

บทที่ 9

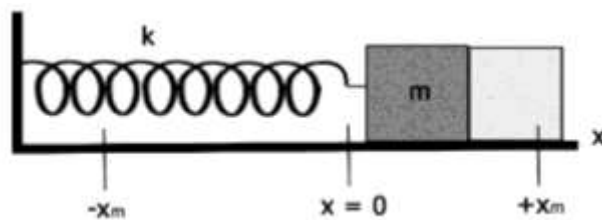
การเคลื่อนที่แบบแกว่งกวัด

(Oscillatory motion)

การเคลื่อนที่แบบแกว่งกวัด คือลักษณะการเคลื่อนที่กลับไปกลับมาในลักษณะที่ซ้ำเดิมของวัตถุโดยผ่านจุดกึ่งกลางที่เรียกว่าตำแหน่งสมดุลโดยเมื่อวัตถุมีการเคลื่อนที่ครบรอบเราเรียกว่าคาบของการเคลื่อนที่ บางทีจึงเรียกลักษณะการเคลื่อนที่แบบนี้ว่าการเคลื่อนที่เป็นคาบ ตัวอย่างการเคลื่อนที่แบบแกว่งกวัดที่สำคัญที่สุดคือการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย เช่น การสั่นของมวลที่ติดปลายสปริงการแกว่งกวัดของลูกตุ้ม หรือการแกว่งกวัดของชิงช้า เป็นต้น สำหรับในบทนี้เราจะมาศึกษาลักษณะการเคลื่อนที่แบบนี้นั่น

9.1 การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Simple harmonic motion, SHM)

เราสามารถพิจารณาการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายคือการเคลื่อนที่ของมวลที่ผูกติดกับสปริงในหัวข้อนี้เราจะมาดูลักษณะของแรงที่เกิดขึ้นเมื่อมีมวลผูกติดอยู่กับสปริง พิจารณาจากภาพที่ 9.1 เมื่อนำมวล m มาผูกไว้กับปลายวัตถุ



ภาพที่ 9.1 แรงจากสปริง

เมื่อออกแรงดึงมวล m ให้ออกห่างจากจุดสมดุลเป็นระยะ x จากกฎข้อสองของนิวตัน

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

เมื่อยืดสปริงออกแรงที่กระทำต่อสปริง กฎของฮุคบอกไว้ว่าขนาดของแรงจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะยืดของสปริงและมีทิศตรงข้ามกับแรงสปริงโดยเขียนเป็นสมการได้

$$\vec{F} = -k\vec{x} \quad (9-1)$$

เมื่อ k คือค่าคงตัวสปริง (spring constant)

พิจารณาจากสมการ $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

และเนื่องจาก

$$a = -\omega^2 x$$

จะได้

$$\begin{aligned} F &= m(-\omega^2 x) \\ F &= -m\omega^2 x \end{aligned} \quad (9-2)$$

จากกฎของฮุคจะได้

$$-m\omega^2 x = -kx \quad (9-3)$$

จากสมการจะได้ $k = \omega^2 m$

ดังนั้น

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9-4)$$

และจากสมการ $\vec{F} = -k\vec{x}$

จะได้

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (9-5)$$

หรือ

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x \quad (9-6)$$

ดังนั้น

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (9-7)$$

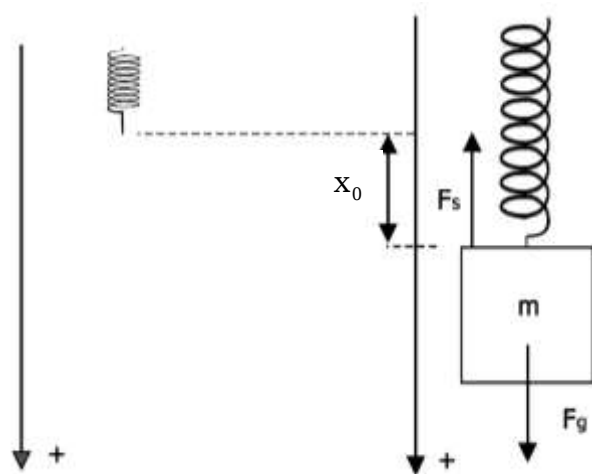
เนื่องจาก

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ดังนั้น

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (9-8)$$

ตัวอย่างที่ 9.1 จงหาค่าคงที่ของสปริงเมื่อนำมวล 0.001 กิโลกรัม มาแขวนที่ปลายสปริงแล้วทำให้สปริงยืดออกจากตำแหน่งสมดุลเดิมเป็นระยะ 10 เซนติเมตร ภาพที่ 9.2



ภาพที่ 9.2 สำหรับตัวอย่างที่ 9.1

วิธีทำ จากสมการ

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

และเนื่องจากแรงที่แขวนสปริงมีค่าเท่ากับ mg จะได้

$$kx_0 = -mg$$

แทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการ

$$\begin{aligned}
 k &= -\frac{mg}{x_0} \\
 &= \frac{(100 \times 10^{-3} \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{(1 \times 10^{-2} \text{ m})} \\
 &= 9.80 \text{ N/m}
 \end{aligned}$$

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย คือการเคลื่อนที่ในลักษณะวนกลับไปกลับมาซ้ำเดิม เราสามารถเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ ระหว่างการกระจัดกับเวลาของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายได้ คือ

$$x = A \sin(\omega t + \phi) \quad (9-9)$$

เมื่อ x คือ ระยะกระจัด

A คือ แอมพลิจูด

ϕ คือ มุมที่วัดถูกวาดไปได้ที่เวลาเริ่มต้น $t = 0$

$\omega t + \phi$ คือ มุมเฟส

ω คือ อัตราเร็วเชิงมุม

t คือ เวลา

ความถี่เชิงมุม (ω) หาได้จากสมการ

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad (9-10)$$

เมื่อมีการเคลื่อนที่ผ่านไปครบรอบจะได้ระยะทาง คือ $\theta = 2\pi$ เรเดียน และให้เวลาที่เคลื่อนที่ ครบ 1 รอบ คือ $t = T$ ดังนั้นจะได้ความถี่เชิงมุมคือ

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (9-11)$$

เรียกค่า T นี้ว่าคาบการเคลื่อนที่
สำหรับจำนวนครั้งของการสั่นต่อเวลาเราเรียกว่า ความถี่ คือพิจารณาว่าในเวลาหนึ่งนั้นมีการ
สั่นได้กี่ครั้ง จะได้ค่าความถี่คือ

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (9-12)$$

และจากสมการ $x = A\sin(\omega t + \phi)$ จะหาความเร็วได้จากสมการ

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \omega A \cos(\omega t + \phi) \quad (9-13)$$

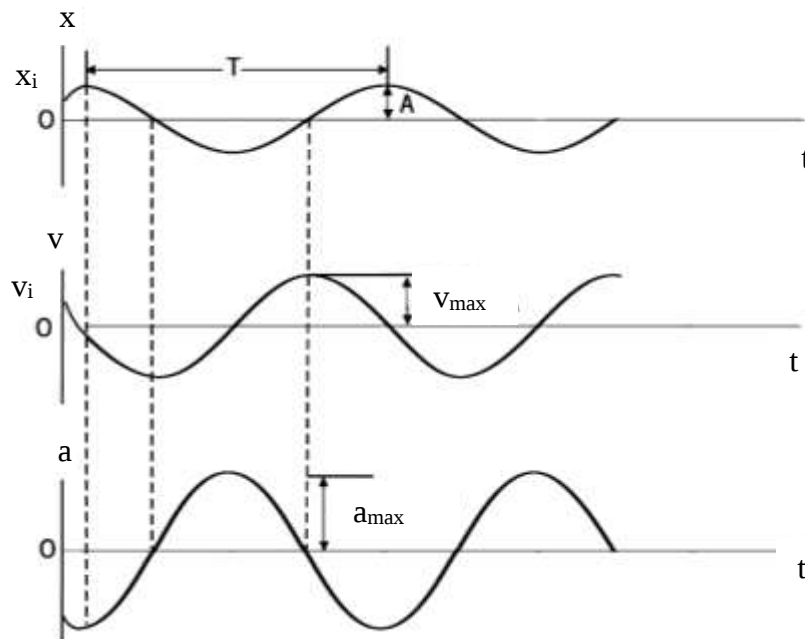
และ

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = -\omega^2 x \quad (9-14)$$

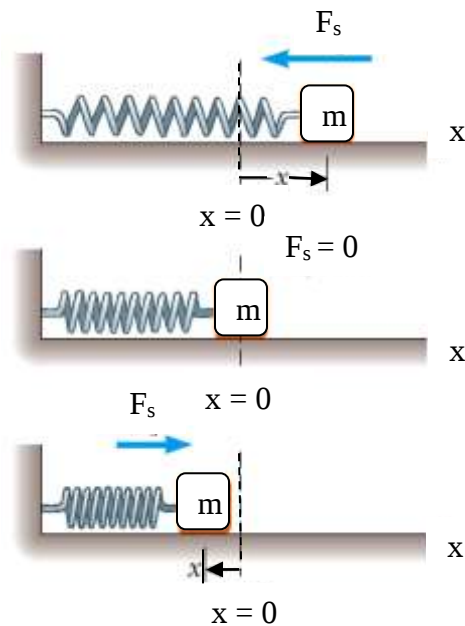
เมื่อเปรียบเทียบสมการ (9-9) และ (9-14) จะเห็นว่าสมการ (9-14) เป็นอนุพันธ์อันดับ
สองของสมการ (9-9) และเมื่อเขียนกราฟจะได้ว่าทั้งสองกราฟมีเฟสต่างกัน π เรเดียน เมื่อ
เปรียบเทียบระหว่างมุมระยะทาง ความเร็ว และความเร่ง ของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่าง
ง่ายแสดงดังภาพที่ 9.3



ภาพที่ 9.3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง ความเร็วและความเร่ง

9.1.1 การเคลื่อนที่ของมวลที่ติดสปริง (the motion of mass-spring attached)

พิจารณาการเคลื่อนที่ของมวลที่ติดสปริงดังภาพที่ 9.4



ภาพที่ 9.4 แสดงภาพของมวลติดสปริง

จากภาพที่ 9.4 แรงที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของสปริง จะเป็นไปตามกฎของฮุค คือ

$$F = -kx$$

แรงที่เกิดขึ้นมีค่าติดลบเนื่องจากทิศของแรงที่เกิดขึ้นมีทิศตรงข้ามกับการกระจัดนั่นเอง

พิจารณาเปรียบเทียบกับสมการของแรง จาก

$$F = ma = -kx$$

จะได้
$$a = \frac{k}{m}x$$

และเมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (9-3) จะได้

$$\frac{k}{m}x = \omega^2 x \quad (9-15)$$

จะได้

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9-16)$$

เนื่องจาก

$$T = 2\frac{\pi}{\omega} \quad (9-17)$$

ดังนั้น

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (9-18)$$

และ

$$f = \frac{1}{T}$$

ดังนั้น

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9-19)$$

ตัวอย่างที่ 9.2 จากตัวอย่างที่ 9.1 เมื่อยกมวล m ขึ้น 10 เซนติเมตรแล้วปล่อยจากจุดหยุดนิ่งจงคำนวณหา

ก. ความถี่เชิงมุม ข. แอมพลิจูด ง. มุมเฟส

วิธีทำ ก. อัตราเร็วเชิงมุมของสปริงคือ

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{9.8\text{N/m}}{(500 \times 10^{-3}\text{kg})}} \\ &= 4.43 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

ข. แอมพลิจูดคือการกระจัดสูงสุด $A=10 \text{ cm}$

ค. เราทราบว่า $x=A$ เมื่อ $t=0$ จาก

$$\begin{aligned}x &= A\cos(\omega t + \phi) \\ A &= A\cos(\phi) \\ \cos\phi &= 1 \\ \phi &= 0\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 9.3 จากตัวอย่างที่ 9.2 จงหาเวลาและความเร็วเมื่อมวล m เคลื่อนที่มาถึงตำแหน่งสมดุล

วิธีทำ ต้องการหาเวลาเมื่อกำหนดตำแหน่งมาให้ ที่ตำแหน่งสมดุล $x=0$ จากสมการตำแหน่งเป็นฟังก์ชันของเวลา

$$\begin{aligned}x &= A\cos(\omega t + \phi) \\ 0 &= \cos(\omega t) \\ \omega t + \phi &= \frac{\pi}{2} \left(\cos\frac{\pi}{2}=0 \right)\end{aligned}$$

จากตัวอย่างที่ 9.2 เมื่อ $\phi=0$ จะได้

$$\begin{aligned}\omega t &= \frac{\pi}{2} \\ t &= \frac{\pi}{2\omega} \\ &= \frac{\pi}{2(4.43 \text{ rad/s})} \\ &= 0.355 \text{ s}\end{aligned}$$

สมการความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

$$\begin{aligned} v_t &= -\omega A \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) \\ &= -\omega A \\ &= -(4.43 \text{ rad/s})(0.1 \text{ m}) \\ &= -0.443 \text{ m/s} \end{aligned}$$

ความเร็วเป็นลบ แสดงว่ามวล m เคลื่อนที่ลง

9.2 พลังงานของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย (Energy of simple harmonic motion)

เมื่อมีแรง F กระทำกับมวล m ที่ติดอยู่กับสปริงทำให้เคลื่อนทำให้มวล m เคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายด้วยความเร่ง a

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อสองของนิวตัน จะได้

$$F = ma$$

และเนื่องจาก

$$a = -\omega^2 x$$

จะได้

$$F = m(-\omega^2 x)$$

$$F = -m\omega^2 x \quad (9-20)$$

จากกฎของฮุคจะได้

$$-m\omega^2 x = -kx \quad (9-21)$$

พลังงานศักย์ของสปริงหาได้จากสมการ

$$F = \frac{-E_p}{dx}$$

ดังนั้นจะได้

$$-kx = -\frac{dU}{dx}$$

เนื่องจากที่จุดสมดุลพลังงานศักย์เป็นศูนย์

ดังนั้น

$$\int_0^{E_p} dE = \int_0^x kx dx$$

จะได้พลังงานศักย์

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 \quad (9-22)$$

เนื่องจากอัตราเร็วเชิงมุมคือ

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ดังนั้นพลังงานศักย์

$$E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad (9-23)$$

จากสมการของพลังงานจลน์

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2$$

เนื่องจากการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

$$v = \omega A \sin(\omega t + \phi)$$

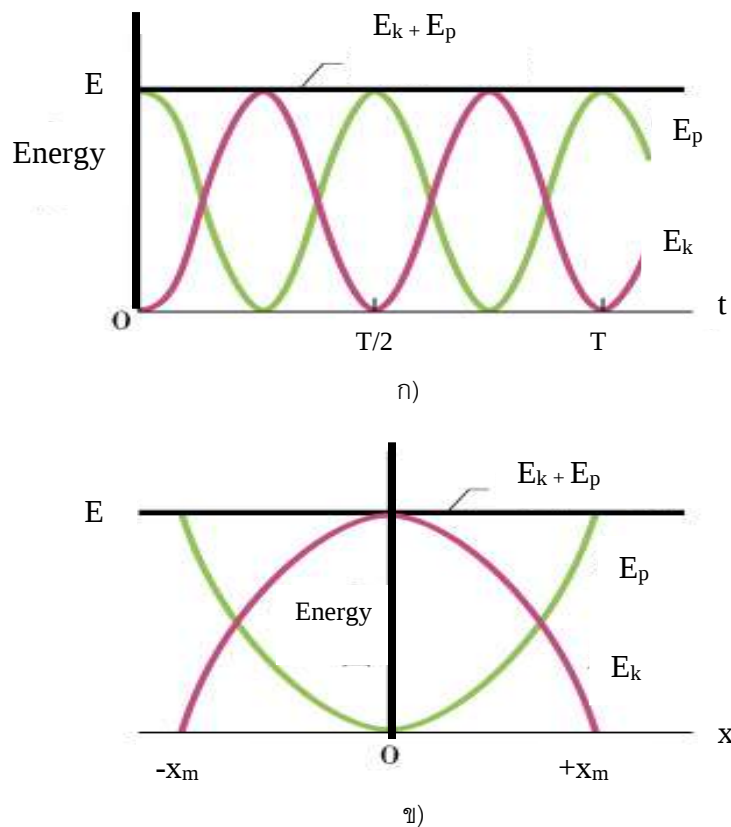
ดังนั้นพลังงานจลน์คือ

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 [1 - \cos^2(\omega t + \phi)] \\ E_k &= \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2) \end{aligned} \quad (9-24)$$

พลังงานรวมทั้งหมดคือ

$$\begin{aligned} E_T &= E_k + E_p \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \\ E_T &= \frac{1}{2} kA^2 \end{aligned} \quad (9-25)$$

เมื่อพิจารณาจากสมการของพลังงานศักย์และพลังงานจลน์จะพบว่าพลังงานศักย์จะมีค่ามากที่สุดเมื่อระยะห่างจากจุดสมดุล (x) มีค่ามากที่สุด แต่พลังงานจลน์จะมีค่าเป็นศูนย์เมื่ออยู่ที่ระยะแอมพลิจูดสูงสุด โดยเขียนเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานศักย์กับพลังงานจลน์ได้ดังภาพที่ 9.5



ภาพที่ 9.5 ก) ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานศักย์กับพลังงานจลน์ที่เวลาต่างๆ

ข) ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานศักย์กับพลังงานจลน์ที่ตำแหน่งต่างๆ

ตัวอย่างที่ 9.4 ผูกมวล 5 กิโลกรัมให้ติดกับสปริงที่มีมวลเบาเมื่อยืดสปริงออกเป็นระยะ 50 เซนติเมตร ถ้าค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ 100 นิวตันต่อเมตร จงหา

ก. แรงที่สปริงกระทำต่อวัตถุก่อนปล่อย

- ข. คาบภายหลังจากที่ปล่อยวัตถุ
- ค. แอมพลิจูดของการเคลื่อนที่
- ง. ความเร็วสูงสุดของวัตถุ
- จ. ความเร่งสูงสุดของวัตถุ
- ฉ. หาคำลังงานศักย์และพลังงานจลน์สูงสุดของมวล

วิธีทำ ก. หาแรงที่สปริงกระทำต่อวัตถุก่อนปล่อย

$$F = -kx$$

จะได้
$$F = (-100\text{N/m})(0.5\text{m})$$

$$= 50\text{ N}$$

แรงที่ยืดสปริงออกมีค่าเท่ากับ 50 นิวตัน

ข. หาคาบภายหลังจากที่ปล่อยวัตถุ

จากสมการ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

จะได้
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5\text{kg}}{100\text{N/m}}}$$

$$= 1.41\text{ s}$$

คาบของการเคลื่อนที่เท่ากับ 1.41 วินาที

ค. หาแอมพลิจูดของการเคลื่อนที่

แอมพลิจูดการกระจัดมากที่สุดที่อยู่นิ่งจากจุดสมดุลมากที่สุดคือ 0.5 เมตร

ง. หาคความเร็วสูงสุดของวัตถุ

จากสมการ

$$v_{\max} = \omega A$$

$$= 2\pi f A$$

$$= \frac{2\pi A}{T}$$

จะได้

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \frac{2\pi(0.5\text{m})}{1.41\text{ s}} \\ &= 2.23\text{ m/s} \end{aligned}$$

นั่นคือความเร็วสูงสุดเท่ากับ 2.23 เมตรต่อวินาที

จ. หาความเร่งสูงสุดของวัตถุ

จากสมการ

$$\begin{aligned} a_{\max} &= -\omega^2 A \\ &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \\ \text{ดังนั้น} \quad a_{\max} &= -\left(\frac{2\pi}{1.41\text{s}}\right)^2 (0.5\text{m}) \\ &= -9.94\text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

นั่นคือความเร่งสูงสุดเท่ากับ 9.94 เมตรต่อวินาที²

ฉ. หาพลังงานศักย์และพลังงานจลน์สูงสุดของมวล

หาพลังงานจลน์จากสมการ

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}(5\text{kg})(1.41\text{m/s})^2 \\ &= 3.53\text{ J} \end{aligned}$$

พลังงานจลน์สูงสุดเท่ากับ 3.53 จูล

หาพลังงานจลน์จากสมการ

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}(100\text{N/m})(0.5\text{m})^2 \\ &= 12.5\text{ J} \end{aligned}$$

พลังงานศักย์สูงสุดเท่ากับ 12.5 จูล

9.3 การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายกับการเคลื่อนที่เป็นวงกลม (Simple harmonic motion and circular motion)

เมื่อเราพิจารณาลักษณะการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายเราจะเห็นว่าเป็นการเคลื่อนที่ที่เป็นรอบๆ คล้ายกับการเคลื่อนที่ที่เป็นวงกลม ดังนั้นองค์ประกอบของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย เช่น ความเร็ว ความเร่ง และคาบ จึงมีลักษณะคล้ายกับการเคลื่อนที่ที่เป็นวงกลม เมื่อเทียบกับการเคลื่อนที่แบบวงกลม ความเร็วเชิงมุม คือ

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (9-26)$$

หรือ

$$\int d\theta = \int \omega dt$$

ดังนั้นจะได้

$$\theta = \omega t + \phi \quad (9-27)$$

โดยความเร็วเชิงเส้นหาได้จากสมการ

$$v = \omega r$$

และความเร่งหาได้จากสมการ

$$\begin{aligned} a &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{(\omega r)^2}{r} \\ a &= \omega^2 r \end{aligned} \quad (9-28)$$

เราสามารถหา ตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่งของวัตถุเมื่อเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันของเวลาดังต่อไปนี้

$$\text{ที่เวลา } t=0 \quad x = r \cos \theta \quad \text{ที่เวลา } t \quad x_t = r \cos(\omega t + \phi) \quad (9-29)$$

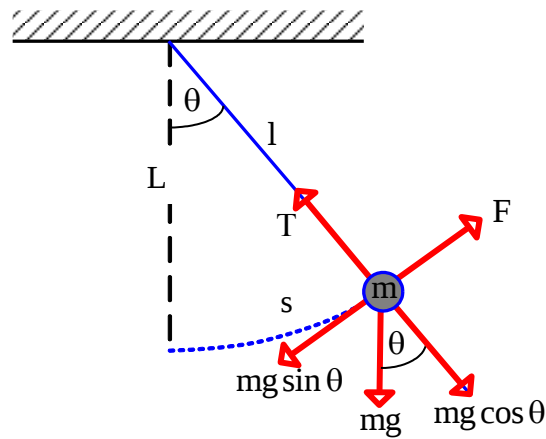
$$\text{ที่เวลา } t=0 \quad v = -\omega r \sin \theta \quad \text{ที่เวลา } t \quad v_t = -\omega r \sin(\omega t + \phi) \quad (9-30)$$

$$\text{ที่เวลา } t=0 \quad a = -\omega^2 r \cos \theta \quad \text{ที่เวลา } t \quad a_t = -\omega^2 r \cos(\omega t + \phi) \quad (9-31)$$

9.4 เพนดูลัมอย่างง่าย (Simple pendulum)

ลูกตุ้มหรือเพนดูลัมจะมีลักษณะการเคลื่อนที่แบบแกว่งกวัด โดยการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มที่ห้อยแกว่งไปมาของนาฬิกาแบบโบราณก็ถือว่าเป็นตัวอย่างของรูปแบบการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายอีกแบบหนึ่งที่มีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นรอบกลับไปที่กลับมา

พิจารณานาฬิกาที่เป็นแบบลูกตุ้มดังภาพที่ 9.6



ภาพที่ 9.6 เพนดูลัมอย่างง่าย

ในการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายนั้นมีส่วนหนึ่งที่จะเป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายก็ต่อเมื่อ มุม θ มีค่าน้อย คือไม่เกิน 5° จากภาพถ้า F คือแรงที่ดึงลูกตุ้มนาฬิกาดังนั้นจะได้

$$F = -mg \sin \theta \quad (9-32)$$

เนื่องจากเมื่อมุม θ มีค่าน้อยจะได้ค่าของ θ มีค่าประมาณ $\sin \theta$ ดังนั้นจากสมการ(9-32) จะได้

$$F = -mg\theta \quad (9-33)$$

และระยะทางที่เคลื่อนที่จากภาพให้ $s = x = L\theta$

ดังนั้น

$$\theta = \frac{x}{L} \quad (9-34)$$

แทนค่าในสมการ (9-1) จะได้

$$F = -mg \frac{x}{L} \quad (9-35)$$

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\sum F = ma$$

ดังนั้น

$$ma = mg \frac{x}{L} \quad (9-36)$$

$$a = g \frac{x}{L} \quad (9-37)$$

จากสมการ

$$a = \omega^2 x$$

ดังนั้น

$$\omega^2 x = g \frac{x}{L} \quad (9-38)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (9-39)$$

สมการที่ (9-39) แสดงให้เห็นว่าความถี่เชิงมุมจะขึ้นอยู่กับความยาวของเชือกที่ผูกลูกตุ้ม

นาฬิกา

ตัวอย่างที่ 9.5 จงหาความยาวเชือกที่ใช้ในการแกว่งแบบลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายที่ทำให้คาบการแกว่งมีค่า 5 วินาที

วิธีทำ จากสมการ

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

และ

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

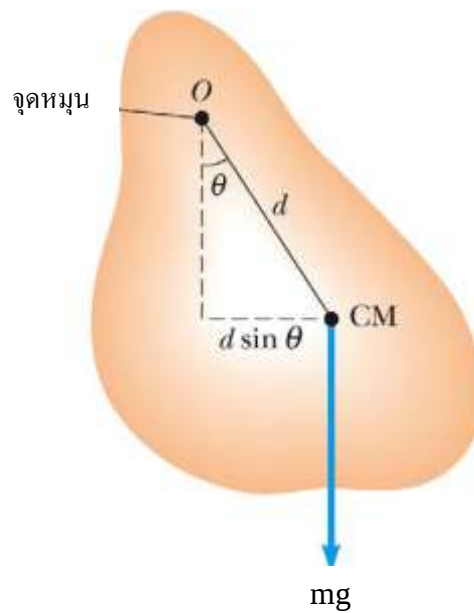
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \qquad L &= \frac{gT^2}{4\pi^2} \\
 \text{แทนค่าลงในสมการจะได้} \\
 L &= \frac{(9.8\text{m/s}^2)(2\text{s})^2}{4\pi^2} \\
 &= 0.993 \text{ m}
 \end{aligned}$$

นั่นคือเชือกมีความยาว 0.993 เมตร

9.5 ลูกตุ้มนาฬิกาฟิสิกส์ (Physical pendulum)

ลักษณะของลูกตุ้มนาฬิกาฟิสิกส์ คือการที่วัตถุแข็งเกร็งเกิดการแกว่งในลักษณะที่เป็นรอบๆ ซึ่งก็คือการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายอีกแบบหนึ่งนั่นเอง พิจารณาภาพที่ 9.7



ภาพที่ 9.7 ลูกตุ้มนาฬิกาฟิสิกส์

จากรูป ทอร์กที่กระทำ คือ

$$\tau = -dmgsin\theta \quad (9-40)$$

และจากสมการ

$$\tau = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (9-41)$$

จะได้

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + dmgsin\theta = 0 \quad (9-42)$$

หรือ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{dmg}{I} sin\theta = 0 \quad (9-43)$$

เมื่อ θ มีขนาดเล็กมากๆ ดังนั้น θ มีค่าประมาณ $sin\theta$

จะได้

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{dmg}{I} \theta = 0 \quad (9-44)$$

เมื่อเทียบกับสมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

จะได้

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad (9-45)$$

เนื่องจาก

$$\omega = 2\pi f$$

ดังนั้น

$$2\pi f = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad (9-46)$$

หรือ

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad (9-47)$$

และคาบ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (9-48)$$

บทสรุป

การเคลื่อนที่แบบแกว่งกวัด คือลักษณะการเคลื่อนที่ซ้ำกลับไปกลับมาโดยผ่านจุดสมดุลของวัตถุ ตัวอย่างที่สำคัญของการเคลื่อนที่แบบแกว่งกวัด เช่น การเคลื่อนที่ของมวลที่ผูกติดกับสปริง ซึ่งสามารถหาค่าของแรงที่ยืดสปริงออกได้จากกฎของฮุก รวมถึงการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกและเพนดูลัมอย่างง่าย เวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่ครบหนึ่งรอบคือ คาบของการเคลื่อนที่ ในการเคลื่อนที่ของมวลที่ผูกติดอยู่กับสปริงนั้นพลังงานศักย์สูงสุดจะมีค่ามากที่สุดที่ระยะห่างจากจุดสมดุลมากที่สุด ส่วนพลังงานจลน์จะมีค่าน้อยที่สุดที่ระยะแอมพลิจูด และมากที่สุดที่ตำแหน่งสมดุล

กิจกรรมการทดลอง

เรื่อง การหาค่าความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก (g) จากการแกว่งแบบเพนดูลัมอย่างง่าย

วัตถุประสงค์การทดลอง

1. เพื่อศึกษาและทดลองการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมอย่างง่าย
2. เขียนกราฟและคำนวณค่าความชันของกราฟได้
3. วิเคราะห์ผลของกราฟเพื่อสรุปและคำนวณหาค่าความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก (g) ได้
4. คำนวณค่าความคลาดเคลื่อนตามหลักของเลขนัยสำคัญได้อย่างถูกต้อง

วัสดุและอุปกรณ์

1. ขาตั้งสำหรับแขวนลูกตุ้มเพนดูลัม พร้อมเชือกเบา
2. ไม้บรรทัดวัดความยาวเชือก
3. นาฬิกาจับเวลา

วิธีการทดลอง

1. ติดตั้งอุปกรณ์ชุดการเคลื่อนที่แบบเพนดูลัมอย่างง่าย
2. ผู้ทดลองปล่อยลูกตุ้มเพนดูลัมขนาดเล็ก ซึ่งผูกไว้ด้วยเชือกยาว 30 เซนติเมตร โดยให้เชือกทำมุมน้อยๆ ไม่เกิน 10 องศาับตำแหน่งสมดุลในแนวดิ่ง
3. ให้ผู้ทดลองอีกหนึ่งคนเป็นคนจับเวลาโดยการนับรอบการแกว่งของลูกตุ้มเพนดูลัม จำนวน 10 รอบ บันทึกเวลาที่ได้ลงในตารางบันทึกผล
4. เปลี่ยนความยาวเชือกเป็น 20 และ 10 เซนติเมตร ตามลำดับ และทำการทดลองซ้ำข้อ 2-4
5. เปลี่ยนขนาดของลูกตุ้มเพนดูลัมเป็นลูกตุ้มขนาดใหญ่ และทำการทดลองซ้ำข้อ 2-4
6. เขียนกราฟระหว่างคาบกำลังสองและความยาวเชือก เพื่อนำไปคำนวณหาค่าความชันของกราฟ
7. วิเคราะห์และสรุปผลการทดลอง

ตารางบันทึกผลการทดลอง

การทดลอง	ความยาวเชือก (เซนติเมตร)	เวลาแกว่งครบ 10 รอบ (วินาที)	คาบ (วินาที)	คาบกำลังสอง (วินาที ²)
ลูกตุ้มเล็ก	30			
	20			
	10			
ลูกตุ้มใหญ่	30			
	20			
	10			

วิเคราะห์ผลการทดลอง

ค่า g จากกราฟลูกตุ้มเล็ก เท่ากับ $\pm$(หน่วย.....)

แสดงวิธีการคำนวณ

.....

ค่า g จากกราฟลูกตุ้มใหญ่ เท่ากับ $\pm$(หน่วย.....)

แสดงวิธีการคำนวณ

.....

ค่า g เฉลี่ย เท่ากับ $\pm$(หน่วย.....)

แสดงวิธีการคำนวณ

ร้อยละของความคลาดเคลื่อนของค่า g เทียบกับค่ามาตรฐาน เท่ากับ

แสดงวิธีการคำนวณ

.....

สรุปผลการทดลอง

.....

.....

.....

.....

.....

.....

คำถามท้ายกิจกรรม

1. ความยาวของเชือกและมวลลูกตุ้มเพนดูลัมมีผลต่อการแกว่งอย่างง่ายหรือไม่ อย่างไร จงให้เหตุผลประกอบการอธิบาย

.....

.....

.....

2. การทดลองนี้นักศึกษาได้ค่า g ถูกต้องหรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

.....

.....

3. จงพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ที่ได้ว่ามีค่าเท่ากับ $\frac{4\pi^2}{g}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกหัด

1. วัตถุมวล 2 กิโลกรัม กำลังเคลื่อนที่แบบแกว่งกวัดด้วยความเร็ว 10 รอบ โดยใช้เวลา 1 วินาที จงหาอัตราเร็วเชิงมุมและคาบการเคลื่อนที่
2. จงหาความยาวเชือกของการแกว่งแบบลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายที่ทำให้คาบการเคลื่อนที่มีค่า 2 วินาที
3. อนุกรมมวล 0.5 กิโลกรัมติดกับสปริงที่มีค่าคงตัวสปริงเท่ากับ 200 นิวตันต่อเมตร จงหาความเร็วสูงสุดและต่ำสุดของวัตถุ
4. จากข้อ 3 จงหาความเร่งสูงสุด
5. ลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายกำลังแกว่งด้วยอัตราเร็วเชิงมุม 1 เรเดียนต่อวินาที จงหาความยาวของเชือกที่แขวนลูกตุ้มของนาฬิกา
6. อนุกรมมวลที่มีความยาว 50 เซนติเมตร กับก้อนหินมวล 1 กิโลกรัม แล้วเหวี่ยงทำให้เคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยความเร็วเชิงเส้น 2 เมตรต่อวินาที จงหาความเร่งของมวลนี้
7. วัตถุชิ้นหนึ่งติดอยู่กับปลายข้างหนึ่งของสปริงซึ่งยาว 2 เมตร และมีปลายข้างหนึ่งตรึงอยู่กับที่ถ้าวัตถุชิ้นนี้วางอยู่บนพื้นราบเกลี้ยงและกำลังเคลื่อนที่แบบ SHM โดยมีความเร็วมากที่สุด 2 เมตรต่อวินาที และมีการกระจัดจากจุดสมดุลมากที่สุด 0.5 เมตร อัตราเร็วเชิงมุมของการเคลื่อนที่นั้นเป็นเท่าใด
8. อนุกรมมวล 100 กรัม ที่ปลายหนึ่งของสปริงที่มีมวลน้อยมากดึงมวลจากตำแหน่งสมดุล 10 เซนติเมตรแล้วปล่อยอัตราเร็วเชิงเส้นขณะเคลื่อนที่ผ่านสมดุลมีค่าเท่าใดถ้าคาบของการแกว่งมีค่า 2 วินาที

เอกสารอ้างอิง

ก่องกัญจน์ ภัทราภาณจน์ และชนภาณจน์ ภัทราภาณจน์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2552).

ฟิสิกส์ 1 ตัวอย่างและโจทย์พร้อมคำเฉลย. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

คณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2549). ฟิสิกส์ 1. กรุงเทพฯ:

สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เชิญโชค ศรีขวัญ และคณะ, มหาวิทยาลัยมหิดล. (2546). ฟิสิกส์ทั่วไป 1. กรุงเทพฯ: คณะ

วิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล.

ทวี นิยมอ้อย, มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์. (2541). ฟิสิกส์พื้นฐานระดับมหาวิทยาลัย 1.

กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

ปรเมษฐ์ ปัญญาเหล็ก, มหาวิทยาลัยศรีปทุม. (2553). ปฏิบัติการฟิสิกส์ 1. กรุงเทพฯ: โรง

พิมพ์มหาวิทยาลัยศรีปทุม.

สุชาติ สุภาพ, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี. (2558). ฟิสิกส์ทั่วไป. กรุงเทพฯ:

สำนักพิมพ์ทริปเฟล เอ็ดดูเคชั่น.

Fraser, G. (2006). **The New Physics for the Twenty-First Century**. Cambridge:

Cambridge University Press.

Giambattista, A., Richardson, B.M., and Richardson, R.C. (2007). **College Physics 2nd**

ed. Boston: Mc Graw Hill.

Serway, R. A., and Jewett, J. W. (2014). **Physics for Scientists and Engineers with**

Modern Physics 9th ed. Belmont: Brooks/Cole-Thomson Learning.

Serway, R.A., Vuille, C., and Hughes, J. (2015). **College Physics 10th ed.** Stamford: Cengage

Learning.

Thornton, T.S., and Rex, A. (2013). **Modern Physics for Scientists and Engineers 4th ed.**

Boston: Brooks/Cole- Cengage Learning.

Young, H.D., and Freedman, R.A. (2016). **Sear's & Zemansky's University Physics with**

Modern Physics 14th ed. Essex: Pearson Education Limited.