มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2568

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI3307	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 17:00 - 20:00 วันศุกร์ ที่ 5 กันยายน 2568	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**................................. **หมู่เรียน**................

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 15 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
   - **ตอนที่** 1 ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 3 ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ จำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								รวม
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

ตอนที่ 1 : (20 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid bc$

   ข. $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

   ค. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $\gcd(a, b) = a$

   ง. ถ้า $a \mid bc$ และ $\gcd(a, b) = 1$ แล้ว $a \mid c$

   จ. ถ้า $d = \gcd(a, b)$ จะได้ว่ามี $x, y \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $d = ax + by$

2. ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{Z}$ ที่นิยามโดย

$$x\, r\, y \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad 3 \mid (x + 2y)$$

   ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. r มีสมบัติสะท้อน (Reflexive)

   ข. r มีสมบัติสมมาตร (Symmetric)

   ค. r มีสมบัติถ่ายทอด (Transitive)

   ง. สำหรับ $x, y \in \mathbb{Z}$ ถ้า $x\, r\, y$ แล้ว $x^2\, r\, y^2$

   จ. r มีชั้นสมมูล (Equivalent class) ทั้งหมด 2 ชั้น คือ $[0]_r, [1]_r$

3. ให้ G เป็นกรุปที่มี e เป็นเอกลักษณ์ กำหนดให้ $a, b, c \in G$ ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

   ก. ถ้า $\circ(a) = 3$ แล้ว $a^{10} = a$

   ข. ถ้า $ab = e$ แล้ว b เป็นตัวผกผัน (inverse) ของ a

   ค. $(ab)^2 = a^2b^2$

   ง. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

   จ. $\circ(ab) = \ell\text{cm}(\circ(a), \circ(b))$

4. ให้ $a \in \mathbb{R}$ โดย $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกของกรุป $GL_2(\mathbb{R})$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. A มีอันดับ (order) เท่ากับ 2

   ข. $A^{2568} = I$

   ค. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   ง. $|\langle A \rangle| = 2$

   จ. $A^{-1} = A$

5. ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. $(\bar{0}, \bar{1})$ ตัวผกผัน (inverse) ของ $(\bar{0}, \bar{3})$ ในกรุปการบวก $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

ข. $[\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 : \langle(\bar{0}, \bar{2})\rangle] = 12$

ค. อันดับ (order) ของ $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ เท่ากับ 12 ในกรุปการคูณ $\mathbb{C}^*$

ง. $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group)

จ. $(\bar{3})^{2568} = \bar{1}$ ในกรุปการคูณ $\mathbb{Z}_8^\times$

ตอนที่ 2 : (20 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ____________________________

จำนวนกรุปย่อย (subgroup) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{81}$ มีค่าเท่าใด

7. ____________________________

ตัวต่อกำเนิด (generator) ของ $\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_{68}$ มีทั้งหมดกี่ตัว

8. ________________________

ถ้าทราบว่า $(\bar{1}, \bar{1})$ เป็นตัวต่อกำเนิด (generator) ของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ จงหาตัวกำเนิดตัวอื่น ๆ (ตอบมาอย่างน้อย 1 ตัว)

9. ________________________

จงหาจำนวนโคเซตขวา (right coset) ที่แตกต่างทั้งหมดของ $\langle(1\ 2\ 3\ 5)\rangle$ ใน S_5

10. ____________________

กรุปผลหาร (Quotient group) $\mathbb{Z}_{10}/\left\langle \bar{3} \right\rangle$ มีจำนวนสมาชิกกี่ตัว

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต $G = \{1, 2, 3, 4\}$
ถ้า $*$ มีสมบัติสลับที่ (commutative law) และมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative law) โดยมีผลการดำเนินการแสดงดังตารางเคย์เลย์

$*$	1	2	3	4
1	2	4	1	3
2	4	a	2	1
3	b	2	3	4
4	3	1	4	2

11.1 **(2 คะแนน)** จงหา a และ b (พร้อมให้เหตุผล)

11.2 **(2 คะแนน)** จงหา **เอกลักษณ์ (identity)** ของ G (พร้อมให้เหตุผล)

11.3 **(4 คะแนน)** จงหา **ตัวผกผัน (inverse)** ของสมาชิกทุกตัว ใน G (เติมคำตอบในตารางให้สมบูรณ์)

สมาชิก (Elements)	ตัวผกผัน (Inverses)	เหตุผล (Reasons)
1		
2		
3		
4		

11.4 **(2 คะแนน)** จงหา **อันดับ (order)** ของ 1 ใน G

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ด้วยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \qquad \text{สำหรับทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

12.2 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุป โดย e เป็นเอกลักษณ์ และมีสมบัติว่า

$$x^2 = e \qquad \text{ทุก ๆ } x \in G$$

จงแสดงว่า G เป็นอาบีเลียนกรุป (abelian group)

13. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ดังนี้

$$(a, b) * (c, d) = (c + ad, bd)$$

จงแสดงว่า $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, *)$ เป็นกรุป (group)

14. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

14.1 **(5 คะแนน)** ให้ α เป็นวัฏจักร ใน S_{100} โดยที่

$$\alpha = (1\ 2)^2(2\ 3)^3(3\ 4)^4(4\ 5)^5 \cdots (99\ 100)^{100}$$

จงหา **อันดับ (order)** ของ α และหา α^{2568}

14.2 **(5 คะแนน)** จงหา **ตัวผกผันการคูณ (multiplicative inverse)** ของ $\overline{19}$ ใน $\mathbb{Z}_{25}^{\times}$

15. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

15.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย(subgroup)** ของกรุปการคูณ $\mathbb{R}^*$ หรือไม่ เมื่อ

$$H = \left\{x^2 : x \neq 0\right\}$$

15.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2568 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน $GL_2(\mathbb{R})$ จงแจกแจงสมาชิกของ $\langle A \rangle$

16. **(10 คะแนน)** พิจารณากรุปการคูณ $\mathbb{Z}_{17}^{\times}$

16.1 **(3 คะแนน)** จงหา **ตัวก่อกำเนิด (generator)** ของ $\mathbb{Z}_{17}^{\times}$

16.2 **(4 คะแนน)** จงหา **กรุปย่อย (subgroup)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{17}^{\times}$ (พร้อมแจกแจงสมาชิกของกรุปย่อย)

16.3 **(3 คะแนน)** จงนำกรุปย่อยจากข้อ 16.2 เขียน **แลตทิซ (lattice)**

17. **(10 คะแนน)** ให้ $G = \{e, a, b\}$ เป็นกรุปจำกัดที่มีสมาชิก 3 ตัว โดย e เป็นเอกลักษณ์ (ใช้ทฤษฎีบทลากรองจ์ (Lagrange's Theorem))

    17.1 **(3 คะแนน)**หากรุปย่อย (subgroup) ที่เป็นไปได้ของ G

    17.2 **(3 คะแนน)** จงแสดงว่า G เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group)

    17.3 **(4 คะแนน)** จงแสดงว่า $a^2 = b$ และ $b^2 = a$

18. **(10 คะแนน)** ให้ N เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของกรุป G จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad gNg^{-1} \subseteq N \quad \text{ทุก ๆ } g \in G \qquad \text{แล้ว} \qquad gN = Ng \quad \text{ทุก ๆ } g \in G$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2568

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI3307	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 17:00 - 20:00 วันศุกร์ ที่ 5 กันยายน 2568	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid bc$

   ข. $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ Answer

   ค. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $\gcd(a, b) = a$

   ง. ถ้า $a \mid bc$ และ $\gcd(a, b) = 1$ แล้ว $a \mid c$

   จ. ถ้า $d = \gcd(a, b)$ จะได้ว่ามี $x, y \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $d = ax + by$

   ตอบข้อ ข. เนื่องจาก $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ เมื่อ $\gcd(a, b) = 1$
   ข้อ ก, ค, ง และ จ เป็นสมบัติของการหารลงตัวและ ห.ร.ม.

2. ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{Z}$ ที่นิยามโดย

$$x\,r\,y \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad 3 \mid (x+2y)$$

ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. r มีสมบัติสะท้อน (Reflexive)

ข. r มีสมบัติสมมาตร (Symmetric)

ค. r มีสมบัติถ่ายทอด (Transitive)

ง. สำหรับ $x, y \in \mathbb{Z}$ ถ้า $x\,r\,y$ แล้ว $x^2\,r\,y^2$

จ. r มีชั้นสมมูล (Equivalent class) ทั้งหมด 2 ชั้น คือ $[0]_r, [1]_r$ Answer

ตอบข้อ จ. พิจารณา

ก. **สมบัติสะท้อน**
สำหรับจำนวนเต็ม x ใด ๆ จะได้ว่า $x+2x=3x$ ดังนั้น $3 \mid (x+2x)$ สรุปได้ว่า $x\,r\,x$

ข. **สมบัติสมมาตร**
ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $x\,r\,y$ นั่นคือ $3 \mid (x+2y)$ แล้ว

$$3 \mid 2(x+2y) \text{ หรือ } 3 \mid (2x+4y) \text{ นั่นคือ } 3 \mid (2x+y+3y)$$

เนื่องจาก $3 \mid 3y$ จะได้ว่า $3 \mid (y+2x)$ สรุปได้ว่า $y\,r\,x$

ค. **สมบัติถ่ายทอด**
ให้ $x, y, z \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $x\,r\,y$ และ $y\,r\,z$ จะได้ว่า $3 \mid (x+2y)$ และ $3 \mid (y+2z)$ จะได้ว่า

$$3 \mid [(x+2y)+(y+2z)] \text{ หรือ } 3 \mid (x+3y+2z)$$

เนื่องจาก $3 \mid 3y$ จะได้ว่า $3 \mid (x+2z)$ สรุปได้ว่า $x\,r\,z$

ง. สำหรับ $x, y \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $x\,r\,y$ จะได้ว่า $3 \mid (x+2y)$ นั่นคือ $3 \mid (x+2y)(x+y)$ พิจารณา

$$(x+2y)(x+y) = x^2+3xy+2y^2$$

เนื่องจาก $3 \mid 3xy$ จะได้ว่า $3 \mid (x^2+2y^2)$ สรุปได้ว่า $x^2\,r\,z^2$

จ. จาก ก-ค r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\mathbb{Z}$ พิจารณาชั้นสมมูลต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
[0]_r &= \{a : 3 \mid (a+0)\} = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\} \\
[1]_r &= \{a : 3 \mid (a+2)\} = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\} \\
[2]_r &= \{a : 3 \mid (a+4)\} = \{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...\}
\end{aligned}$$

ดังนั้นมีชั้นสมมูลทั้งหมด 3 ชั้นคือ $[0]_r, [1]_r, [2]_r$

3. ให้ G เป็นกรุปที่มี e เป็นเอกลักษณ์ กำหนดให้ $a, b, c \in G$ ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

   ก. ถ้า $\circ(a) = 3$ แล้ว $a^{10} = a$ Answer

   ข. ถ้า $ab = e$ แล้ว b เป็นตัวผกผัน (inverse) ของ a

   ค. $(ab)^2 = a^2b^2$

   ง. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

   จ. $\circ(ab) = \ell\text{cm}(\circ(a), \circ(b))$

ตอบข้อ ก.

   ก. ถ้า $\circ(a) = 3$ จะได้ว่า $a^3 = e$ นั่นคือ $a^{10} = (a^3)^3a = (e)^3a = ea = a$ เป็นจริง

   ข. b อาจไม่เป็นตัวผกผัน (inverse) ของ a ต้องตรวจสอบด้วยว่า $ba = e$

   ค. เนื่องจาก G อาจไม่ใช่กรุปอาบีเลียน ดังนั้น $(ab)^2 = a^2b^2$ ไม่จริง

   ง. เนื่องจาก G อาจไม่ใช่กรุปอาบีเลียน ดังนั้น $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ ไม่จริง

   จ. $\circ(ab) = \ell\text{cm}(\circ(a), \circ(b))$ ไม่จริงเช่นในกรุปการเรียนสับเปลี่ยน (permutation group) ซึ่งจะจริงได้ต้องมีสมบัติว่า a, b ไม่มีสมาชิกร่วมกัน (disjoint cycle)

4. ให้ $a \in \mathbb{R}$ โดย $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกของกรุป $GL_2(\mathbb{R})$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. A มีอันดับ (order) เท่ากับ 2

   ข. $A^{2568} = I$

   ค. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Answer

   ง. $|\langle A \rangle| = 2$

   จ. $A^{-1} = A$

ตอบข้อ ค. พิจารณา

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a-a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ดังนั้น $\circ(A) = 2$ และ $A = A^{-1}$

   ก. $\circ(A) = 2$ ถูกต้อง

   ข. $A^{2568} = (A^2)^{1484} = I^{1484} = I$ ถูกต้อง

   ค. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -A$ ไม่ถูกต้อง

   ง. $|\langle A \rangle| = \circ(A) = 2$ ถูกต้อง

   จ. $A^{-1} = A$ ถูกต้อง

5. ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. $(\bar{0},\bar{1})$ ตัวผกผัน (inverse) ของ $(\bar{0},\bar{3})$ ในกรุปการบวก $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

ข. $[\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 : \langle(\bar{0},\bar{2})\rangle] = 12$

ค. อันดับ (order) ของ $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ เท่ากับ 12 ในกรุปการคูณ $\mathbb{C}^*$

ง. $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group) Answer

จ. $(\bar{3})^{2568} = \bar{1}$ ในกรุปการคูณ $\mathbb{Z}_8^{\times}$

ตอบข้อ ง.

ก. เนื่องจาก $(\bar{0},\bar{1}) + (\bar{0},\bar{3}) = (\bar{0},\bar{0})$ ดังนั้น ตัวผกผันของ $(\bar{0},\bar{1})$ คือ $(\bar{0},\bar{3})$ ใน $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

ข. $[\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 : \langle(\bar{0},\bar{2})\rangle] = \dfrac{|\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8|}{\circ((\bar{0},\bar{2}))} = \dfrac{6 \times 8}{4} = 12$

ค. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \left(\text{cis}\frac{\pi}{6}\right)^{12} = \text{cis}2\pi = 1$ ดังนั้นอันดับของ $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ เท่ากับ 12 ในกรุปการคูณ $\mathbb{C}^*$

ง. $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ ไม่เป็นเป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group) เนื่องจาก $\gcd(6,8) = 2 \neq 1$

จ. พิจารณา $(\bar{3})^2 = \bar{9} = \bar{1}$ ใน $\mathbb{Z}_8^{\times}$ ดังนั้น

$$(\bar{3})^{2568} = ((\bar{3})^2)^{1484} = (\bar{1})^{1484} = \bar{1}$$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายมือ) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ตอบ 25

จำนวนกรุปย่อย (subgroup) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{81}$ มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(16, 81) = 1$ ดังนั้น $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{81}$ เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group) จะได้ว่าจำนวนกรุปย่อย (subgroup) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{81}$ เท่ากับจำนวนตัวหารของ 16×81 นั่นคือ

$$\tau(16 \times 18) = \tau(2^4 \times 3^4) = (4+1)(4+1) = 25 \quad \#$$

7. ตอบ 640

ตัวต่อกำเนิด (generator) ของ $\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_{68}$ มีทั้งหมดกี่ตัว

แนวคำตอบ $\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_{68}$ เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group) เนื่องจาก $\gcd(25, 68) = 1$ จำนวนตัวก่อกำเนิดเท่ากับ

$$\begin{aligned}\phi(25 \cdot 68) &= \phi(5^2 \cdot 2^2 \cdot 17) \\ &= (5^2 - 5^1)(2^2 - 2^1)(17 - 1) \\ &= 20(2)(16) \\ &= 640 \quad \#\end{aligned}$$

8. ตอบ $(\bar{2}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{3})$

ถ้าทราบว่า $(\bar{1}, \bar{1})$ เป็นตัวต่อกำเนิด (generator) ของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ จงหาตัวกำเนิดตัวอื่น ๆ (ตอบมาอย่างน้อย 1 ตัว)

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $n = 3 \times 4 = 12$ พิจารณา

$$1 \leq k < 12 \text{ และ } \gcd(k, 12) = 1 \text{ นั่นคือ } k = 1, 5, 7, 11$$

ดังนั้นตัวต่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ คือ

$$k(\bar{1}, \bar{1}) = \begin{cases} 1(\bar{1}, \bar{1}) & = (\bar{1}, \bar{1}) \\ 5(\bar{1}, \bar{1}) & = (\bar{2}, \bar{1}) \\ 7(\bar{1}, \bar{1}) & = (\bar{1}, \bar{3}) \\ 11(\bar{1}, \bar{1}) & = (\bar{2}, \bar{3}) \end{cases}$$

9. ตอบ 30

จงหาจำนวนโคเซตขวา (right coset) ที่แตกต่างทั้งหมดของ $\langle(1\ 2\ 3\ 5)\rangle$ ใน S_5

แนวคำตอบ จงหาจำนวนโคเซตขวา (right coset) ที่แตกต่างทั้งหมดจะเท่ากับดัชนี นั่นคือ

$$[S_5 : \langle(1\ 2\ 3\ 5)\rangle] = \frac{|S_5|}{\circ((1\ 2\ 3\ 5))} = \frac{5!}{4} = 30$$

ดังนั้น จำนวนโคเซตขวาของ $\langle(1\ 2\ 3\ 5)\rangle$ เท่ากับ 30 โคเซต $\#$

10. ตอบ 1

กรุปผลหาร (Quotient group) $\mathbb{Z}_{10}/\langle\bar{3}\rangle$ มีจำนวนสมาชิกกี่ตัว

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\langle\bar{3}\rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{7}\}$$

นั่นคือ $|\langle\bar{3}\rangle| = \circ(\bar{3}) = 10$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |\mathbb{Z}_{10}/\langle\bar{3}\rangle| &= \frac{|\mathbb{Z}_{10}|}{|\langle\bar{3}\rangle|} \\ &= \frac{10}{10} = 1 \quad \# \end{aligned}$$

ดังนั้น $\mathbb{Z}_{10}/\langle\bar{3}\rangle$ มีสมาชิก 1 ตัว

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต $G = \{1, 2, 3, 4\}$
ถ้า $*$ มีสมบัติสลับที่ (commutative law) และมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative law) โดยมีผลการดำเนินการแสดงดังตารางเคย์เลย์

$*$	1	2	3	4
1	2	4	1	3
2	4	a	2	1
3	b	2	3	4
4	3	1	4	2

11.1 **(2 คะแนน)** จงหา a และ b (พร้อมให้เหตุผล)

โดยสมบัติการสลับที่จะได้ว่า

$$b = 3 * 1 = 1 * 3 = 1 \quad \#$$

โดยสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$$a = 2 * 2 = 2 * (1 * 1) = (2 * 1) * 1 = 4 * 1 = 3 \quad \#$$

11.2 **(2 คะแนน)** จงหา **เอกลักษณ์ (identity)** ของ G (พร้อมให้เหตุผล)

แนวคำตอบ จากตารางและข้อ 11.1 จะเห็นว่า

$$a * 3 = a = 3 * a \qquad \text{ทุก ๆ } a \in G$$

ดังนั้น 3 เป็นเอกลักษณ์ของ G

11.3 **(3 คะแนน)** จงหา **ตัวผกผัน (inverse)** ของสมาชิกทุกตัว ใน G (เติมคำตอบในตารางให้สมบูรณ์)

สมาชิก (Elements)	ตัวผกผัน (Inverses)	เหตุผล (Reasons)
1	4	$1 * 4 = 3 = 4 * 1$
2	2	$2 * 2 = 3$
3	3	$3 * 3 = 3$
4	1	$4 * 1 = 3 = 1 * 4$

11.4 **(2 คะแนน)** จงหา **อันดับ (order)** ของ 1 ใน G

แนวคำตอบ เนื่องจาก $e = 3$ พิจารณา

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 * 1 &&= 2 \\ 1^3 &= 1^2 * 1 = 2 * 1 &&= 4 \\ 1^4 &= 1^3 * 1 = 4 * 1 &&= 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\circ(1) = 4 \quad \#$

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ด้วยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \qquad \text{สำหรับทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

แนวคำตอบ ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

กรณี $n=1$ จะได้ว่า $1=1^2$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \qquad \text{สำหรับทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

12.2 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุป โดย e เป็นเอกลักษณ์ และมีสมบัติว่า

$$x^2=e \qquad \text{ทุก ๆ } x \in G$$

จงแสดงว่า G เป็นอาบีเลียนกรุป (abelian group)

แนวคำตอบ เนื่องจาก G เป็นกรุป เพียงพอที่จะแสดงว่า G มีสมบัติสลับที่ (commutative law)
ให้ $a, b \in G$ จากสมมติฐานจะได้ว่า $a^2=e$, $b^2=e$ และ $(ab)^2=e$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} ab &= aeb \\ &= a(ab)^2b \\ &= a(ab)(ab)b \\ &= (aa)ba(bb) \\ &= a^2(ba)b^2 \\ &= e(ba)e \\ &= ba \end{aligned}$$

ดังนั้น G เป็นอาบีเลียนกรุป (abelian group)

13. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ดังนี้

$$(a, b) * (c, d) = (c + ad, bd)$$

จงแสดงว่า $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, *)$ เป็นกรุป (group)

แนวคำตอบ ให้ $(a, b), (c, d), (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(a, b) * ((c, d) * (x, y)) &= (a, b) * (x + cy, dy) \\ &= (x + cy + ady, bdy) \\ &= (x + cy + ady, bdy) \\ &= (x + (c + ad)y, bdy) \\ &= (c + ad, bd) * (x, y) \\ &= ((a, b) * (c, d)) * (x, y)\end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มบน $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}(a, b) * (0, 1) &= (0 + a \cdot 1, b \cdot 1) = (a, b) \\ (0, 1) * (a, b) &= (a + 0 \cdot b, 1 \cdot b) = (a, b)\end{aligned}$$

จะได้ว่า $(0, 1)$ เป็นเอกลักษณ์ใน $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

สำหรับ $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ นั่นคือ $b \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(a, b) * \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) &= \left(-\frac{a}{b} + a \cdot \frac{1}{b}, b \cdot \frac{1}{b}\right) = (0, 1) \\ \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) * (a, b) &= \left(a - \frac{a}{b} \cdot b, \frac{1}{b} \cdot b\right) = (0, 1)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)$ เป็นตัวผกผันของ (a, b)
สรุปได้ว่า $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, *)$ เป็นกรุป

14. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

14.1 **(5 คะแนน)** ให้ α เป็นวัฏจักร ใน S_{100} โดยที่

$$\alpha = (1\ 2)^2(2\ 3)^3(3\ 4)^4(4\ 5)^5\cdots(99\ 100)^{100}$$

จงหา **อันดับ (order)** ของ α และหา α^{2568}

แนวคำตอบ สำหรับ a, b ที่ต่างกันเป็นสมาชิกใน $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ จะเห็นว่า $(a\ b)$ มีอันดับเป็น 2 จะได้ว่า $(a\ b)^2 = (1)$ สำหรับจำนวนเต็ม k ใด ๆ

$$(a\ b)^{2k} = [(a\ b)^2]^k = (1)^k = (1) \qquad \text{และ} \qquad (a\ b)^{2k+1} = (a\ b)^{2k}(a\ b) = (1)(a\ b) = (a\ b)$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\alpha &= (1\ 2)^2(2\ 3)^3(3\ 4)^4(4\ 5)^5(5\ 6)^6\cdots(98\ 99)(99\ 100)^{100}\\ &= (1)(2\ 3)(1)(4\ 5)(1)\cdots(98\ 99)(1)\\ &= (2\ 3)(4\ 5)\cdots(98\ 99)\end{aligned}$$

เห็นได้ชัดว่า α คือผลคูณของวัฏจักรที่สมาชิกไม่มีส่วนร่วมกันทุกคู่ ดังนั้น

$$\circ(\alpha) = \ell\text{cm}(2, 2, ..., 2) = 2 \quad \#$$

และ $\alpha^{2568} = (\alpha^2)^{1484} = (1)^{1484} = (1) \quad \#$

14.2 **(5 คะแนน)** จงหา **ตัวผกผันการคูณ (multiplicative inverse)** ของ $\overline{19}$ ใน $\mathbb{Z}_{25}^{\times}$

แนวคำตอบ พิจารณาเมทริกซ์ในการหา $\gcd(19, 25) = 1$

$$\begin{array}{rrrl} 25 & 1 & 0 & R_1\\ 19 & 0 & 1 & R_2\\ 6 & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2\\ 1 & -3 & 4 & R_4 = R_2 - 3R_3\end{array}$$

ดังนั้น $1 = 25(-3) + 19(4)$ จะได้ว่า

$$\overline{1} = \overline{25(-3) + 19(4)} = \overline{19} \cdot \overline{4}$$

ดังนั้น $\overline{4}$ เป็นตัวผกผันการคูณของ $\overline{19}$ ใน $\mathbb{Z}_{25}^{\times}$

15. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

15.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย(subgroup)** ของกรุปการคูณ $\mathbb{R}^*$ หรือไม่ เมื่อ

$$H = \{x^2 : x \neq 0\}$$

แนวคำตอบ เลือก $x = 1$ จะได้ว่า $1 = 1^2 \in H$ ดังนั้น $H \neq \varnothing$
ให้ $x^2, y^2 \in H$ นั่นคือ $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ จะได้ว่า

$$(x^2)(y^2)^{-1} = x^2(y^{-1})^2 = (xy^{-1})^2 \in H$$

เนื่องจาก $xy^{-1} \neq 0$ จะได้ว่า $(x^2)(y^2)^{-1} \in H$ ดังนั้น H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$

15.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2568 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน $GL_2(\mathbb{R})$ จงแจกแจงสมาชิกของ $\langle A \rangle$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2568 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2568 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2568 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2568 - 2568 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

ดังนั้น $\circ(A) = 2$ สรุปได้ว่า

$$\langle A \rangle = \{A^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{I, A\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2568 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \quad \#$$

16. **(10 คะแนน)** พิจารณากรุปการคูณ $\mathbb{Z}_{17}^{\times}$

16.1 **(3 คะแนน)** จงหา **ตัวก่อกำเนิด (generator)** ของ $\mathbb{Z}_{17}^{\times}$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $n = \phi(17) = 16$ พิจารณา

$$\begin{array}{lcccccl}
(\bar{3})^1 & & & & & = & \bar{3} \\
(\bar{3})^2 & & & & & = & \bar{9} \\
(\bar{3})^3 & & & = & \overline{27} & = & \overline{10} \\
(\bar{3})^4 & = & (\bar{3})(\bar{3})^3 = (\bar{3})(\overline{10}) & = & \overline{30} & = & \overline{13} \\
(\bar{3})^5 & = & (\bar{3})(\bar{3})^4 = (\bar{3})(\overline{13}) & = & \overline{39} & = & \bar{5} \\
(\bar{3})^6 & = & (\bar{3})(\bar{3})^5 = (\bar{3})(\bar{5}) & = & \overline{15} & = & \overline{-2} \\
(\bar{3})^7 & = & (\bar{3})(\bar{3})^6 = (\bar{3})(\overline{-2}) & = & \overline{-6} & = & \overline{11} \\
(\bar{3})^8 & = & (\bar{3})(\bar{3})^7 = (\bar{3})(\overline{11}) & = & \overline{33} & = & \overline{16} = \overline{-1}
\end{array}$$

จะได้ว่า $(\bar{3})^{16} = ((\bar{3})^8)^2 = (\overline{-1})^2 = 1$ ดังนั้น $\circ(\bar{3}) = 16 = n$

สรุปได้ว่า $\bar{3}$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_{17}^{\times}$ #

16.2 **(4 คะแนน)** จงหา **กรุปย่อย (subgroup)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{17}^{\times}$ (พร้อมแจกแจงสมาชิกของกรุปย่อย)

แนวคำตอบ จาก $\langle \bar{3} \rangle = \mathbb{Z}_{17}^{\times}$ ตัวหารของ 16 คือ 1, 2, 4, 8, 16 ดังนั้นกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_{17}^{\times}$ คือ

$$\left\langle (\bar{3})^{\frac{16}{1}} \right\rangle = \langle (\bar{3})^{16} \rangle = \langle \bar{1} \rangle = \{\bar{1}\} \qquad \text{มีสมาชิก } 1 \text{ ตัว}$$

$$\left\langle (\bar{3})^{\frac{16}{2}} \right\rangle = \langle (\bar{3})^{8} \rangle = \langle \overline{16} \rangle = \{\bar{1}, \overline{16}\} \qquad \text{มีสมาชิก } 2 \text{ ตัว}$$

$$\left\langle (\bar{3})^{\frac{16}{4}} \right\rangle = \langle (\bar{3})^{4} \rangle = \langle \overline{13} \rangle = \{\bar{1}, \overline{13}, \overline{16}, \bar{4}\} \qquad \text{มีสมาชิก } 4 \text{ ตัว}$$

$$\left\langle (\bar{3})^{\frac{16}{8}} \right\rangle = \langle (\bar{3})^{2} \rangle = \langle \bar{9} \rangle = \{\bar{1}, \bar{9}, \overline{13}, \overline{15}, \overline{16}, \bar{8}, \bar{4}, \bar{2}\} \qquad \text{มีสมาชิก } 8 \text{ ตัว}$$

$$\left\langle (\bar{3})^{\frac{16}{16}} \right\rangle = \langle (\bar{3})^{1} \rangle = \langle \bar{3} \rangle = \mathbb{Z}_{17}^{\times} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, ..., \overline{16}\} \qquad \text{มีสมาชิก } 16 \text{ ตัว}$$

16.3 **(3 คะแนน)** จงนำกรุปย่อยจากข้อ 16.2 เขียน **แลตทิซ (lattice)**

แนวคำตอบ เขียนแลตทิซได้ดังนี้

$$\begin{array}{c}
\langle \bar{3} \rangle \\
| \\
\langle \bar{9} \rangle \\
| \\
\langle \overline{13} \rangle \\
| \\
\langle \overline{16} \rangle \\
| \\
\langle \bar{1} \rangle
\end{array}$$

17. **(10 คะแนน)** ให้ $G = \{e, a, b\}$ เป็นกรุปจำกัดที่มีสมาชิก 3 ตัว โดย e เป็นเอกลักษณ์ (ใช้ทฤษฎีบทลากรองจ์ (Lagrange's Theorem))

17.1 **(3 คะแนน)** จงหากรุปย่อย (subgroup) ที่เป็นไปได้ของ G

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $|G| = 3$ ให้ $H \leq G$ โดยทฤษฎีบทลากรองจ์จะได้ว่า $|H|$ หาร $|G| = 3$ ลงตัว นั่นคือ

$$|H| = 1, 3$$

กรณี $|H| = 1$ หมายถึงกรุปย่อย $\{e\}$ และ $|H| = 3 = |G|$ ซึ่ง $H \subseteq G$ ดังนั้น $H = G$
สรุปได้ว่ากรุปย่อยของ G มี 2 กรุปย่อยคือ

$$\{e\} \text{ และ } G \qquad \#$$

17.2 **(3 คะแนน)** จงแสดงว่า G เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group)

แนวคำตอบ เนื่องจาก $a \neq e$ และ $\langle a \rangle$ เป็นกรุปย่อยหนึ่งของ G แต่จากข้อ 17.1 G มีเพียง 2 กรุปย่อยซึ่ง $\langle a \rangle \neq \{e\}$ ดังนั้น

$$\langle a \rangle = G$$

ดังนั้น G เป็นกรุปวัฏจักร (ในทำทองเดียวกันเมื่อเลือกสมาชิกเป็น b จะได้ $\langle b \rangle = G$)

17.3 **(4 คะแนน)** จงแสดงว่า $a^2 = b$ และ $b^2 = a$

แนวคำตอบ จากข้อ 17.2 จะได้ว่า $\circ(a) = \circ(b) = 3$ นั่นคือ

$$a^3 = e \qquad \text{และ} \qquad b^3 = e$$

สมมติ $a^2 \neq b$ จะได้ว่า $a^2 = e$ หรือ $a^2 = a$ แต่เนื่องจาก

$$\circ(a) = 3 \text{ หมายถึงจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ } a^3 = e$$

ดังนั้น $a^2 \neq e$ ทำให้ได้ว่า $a^2 = a$ นั่นคือ $e = a^3 = aa^2 = aa = a^2 = a$ เกิดข้อขัดแย้งที่ว่า $e \neq a$
ดังนั้น $a^2 = b$ พิสูจน์ในทำนองเดียวกันในกรณี $b^2 = a$

18. **(10 คะแนน)** ให้ N เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของกรุป G จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad gNg^{-1} \subseteq N \quad \text{ทุก ๆ } g \in G \qquad \text{แล้ว} \qquad gN = Ng \quad \text{ทุก ๆ } g \in G$$

แนวคำตอบ ให้ N เป็นกรุปย่อยของกรุป G สมมติว่า $gNg^{-1} \subseteq N$ ทุก ๆ $g \in G$
ให้ $g \in G$

<u>ขั้นที่ 1</u> จะแสดงว่า $gN \subseteq Ng$

ให้ $x \in gN$ จะได้ว่ามี $n_1 \in N$ ซึ่ง $x = gn_1$

$$\text{จะเห็นว่า } xg^{-1} = gn_1g^{-1} \in gNg^{-1} \subseteq N$$

นั่นคือมี $n_2 \in N$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} xg^{-1} &= n_2 \\ xg^{-1}g &= n_2g \\ x &= n_2g \in Ng \end{aligned}$$

<u>ขั้นที่ 2</u> จะแสดงว่า $Ng \subseteq gN$

ให้ $x \in Ng$ จะได้ว่ามี $n_1 \in N$ ซึ่ง $x = n_1g$

$$\text{จะเห็นว่า } g^{-1}x = g^{-1}n_1g = g^{-1}n_1(g^{-1})^{-1} \in g^{-1}N(g^{-1})^{-1} \subseteq N$$

นั่นคือมี $n_2 \in N$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} g^{-1}x &= n_2 \\ gg^{-1}x &= gn_2 \\ x &= gn_2 \in gN \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $gN = Ng$