบัติของการปิด

2. $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$ คุณสมบัติของการจัดหมู่

3. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$ คุณสมบัติของการสลับที่

4. $a\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ ซึ่งเป็นสมาชิกของ R ด้วย

5. $a(\bar{u} + \bar{v}) = a\bar{u} + a\bar{v}$

6. $(a + b)\bar{u} = a\bar{u} + b\bar{u}$

7. $1\bar{u} = \bar{u}$ มี 1 เป็นเอกลักษณ์

5.18 ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ครอสโปรดักส์ (Cross product) หรือ ผลคูณไขว้ เป็นการดำเนินการบนเวกเตอร์สองตัวในปริภูมิสามมิติ ซึ่งให้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ใหม่ที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ต้นฉบับทั้งสอง โดยมีขนาดเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจากเวกเตอร์ทั้งสอง และทิศทางที่กำหนดโดย กฎมือขวา ผลคูณไขว้ถูกใช้ในวิชาฟิสิกส์และคณิตศาสตร์ประยุกต์ เช่น การคำนวณโมเมนต์ของแรง

ความหมายและคุณสมบัติ:

ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์:

ต่างจากผลคูณจุด (dot product) ที่ให้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ ผลคูณไขว้จะให้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์เสมอ

ตั้งฉากกับเวกเตอร์ต้นฉบับ:

เวกเตอร์ผลลัพธ์จะตั้งฉากกับเวกเตอร์ตั้งต้นทั้งสองตัว

ใช้ในปริภูมิสามมิติ:

การดำเนินการนี้มีนิยามเฉพาะในปริภูมิสามมิติเท่านั้น

กฎมือขวา:

ทิศทางของเวกเตอร์ผลลัพธ์ถูกกำหนดโดยกฎมือขวา เมื่อกำมือขวาตามทิศทางของเวกเตอร์ตัวแรกไปยังเวกเตอร์ตัวที่สอง นิ้วหัวแม่มือจะชี้ไปตามทิศทางของเวกเตอร์ผลลัพธ์

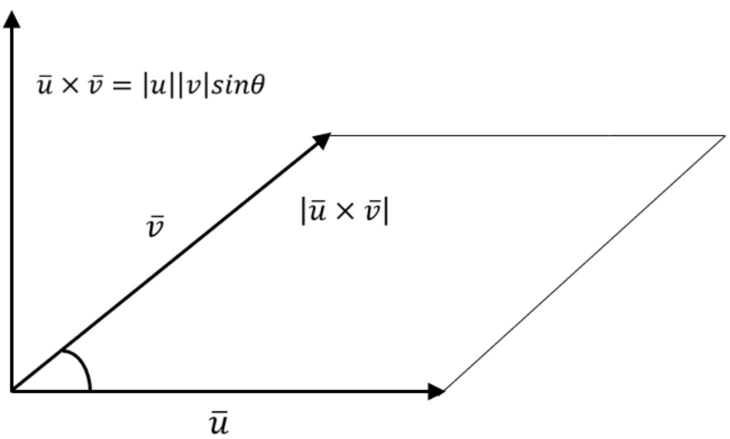
ขนาด:

ขนาดของเวกเตอร์ผลลัพธ์เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เวกเตอร์ทั้งสองตัวครอบคลุม หรือ $\bar{u} \times \bar{v} =| \bar{u} || \bar{v} | sin\theta$

โดยที่ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือเวกเตอร์ตั้งต้น และ θ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

สัญลักษณ์:

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนผลคูณไขว้คือเครื่องหมาย "×" เช่น $\bar{u} \times \bar{v}$



การหาผลคูณไขว้ โดยใช้เมทริกซ์ (Cross Product Using Matrix Notation)

กำหนด $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ และ $\vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$

จะได้ว่า $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{c} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{c} = \hat{\imath}|a_2b_3 - a_3b_2| - \hat{\jmath}|a_1b_3 - a_3b_1| + \hat{k}|a_1b_2 - a_2b_1|$$

5. 19 การนำความรู้เรื่องเวกเตอร์ไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์

1. สถานการณ์จำลอง: การเคลื่อนที่ของเรือ

นายกานต์ขับเรืออยู่กลางทะเล เขาเปิดเครื่องยนต์ที่ทำให้เรือมีความเร็ว 20 กิโลเมตร/ชั่วโมง ไปทางทิศเหนือ จากนั้นมีลมพัดมาทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ (ทำมุม 45° กับทิศเหนือ) ทำให้เรือเคลื่อนที่ไปตามลมด้วยความเร็ว 5 กิโลเมตร/ชั่วโมง" เรือของนายกานต์กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วและทิศทางรวมเท่าไร

แนวคิดและหลักการทางฟิสิกส์

1. กำหนดเวกเตอร์ความเร็ว

-เวกเตอร์ความเร็วของเรือ (V_1) : เรือเคลื่อนที่ไปทางทิศเหนือ (แกน y) ด้วยความเร็ว 20 km/h

$$V_1 = 0i + 20j\ km/h$$

-เวกเตอร์ความเร็วของลม (V_2): ลมพัดมาทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ (ทำมุม 45° กับทิศเหนือ) ด้วยความเร็ว 5 km/h

-ต้องหาองค์ประกอบของเวกเตอร์ลมในแนวแกน x และ y โดยใช้ตรีโกณมิติ:

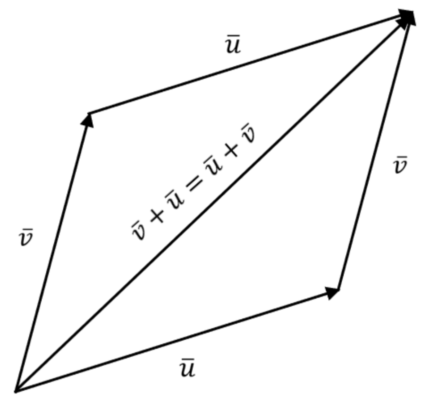
-องค์ประกอบในแนวแกน x:

$$V_{2x} = 5cos45^{\circ} = 5(\frac{\sqrt{2}}{2}) \approx 3.54\ \ km/h$$

-องค์ประกอบในแนวแกน y :

$$V_{2y} = 5sin45^{\circ} = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 3.54\ \ km/h$$

$$V_2 = 3.54i + 3.54j\ \ km/h$$



2. การบวกเวกเตอร์เพื่อหาความเร็วรวม (Resultant Velocity)

หลักการทางฟิสิกส์: ความเร็วรวม (Resultant Velocity) ของเรือคือผลรวมเวกเตอร์ของความเร็วจากเครื่องยนต์และความเร็วจากลม

$$V_{total} = V_1 + V_2$$

$$V_{total} = (0i + 20j) + (3.54i + 3.54j)$$

$$V_{total} = (0 + 3.54)i + (20 + 3.54j)$$

$$V_{total} = 3.54i + 23.54j \quad km/h$$

3. การหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ความเร็วรวม

ขนาด (Magnitude): คืออัตราเร็วรวมของเรือ ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$V_{total} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$V_{total} = \sqrt{(3.54)^2 + (23.54)^2}$$

$$V_{total} = \sqrt{12.53 + 554.13}$$

$$V_{total} = \sqrt{566.66} \approx 23.8 \ km/h$$

ทิศทาง (Direction): หาจากมุม θ ที่ทำกับแกน $+x$ (ทิศตะวันออก)

$$tan(\theta) = \frac{V_y}{V_x} = \frac{23.54}{3.54} \approx 6.65$$

$$arctan(6.65) \approx 81.4^{\circ}$$

สรุปคำตอบ เรือของนายกานต์กำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วรวมประมาณ 23.8 กิโลเมตร/ชั่วโมง ในทิศทาง 81.4° จากทิศตะวันออก (หรือประมาณ 8.6° จากทิศเหนือ)

2. สถานการณ์จำลอง: การลากกระเป๋าเดินทาง

นักท่องเที่ยวคนหนึ่งกำลังลากกระเป๋าเดินทาง โดยออกแรงดึง 20 นิวตัน และทำมุม 60° กับพื้น ทำให้กระเป๋าเคลื่อนที่ไปบนพื้นผิวเรียบเป็นระยะทาง 10 เมตร นักท่องเที่ยวคนนี้ทำงาน (ออกแรง)ไปเท่าไรในการเคลื่อนย้ายกระเป๋าใบนี้

แนวคิดและหลักการทางฟิสิกส์

1. กำหนดเวกเตอร์

1.1 เวกเตอร์แรง (F): คือเวกเตอร์ของแรงที่นักท่องเที่ยวออกแรงดึง

ขนาด : $|F|=20$ นิวตัน

ทิศทาง : ทำมุม 60° กับแนวระดับ

1.2 เวกเตอร์การกระจัด (d): คือเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ของกระเป๋า

ขนาด : $|d|=10$ เมตร

ทิศทาง : ไปตามแนวระดับ (ทำมุม 0° กับพื้น)

2. การคูณเวกเตอร์เพื่อหางาน

หลักการทางฟิสิกส์: งาน (W) เป็นปริมาณสเกลาร์ที่บอกพลังงานที่ถูกถ่ายโอนเมื่อมีแรงกระทำและทำให้วัตถุเคลื่อนที่ งานหาได้จากการคูณเวกเตอร์เชิงสเกลาร์ (dot product) ระหว่างเวกเตอร์แรงกับการกระจัด

$$W = F \cdot d$$

การหางานจากขนาดและมุม:

$$W = |F||d|\cos(\theta)$$

* เมื่อ θ คือมุมระหว่าง$|d|$ และ $|F|$ จากโจทย์ $\theta = 60°$

$$W = (20\,N) \times (10\,m) \times \cos(60°)$$

$$W = (200) \times (0.5)$$

$$W = 100 \quad \text{จูล (J)}$$

สรุปคำตอบ นักท่องเที่ยวทำงานไป 100 จูล ในการเคลื่อนย้ายกระเป๋าเดินทางใบนี

ตัวอย่างการนำความรู้เรื่องการคูณเวกเตอร์เชิงเวกเตอร์ (cross product) มาใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์ โดยเฉพาะในวิชาฟิสิกส์ เรื่องทอร์ก (Torque)

3. สถานการณ์จำลอง: การเปิดประตูบานใหญ่

พ่อกำลังจะเปิดประตูบ้านที่บานพับอยู่ทางซ้ายมือ พ่อใช้มือดันที่ลูกบิดประตูซึ่งห่างจากบานพับ 1 เมตร โดยออกแรงผลัก 10 นิวตัน ในทิศทางที่ตั้งฉากกับระนาบของประตูพอดี อยากทราบว่าพ่อสร้างทอร์กเท่าไรในการเปิดประตู และทิศทางของทอร์กเป็นอย่างไร

แนวคิดและหลักการทางฟิสิกส์

1. กำหนดเวกเตอร์

1.1 เวกเตอร์ตำแหน่ง (r): คือเวกเตอร์จากจุดหมุน (บานพับ) ไปยังจุดที่ออกแรง (ลูกบิดประตู)

ขนาด : $|\ r\ |$=1 เมตร

ทิศทาง : ไปตามความยาวของประตู

1.2 เวกเตอร์แรง (F): คือเวกเตอร์ของแรงที่กระทำ

ขนาด : $|\ F\ |$=10 นิวตัน

ทิศทาง : ตั้งฉากกับระนาบของประตู

2. การคูณเวกเตอร์เพื่อหาทอร์ก

2.1 หลักการทางฟิสิกส์: ทอร์ก (τ) คือปริมาณเวกเตอร์ที่ทำให้วัตถุหมุนได้ ทอร์กหาได้จากการคูณเวกเตอร์เชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ตำแหน่งและเวกเตอร์แรง ($\tau = r \times F$)

การหาขนาดของทอร์ก: เราใช้สูตร $|\ \tau\ |=|\ r\ ||\ F\ |\ sin\theta$

แทนค่า จะได้ $|\ \tau\ |= (1\ m)(10\ N)sin(90°) = (10\ )(1)$

$|\ \tau\ |= 10$ นิวตัน-เมตร ($N \cdot m$)

3. การหาทิศทางของทอร์กด้วย**กฎมือขวา** (Right-Hand Rule)

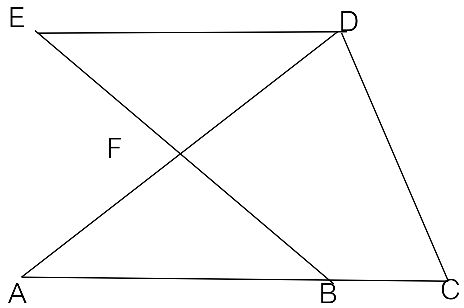
กฎมือขวา: ใช้เพื่อกำหนดทิศทางของทอร์กที่เกิดจากการหมุน วางมือขวาตามแนวเวกเตอร์แรก (r) คือตามแนวประตูจากบานพับไปยังลูกบิด ม้วนนิ้วทั้งสี่ตามทิศทางของเวกเตอร์ที่สอง (F) คือทิศทางที่ผลักประตู ทิศทางของนิ้วหัวแม่มือที่ชี้ขึ้นจะบอกทิศทางของทอร์ก (τ)

จากสถานการณ์นี้ เมื่อเราผลักประตูไปข้างหน้า ทิศทางของทอร์กจะพุ่งขึ้นในแนวแกนเดียวกับบานพับ

สรุปคำตอบ เราสร้างทอร์กขนาด 10 นิวตัน-เมตร และทิศทางของทอร์กพุ่งขึ้นไปในแนวตั้ง (ตามแกนของบานพับประตู)

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1. จากรูปกำหนดให้ F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overrightarrow{BE}$ และ $\overrightarrow{BC} = \bar{a}$, $\overrightarrow{DC} = \bar{b}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} = 2\bar{a}$ จงหาเวกเตอร์ต่อไปนี้ ในรูปของ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$



1.1 $\overrightarrow{BF}$ 1.2 $\overrightarrow{AE}$

1.3 $\overrightarrow{CE}$ 1.4 $\overrightarrow{CF}$

2. กำหนด $\bar{u} = 3\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$, $\bar{v} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ และ $\bar{w} = \bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ แล้ว จงหาค่าของ

2.1 $\bar{u} \cdot \bar{v}$ 2.2 $\bar{u} \cdot \bar{u}$

2.3 $\bar{u} \cdot (\bar{v}+\bar{w})$ 2.4 $(\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v}$

2.5 $\bar{u} \cdot \bar{v}+7$ 2.6 $\bar{\imath} \cdot \bar{\imath}$

2.7 $\bar{\jmath} \cdot \bar{\jmath}$ 2.8 $\bar{\imath} \cdot \bar{\jmath}$

2.9 $\bar{u} \cdot \bar{v}+ \bar{w}$ 2.10 $(\bar{u} \cdot \bar{v}) \cdot \bar{w}$

3. กำหนด $\bar{u} = 3\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$, $\bar{v} = 6\bar{\imath} + 8\bar{\jmath}$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จงหาค่าของ $\bar{u} \cdot \bar{v}$ ถ้ากำหนด θ เป็น

3.1 60° 3.2 90°

3.3 120°

4. กำหนด $\bar{u} = \bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$, $\bar{v} = -\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$ แล้ว มุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเท่าใด

5. จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากและมีขนาดเท่ากับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

5.1 $\bar{u} = 3\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$ 5.2 $\bar{u} = -2\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}$

5.3 $\bar{u} = 3\bar{\imath} - 7\bar{\jmath}$ 5.4 $\bar{u} = -5\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}$

5.5 $\bar{u} = 3\bar{\imath}$ 5.6 $\bar{u} = -5\bar{\jmath}$

6. กำหนดให้เวกเตอร์ดังต่อไปนี้ เวกเตอร์คู่ใดบ้างที่ขนานกันและทิศทางที่ขนานกันไปทางเดียวกันหรือตรงกันข้าม

ก) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix},\ \bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

ข) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix},\ \bar{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$

ค) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

ง) $\bar{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$

7. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2,1)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$

8. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,-1)$และขนานกับเวกเตอร์ $\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$

9. กำหนด $\bar{u} = 3\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$ *และ* $\bar{v} = \frac{2}{5}\bar{\imath} + \frac{1}{5}\bar{\jmath}$ ถ้า $\overline{w}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ แล้ว $|\bar{v} + \overline{w}|$ มีค่าเท่าใด

10. กำหนดให้มุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เป็น $60°$ และ $|\bar{u}| = 5,\ |\bar{v}| = 8$ แล้ว จงหา

10.1 $|\bar{u} + \bar{v}|$ 10.2 $|\bar{u} - \bar{v}|$

11. กำหนด $\bar{u} = 2\bar{\imath} - \bar{\jmath} + 2\bar{k}$ *และ* $\bar{v} = 3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - \bar{k}$ จงหา $\bar{u} \times \bar{v}$

12. กำหนด $A(1,2,1), B(3,0,2), C(1,1,0)$ และ จงหา $D(0,5,1)$

12.1 พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC

12.2 พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ACD

12.3 พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD