

บทที่ 2

ปริมาณทางฟิสิกส์

(Physics quantity)

การศึกษาทางฟิสิกส์แบ่งออกเป็นการศึกษาเชิงทฤษฎี และการศึกษาเชิงการทดลอง ซึ่งจะมีการใช้เครื่องมือวัดหลากหลายชนิดในการทำการทดลอง เพื่อจะวัดขนาดหรือปริมาณของสิ่งที่ต้องการศึกษา ในฟิสิกส์จึงมีการแบ่งปริมาณต่างๆ เหล่านี้ไว้เป็น 2 ปริมาณ คือ ปริมาณเวกเตอร์ และปริมาณสเกลาร์ ทั้งสองปริมาณนี้มีความสำคัญเท่าเทียมกัน แต่จะพบว่าปริมาณเวกเตอร์จะมีความซับซ้อนมากกว่าเพราะต้องวัดทั้งขนาดและทิศทางถึงจะสมบูรณ์ แต่สำหรับปริมาณสเกลาร์เป็นปริมาณที่มีแต่เพียงทิศทาง ในบทนี้จะมุ่งศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับปริมาณเวกเตอร์ ซึ่งเป็นปริมาณพื้นฐานในการใช้ระบุปริมาณทางฟิสิกส์ในเนื้อหาในบทต่อไป

2.1 ปริมาณสเกลาร์ (Scalar)

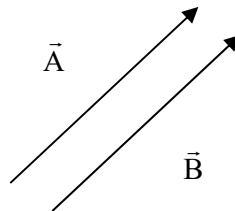
ปริมาณสเกลาร์ คือปริมาณที่พิจารณาเฉพาะขนาด ตัวอย่าง ได้แก่ อุณหภูมิ เวลา มวล เป็นต้น โดยอุณหภูมิก็จะบอกได้แค่ร้อนหรือเย็น เวลาก็เป็นปริมาณสเกลาร์เช่นกัน ซึ่งก็จะบอกได้แค่นานหรือไม่นาน หรือเมื่อพิจารณามวลถ้ามีค่ามากก็แสดงว่ามีความเฉื่อยมาก ตัวอย่างอื่นๆ ของปริมาณสเกลาร์ ได้แก่ พลังงาน กำลัง เป็นต้น

2.2 ปริมาณเวกเตอร์ (Vector)

ปริมาณเวกเตอร์ คือปริมาณที่มีการพิจารณาทั้งทิศทางและขนาด ตัวอย่างเช่น การกระจัด ความเร็ว แรง สนามไฟฟ้า ความเร่ง เป็นต้น ซึ่งในการศึกษาทางฟิสิกส์นั้น ปริมาณเวกเตอร์ถือว่ามีความสำคัญอย่างยิ่ง สำหรับในบทนี้เราจะศึกษาสมบัติของปริมาณเวกเตอร์

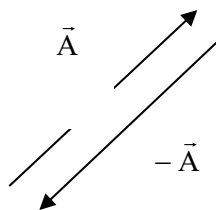
2.2.1 สมบัติของเวกเตอร์

(1) การเท่ากันของเวกเตอร์ การที่เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะเท่ากันนั้นจะต้องมีทั้งขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน ดังภาพที่ 2.1



ภาพที่ 2.1 การเท่ากันของเวกเตอร์

(2) เวกเตอร์ลบ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับเวกเตอร์บวก แต่มีทิศทางตรงข้าม ตัวอย่างของเวกเตอร์ลบ แสดงดังในภาพที่ 2.2



ภาพที่ 2.2 เวกเตอร์ที่เป็นลบ

2.3 การรวมเวกเตอร์ (Vector combination)

การรวมเวกเตอร์ คือ การนำเวกเตอร์ตั้งแต่สองเวกเตอร์ขึ้นไปมารวมหรือบวกกัน โดยวิธีการรวมกันของเวกเตอร์ ซึ่งแบ่งได้เป็นสองวิธี ได้แก่

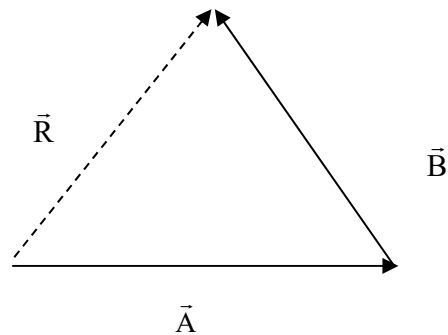
2.3.1 การรวมเวกเตอร์โดยการเขียนรูป

วิธีการรวมเวกเตอร์โดยการเขียนรูปนี้ เราสามารถพิจารณาได้เป็นสองกรณี คือ

(1) การหาผลลัพธ์ของเวกเตอร์ ในกรณีที่เวกเตอร์สองตัวไม่ได้มีจุดกำเนิดอยู่ที่เดียวกัน นั่นคือมีจุดเริ่มต้นคนละจุดหรือมีลักษณะต่อกันแบบหางต่อหัว ซึ่งแทนด้วยลูกศร ดังภาพที่ 2.3 จะนำจุดเริ่มต้นหรือหางของ $\vec{B}$ มาต่อกับจุดสุดท้ายหรือหัวของ $\vec{A}$ จากนั้นทำการลากเวกเตอร์จาก

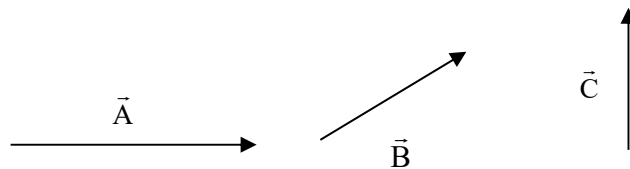
จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ตัวแรกไปยังจุดสุดท้ายของตัวที่สอง เราก็จะได้เวกเตอร์ลัพธ์ จาก

ภาพที่ 2.3 จะได้เวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

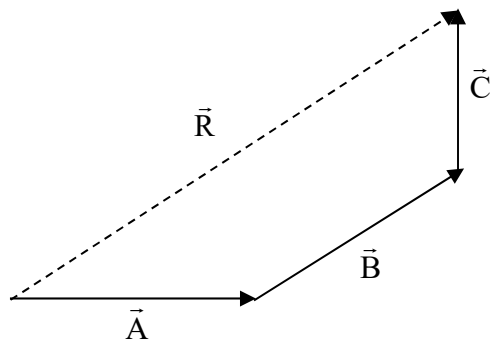


ภาพที่ 2.3 การรวมเวกเตอร์แบบหางต่อหัว

ตัวอย่างที่ 2.1 จากรูปจงหาเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

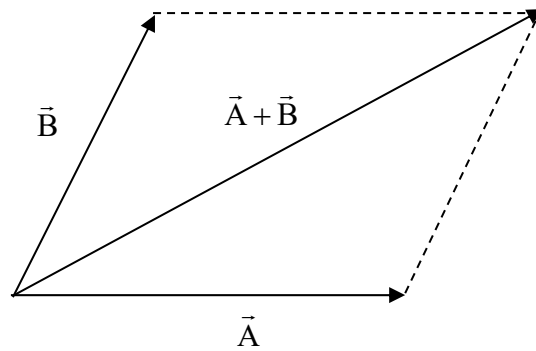


วิธีทำ ใช้หลักการรวมแบบเขียนรูปจะได้ดังภาพที่ 2.4



ภาพที่ 2.4 การหาเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{R}$

(2) การรวมเวกเตอร์ในกรณีที่เวกเตอร์สองเวกเตอร์ มีจุดกำเนิดร่วมกันหรือหางต่อกันอยู่ดังภาพที่ 2.5 สำหรับหลักการรวมเวกเตอร์แบบนี้ จะต้องสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยให้มีด้านขนานกันสองด้านกับเวกเตอร์สองเวกเตอร์ หลังจากนั้นลากเส้นจากจุดกำเนิดของเวกเตอร์ทั้งสองไปตัดกับเส้นทแยงมุมของด้านขนานที่สร้างขึ้นก็จะได้เวกเตอร์ลัพธ์ที่เป็นเส้นทแยงมุม

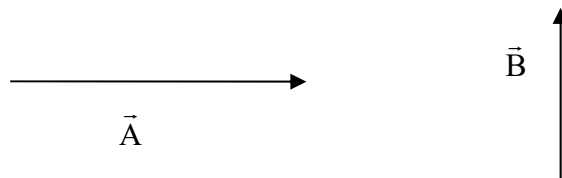


ภาพที่ 2.5 การรวมเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่มีจุดกำเนิดร่วมกัน

สำหรับการลบกันของเวกเตอร์ จะใช้หลักเดียวกันกับการบวกเวกเตอร์ นั่นก็คือ

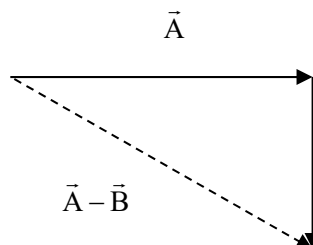
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad (2-1)$$

พิจารณาเวกเตอร์ สองเวกเตอร์ดังภาพที่ 2.6



ภาพที่ 2.6 เวกเตอร์สองเวกเตอร์

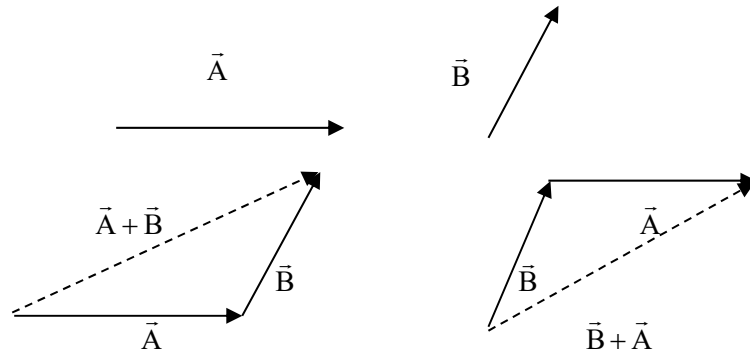
จะได้ $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ ดังภาพที่ 2.7



ภาพที่ 2.7 การลบกันของเวกเตอร์

เป็นที่ทราบกันอยู่แล้วว่าการบวกปริมาณสเกลาร์จะมีสมบัติในการสลับที่ได้ของการบวก ส่วนการลบ ปริมาณสเกลาร์ไม่มีสมบัติของการสลับที่ในการลบ ต่อไปจะพิจารณาเฉพาะปริมาณเวกเตอร์

จากภาพที่ 2.8 แสดงวิธีการหาปริมาณเวกเตอร์ $\vec{A} + \vec{B}$ และ $\vec{B} + \vec{A}$

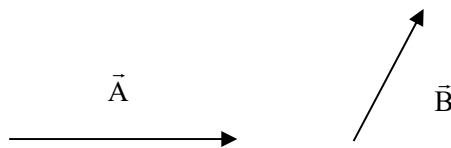


ภาพที่ 2.8 การรวมหรือบวกกันของสองเวกเตอร์

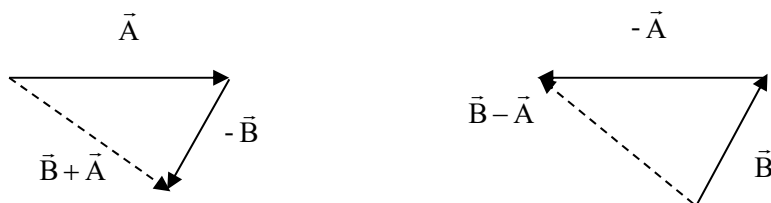
พิจารณาจากภาพที่ 2.8 สรุปได้ว่า

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad (2-2)$$

ต่อมาพิจารณาจากภาพที่ 2.9 ว่าปริมาณเวกเตอร์ $\vec{A} - \vec{B} = \vec{B} - \vec{A}$ หรือไม่



จากภาพจะได้



ภาพที่ 2.9 การสลับที่ของการลบเวกเตอร์

จากภาพที่ 2.9 สรุปได้ว่า

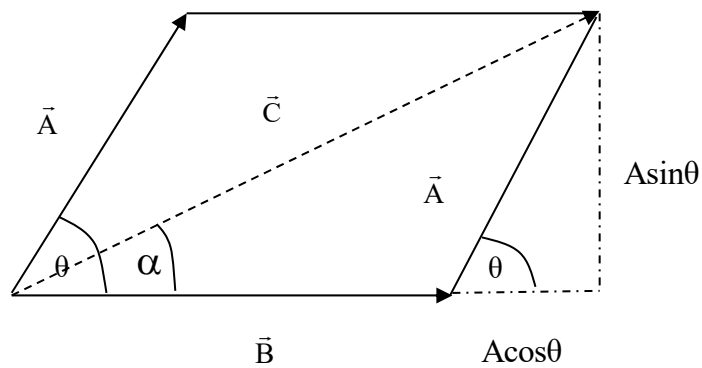
$$\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A} \quad (2-3)$$

แต่

$$\vec{A} - \vec{B} = -(\vec{B} - \vec{A}) \quad (2-4)$$

2.3.2 การหาผลรวมของเวกเตอร์โดยวิธีแยกองค์ประกอบ

(1) กรณีเวกเตอร์สองเวกเตอร์ทำมุม θ ต่อกัน พิจารณาภาพที่ 2.10



ภาพที่ 2.10 การแยกองค์ประกอบของเวกเตอร์เพื่อพิสูจน์การใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จากภาพที่ 2.10 จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagorean theorem) จะได้

$$\begin{aligned} (AD)^2 &= (AC)^2 + (CD)^2 \\ |\vec{C}|^2 &= C^2 \\ &= (B + A \cos \theta)^2 + (A \sin \theta)^2 \\ &= B^2 + A^2 \cos^2 \theta + 2BA \cos \theta + A^2 \sin^2 \theta \\ &= A^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + B^2 + 2AB \cos \theta \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$$

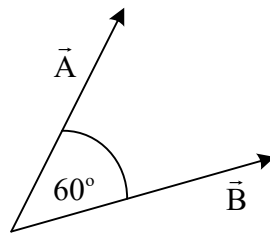
$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \quad (2-5)$$

พิจารณาจากภาพที่ 2.10 เราสามารถหาทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์ได้จากสมการ

$$\tan\alpha = \frac{A\sin\theta}{B+A\cos\theta} \quad (2-6)$$

เมื่อ α คือมุมที่เวกเตอร์ลัพธ์กระทำกับแกน X

ตัวอย่างที่ 2.2 เวกเตอร์ $\vec{A}$ มีขนาด 5 เมตร ทำมุม 60 องศา กับเวกเตอร์ $\vec{B}$ ซึ่งมีขนาด 3 เมตร ดังภาพที่ 2.11 จงหาเวกเตอร์ลัพธ์ของเวกเตอร์ทั้งสองพร้อมทั้งคำนวณหาทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์



ภาพที่ 2.11 องค์ประกอบของเวกเตอร์

วิธีทำ จากสมการที่ (2-5) หาขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{C}$ ได้คือ

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

แทนค่าเวกเตอร์ $\vec{A}$ และเวกเตอร์ $\vec{B}$ ทำมุมกัน 60 องศา จะได้ขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{5^2 + 3^2 + (2)(5)(3)(\cos 60^\circ)} \\ &= \sqrt{15 + 9 + 15} \\ &= 6.24 \end{aligned}$$

หาทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์จากสมการที่ (2-6)

$$\tan\alpha = \frac{A\sin\theta}{B+A\cos\theta}$$

แทนค่าเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ทำมุมกัน 60 องศา ลงไปจะได้

$$\tan\alpha = \frac{5\sin 60^\circ}{3+\cos 60^\circ}$$

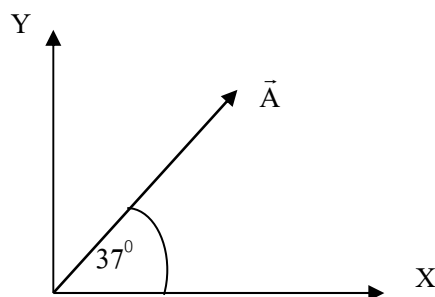
$$\begin{aligned}
 &= \frac{(5)\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]}{3+(5)\left[\frac{1}{2}\right]} \\
 &= 0.79 \\
 \text{จะได้ } \alpha &= \tan^{-1} 0.79 \\
 &= 38^\circ
 \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้เวกเตอร์ลัพธ์มีขนาดเท่ากับ 6.24 เมตร และมีทิศทาง 38 องศา กับแกน X

(2) การรวมเวกเตอร์กรณีที่เวกเตอร์ทำมุมมากกว่าสองเวกเตอร์ ใช้วิธีการแยกองค์ประกอบของเวกเตอร์ออกเป็นตามแกน X และแกน Y ซึ่งมีหลักการดังนี้

1. ตั้งพิกัดแกน X และแกน Y ตรงจุดตัดของเวกเตอร์
2. แยกองค์ประกอบของเวกเตอร์แต่ละอันเป็นองค์ประกอบทางแกน X และ Y โดยแยกองค์ประกอบตามแกน X เป็น $\cos \theta$ และตามแกน Y เป็น $\sin \theta$
3. รวมองค์ประกอบตามแกน X และแกน Y
4. หาผลรวมของเวกเตอร์โดยใช้สมการ เวกเตอร์ลัพธ์ $= \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ เมื่อ A_x และ A_y คือผลรวมของเวกเตอร์องค์ประกอบตามแกน X และแกน Y ตามลำดับ
5. หาทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์จาก $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$

ตัวอย่างที่ 2.3 จงแยกองค์ประกอบตามแกน X และแกน Y ของเวกเตอร์ดังภาพที่ 2.12 นี้



ภาพที่ 2.12 เวกเตอร์

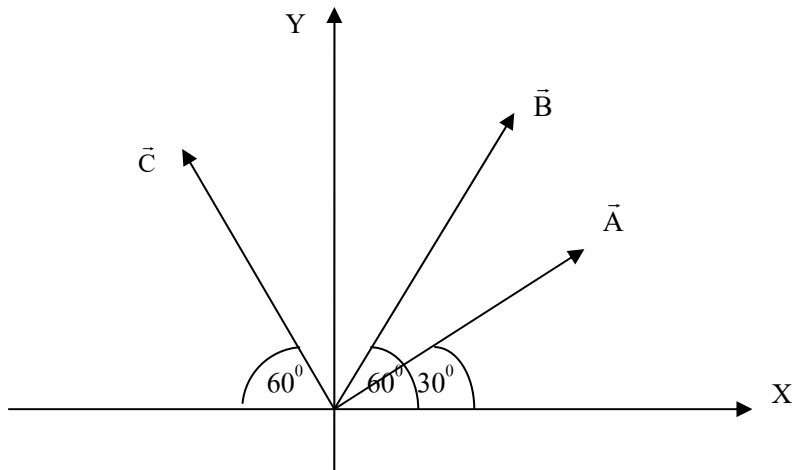
วิธีทำ

$$\text{จากภาพที่ 2.12 หางงศ์ประกอบตามแกน X} = A \cos 37^\circ = (10) \left(\frac{4}{5} \right) = 8$$

$$\text{จากรูปหางงศ์ประกอบตามแกน Y} = A \sin 37^\circ = (10) \left(\frac{3}{5} \right) = 6$$

นั่นคือเวกเตอร์ข้างบนมีองศ์ประกอบตามแกน X = 8 และมีองศ์ประกอบตามแกน Y = 6

ตัวอย่างที่ 2.4 จากรูปจงหาผลรวมของเวกเตอร์ทั้งสาม พร้อมทั้งหาทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์นี้ กำหนดให้เวกเตอร์ $\vec{A} = 5$ หน่วย เวกเตอร์ $\vec{B} = 7$ เวกเตอร์ $\vec{C} = 6$ หน่วย



ภาพที่ 2.13 การแยกองศ์ประกอบของเวกเตอร์

วิธีทำ จากภาพหาผลรวมขององศ์ประกอบตามแกน

$$\begin{aligned} X &= A \cos \theta + B \cos \theta + C \cos \theta \\ &= 5 \cos 30^\circ + 7 \cos 60^\circ + 6 \cos 120^\circ \\ &= 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 7 \left(\frac{1}{2} \right) + 6 \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= 4.83 \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

จากภาพจงหาผลรวมขององศ์ประกอบตามแกน

$$\begin{aligned} Y &= A \sin \theta + B \sin \theta + C \sin \theta \\ &= 5 \sin 30^\circ + 7 \sin 60^\circ + 6 \sin 120^\circ \end{aligned}$$

$$= 5\left(\frac{1}{2}\right) + 7\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 11.56 \text{ หน่วย}$$

$$\text{ดังนั้นจะได้เวกเตอร์ลัพธ์} = \sqrt{4.83^2 + 11.56^2}$$

$$= 12.53 \text{ หน่วย}$$

หาทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์จาก

$$\tan\theta = \frac{11.56}{4.83}$$

$$= 2.39$$

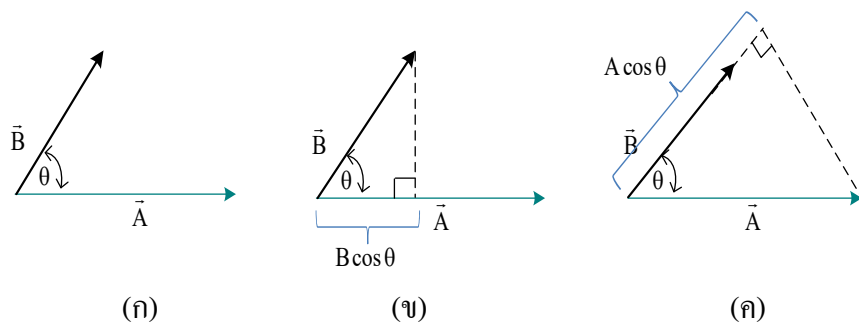
นั่นคือ เวกเตอร์ลัพธ์มีทิศทางมุม $\tan^{-1} 2.39$ กับแกน X

2.4 การคูณเวกเตอร์ (Vector multiplication)

สำหรับการคูณเวกเตอร์จะประกอบไปด้วยการคูณอยู่สองแบบ คือ

2.4.1 การคูณเวกเตอร์เชิงสเกลาร์

การคูณเวกเตอร์เชิงสเกลาร์ (Scalar product) ใช้สัญลักษณ์ $\vec{A} \cdot \vec{B}$ แทนผลคูณเวกเตอร์เชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ สัญลักษณ์นี้ทำให้ผลคูณเวกเตอร์เชิงสเกลาร์ หรือมีชื่อเรียกอีกอย่างว่าผลคูณแบบจุด (Dot product)



ภาพที่ 2.14 เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ลากออกจากจุดตั้งต้นร่วมกัน ผลคูณเวกเตอร์เชิงสเกลาร์

จากภาพที่ 2.14 (ก) $\vec{A} \times \vec{B} = AB \cos \theta$ (ข) $B \cos \theta$ คือองค์ประกอบของ $\vec{B}$ ในทิศทางของ $\vec{A}$ และ $\vec{A} \times \vec{B}$ คือผลคูณของขนาดของ $\vec{A}$ กับองค์ประกอบนี้ (ค) $\vec{A} \times \vec{B}$ มีค่าเท่ากับผลคูณของขนาดของ $\vec{B}$ กับองค์ประกอบของ $\vec{A}$ ในทิศทางของ $\vec{B}$ ด้วย เพื่อที่จะนิยามผลคูณเวกเตอร์เชิงสเกลาร์ $\vec{A} \times \vec{B}$ ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เราวาดเวกเตอร์ทั้งสองให้หาง

ออกจากจุดเดียวกันดังแสดงในภาพที่ 2.14 (ก) มุมระหว่างทิศของเวกเตอร์ทั้งสองคือ θ โดยที่มุม θ มีค่าระหว่าง 0° และ 180° เสมอ ในภาพที่ 2.14 (ข) แสดงเงาของ $\vec{B}$ บนทิศของ $\vec{A}$ เงาี้คือองค์ประกอบของ $\vec{B}$ ที่ขนานกับ $\vec{A}$ และมีค่าเท่ากับ $B \cos \theta$ เรานิยาม $\vec{A} \times \vec{B}$ ว่ามีค่าเท่ากับขนาดของ $\vec{A}$ คูณกับองค์ประกอบของ $\vec{B}$ ในทิศที่ขนานกับ $\vec{A}$ เมื่อเขียนในรูปสมการเราได้ว่า

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \cos \theta \quad (2-7)$$

เมื่อ θ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ และมีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 180° เสมอ เราอาจนิยามผลคูณเวกเตอร์เชิงสเกลาร์ $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ได้อีกแบบหนึ่งว่าเท่ากับขนาดของ $\vec{B}$ คูณกับองค์ประกอบของ $\vec{A}$ ในทิศที่ขนานกับ $\vec{B}$ ดังแสดงในภาพที่ 2.14 (ค)

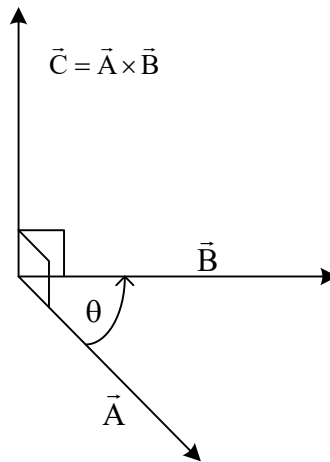
ตัวอย่างที่ 2.5 จงหาผลคูณแบบสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ที่มีขนาด 1 หน่วยที่ทำมุม 30° กับเวกเตอร์ $\vec{B}$ ที่มีขนาด 2 หน่วย

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{จากสมการ (2-7)} \quad \vec{A} \times \vec{B} &= AB \cos \theta \\ \text{แทนค่าจะได้} \quad &= (1)(2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \sqrt{3} \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

2.4.2 การคูณเวกเตอร์เชิงเวกเตอร์ (Cross product)

การคูณเวกเตอร์เชิงเวกเตอร์นี้ ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นเวกเตอร์ ซึ่งต่างจากการคูณเวกเตอร์เชิงสเกลาร์ผลลัพธ์ที่ได้เป็นสเกลาร์ เราใช้สัญลักษณ์ (อ่านว่า ครอส) หรือ Cross product แทนการคูณเวกเตอร์กับเวกเตอร์ระหว่างเวกเตอร์ และเพื่อบอกนิยามผลคูณเวกเตอร์เชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ และเราวาดเวกเตอร์ทั้งสองให้หางอยู่ที่จุดเดียวกันดังแสดงในภาพที่ 2.15 เวกเตอร์ทั้งสองนี้อยู่ในระนาบหนึ่ง



ภาพที่ 2.15 เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ วางตัวในระนาบหนึ่ง

$$\vec{C} = AB \sin \theta \quad (2-8)$$

สำหรับทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์หาได้โดยการใช้กฎมือขวา คือใช้มือขวากวาดจากเวกเตอร์ที่ตั้งไปหาเวกเตอร์ที่นำมาคูณจะได้ทิศของเวกเตอร์ลัพธ์คือ ทิศเดียวกับหัวแม่มือ โดยวางนิ้วมือไปตามแนวเวกเตอร์ดังภาพที่ 2.15

ถ้าเรารู้องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เราคำนวณองค์ประกอบของผลคูณเวกเตอร์ได้โดยใช้กระบวนการทำนองเดียวกับที่ใช้หาผลคูณเชิงสเกลาร์ ก่อนอื่นเราต้องการคูณเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector) $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ ซึ่งก็คือเวกเตอร์นั้นหารด้วยขนาดของตัวเอง ผลคูณของเวกเตอร์ใดๆกับตัวเองมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \quad (2-9)$$

จากสมการ (2-8) และใช้กฎมือขวา เราพบว่า

$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{j} \times \hat{i} = \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{k} \times \hat{j} = \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{i} \times \hat{k} = \hat{j} \end{aligned} \quad (2-10)$$

เขียนเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ในรูปขององค์ประกอบแต่ละเวกเตอร์และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย
ในทิศของแต่ละองค์ประกอบ แล้วกระจายเทอมสำหรับการคูณเวกเตอร์ออกมา

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= A_x \hat{i} \times B_x \hat{i} + A_x \hat{i} \times B_y \hat{j} + A_x \hat{i} \times B_z \hat{k} \\ &\quad + A_y \hat{j} \times B_x \hat{i} + A_y \hat{j} \times B_y \hat{j} + A_y \hat{j} \times B_z \hat{k} \\ &\quad + A_z \hat{k} \times B_x \hat{i} + A_z \hat{k} \times B_y \hat{j} + A_z \hat{k} \times B_z \hat{k}\end{aligned}\quad (2-11)$$

เราสามารถเขียนเทอมของแต่ละเทอมใหม่เป็น $A_x \hat{i} \times B_y \hat{j} = (A_x B_y) \hat{i} \times \hat{j}$ และอื่นๆโดยใช้การคูณเวกเตอร์หนึ่งหน่วยและจัดกลุ่มเทอมต่างๆ พบว่า

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \quad (2-12)$$

ดังนั้นองค์ประกอบของ $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ คือ

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad C_y = A_z B_x - A_x B_z, \quad C_z = A_x B_y - A_y B_x \quad (2-13)$$

เรายังสามารถเขียนผลคูณเวกเตอร์เชิงเวกเตอร์ในรูปดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant) ได้เป็น

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} \\ &\quad + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} \\ &\quad + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}\end{aligned}\quad (2-14)$$

ตัวอย่างที่ 2.6 เวกเตอร์ $\vec{A}$ มีขนาด 6 หน่วย ทิศ +X เวกเตอร์ $\vec{B}$ มีขนาด 4 หน่วย อยู่บนระนาบ XY ทำมุม 30° กับแกน +X และทำมุม 60° กับแกน +Y จงหาผลลัพธ์ของ $\vec{A} \times \vec{B}$

วิธีทำ ขนาดของผลคูณเชิงเวกเตอร์ คือ

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \times \vec{B} &= AB \sin \theta \\
 &= (6)(4) \sin 30^\circ \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

จากกฎของมือขวา ผลลัพธ์ของ $\vec{A} \times \vec{B}$ จะอยู่ในทิศ +Z

เราสามารถเขียนส่วนประกอบของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ บนแกน X, Y และ Z ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 A_x &= 6, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0 \\
 B_x &= 4 \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}, \quad B_y = 4 \cos 60^\circ = 2, \quad B_z = 0
 \end{aligned}$$

ให้ $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ ส่วนประกอบของเวกเตอร์ $\vec{C}$ บนพิกัด X, Y และ Z คือ

$$\begin{aligned}
 C_x &= (0)(0) - (0)(2) = 0 \\
 C_y &= (0)(2\sqrt{3}) - (6)(0) = 0 \\
 C_z &= (6)(2) - (0)(2\sqrt{3}) = 12
 \end{aligned}$$

เวกเตอร์ $\vec{C}$ จะมีทิศอยู่ในแกน +Z ส่วนขนาดจะเท่ากับ $\sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} = 12$ หน่วย
หรือ $\vec{C} = 12 \hat{k}$

ตัวอย่างที่ 2.7 กำหนดให้เวกเตอร์ $\vec{A} = (2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k})\text{m}$ และ $\vec{B} = (\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})\text{m}$ จงหา

(ก) $\vec{A} \times \vec{B}$ (ข) มุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \text{(ก) } \vec{A} \times \vec{B} &= (2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}) \times (\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})\text{m}^2 \\
 &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \text{m}^2 \\
 &= \hat{i} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \text{m}^2 \\
 &= (10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k})\text{m}^2
 \end{aligned}$$

(ข) มุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

$$\text{จาก } |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta$$

$$|\vec{A}| = A = \left[(2\text{m})^2 + (-3\text{m})^2 + (-1\text{m})^2 \right]^{1/2} = (14)^{1/2} \text{m}$$

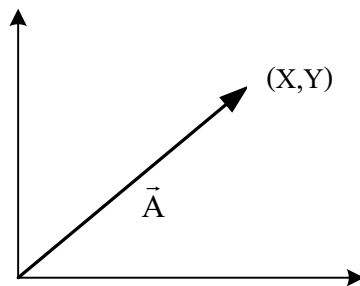
$$|\vec{B}| = B = \left[(1\text{m})^2 + (4\text{m})^2 + (-2\text{m})^2 \right]^{1/2} = (21)^{1/2} \text{m}$$

เพราะฉะนั้น มุม θ ระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง คือ

$$\begin{aligned}
 \sin \theta &= \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{AB} = \frac{|10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k}| \text{ m}^2}{[(14)^{1/2} \text{ m}][(21)^{1/2} \text{ m}]} \\
 &= 0.8845 \\
 \theta &= 62^\circ
 \end{aligned}$$

2.5 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก (Vector in Cartesian coordinates system)

ในการเขียนตำแหน่งของเวกเตอร์นั้นเราจะต้องระบุตำแหน่งที่อยู่ของเวกเตอร์ตามแกนแต่ละแกนดังภาพที่ 2.16



ภาพที่ 2.16 ระบบพิกัดฉากของเวกเตอร์

จากภาพที่ 2.16 ถ้าให้ $\hat{i}$ เป็นทิศทางตามแกน X และ $\hat{j}$ เป็นทิศทางตามแกน Y สามารถเขียนเวกเตอร์ในระบบพิกัดได้คือ

$$\vec{A} = X\hat{i} + Y\hat{j}$$

และจะได้ขนาดของเวกเตอร์

$$|\vec{A}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

2.5.1 การบวกเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

หลักการของการบวกเวกเตอร์ตามระบบพิกัดฉากคือเอาเวกเตอร์ที่อยู่ทิศหรือตำแหน่งเดียวกันบวกกัน ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned}
 \vec{A} &= 5\hat{i} + 2\hat{j} \\
 \vec{B} &= 2\hat{i} + 3\hat{j}
 \end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (5+2)\hat{i} + (2+3)\hat{j} \\ &= 7\hat{i} + 5\hat{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ขนาดของเวกเตอร์} &= \sqrt{49+25} \\ &= \sqrt{74}\end{aligned}$$

2.5.2 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉาก

ในการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากหาได้จากสมการ

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

ตัวอย่างที่ 2.8 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

วิธีทำ จากสมการ
$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

หาขนาดของเวกเตอร์จาก

$$\begin{aligned}|\vec{A}| &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j} \\ &= \frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}\end{aligned}$$

บทสรุป

ปริมาณทางฟิสิกส์แบ่งออกเป็นสองชนิด คือปริมาณที่เป็นสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์ ซึ่งปริมาณสเกลาร์จะมีเฉพาะขนาด แต่ปริมาณเวกเตอร์ต้องมีทั้งขนาดและทิศทางถึงจะสมบูรณ์ การเท่ากันของเวกเตอร์นั้นจะต้องมีทั้งขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน เวกเตอร์มีสมบัติการสลับที่ของการบวก แต่ไม่มีสมบัตินี้สำหรับการลบเวกเตอร์ การรวมเวกเตอร์สามารถใช้วิธีการเขียนรูป การหาองค์ประกอบเวกเตอร์ หรือการใช้ทฤษฎีสี่เหลี่ยมด้านขนาน สำหรับการคูณของเวกเตอร์จะแบ่งเป็นสองชนิด คือการคูณเวกเตอร์เชิงสเกลาร์ ผลลัพธ์ที่ได้เป็นปริมาณสเกลาร์ และการคูณเวกเตอร์เชิงเวกเตอร์ผลลัพธ์ที่ได้เป็นปริมาณเวกเตอร์

แบบฝึกหัด

1. เมื่อมีแรงสองแรงซึ่งเป็นปริมาณเวกเตอร์คือ แรง A ที่มีขนาด 10 นิวตัน และแรง B ซึ่งมีขนาด 3 นิวตัน มากระทำกับวัตถุชิ้นหนึ่งโดยทิศของแรง A มีทิศขนานกับแกน X และทิศของแรง B มีทิศตั้งฉากกับแกน X จงหา
 - 1.1 ผลรวมของแรงโดยการคำนวณ
 - 1.2 การคอตของแรง
2. เวกเตอร์ A เท่ากับ 6 หน่วย และ B เท่ากับ 9 หน่วยทำมุมกัน 60 องศา จะมีเวกเตอร์ลัพธ์เท่าไร
3. มีเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ เวกเตอร์ $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ เวกเตอร์ $\vec{B} = 5\hat{i} + 2\hat{j}$ จงหา $\vec{A} + \vec{B}$
4. จากข้อ 3 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\vec{A} + \vec{B}$
5. กำหนดให้ $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j}$ และ $\vec{B} = -2\hat{i} + \hat{j}$
 - 5.1 จงเขียนกราฟของเวกเตอร์ทั้งสอง
 - 5.2 จงหาค่าประกอบตามแนวแกน x และ y ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และเวกเตอร์ $\vec{B}$
 - 5.3 จงหาขนาดของ เวกเตอร์ $\vec{A}$ และเวกเตอร์ $\vec{B}$
6. จากข้อ 5. จงหาผลคูณเวกเตอร์ของ $\vec{A} \times \vec{B}$
7. กำหนดให้ $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ จงหาขนาดของ $\vec{A}$
8. จากข้อ 7. จงหาค่าผลคูณแบบสเกลาร์ของ $\vec{A} \times \hat{j}$ และ $\vec{A} \cdot \hat{k}$

เอกสารอ้างอิง

ก่องกัญจน์ ภัทรากาญจน์ และชนกาญจน์ ภัทรากาญจน์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2552).

ฟิสิกส์ 1 ตัวอย่างและโจทย์พร้อมคำเฉลย. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่ง
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

คณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2549). ฟิสิกส์ 1. กรุงเทพฯ:
สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เชิญโชค ศรขวัญ และคณะ, มหาวิทยาลัยมหิดล. (2546). ฟิสิกส์ทั่วไป 1. กรุงเทพฯ: คณะ
วิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล.

ทวี นิยมอ้อย, มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์. (2541). ฟิสิกส์พื้นฐานระดับมหาวิทยาลัย 1.
กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

ทิพรัดน์ วงษ์เจริญ. (2538). ฟิสิกส์กลศาสตร์. กรุงเทพฯ : แมค.

ปิยพงษ์ สิริคัง. (2540). ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์ฟิสิกส์พื้นฐาน. กรุงเทพฯ : แมคกรอฮิล.

บดินทร์ชาติ สุขบท. (2547). ฟิสิกส์ 1. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สกายบุ๊กส์.

สุชาติ สุภาพ, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี. (2558). ฟิสิกส์ทั่วไป. กรุงเทพฯ:
สำนักพิมพ์ทริปเพิ้ล เอ็ดดูเคชั่น.

Raymond A. Serway, & Chris Vuille. College Physics 10nd ed. CT, USA: Cengage
Learning, 2015.

Halliday, D., Resnick, R. & Walker, J. Fundamentals of Physics 10th ed. Boston: John
Wiley and Sons, 2007.

Serway, R. A., and Jewett, J. W. Physics for Scientists and Engineers with Modern
Physics 9th ed. Belmont: Brooks/Cole-Thomson Learning, 2014.

Serway, R.A., Vuille, C., and Hughes, J., College Physics 10th ed. Stamford: Cengage
Learning, 2015.

Thornton, T.S., and Rex, A., Modern Physics for Scientists and Engineers 4th ed.
Boston: Brooks/Cole- Cengage Learning, 2013.

Young, H.D., and Freedman, R.A., Sear's & Zemansky's University Physics with
Modern Physics 14th ed. Essex: Pearson Education Limited, 2016.