# ตรรกศาสตร์และการพิสูจน์

# ตรรกศาสตร์ในยุคโบราณ

- ประพจน์และค่าความจริง
- การสมมูลเชิงตรรกศาสตร์/สัจนิรันดร์
- กฎการอนุมานและการพิสูจน์
- การอ้างเหตุผล
- ตัวบ่งปริมาณ

# ประพจน์และค่าความจริง

- บทนิยาม1

ประพจน์ (proposition หรือ statement) คือ ประโยค หรือข้อความที่เป็น จริง หรือ เท็จ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

นิยมเขียนแทนด้วยตัวอักษร*ตัวพิมพ์เล็ก*ในภาษาอังกฤษ เช่น p, q, r เป็นต้น

- บทนิยาม2

เรียกประพจน์ที่เป็นจริงว่า ประพจน์ที่มีค่าความจริง (true value) เป็นจริง (true) แทนด้วย “T”

และเรียกประพจน์ที่เป็นเท็จว่า ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ (false) แทนด้วย “F”

# เกม : เป็นหรือไม่เป็นประพจน์

ดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก
T

$\frac{22}{7}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
F

ณเดชเป็นคนจังหวัดขอนแก่น
T

กรุงเทพมี 76 จังหวัด
F

พรุ่งนี้พวกเราไปกินตี๋น้อยกัน
?

$2y - 1 \neq 5$
?

2.4 เป็นจำนวนคู่
F

ไม่!!!!
ฉันไม่ได้รักเขา
?

เขาได้รับเหรียญทองจากการแข่งขัน 5 เหรียญ
?

# ประพจน์และค่าความจริง

- บทนิยาม3

ประโยคเปิด (Open Sentence) คือประโยคบอกเล่า หรือปฏิเสธ ที่มีตัวแปรอยู่ในรูปประโยค ยังไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ

การเขียนประโยคเปิดจะเขียนแทนประโยคด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่ และเขียนวงเล็บแสดงตัวแปรของประโยค เช่น

ให้ P(X) แทน $x^2 - x + 2 \leq 0$ เมื่อ $x \in R$

Q(X) แทน $2y - 3 \leq 0$ เมื่อ $y \in R$

# ประพจน์เชิงเดี่ยว

# (single statement)

# นิเสธของประพจน์

เมื่อกำหนดให้ **p, q** เป็นประพจน์ใด ๆ <u>นิเสธ</u> **(negation)** ของ **p** เขียนแทนด้วย **~ p** เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับ **p**

| $p$ | $\sim p$ |
|---|---|
| *T* | *F* |
| *F* | *T* |

# การเชื่อมประพจน์

การนำประพจน์เชิงเดี่ยวมาสร้างเป็นสถานการณ์ต่าง ๆ โดยใช้ตัวเชื่อม (connective) ทางตรรกศาสตร์ ที่มีด้วยกัน 4 ตัวเชื่อม เพื่อได้ประพจน์ใหม่ที่เรียกว่า "<u>ประพจน์เชิงประกอบ</u>" (compound statement)

ตัวเชื่อมประพจน์ทั้ง 4 ได้แก่

1. ข้อความร่วม (**conjunction**)
2. ข้อความเลือก (**disjunction**)
3. ข้อความแบบเงื่อนไข (**conditional statement**)
4. ข้อความแบบผันกลับได้ (**biconditional statement**)

# ข้อความร่วม (conjunction)

**บทนิยาม 4**

ให้ p, q เป็นประพจน์ "ข้อความร่วม (conjunction)" ของ p และ q เขียนแทนด้วย $p \wedge q$ อ่านว่า p และ q จะมีค่าความจริงเป็นจริงได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้นเมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นจริง

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

# ข้อความเลือก (disjunction)

**<u>บทนิยาม 5</u>**

ให้ p, q เป็นประพจน์ "<u>ข้อความเลือก (disjunction)</u>" ของ p และ q เขียนแทนด้วย $p \vee q$ อ่านว่า p หรือ q จะมีค่าความจริงเป็นเท็จได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้นเมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

# ข้อความแบบเงื่อนไข (conditional statement)

<u>บทนิยาม 6</u>

ให้ p, q เป็นประพจน์ “ข้อความแบบเงื่อนไข (conditional

statement)

เขียนแ

จะมีค่าควา p มีค่าความจริง

เป็นจริง และ q

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ |

# ข้อความแบบผันกลับได้ (biconditional statement)

| $p$ | $q$ | $(p \rightarrow q)$ | $(p \rightarrow q)$ | $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$ | $(p \leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |

# ลำดับตัวเชื่อมประพจน์

ในบางครั้งเราอาจเจอประพจน์เชิงประกอบที่ไม่ได้เขียนวงเล็บแบ่งแยกตัวเชื่อมประพจน์ให้ อาจทำให้เกิดความสับสนในการหาค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบนั้น ดังนั้นจึงได้กำหนดลำดับของตัวเชื่อมประพจน์ทางตรรกศาสตร์ไว้ ดังนี้

1. $\leftrightarrow$
2. $\rightarrow$
3. $\wedge, \vee$ (กรณีมีทั้งสองตัวเชื่อมต้องใส่วงเล็บ)
4. $\sim$

# ตัวอย่างลำดับตัวเชื่อมประพจน์

1. $\sim p \wedge q \leftrightarrow r \rightarrow \sim p$

2. $\sim r \rightarrow p \wedge q \leftrightarrow r$

3. $\sim p \wedge \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$

4. $p \wedge \sim r \leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$

# การหาค่าความจริงของประพจน์

1. $p \wedge q \rightarrow r$
2. $(\sim p \wedge q) \vee r$
3. $(p \vee r) \leftrightarrow (q \wedge r)$
4. $(\sim p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$
5. $\sim [(p \wedge \sim q) \vee \sim p]$
6. $\sim (p \wedge q)$ และ $\sim p \vee \sim q$
7. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ และ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
8. $[p \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \vee \sim r)$

# การสมมูลเชิงตรรกศาสตร์/สัจนิรันดร์

<u>**บทนิยาม7**</u>

ให้ **p** และ **q** เป็นประพจน์ใด ๆ ประพจน์ **p** สมมูล (**equivalence**) กับ **q** ก็ต่อเมื่อประพจน์ทั้งสอง<u>มีค่าความจริงตรงกันทุกกรณี</u> เขียนแทนด้วย “$p \equiv q$”

<u>**บทนิยาม8**</u>

ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ เรียกว่า “<u>*สัจนิรันดร์*</u>” (**tautology**) และเรียกนิเสธของสัจนิรันดร์ว่า “<u>*ข้อความขัดแย้ง*</u>” (**contradiction**)

# กฎการสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

| | | |
|---|---|---|
| $E1.$ | $\sim(\sim p) \equiv p$ | กฎนิเสธซ้อน (Double negation) |
| $E2.$ | $p \wedge p \equiv p$ | กฎนิจพล (Indempotent Law) |
| | $p \vee p \equiv p$ | |
| $E3.$ | $p \wedge q \equiv q \wedge p$ | กฎสลับที่ (Commutative Law) |
| | $p \vee q \equiv q \vee p$ | |
| $E4.$ | $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ | กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's Law) |
| | $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ | |
| $E5.$ | $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ | กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative Law) |
| | $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ | |
| $E6.$ | $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | กฎการแจกแจง (Distributive Law) |
| | $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | |
| $E7.$ | $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ | |
| $E8.$ | $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ | กฎการแย้งสลับที่ (Contrapositive Law) |

# กฎการสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

| | | |
|---|---|---|
| $E8.$ | $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ | กฎการแย้งสลับที่ (Contrapositive Law) |
| $E9.$ | $\sim p \wedge p \equiv c$ | กฎการขัดแย้ง (Contradiction Law) |
| $E10.$ | $\sim p \vee p \equiv t$ | กฎนิรมัชฌิม (Excluded middle Law) |
| $E11.$ | $p \vee c \equiv p$ | กฎเอกลักษณ์ (Identity Law) |
| | $p \wedge t \equiv p$ | |
| $E12.$ | $p \wedge c \equiv c$ | กฎครอบงำ (Domination Law) |
| | $p \vee t \equiv t$ | |
| $E13.$ | $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ | |
| $E14.$ | $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ | |
| $E15.$ | $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ | |
| $E16.$ | $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$ | |
| $E17.$ | $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ | |

# กฎการสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (q \leftrightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (\sim q \rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q) \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$$

$$p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

$$p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$$

$$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$

$$(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

# การอ้างเหตุผล/การอนุมานและการพิสูจน์

**บทนิยาม9**

การอ้างเหตุผล (Argument) คือการอ้างว่าประพจน์ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ ซึ่งจะเรียกว่าเหตุนั้นสามารถสรุปประพจน์ $q$ ซึ่งจะเรียกว่าผลสรุป เขียนแทนด้วย

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \vdash q$$

การอ้างเหตุผลจะ "สมเหตุสมผล" (Valid) ก็ต่อเมื่อ

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$$

เป็นสัจนิรันดร์ นอกเหนือจากนี้เป็นการอ้างเหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล (Invalid)

# กฎการอนุมานและการพิสูจน์

- Modus ponens is the argument form

$$\begin{array}{l} \quad p \longrightarrow q \\ \quad p \\ \therefore q \end{array}$$

- This is also called a direct argument.

# กฎการอนุมานและการพิสูจน์

- Modus tollens is the argument form

$$
\begin{array}{r}
p \to q \\
\sim q \\
\therefore \sim p
\end{array}
$$

- This is also called an indirect argument.
- It is equivalent to replacing $p \to q$ with $\sim q \to \sim p$ and then using modus ponens.

# กฎการอนุมานและการพิสูจน์

- Transitivity

$$p \rightarrow q$$
$$q \rightarrow r$$
$$\therefore p \rightarrow r$$

- Elimination

$$p \vee q$$
$$\sim p$$
$$\therefore q$$

# กฎการอนุมานและการพิสูจน์

- From the specific to the general

$$\begin{array}{l} p \\ \therefore p \vee q \end{array}$$

- From the general to the specific

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \therefore p \end{array}$$

# กฎการอนุมานและการพิสูจน์

- Constructive Dilemma

$$
\begin{array}{ll}
 & p \rightarrow q \\
 & r \rightarrow s \\
 & p \vee r \\
\therefore & q \vee s
\end{array}
$$

# กฎการอนุมานและการพิสูจน์

- Destructive Dilemma

$$
\begin{array}{ll}
 & p \rightarrow q \\
 & r \rightarrow s \\
 & \sim q \vee \sim s \\
\therefore & \sim p \vee \sim r
\end{array}
$$

# ตัวบ่งปริมาณ

<u>**บทนิยาม10**</u> ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ p(x) เป็นประพจน์

<u>แบบที่1</u> **นำหน้า p(x) ด้วยตัวบ่งปริมาณ**

**ทุก x ใน $\mathcal{U}$ / สำหรับแต่ละ x ใน $\mathcal{U}$ / ไม่ว่า x จะเป็นอะไรก็ตามใน $\mathcal{U}$ สำหรับแต่ละ x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติ p(x) เขียนแทนด้วย**

$\forall x \in \mathcal{U}[p(x)]$ หรือ $\forall x[p(x)]$ หรือ $\forall x \in \mathcal{U},\ p(x)$

เรียก ∀ ว่า "<u>ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด</u>" **(Universal quantifier)**

# ตัวบ่งปริมาณ

<u>บทนิยาม10</u> ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ p(x) เป็นประพจน์

<u>แบบที่2</u> **นำหน้า p(x) ด้วยตัวบ่งปริมาณ**

**มี x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่ง / บาง x ใน $\mathcal{U}$ มีสมบัติว่า / มีบาง x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติ p(x) เขียนแทนด้วย**

$\exists x \in \mathcal{U}[p(x)]$ หรือ $\exists x[p(x)]$ หรือ $\exists x \in \mathcal{U},\ p(x)$

เรียก $\exists$ ว่า "<u>ตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่ง</u>" **(Existential quantifier)**

# ค่าความจริงตัวบ่งปริมาณ

<u>บทนิยาม11</u> ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ **p(x)** เป็นประพจน์

**ข้อความ $\forall x \in \mathcal{U},\ p(x)$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ ไม่ว่า x จะเป็นอะไรก็ตามใน $\mathcal{U}$ ทำให้ p(x) มีค่าความเป็นจริง นอกนั้นข้อความนี้เป็นเท็จ**

**ข้อความ $\exists x \in \mathcal{U},\ p(x)$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวใน $\mathcal{U}$ ทำให้ p(x) มีค่าความเป็นจริง นอกนั้นข้อความนี้เป็นเท็จ**

# นิเสธตัวบ่งปริมาณ

<u>**บทนิยาม12**</u> ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ของประพจน์ p(x) นิเสธของตัวบ่งปริมาณนิยามโดย

**นิเสธของ** $\forall x \in \mathcal{U},\ p(x)$ **คือ** $\sim\forall x \in \mathcal{U},\ p(x) \equiv \exists x \in \mathcal{U},\ \sim p(x)$

**นิเสธของ** $\exists x \in \mathcal{U},\ p(x)$ **คือ** $\sim\exists x \in \mathcal{U},\ p(x) \equiv \forall x \in \mathcal{U},\ \sim p(x)$