



Assignment 10
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ริงย่อย และไอดีล และฟังก์ชันสมสัณฐานของริง สัปดาห์ที่ 11 คะแนนเต็ม 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธัญยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

1. จงตรวจสอบว่า I ต่อไปนี้เป็น ริงย่อย (subring) หรือ ไอดีล (ideal) ของ R หรือไม่

(a) $I = \{(0, x) : x \in \mathbb{Z}\}$ และ $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(b) $I = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ และ $R = M_{22}(\mathbb{R})$

(c) $I = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & w \end{bmatrix} : x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$ และ $R = M_{33}(\mathbb{R})$

2. ให้ R และ S เป็นริง โดยที่ φ เป็นฟังก์ชันสัณฐานของริง จาก R ไป S จงแสดงว่า

(a) $\text{Ker}(\varphi)$ เป็นริงย่อยของ R

(b) $\text{Ran}(\varphi)$ เป็นริงย่อยของ S

3. ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ นิยามโดย $\varphi(x) = \overline{4x}$ จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสัณฐานของริงหรือไม่

4. ให้ I, J, K เป็นไอดีลของริง R โดยที่ I เป็นเซตย่อยของ J และ K จงพิสูจน์ว่า

$$K/I = J/I \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad K = J$$

5. ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow M_{22}(\mathbb{Z}_6)$ นิยามโดย

$$\varphi(a) = \begin{bmatrix} \overline{3a} & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{bmatrix}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสัณฐานของริง (ring homomorphism) หรือไม่

6. ให้ I และ J เป็นไอดีลของริง R และ $\varphi : R \rightarrow (R/I) \times (R/J)$ นิยามโดย

$$\varphi(r) = (r + I, r + J) \quad \text{เมื่อ} \quad r \in R$$

จงแสดงว่า φ เป็นฟังก์ชันสัณฐานของริง (ring homomorphism)