FOE1003
สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

Tadchanon Chuman
Department of Electrical Technology, SSRU

01

ความหมายและประเภทของสมการอนุพันธ์

ความหมายของสมการอนุพันธ์

สมการอนุพันธ์ เป็นสมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของฟังก์ชันบางอย่าง เช่น

$$\frac{dx}{dy} = f(x) \qquad \text{หรือ} \qquad y' = f(x)$$

- y เป็นฟังก์ชันของ x
- x เป็นตัวแปรต้น และ y เป็นตัวแปรตาม
- สัญลักษณ์ dy/dx และ y' ใช้แทนอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x

การแบ่งประเภท : ตามความเป็นเชิงเส้น

Note
y′ : อนุพันธ์อันดับ 1
y″ : อนุพันธ์อันดับ 2

สมการอนุพันธ์

สมการอนุพันธ์เชิงเส้น

คือสมการที่ y, y′, y″ ทุกพจน์**เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น** (y, y′, y″ ยกกำลังหนึ่งทั้งหมดและไม่มีการคูณกัน)

สมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

คือสมการที่มีพจน์ไม่เชิงเส้นของ y, y′ หรือ y″

อนุพันธ์เขียนได้ 2 แบบ

$\frac{dy}{dx} = y'$	อนุพันธ์อันดับ 1
$\frac{d^2y}{dx^2} = y''$	อนุพันธ์อันดับ 2
$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = y^{(3)}$	อนุพันธ์อันดับ 3
$\frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)}$	อนุพันธ์อันดับ 4

ตัวอย่าง : ความเป็นเชิงเส้น

$\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = \sin(x)$	เป็นสมการเชิงเส้น เพราะพจน์ d^2y/dx^2 dy/dx และ y เป็นเชิงเส้นทั้งหมด
$y'' + 4yy' + 2y = \sin(x)$	เป็นสมการไม่เชิงเส้น เพราะ ?
$y'' + cos(y) = 0$	เป็นสมการ ?
$(y'')^2 + 2y = \cos(x)$	เป็นสมการ ?

การแบ่งประเภท : ตามความเป็นเอกพันธ์

สมการอนุพันธ์

- **สมการอนุพันธ์เอกพันธ์**
  คือสมการที่ไม่มีตัวแปรต้น x แยกอยู่ต่างหากจากตัวแปรตาม y
- **สมการอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์**
  คือสมการที่ไม่เป็นแบบเอกพันธ์

ตัวอย่าง : ความเป็นเอกพันธ์

$y'' + 4xy' + 2y = 0$	เป็นสมการเอกพันธ์ เพราะไม่มีตัวแปร x แยกออกจากตัวแปร y
$y'' + 4xy' + 2y = \sin(x)$	เป็นสมการไม่เอกพันธ์ เพราะ มีพจน์ของ x คือ sin(x) ที่แยกอยู่ต่างหากจาก y
$y'' \cos(x) + 4y' + 2xy = 0$	เป็นสมการ ?
$y'' + \cos(y) = \mathrm{e}^x$	เป็นสมการ ?

แบบฝึกหัด : ความเป็นเชิงเส้นและเอกพันธ์

สมการอนุพันธ์	เชิงเส้น	เอกพันธ์
1. $(y'')^2 - 3y' + 2y = x^4$		
2. $y'' + [a + b\sin(2x)]y = 0$		
3. $y''' - 6(y'')^2 + 11y' + 6y = \mathrm{e}^x$		
4. $y^4 = xy'' + y^2 = 0$		
5. $d(xy')/dx - xy = 0$		
6. $(x - y)dy = (x + y)dx$		

อันดับและดีกรี

สมการอนุพันธ์ อาจประกอบด้วยอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ (เช่น y', y'', y''') และอนุพันธ์เหล่านี้อาจยกกำลังใดๆ ได้ด้วย (เช่น) $(y')^3$, $(y'')^4$, $(y''')^2$

อันดับ (Order) ของสมการอนุพันธ์ คือ อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ในสมการ

ดีกรี (Degree) ของสมการอนุพันธ์ คือ เลขชี้กำลังสูงสุดของอนุพันธ์อันดับสูงสุดในสมการ

ตัวอย่าง : อันดับและดีกรี

สมการอนุพันธ์	อันดับ	ดีกรี
$y'' + 4xy' + 2y = 0$		
$(y''')^2 + 2x^2yy''' + x^2y = 0$		
$(y''')^2 + (y'')^3 + x^5y^8 = 0$		

แบบฝึกหัด : อันดับและดีกรี

สมการอนุพันธ์	อันดับ	ดีกรี
1. $(y'')^2 - 3y' + 2y = x^4$		
2. $y'' + [a + b\sin(2x)]y = 0$		
3. $y''' - 6(y'')^2 + 11y' + 6y = \mathrm{e}^x$		
4. $y^4 = xy'' + y^2 = 0$		
5. $d(xy')/dx - xy = 0$		
6. $(x - y)dy = (x + y)dx$		

02

ผลเฉลยของสมการอนุพันธ์

ผลเฉลยของสมการอนุพันธ์

เมื่อเราแก้สมการอนุพันธ์ คำตอบที่ได้จะเรียกว่า **ผลเฉลย**

บทนิยาม (ผลเฉลย)

ผลเฉลย (solution) คือความสัมพันธ์ระหว่าง y กับ x แบบที่ไม่ติดรูปอนุพันธ์ และสอดคล้องกับสมการอนุพันธ์เดิม

ตัวอย่าง ผลเฉลยของสมการ $y' = \cos(x)$ คือ $y = \sin(x)$ เพราะ

1. $y = \sin(x)$ ไม่ติดรูปอนุพันธ์
2. $y = \sin(x)$ สอดคล้องกับสมการเดิม เพราะ

$$y' = d\sin(x)/dx = \cos(x)$$

การแบ่งประเภทของผลเฉลย

ผลเฉลย

ผลเฉลยทั่วไป

ติดค่าคงตัวไม่เจาะจง

เช่น $y = Ae^{-x}$

ผลเฉลยเฉพาะ

หาจากการแทนค่าคงตัวไม่เจาะจงด้วยเลขบางค่า

เช่น $y = 4e^{-x}$

ผลเฉลยบริบูรณ์

คือผลเฉลยทั่วไปที่เกิดจากผลเฉลยย่อยๆ มารวมกัน เช่น

$y = Ae^{-x} + B\sin(x)$

ผลเฉลยเอกพันธ์

คือผลเฉลยที่ไม่อาจหาได้จากผลเฉลยทั่วไปโดยการแทนค่าคงตัวไม่เจาะจง

ตัวอย่าง : ประเภทของผลเฉลย

สมการอนุพันธ์	ผลเฉลย	ประเภท
$y'' - y = 0$	$y = Ae^x, \quad y = Be^{-x}$	ผลเฉลยทั่วไป ∵ มีค่าคงตัวไม่เจาะจง
$y'' - y = 0$	$y = 3e^{-x}$	ผลเฉลยเฉพาะ ∵ เกิดจากการแทน B ด้วย 3
$y'' - y = 0$	$y = Ae^x + Be^{-x}$	ผลเฉลยสมบูรณ์ ∵ เป็นผลรวมจากผลเฉลยย่อยๆ
$(y')^2 - xy' + y = 0$	$y = cx - c^2, \quad y = x^2/4$	ผลเฉลยเอกพันธ์ ∵ หา $y=x^2/4$ ไม่ได้จากการแทนค่าคงตัวไม่เจาะจง

การทวนสอบผลเฉลย

ถ้าเรารู้ฟังก์ชันที่คาดว่าน่าจะเป็นผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ เราสามารถ**ทวนสอบ (verify)** ได้ว่าฟังก์ชันดังกล่าวเป็นผลเฉลยจริงหรือไม่ ตามขั้นตอนดังนี้

1. หาอนุพันธ์อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ต้องการทวนสอบ
2. แทนค่าอนุพันธ์ที่ได้ลงในด้านใดด้านหนึ่งของสมการ
3. ถ้าได้ค่าตรงกับอีกด้านของสมการ เราจะสรุปได้ว่าฟังก์ชันนั้นเป็นผลเฉลยจริงของสมการอนุพันธ์จริงๆ

ตัวอย่างที่ 1 จงทวนสอบว่า $y = ae^{-x} + be^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$y'' - y' - 2y = 0$ จริงหรือไม่

วิธีทำ เนื่องจากในสมการมี y' และ y'' เราจึงต้องหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองของฟังก์ชัน $y = ae^{-x} + be^{2x}$

$$y' = \frac{d(ae^{-x} + be^{2x})}{dx} = ..$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \dots$$

ตัวอย่างที่ 1 จงทวนสอบว่า $y = ae^{-x} + be^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$y'' - y' - 2y = 0$ จริงหรือไม่

วิธีทำ (ต่อ) แทนค่า y' และ y'' ลงในด้านซ้ายของสมการ จะได้

$$\text{LHS} = y'' - y' - 2y = \ldots$$

Note
LHS : ด้านซ้ายมือ
RHS : ด้านขวามือ

ตัวอย่างที่ 2 จงทวนสอบว่า $y = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' + 4y = 0$ จริงหรือไม่

วิธีทำ ต้องหาค่า y''

$$y' =$$

$$y'' = dy'/dx =$$

$$LHS = y'' + 4y =$$

ตัวอย่างที่ 3 จงทวนสอบว่า $y^2 = ax - x\ln(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$2xyy' = (y^2 - x)$ จริงหรือไม่

วิธีทำ พิจารณา LHS ของสมการ

$$\text{LHS} = 2xyy'$$

สังเกตว่า LHS = $x(2yy')$ และเรารู้ว่า $\frac{dy^2}{dx} = 2yy'$
ดังนั้น

$$\text{LHS} = x\frac{dy^2}{dx} = \ldots$$

ตัวอย่างที่ 3 จงทวนสอบว่า $y^2 = ax - x\ln(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$2xyy' = y^2 - x$ จริงหรือไม่

วิธีทำ (ต่อ) พิจารณา RHS ของสมการที่จัดรูปใหม่

$$\mathrm{RHS} = y^2 - x = \ldots$$

เอกสารอ้างอิง

ศ. ดร.มงคล เดชนครินทร์ คณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า พิมพ์ครั้งที่ 4 สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2558.