บทที่ 4 ปริพันธ์หลายชั้น

ในบทนี้จะกล่าวถึงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร ในระบบพิกัดฉาก ระบบพิกัดเชิงขั้ว และการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสามตัวแปร ในระบบพิกัดฉาก

4.1 ปริพันธ์สองชั้น

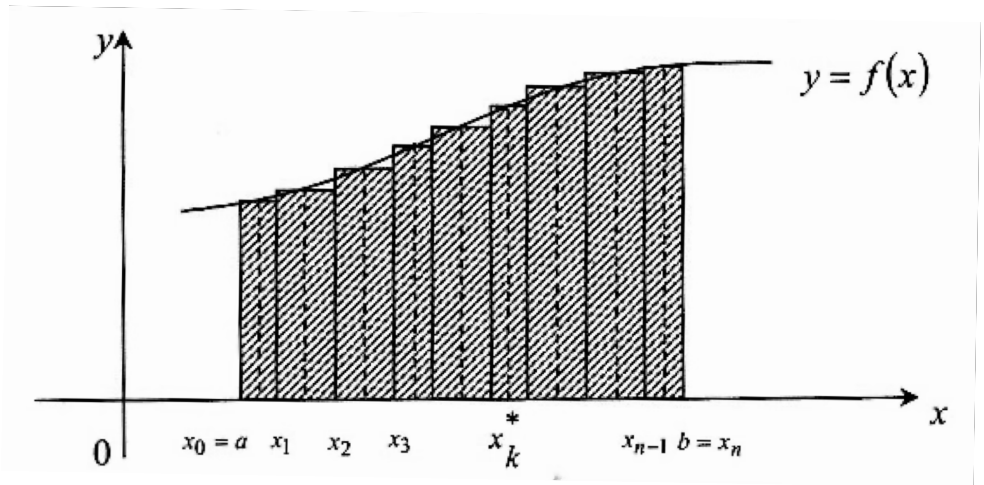
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร เหนือบริเวณ R ในระบบพิกัดฉาก ระบบพิกัดเชิงขั้ว การสลับลำดับของการหาปริพันธ์และการประยุกต์ปริพันธ์สองชั้น

จากที่ได้ศึกษาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรมาแล้ว ในบทนี้จะขยายแนวคิดไปสู่การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรโดยโดเมนจะอยู่ในเซตปิดบนระนาบ xy

ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดฉาก

จากนิยามของปริพันธ์ของตัวแปรเดียวซึ่งอยู่ในรูปลิมิตของผลบวกกรีมันน์ นั่นคือถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$

เมื่อ $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$; $k = 1,2,3, \dots , n$ ดังรูป 4.1

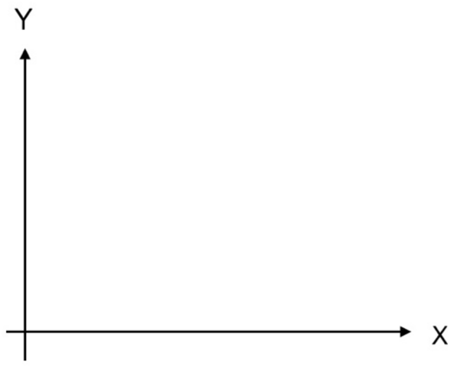


สำหรับปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y)$ มีนิยามทำนองเดียวกับนิยามของปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันตัวแปรเดียวดังนี้

ปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า

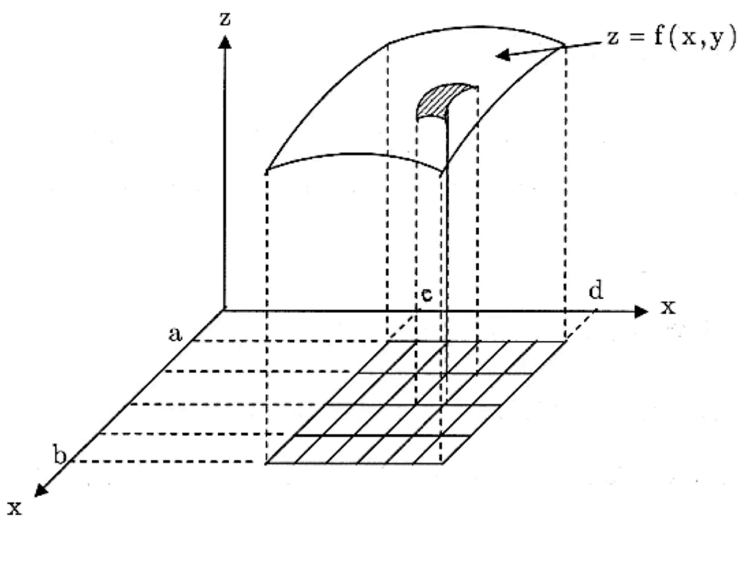
ให้ $f(x,y)$เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนสี่เหลี่ยมบนสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$R = \{(x,y)/\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$



แบ่ง R ด้วยเส้นตรงที่ขนานกับ x และ y เกิดเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า n รูป แต่ละรูปมีพื้นที่ $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_k, \ldots \Delta A_n$

ในจุด (x_k^*, y_k^*) เป็นจุดในสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่ ΔA_k ดังนั้นปริมาตรของแท่งสี่เหลี่ยม ดังข้างรูปล่างคือ $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$ ผลบวกนี้ เรียกว่า **ผลบวกรีมันน์** (Reman sum)



ถ้า Δx และ Δy มีค่าเข้าใกล้ 0 หรือ n มีค่ามากๆ $\lim_{n\to\infty} S_n$ จะเรียกว่า "**ปริพันธ์สองชั้น**" ของ f บน R เขียนแทนด้วย $\iint_R f(x,y)dA$

ในการหาค่า $\iint_R f(x,y)dA$ จะสามารถหาได้จากการคำนวณ $\iint_R f(x,y)dxdy$ หรือ $\iint_R f(x,y)dydx$

ทฤษฎีบทหลักมูลสำหรับการหาค่าของปริพันธ์หลายชั้น

ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร x และ y และให้ f ต่อเนื่องในบริเวณ $R = \{(x,y)/a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ แล้วจะได้ว่า

$$\iint_R fdA = \int_c^d \int_a^b fdxdy = \int_a^b \int_c^d fdydx$$

และการหาค่า $\int_c^d \int_a^b fdxdy$ จะคำนวณจากด้านในออกด้านนอก คือ

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

นั่นคือครั้งแรกจะหาปริพันธ์ $f(x,y)$เทียบกับ x เพียงตัวเดียว และมอง y เป็นค่าคงที่ แล้วแทนค่าลิมิตจาก $x = a$ ถึง $x = b$ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันของ y

แล้วต่อจากนั้นหาปริพันธ์เทียบกับ y จาก $y = c$ ถึง $y = d$ ในทำนองเดียวกันกับการคำนวณหาค่า $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$ เราคำนวณหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร y ก่อนโดย x ถือว่าเป็นค่าคงที่ จากนั้นค่อยหาปริพันธ์เทียบ x การคำนวณแบบติดต่อกันเป็นขั้นๆแบบนี้ เรียกว่า **อินทิเกรตซ้ำ**

สมบัติของปริพันธ์สองชั้น

ให้ f, g เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีความต่อเนื่องบนบริเวณ R และ c เป็นค่าคงตัว จะได้

1. $\int\int_R cf(x,y,)dA = c\int\int_R f(x,y)dA$
2. $\int\int_R [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \int\int_R f(x,y)dA \pm \int\int_R g(x,y)dA$
3. ถ้า $R = R_1 \cup R_2$โดยที่ R_1, R_2 ไม่มีส่วนซ้อนกัน

   แล้ว $\int\int_R f(x,y)dA = \int\int_{R_1} f(x,y)dA + \int\int_{R_2} g(x,y)dA$

ตัวอย่าง 4.1 จงหาค่าของ $\int_{-1}^0 \int_0^3 (6x^2y + 1)dxdy$

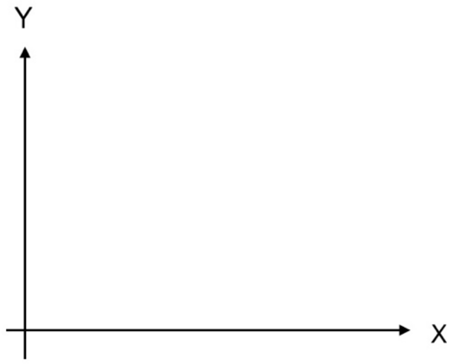
วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.2 กำหนดให้ $\mathrm{R} = \{(x, y)$โดยที่ $0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq \pi\}$ จงหาค่าของ $\iint_R\ x^2 sinydydx$

วิธีทำ

การหาปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

สมมติว่า R เป็นบริเวณในระนาบ xy ที่ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูป



ให้ S เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า S ที่ล้อมรอบบริเวณ R และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R สร้างฟังก์ชันใหม่เรียกว่า F นิยามบน S ดังนี้

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y)\ ; & (x, y) \in R \\ 0\ ; & (x, y) \in S - R \end{cases}$$

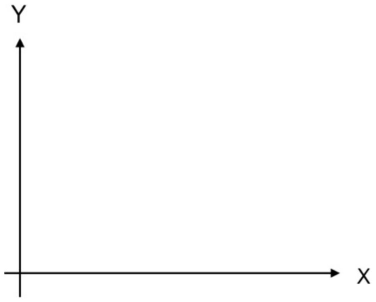
ถ้า F สามารถหาปริพันธ์ได้เหนือ S แล้ว จะกล่าวว่า f หาปริพันธ์ได้บน R และ

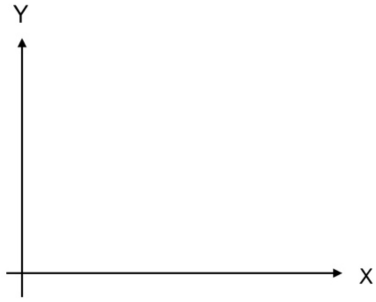
$$\iint\limits_R f(x, y)dA = \iint\limits_S F(x, y)dA$$

จะเรียก $\iint_R\ f(x, y)dA$ ว่า **ปริพันธ์สองชั้นของ $\boldsymbol{f}$ เหนือ $\boldsymbol{R}$** และเรียก R ว่า **บริเวณของการหาปริพันธ์**

ในการหาปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณ R ใดๆ จะพิจารณา R เป็น 2 รูปแบบ ดังนี้

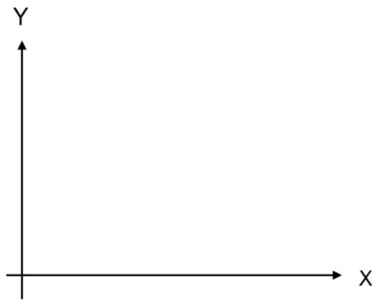
1. ถ้า $R = \{(x, y)$ โดยที่ $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\ , a \leq x \leq b\}$ เรียก R ว่า **บริเวณรูปแบบที่** 1 ดังรูปที่ 1
2. ถ้า $R = \{(x, y)$ โดยที่ $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\ , c \leq y \leq d\}$ เรียก R ว่า **บริเวณรูปแบบที่** 2 ดังรูปที่ 2



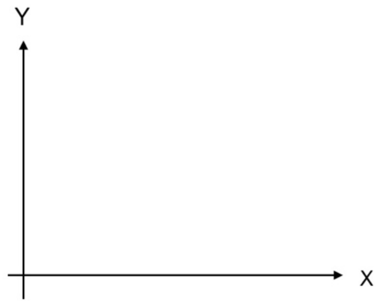


ทฤษฎีบท 4.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณ R

1. ถ้า R เป็นบริเวณรูปแบบที่ 1 แล้ว



2. ถ้า R เป็นบริเวณรูปแบบที่ 2 แล้ว



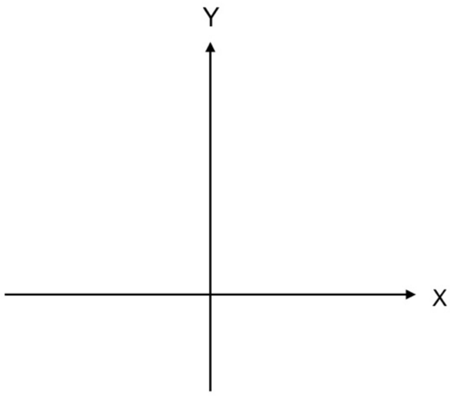
ในการหาค่าปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณ R รูปแบบที่ 1หรือ รูปแบบที่ 2 จะใช้ในการหาปริพันธ์ซ้ำเช่นกัน ดังนี้

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

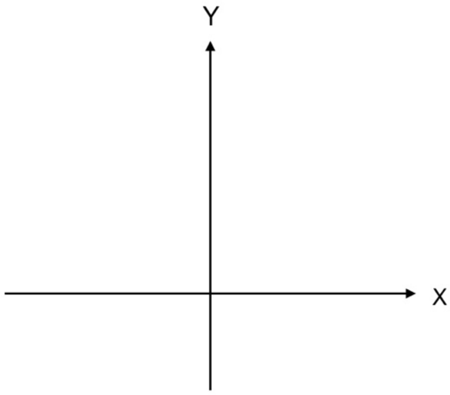
ตัวอย่าง 4.3 ให้ R เป็นบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2, y = 1$ และแกน y จงหา $\iint_R \ x^2 y \, dA$

วิธีทำ



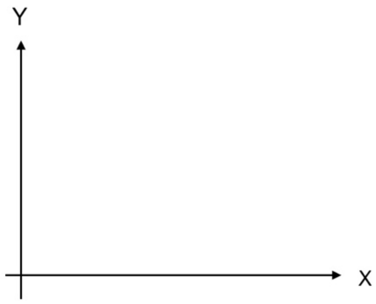
ตัวอย่าง 4.4 จงหาค่าของ $\iint_R \ (2x - 3y^2)\, dA$ โดยที่ R คือบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นตรง $y = x + 1,$ $y = 1 - x, y = 3$

วิธีทำ



ตัวอย่าง 4.5 จงหาค่าของ $\iint_R \; e^{x^3} dA$ โดยที่ R คือบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นตรง $y = 0, y = 4, x = 2$ และเส้นโค้ง $x = \sqrt{y}$

วิธีทำ



การสลับลำดับของการหาปริพันธ์สองชั้น

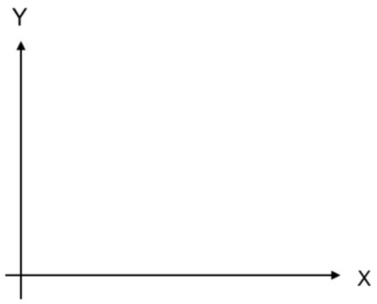
เมื่อต้องการสลับลำดับของการหาปริพันธ์จาก $dxdy$ ไปเป็น $dydx$ หรือ $dydx$ ไปเป็น $dxdy$ ถ้าบริเวณ R เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสามารถสลับลิมิตของการหาปริพันธ์ได้เลย เช่น

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dydx$$

แต่ถ้าบริเวณ R ไม่ได้เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เมื่อต้องการสลับลำดับของการหาปริพันธ์ ในการเปลี่ยนลิมิตจะต้องพิจารณาลิมิตจากรูปของบริเวณ R

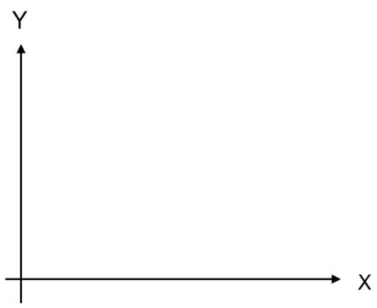
ตัวอย่าง 4.6 จาก $\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$ จงสลับลำดับการหาปริพันธ์เป็น $dydx$

วิธีทำ



ตัวอย่าง 4.7 จาก $\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dxdy$ จงสลับลำดับการหาปริพันธ์เป็น $dydx$

วิธีทำ



4.2 ระบบพิกัดเชิงขั้ว

ระบบพิกัดเชิงขั้วในระนาบจะประกอบด้วย**จุดกำเนิด** หรือ**จุดขั้ว** O และรังสีไปทางขวาของจุดกำเนิด เรียกว่า **แกนเชิงขั้ว**

พิกัดจุด ในระบบพิกัดเชิงขั้ว P กำหนดโดย (r, θ) โดยที่

r เป็นระยะจากจุดกำเนิดถึงจุด P

θ เป็นมุมระหว่างแกนเชิงขั้วถึง $\overline{OP}$

เครื่องหมายของ θ และ r เป็นได้ทั้งบวกและลบ มีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

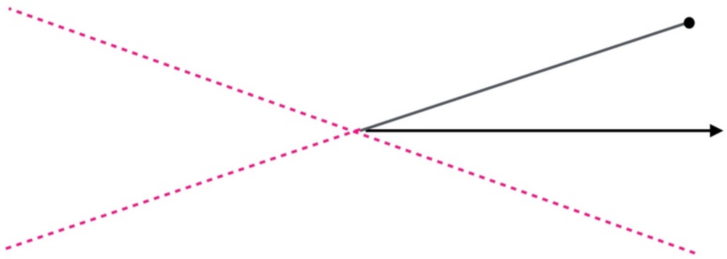
$\theta > 0$ จะเป็นมุมที่วัดจากแกนเชิงขั้วในทิศทวนเข็มนาฬิกา

$\theta < 0$ จะเป็นมุมที่วัดจากแกนเชิงขั้วในทิศตามเข็มนาฬิกา

$r > 0$ จุดจะอยู่บนแขนของมุม θ ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะทาง r หน่วย

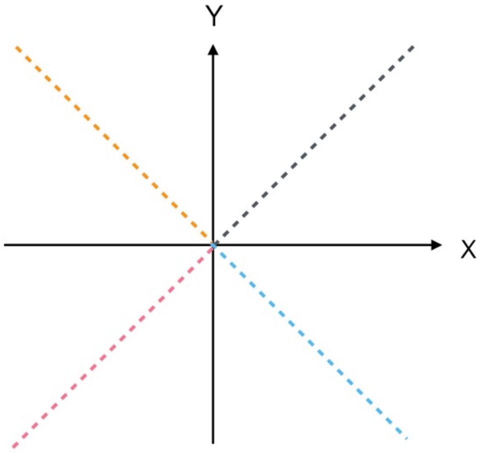
$r < 0$ จุดจะอยู่บนแขนของมุม $\theta + \pi$ ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะทาง $|r|$ หน่วย

ดังรูป (ในที่นี้ $r > 0$ และ $\theta > 0$)



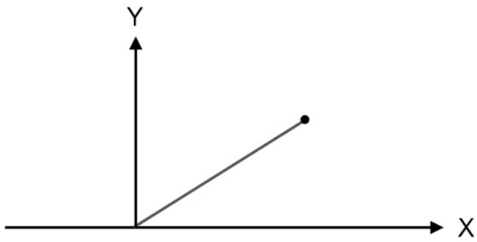
ตัวอย่าง 4.8 จงแสดงจุด $A\left(2,\frac{\pi}{4}\right), B\left(-2,\frac{\pi}{4}\right), C(2,-45^{\circ}), D(-2,-45^{\circ})$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ



ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดเชิงขั้วกับระบบพิกัดฉาก

ให้ P เป็นจุดใดๆในระบบพิกัดเชิงขั้ว (r,θ) และมีพิกัดในระบบพิกัดฉากเป็น (x,y) ดังรูป



จะได้ว่า $x = rcos\theta$ และ $r^2 = x^2 + y^2$

$y = rsin\theta$ $tan\theta = \frac{y}{x}$

ตัวอย่าง 4.9 จงแปลงสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$1. x^2 + y^2 = 25$ $2. x^2 + y^2 = 4x$ $3. y = \sqrt{3}x$

วิธีทำ

กราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว

เส้นตรง

วงกลม

เส้นโค้งรูปหัวใจหรือคาร์ดิออยด์

เส้นโค้งลีมาซอง

การหาปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ให้ $\mathrm{f}(\mathrm{r},\theta)$ ต่อเนื่องบนบริเวณ R

ปริพันธ์สองชั้นของ ฟังก์ชัน f เหนือบริเวณ R ในระบบพิกัดเชิงขั้ว เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\iint_R f(r,\theta)dA$$

โดยที่ $dA = rdrd\theta$

บริเวณ R ในระบบพิกัดเชิงขั้วเป็นดังภาพต่อไปนี้

$$\iint_{R_1} f(r,\theta)dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{0}^{r(\theta)} f(r,\theta)\, rdrd\theta$$

$$\iint_{R_2} f(r,\theta)dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta)\, rdrd\theta$$

ทฤษฎีบท 4.2 ถ้า R บริเวณ**ดังรูปข้างต้นและ** $\mathrm{f}(\mathrm{r},\theta)$ มีความต่อเนื่องบน R แล้ว

$$\iint_{R_2} f(r,\theta)dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta)\, rdrd\theta$$

ข้อสังเกต 1) ถ้า $\mathrm{f}(\mathrm{r},\theta) = 1$ บน R แล้วจะได้ว่า พื้นที่ของบริเวณ $R = \iint_{R_2} dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} rdrd\theta$

2) ถ้า $\mathrm{f}(\mathrm{r},\theta) \geq 0$ และให้ s เป็นทรงสามมิติอยู่ใต้พื้นผิว $z = f(r,\theta)$ และอยู่เหนือบริเวณ R แล้วปริมาตรของทรงสามมิติ คือ

$$s = \iint_R f(r,\theta)dA \quad = \iint_R f(r,\theta)rdrd\theta$$

ตัวอย่าง 4.10 จงหาค่าของ $\iint_R \cos\theta dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณในจตุภาคที่หนึ่ง ซึ่งอยู่ภายในวงกลม $r = 2$ และอยู่ภายนอกวงกลม $r = 1$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.11 จงหาพื้นที่ภายในรูปหัวใจ $r = a - \sin\theta$ โดยที่ a เป็นค่าคงตัวใดๆ

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.12 จงหาค่าของ $\iint_R \frac{1}{r}\,dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณที่อยู่ภายในรูปหัวใจ $r = 2(1 + cos\theta)$ และอยู่ภายนอกวงกลม $r = 3$

วิธีทำ

การหาปริพันธ์สองชั้นโดยการแปลงระบบพิกัด

บางครั้งในการหาปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดฉากมีความยุ่งยากมาก ซึ่งถ้าเราเปลี่ยนไปหาปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้วจะหาได้ง่ายกว่า เช่น $\int_{-2}^{2}\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$

การเปลี่ยนการหาปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดฉากไปเป็นระบบใหม่ ทำได้ดังนี้
ให้ $x = g(u,v), y = h(u,v)$ เป็นฟังก์ชันในระบบพิกัดฉาก xy ที่เปลี่ยนไปเป็นระบบพิกัด uv เรามีสูตรดังนี้

$$\int\int_{R_1} f(x,y)dxdy = \int\int_{R_2} f\big(g(u,v),h(u,v)\big)|J(u,v)|dudv$$

โดยที่ $J(u,v)$ คือตัวกำหนดจาโคเบียนของ x,y เทียบกับ u,v นิยามโดย

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ดังนั้น การแปลงระบบพิกัดฉากไปเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว ได้ดังนี้
แทน u และ v ด้วย r และ θ ตามลำดับ โดยที่ $x = rcos\theta,\ y = rsin\theta$

ตัวอย่าง 4.13 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่ง ซึ่งอยู่ในวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ และอยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 = 2y$ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.14 จงหาค่าของ $\int_{-2}^{2}\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+1\,dxdy$

วิธีทำ

การประยุกต์ปริพันธ์สองชั้น

พื้นที่และปริมาตร

ให้ เป็นปริมาตรของรูปทรงสามมิติใต้พื้นผิว $z = f(x, y)$ เหนือบริเวณ R บนระนาบ xy โดยที่ $f(x, y) \geq 0$ สำหรับทุก (x, y)บนบริเวณ R จะได้

$$V = \int_R \int f(x, y) dA$$

ให้ A เป็นพื้นที่บริเวณ R เมื่อ $f(x, y) = 1$ จะได้

$$A = \int_R \int dA$$

ตัวอย่าง 4.15 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$ และ $y = \sqrt{x}$ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.16 จงหาพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยพาราโบลา $y = x^2$ และ $y = x + 2$ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.17 จงหาปริมาตรรูปทรงสามมิติที่ล้อมรอบด้วยระนาบ $x + 3y + z = 6$ และระนาบพิกัด

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.18 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลา $y = x^2 - 4$ และ $y = -x^2 + 2x$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.19 จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่มีฐานอยู่บนระนาบ xy เป็นรูปสามเหลี่ยมที่ปิดล้อมด้วยแกน x และ y และเส้นตรง $y = 2 - 2x$ และส่วนบนถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = x^2 + y^2$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.20 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งล้อมรอบระนาบพิกัดฉาก
ระนาบ $x + z = 2$ และ $y = 3$

วิธีทำ

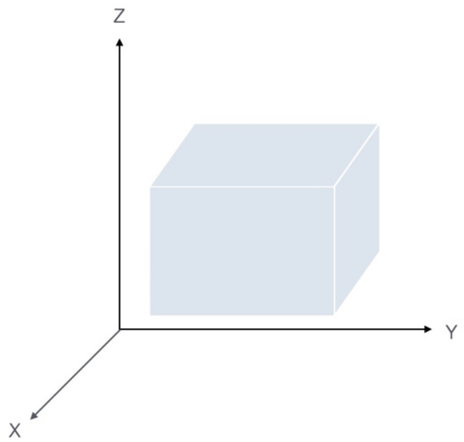
4.3 **ปริพันธ์สามชั้น** (Triple Integral)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสามตัวแปร เหนือรูปสามมิติ G ในระบบพิกัดฉาก

ปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉาก

ปริพันธ์สามชั้นเหนือรูปสามมิติ G ที่เป็นกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ให้ เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร ซึ่งนิยามบนกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก G ที่ปิดล้อมด้วยระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัดฉาก ดังรูป



แบ่งกล่อง G ออกเป็นกล่องเล็กๆด้วยระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัด ได้เป็นกล่อง $G_1, G_2, \dots, G_n$ ให้กล่อง G_k มีปริมาตรเป็น ΔV_k เมื่อ $k = 1,2,3,\dots,n$

ให้จุด (x_k^*, y_k^*, z_k^*) เป็นจุดใดๆในกล่อง G_k เมื่อ $k = 1,2,3,\dots,n$

จะได้ ผลบวกรีมันน์ $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$ โดยที่ $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$

ถ้าแบ่งบริเวณ G ให้ได้จำนวนกล่องเล็กๆ มากขึ้น นั่นคือ $n \to \infty$

และถ้า $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$ หาค่าได้ จะเรียกค่าลิมิตที่ได้นี้ว่า **ปริพันธ์สามชั้นของ $\boldsymbol{f(x,y,z)}$ เหนือรูปทรงสามมิติ $\boldsymbol{G}$** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\iiint_G f(x,y,z)dV$

นั่นคือ $\iiint_G f(x,y,z)dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$

ถ้า $f(x,y,z) = 1$ สำหรับทุก $(x,y,z) \in G$

แล้ว $\iiint_G f(x,y,z)dV = \iiint_G dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$ คือ ปริมาตรของรูปทรงสามมิติ G

ทฤษฎีบท 4.3 ให้ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนรูปทรงสามมิติ G โดยที่

$G = \{(x,y,z)/a_1 \leq x \leq a_2 \,, b_1 \leq y \leq b_2, c_1 \leq z \leq c_2\}$ จะได้ว่า

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dzdydx$$

ในการหาค่า $\iiint_G f(x,y,z)dzdydx$ สามารถสลับลำดับของการหาปริพันธ์ได้โดย พิจารณาเช่นเดียวกับในการหาปริพันธ์สองชั้น

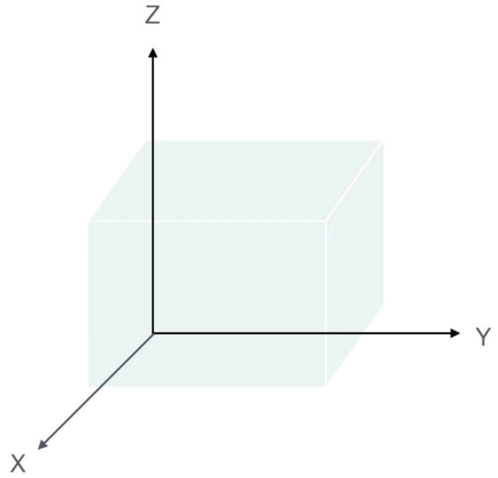
ตัวอย่าง 4.21 จงหาค่าของ $\iiint_G (x^2z+y)dV$ เมื่อ

$G = \{(x,y,z)/0 \leq x \leq 1 \,, -1 \leq y \leq 0, -1 \leq z \leq 1\}$

วิธีทำ

ปริพันธ์สามชั้นเหนือรูปทรงสามมิติ G ที่ไม่ได้เป็นกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนรูปทรงสามมิติ G ดังรูปด้านล่าง



สร้างกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก S ล้อมรอบรูปทรงสามมิติ G แล้วแบ่งกล่อง S เป็นกล่องย่อย ๆ ด้วยระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัดฉาก พิจารณาเฉพาะกล่องย่อยที่ทุกส่วนของกล่องอยู่ภายใน G สมมุติว่ามี n กล่องย่อย คือ $G_1, G_2, \dots, G_n$ โดยที่แต่ละกล่อง G_k ให้มีปริมาตรเป็น $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$

ให้จุด (x_k^*, y_k^*, z_k^*) เป็นจุดใดๆในกล่อง G_k จะได้ ผลบวกรีมันน์เป็น

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$

ถ้า $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$ หาค่าได้ จะเรียกค่าลิมิตที่ได้นี้ว่า ปริพันธ์สามชั้นของ $f(x,y,z)$ เหนือรูปทรงสามมิติ G เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int\int_G \int f(x,y,z)dV$

นั่นคือ $\int\int_G \int f(x,y,z)dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$

สมบัติของปริพันธ์สามชั้น

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนรูปทรงสามมิติ G และ c เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

1. $\displaystyle\int\int_G\int cf(x,y,z)dV = c\int\int_G\int f(x,y,z)dV$

2. $\displaystyle\int\int_G\int [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]dV = \int\int_G\int f(x,y,z)dV \pm \int\int_G\int g(x,y,z)dV$

3. ถ้า $G = G_1 \cup G_2$ โดยที่ G_1, G_2 ไม่มีส่วนซ้อนกันแล้ว

$$\int\int_G\int f(x,y,z)dV = \int\int_{G_1}\int f(x,y,z)dV + \int\int_{G_2}\int g(x,y,z)dV$$

4. ถ้า $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$ ทุกค่า $(x,y,z) \in G$ แล้ว

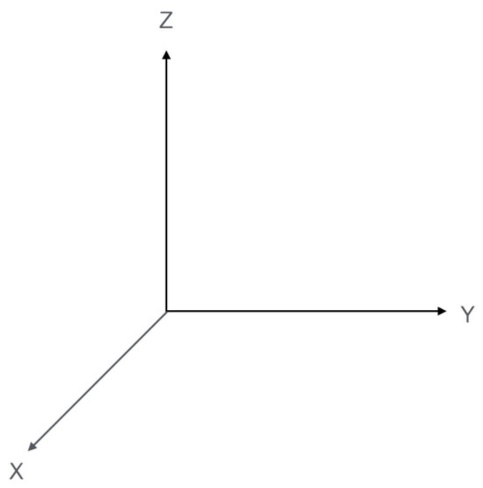
$$\iint_G \int f(x,y,z)dV \geq \iint_G \int g(x,y,z)dV$$

การใส่ลิมิตของปริพันธ์สามชั้นเหนือบริเวณ G

สมมุติว่าทรงสามมิติ G กำหนดโดย

$$G = \{(x,y,z)/g_1(x,y) \leq z \leq g_1(x,y), (x,y) \in R_{xy}\}$$

เมื่อบริเวณ R_{xy} เป็นภาพฉายของ Gบนระนาบ xy ดังรูปด้านล่าง



ถ้า $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน G แล้วจะได้ว่า

$$\iint_G \int f(x,y,z)dV = \iint_{R_{xy}} \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA$$

ในการหาปริพันธ์ข้างต้นจะหาปริพันธ์โดยเทียบกับ z ก่อน แล้วจึงหาปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณ R_{xy} ดังได้กล่าวแล้วในการหาปริพันธ์สองชั้น

ในทำนองเดียวกัน ถ้าทรงสามมิติ G กำหนดโดย

$$G = \{(x,y,z)/g_1(x,z) \leq y \leq g_1(x,z), (x,z) \in R_{xz}\}$$

เมื่อบริเวณ R_{xz} เป็นภาพฉายของ Gบนระนาบ xz จะได้ว่า

$$\iint_G \int f(x,y,z)dV = \iint_{R_{xz}} \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right] dA$$

ถ้าทรงสามมิติ G กำหนดโดย

$G = \{(x, y, z)/g_1(y, z) \leq x \leq g_1(y, z), (y, z) \in R_{yz}\}$

เมื่อบริเวณ R_{yz} เป็นภาพฉายของ G บนระนาบ yz จะได้ว่า

$$\iiint\limits_{G} f(x, y, z)dV = \iint_{R_{yz}} \left[\int\limits_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x, y, z)dx \right] dA$$

ตัวอย่าง 4.22 จงใส่ลิมิตของการหาปริพันธ์ $\int\int_G \int f(x, y, z)dV$ เมื่อ G เป็นรูปทรงสามมิติที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = x^2 + y^2$ และระนาบ $2y + z = 3$ เมื่อลำดับของการหาปริพันธ์เป็น

1. $dzdxdy$ 2. $dxdzdy$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.23 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2 - 2$ และ $z = 6 - x^2 - y^2$