



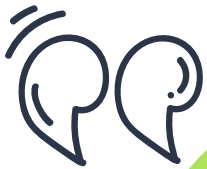
เมทริกซ์ผกผัน

โดย ผศ.ดร.ธนวัฒน์ ศรีศิริวัฒน์

3.1

เมทริกซ์เอกฐาน
และเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน

บทนิยามที่ 3.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ถ้าเมทริกซ์ B ที่ทำให้ $AB = BA = I_n$
แล้ว B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย A^{-1} ดังนั้น $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$



เมทริกซ์ A หาอินเวอร์สได้จะกล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน
(Nonsingular Matrix)

เมทริกซ์ A หาอินเวอร์สไม่ได้จะกล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน
(Singular Matrix)

ทฤษฎีบทที่ 3.1 ถ้าเมทริกซ์ A หาเมทริกซ์ผกผันได้
แล้วเมทริกซ์ที่เป็นเมทริกซ์ผกผัน A จะมีเพียงเมทริกซ์เดียวเท่านั้น



ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

จงแสดงว่า A เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

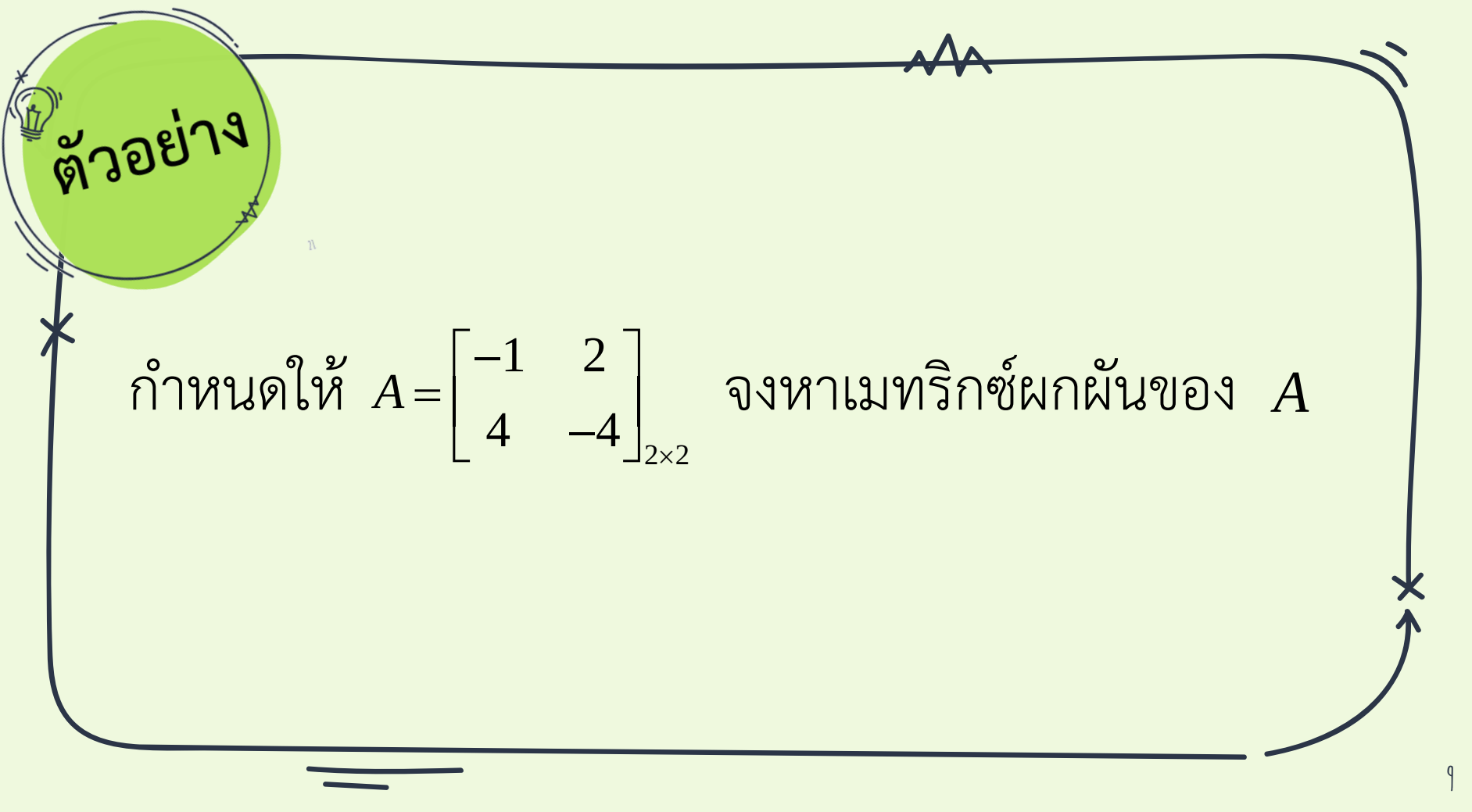
ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ และ $B = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

จงแสดงว่า A เป็นเมทริกซ์ผกผันของ B

และ B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

ทฤษฎีบทที่ 3.2 ถ้าเมทริกซ์ A และ B มีดี $n \times n$ เป็นเมทริกซ์ที่หาเมทริกซ์ผกผันได้
แล้ว AB จะหาเมทริกซ์ผกผันได้ และ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$



ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

จงหาเมทริกซ์ผกผันของ A

ตัวอย่าง

* กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ และ $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 13 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

จงแสดงว่า B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A



ตัวอย่าง

* กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

จงแสดงว่า $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3.2

เมทริกซ์ผกผัน (Adjoint of Matrix)

✕ บทนิยามที่ 3.2 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ และ C_{ij} คือ โคแฟกเตอร์ ของ a_{ij}
โคแฟกเตอร์ ของเมทริกซ์ A คือ $[C_{ij}]_{n \times n} = \text{cof}(A)$ ✕

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ จงหา $\text{cof}(A)$

บทนิยามที่ 3.3 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ A คือ เมทริกซ์สลับเปลี่ยน
* ของโคแฟกเตอร์เมทริกซ์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\text{adj}(A) = (\text{cof}(A))^T = [C_{ij}]^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ จงหา $\text{adj}(A)$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

และ $B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

จงหา $\text{adj}(A)$ และ $\text{adj}(B)$

ทฤษฎีบทที่ 3.3 ถ้าให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ แล้ว $A(\text{adj}(A)) = (\text{adj}(A))A = (\det A)I_n$

พิสูจน์ จาก

$$A(\text{adj}(A)) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

แถวที่ $i \leftarrow$

หลักที่ j

ดังนั้นตำแหน่งที่ i, j ใด ๆ ของเมทริกซ์ A

$$A(\text{adj}(A)) = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn} = \det A = |A| \quad \text{เมื่อ } i = j$$

$$A(\text{adj}(A)) = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn} = 0 \quad \text{เมื่อ } i \neq j$$

นั่นคือ

$$A(\text{adj}(A))$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$= |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$= |A| I_n$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned}\text{จาก } (\text{adj}(A))A &= C_{1i}a_{1j} + C_{2i}a_{2j} + \dots + C_{ni}a_{nj} \\ &= a_{1j}C_{1i} + a_{2j}C_{2i} + \dots + a_{nj}C_{ni}\end{aligned}$$

ตำแหน่งที่ i, j ใด ๆ ของเมทริกซ์ A

$$(\text{adj}(A))A = a_{1j}C_{1i} + a_{2j}C_{2i} + \dots + a_{nj}C_{ni} = \det A = |A| \quad \text{เมื่อ } i = j$$

$$(\text{adj}(A))A = a_{1j}C_{1i} + a_{2j}C_{2i} + \dots + a_{nj}C_{ni} = 0 \quad \text{เมื่อ } i \neq j$$

$$\text{ดังนั้น } (\text{adj}(A))A = |A|I_n$$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

จงหา $A(\text{adj}(A)) = (\text{adj}(A))A = (\det A)I_n$

3.3

การหาเมทริกซ์ผกผัน (Inverse of Matrix)

✕ ทฤษฎีบทที่ 3.4 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ โดยที่ $\det A = ad - bc \neq 0$

จะได้ว่า $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ หรือ $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

พิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2} \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ab-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ab-bc & 0 \\ 0 & -bc+ad \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $AA^{-1} = I$

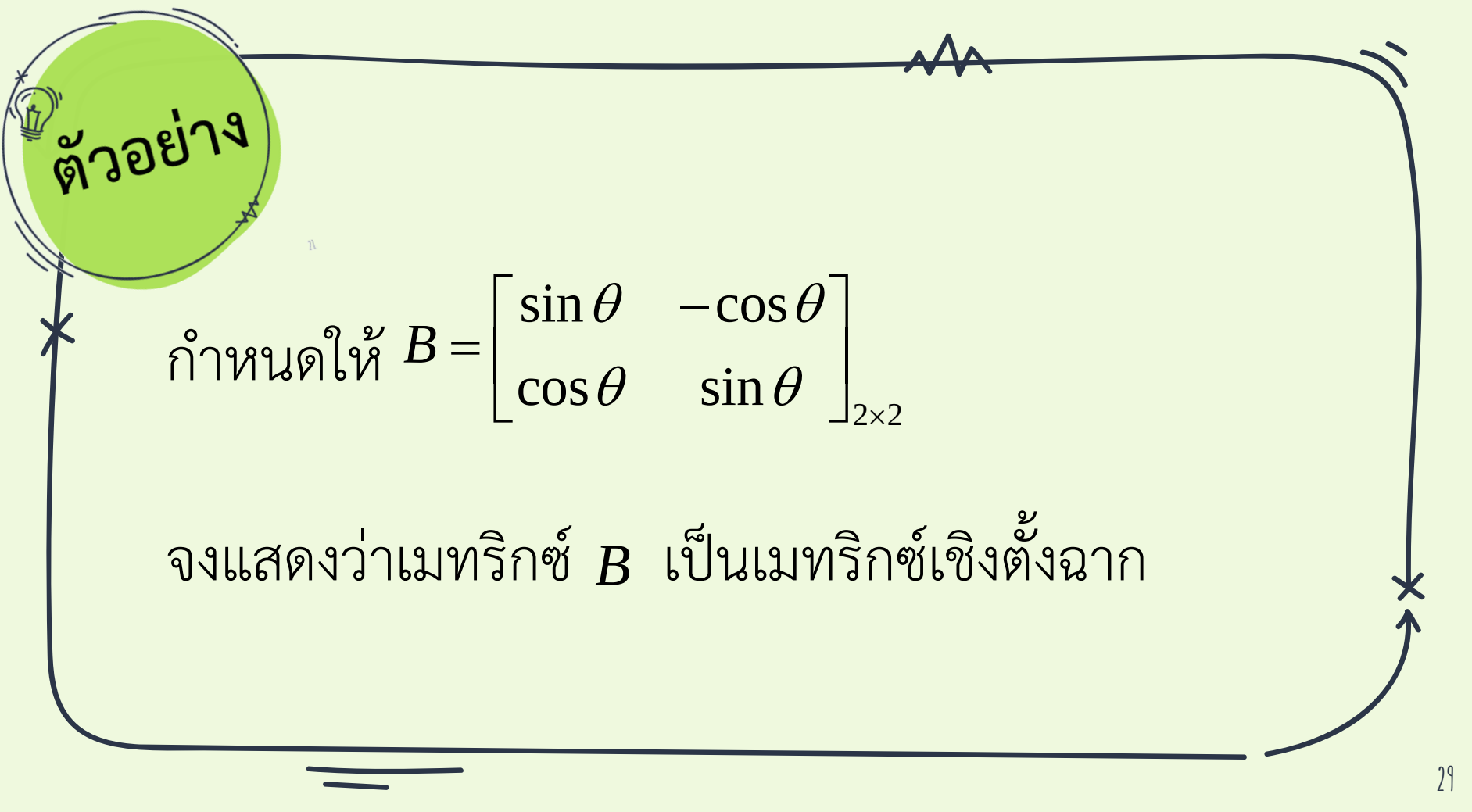


กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ จงหา A^{-1}



กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ จงหา A^{-1}

บทนิยามที่ 3.4 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่หาเมทริกซ์ผกผันได้ และ $A^{-1} = A^T$
จะเรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก (Orthogonal Matrix)



ตัวอย่าง

กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

จงแสดงว่าเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก

* ทฤษฎีบทที่ 3.5 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ โดยที่ $n \geq 2$ และ $\det A \neq 0$

$$\text{จะได้ว่า } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A) \text{ หรือ } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

พิสูจน์ จาก $(adj(A))A = (\det A)I_n$

ถ้า $\det A \neq 0$ ดังนั้น $\frac{1}{\det A} (adj(A))A = I_n$

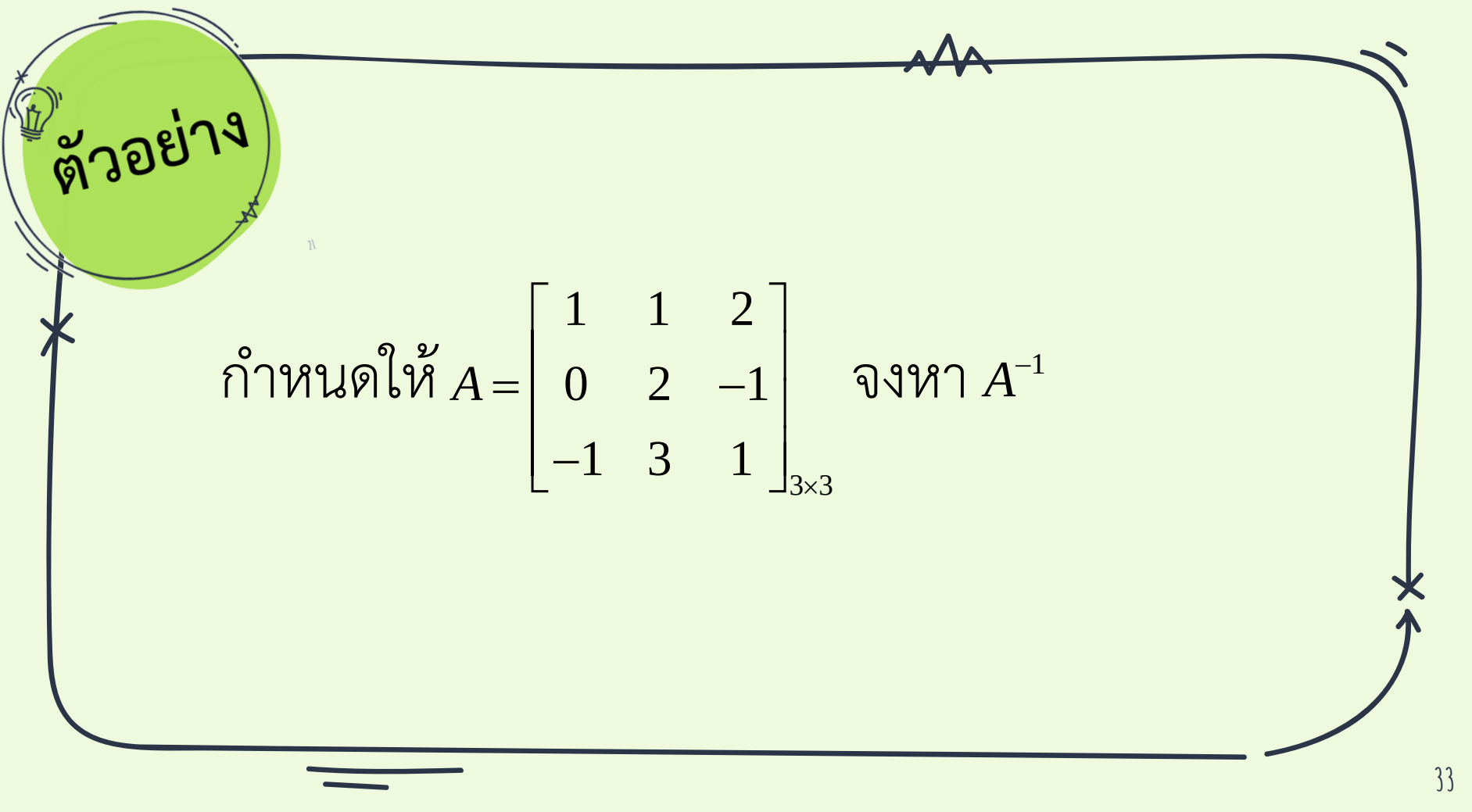
$$\frac{1}{\det A} (adj(A))A^{-1} = I_n A^{-1}$$

$$\frac{1}{\det A} (adj(A))I_n = A^{-1}$$

สรุปได้ว่า $A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A)$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ จงหา A^{-1}



ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ จงหา A^{-1}

ทฤษฎีบทที่ 3.6 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ และ $c \neq 0$ เป็นสเกลาร์ใด ถ้า $\det A \neq 0$ จะได้ว่า

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

3. cA เป็นเมทริกซ์มีใช้เอกฐาน $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$

พิสูจน์ 1. จาก $\det A \neq 0$ จะได้ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A^{-1}

นั่นคือ $A = (A^{-1})^{-1}$

2. จาก $\det A \neq 0$ จะได้ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

ดังนั้น $(AA^{-1})^T = (I_n)^T$

$$(A^{-1})^T A^T = (I_n)^T$$

จะได้ว่า $(A^{-1})^T$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A^T

ดังนั้น $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

3. ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ และ $c \neq 0$ เป็นสเกลาร์ใด ถ้า $\det A \neq 0$

จะได้ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

และจะมี c^{-1} ที่เป็นจำนวนจริง เนื่องจาก $c \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad (c^{-1}A^{-1})(cA) &= (c^{-1}c)(A^{-1}A) \\ &= 1(I_n) = (I_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad (cA)(c^{-1}A^{-1}) &= (cc^{-1})(AA^{-1}) \\ &= 1(I_n) = (I_n) \end{aligned}$$

จะได้ $c^{-1}A^{-1}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของ cA

$$\text{ดังนั้น } (cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$$

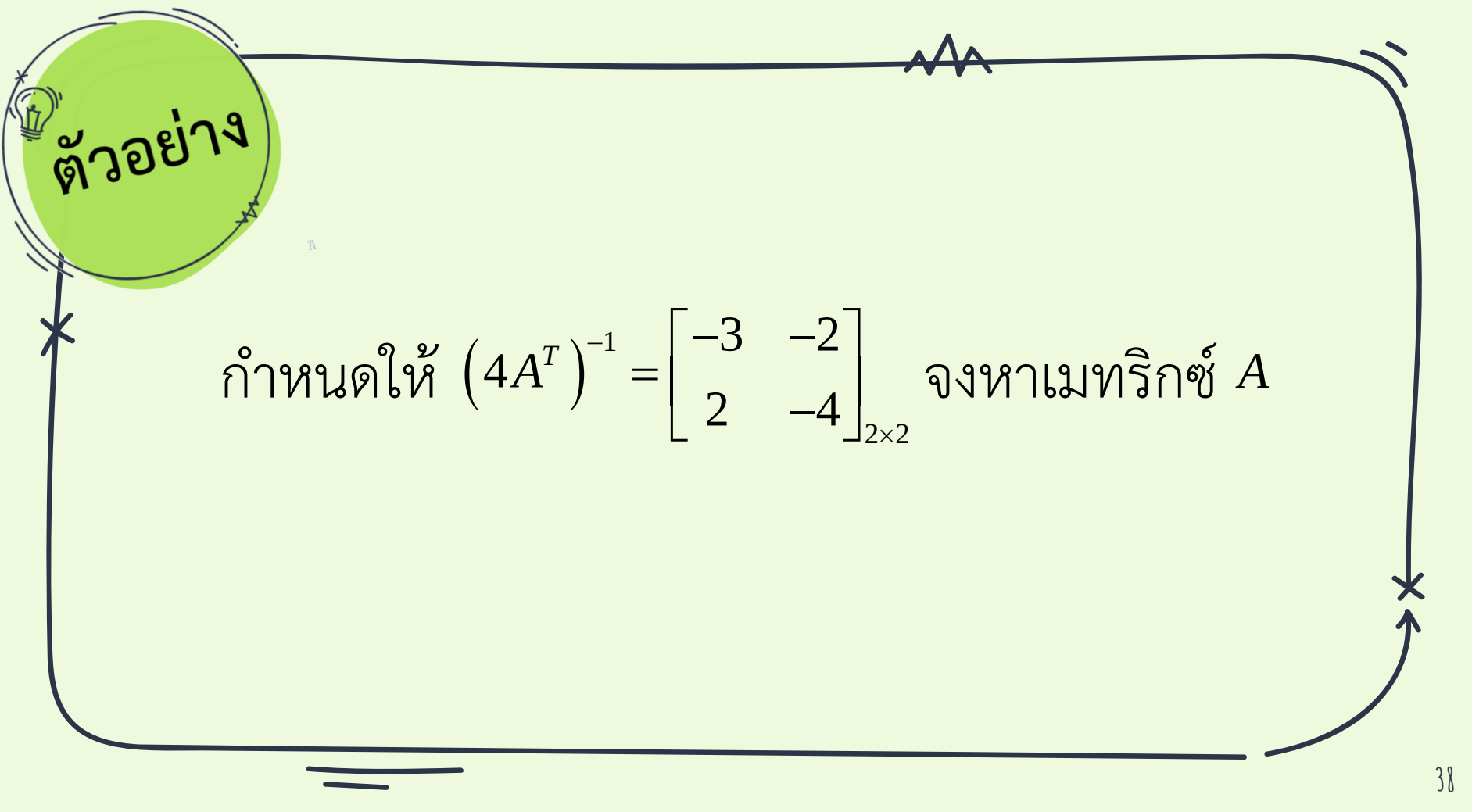
ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

จงหา 1. $(A^{-1})^{-1} = A$

2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

3. $(5A)^{-1} = 5^{-1} A^{-1} = \frac{1}{5} A^{-1}$



ตัวอย่าง

กำหนดให้ $(4A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ จงหาเมทริกซ์ A

บทแทรกที่ 3.1 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ถ้า $\det A \neq 0$ จะได้ว่า $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

พิสูจน์ จาก

$$AA^{-1} = I_n$$

$$\det(AA^{-1}) = \det I_n$$

$$\det A \det A^{-1} = 1$$

ดังนั้น

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ จงแสดงว่า $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

* ทฤษฎีบทที่ 3.7 กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ และ $AB = 0$ จะได้ว่า

1. $A = 0$ หรือ $B = 0$
2. A และ B ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

พิสูจน์ 1. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ เมื่อ $AB=0$ และ A หาเมทริกซ์ผกผันได้
คือ A^{-1}

จะได้

$$\begin{aligned} A^{-1}(AB) &= A^{-1}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

และจะได้

$$\begin{aligned} (A^{-1}A)B &= 0 \\ I_n B &= 0 \\ B &= 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ เมื่อ A หาเมทริกซ์ผกผันได้ จะได้ $B=0$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อกำหนดให้ B หาเมทริกซ์ผกผันได้ จะได้ $A=0$

ดังนั้น ถ้าเมทริกซ์หนึ่งหาเมทริกซ์ผกผันได้ อีกเมทริกซ์หนึ่งจะเป็นศูนย์

2. ถ้าหา A^{-1} ได้ จะได้ว่า $|A| \neq 0$ และถ้าหา A^{-1} ไม่ได้ จะได้ว่า $|A| = 0$

จาก $AB = 0$

$$|AB| = 0$$

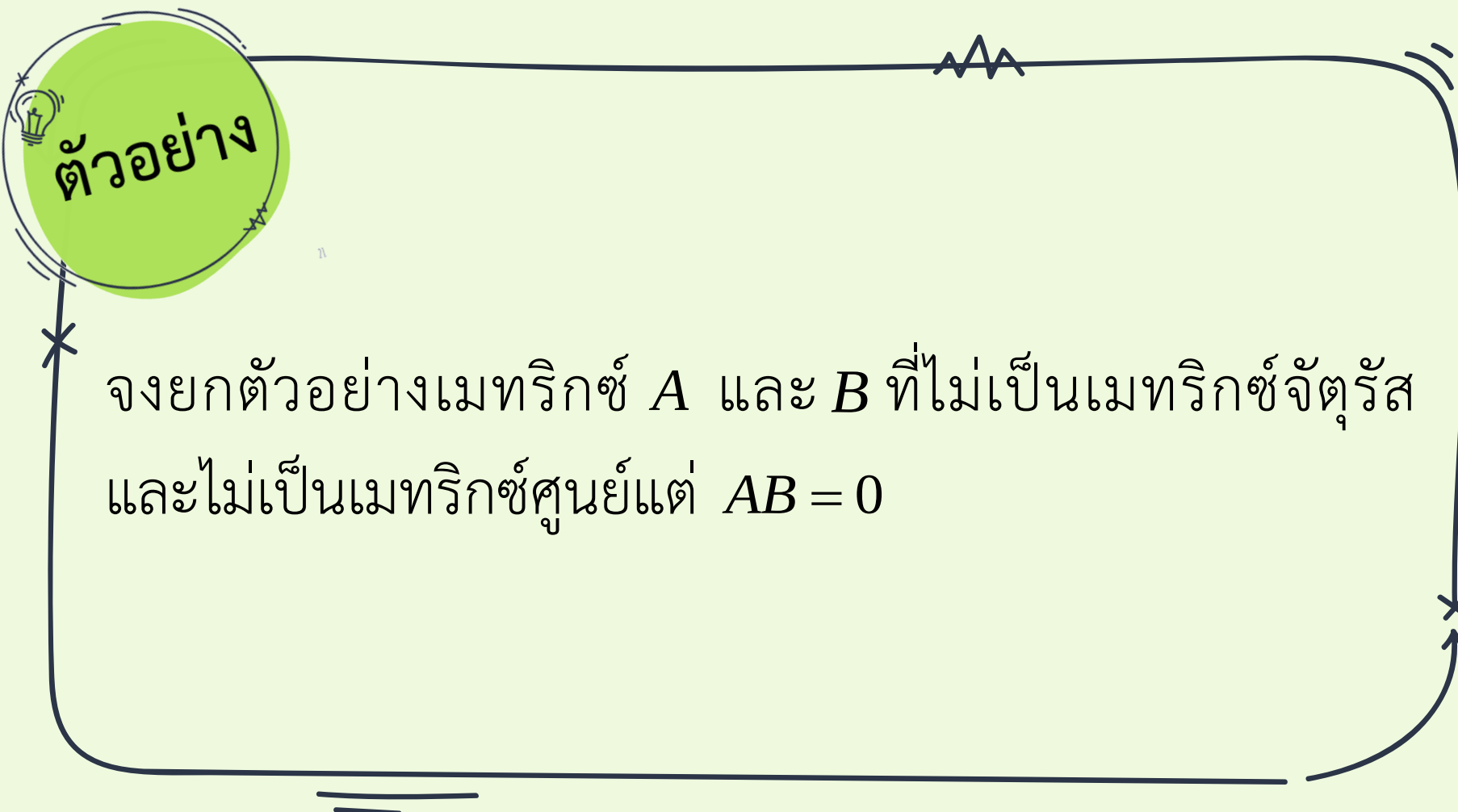
นั่นคือ $|A| = 0$

หรือ $|B| = 0$

หรือ $|A| = |B| = 0$

ถ้า $|A| = |B| = 0$ ดังนั้น A และ B ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

หมายเหตุ ถ้าเมทริกซ์ A และ B ไม่เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และไม่^{เป็น}เมทริกซ์ศูนย์ เป็นไปได้ที่ $AB = 0$



ตัวอย่าง

จงยกตัวอย่างเมทริกซ์ A และ B ที่ไม่เป็นเมทริกซ์จัตุรัส
และไม่เป็นเมทริกซ์ศูนย์แต่ $AB = 0$

ทฤษฎีบทที่ 3.8 กำหนดให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ และ A
หาเมทริกซ์ผกผันได้ ถ้า $AB = AC$ แล้ว $B = C$

พิสูจน์ กำหนดให้ A หาเมทริกซ์ผกผันได้คือ A^{-1}

ถ้า

$$AB = AC$$

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$$

$$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$$

$$I_n B = I_n C$$

$$B = C$$

3.4

การหาเมทริกซ์ผกผันโดยใช้
การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว

✕ แนวทางในการหา A^{-1} โดยการพิจารณาจาก $E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 A = I_n$ ดังนั้นจะได้ $A^{-1} = E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1$
นั่นคือ ถ้าดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานบนเมทริกซ์ A จนกระทั่งได้ I_n
แล้วจะได้ว่า ผลคูณของเมทริกซ์เบื้องต้นแบบแถวที่สมมูลกันกับการดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน
ที่กระทำบน A คือ A^{-1}

ดังนั้นในการหา A^{-1} ที่ใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานบนเมทริกซ์ $[A: I_n]$ ซึ่งทำให้

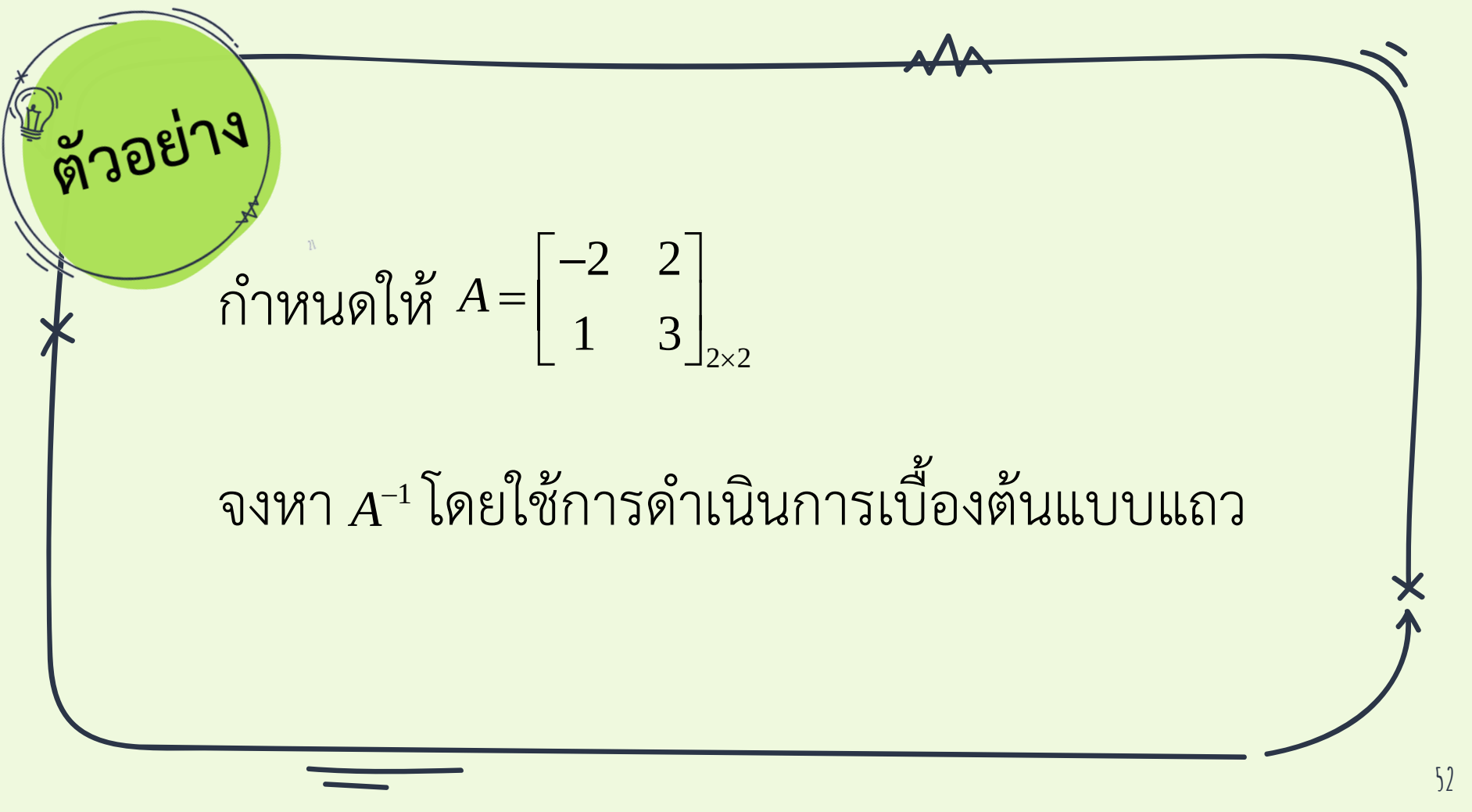
$$\begin{aligned}(E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1)[A: I_n] &= [E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 A: E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 I_n] \\ &= [I_n: A^{-1}]\end{aligned}$$

ถ้า A ไม่สามารถเปลี่ยนเป็น I_n โดยการดำเนินการแบบแถวได้

แล้ว A จะเป็นเมทริกซ์เอกฐานหรือ $\det A = 0$ นั่นคือไม่สามารถหาอินเวอร์สได้

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n เริ่มต้นจาก $[A: I_n]$

และดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานจนทำให้ $[A: I_n]$ เปลี่ยนเป็น $[I_n: A^{-1}]$ ดังนั้น $B = A^{-1}$



ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

จงหา A^{-1} โดยใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

จงหา A^{-1} โดยใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว

ตัวอย่าง

จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้เมื่อ

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$

จงหา A^{-1} โดยใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$

จงหา A^{-1} โดยใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว

เอกสารอ้างอิง

นิศากร ส้งวาระนที. (2558). ตำรารายวิชาพืชคณิตเชิงเส้น. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.
มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.

จิราภา ลีมนพศิริพร. (2551). พืชคณิตศาสตร์เชิงเส้น. คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.

