



เฉลย Assignment 1
MAZ1302 แคลคูลัส ๑

หัวข้อ ลิมิต และลิมิตทางเดียว สัปดาห์ที่ 1 คะแนน 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธัญยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

1. แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - 2x}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{x - 1} = \frac{-2}{1} = -2 \quad \# \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^3 - x} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x(x - 1)(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{x(x - 1)} = \frac{1 + 1 + 1}{-1(-2)} = \frac{3}{2} \quad \#\end{aligned}$$

2. แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x - 2} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x - 2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x - 2} + 1}{\sqrt{x - 2} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(\sqrt{x - 2} + 1)}{(\sqrt{x - 2})^2 - 1^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(\sqrt{x - 2} + 1)}{(x - 2) - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(\sqrt{x - 2} + 1)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x - 2} + 1) = 1 + 1 = 2 \quad \# \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{1 - \sqrt{2x - 1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{1 - \sqrt{2x - 1}} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{1 + \sqrt{2x - 1}}{1 + \sqrt{2x - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}^2 - 1^2)(1 + \sqrt{2x - 1})}{(1^2 - (\sqrt{2x - 1})^2)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(1 + \sqrt{2x - 1})}{(1 - (2x - 1))(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(1 + \sqrt{2x - 1})}{(2 - 2x)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(1 + \sqrt{2x - 1})}{-2(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{2x - 1}}{(-2)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1 + 1}{-2(2)} = -\frac{1}{2} \quad \#\end{aligned}$$

3. แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1]}{(\sqrt[3]{x+1})^3 - 1^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1]}{(x+1) - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1]}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} [(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1] \\
 &= 1 + 1 + 1 = 3 \quad \# \\
 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x+2}}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x+2}}{x+1} \cdot \frac{(\sqrt[3]{2x+1})^2 - \sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{x+2} + (\sqrt[3]{x+2})^2}{(\sqrt[3]{2x+1})^2 - \sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{x+2} + (\sqrt[3]{x+2})^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x+1) + (x+2)}{(x+1)[(\sqrt[3]{2x+1})^2 - \sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{x+2} + (\sqrt[3]{x+2})^2]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x+1)}{(x+1)[(\sqrt[3]{2x+1})^2 - \sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{x+2} + (\sqrt[3]{x+2})^2]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3}{(\sqrt[3]{2x+1})^2 - \sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{x+2} + (\sqrt[3]{x+2})^2} \\
 &= \frac{3}{1 - (1)(-1) + 1} = 1 \quad \#
 \end{aligned}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{ถ้า } |x| \geq 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{ถ้า } |x| < 1 \end{cases}$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 \\
 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \#$
และพิจารณา

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + 1 = 2 \\
 \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{-2} = 0
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ไม่มีลิมิต $\quad \#$

5. การมีลิมิต : กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - a^4}{x - a} & \text{ถ้า } x > a \\ 4x^2 + x - 1 & \text{ถ้า } x < a \end{cases}$$

ถ้า f มีลิมิตที่ $x = a$ จงหาค่า a ที่เป็นไปได้

แนวคำตอบ เนื่องจาก f มีลิมิตที่ $x = a$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a^-} (4x^2 + x - 1) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^4 - a^4}{x - a} \\ 4a^2 + a - 1 &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x - a)(x + a)(x^2 + a^2)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} (x + a)(x^2 + a^2) = (2a)(2a^2) = 4a^3 \\ 0 &= 4a^3 - 4a^2 - a + 1 \\ &= 4a^2(a - 1) - (a - 1) = (a - 1)(4a^2 - 1) \\ &= (a - 1)(2a - 1)(2a + 1) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $a = 1, \pm \frac{1}{2} \quad \#$

6. แนวคำตอบ เมื่อ x ใกล้เคียง 4 จะได้ว่า $x + 1 > 0$ ดังนั้น $|x + 1| = x + 1$ นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x + 1| - 5}{x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x + 1) - 5}{x(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \quad \#$$

พิจารณา

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 2x - 3|}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|(x + 1)(x - 3)|}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x + 1||x - 3|}{x + 1}$$

เมื่อ x ใกล้เคียง -1 ทางขวา (เช่น $x = -0.9$)

จะได้ว่า $x + 1 > 0$ และ $x - 3 < 0$ ดังนั้น $|x + 1| = x + 1$ และ $|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$ นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x^2 - 2x - 3|}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x + 1)(3 - x)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3 - x) = 4$$

เมื่อ x ใกล้เคียง -1 ทางซ้าย (เช่น $x = -1.1$)

จะได้ว่า $x + 1 < 0$ และ $x - 3 < 0$ ดังนั้น $|x + 1| = -(x + 1)$ และ $|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$ นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x^2 - 2x - 3|}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x + 1)(3 - x)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} -(3 - x) = -4$$

จะเห็นว่าลิมิตทั้งสองด้านไม่เท่ากัน สรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 2x - 3|}{x + 1}$ ไม่มีลิมิต $\quad \#$

7. แนวคำตอบ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - x}$ มีค่า และ $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - x = 0$ จะได้ว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ นั่นคือ

$$0 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + ax + b = 1 + a + b = f(1)$$

หรือกล่าวได้ว่า $f(1) = 0$ จะได้ว่า $f(x) = (x - 1)(x + c)$ สำหรับบางจำนวนจริง c พิจารณา

$$5 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + c)}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + c}{x} = 1 + c$$

นั่นคือ $c = 4$ ทำให้ได้ว่า $f(x) = (x - 1)(x + 4)$ ดังนั้น $f(4) = (3)(8) = 24 \quad \#$