เฉลย Assignment 12
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ไอดีลใหญ่สุด และไอดีสเฉพาะ **สัปดาห์ที่** 13 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

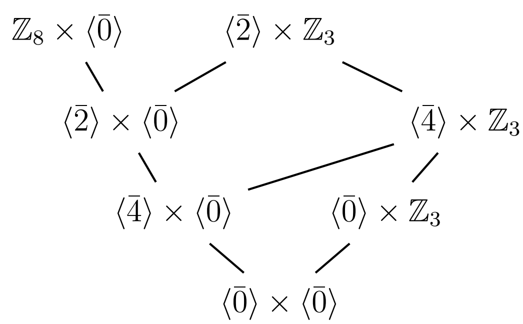
---

1. จงหาไอดีลใหญ่สุดโดยการเขียนแลตทิซของ

   1.1 $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$
   วิธีทำ ไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$ คือ

$$\begin{array}{cccc} \langle\bar{0}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{0}\rangle \times \mathbb{Z}_3 & \langle\bar{2}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{2}\rangle \times \mathbb{Z}_3 \\ \langle\bar{4}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{4}\rangle \times \mathbb{Z}_3 & \mathbb{Z}_8 \times \langle\bar{0}\rangle & \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \end{array}$$

   เขียนเลตทิซโดยไม่มีไอดีส $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$ ได้ดังรูป

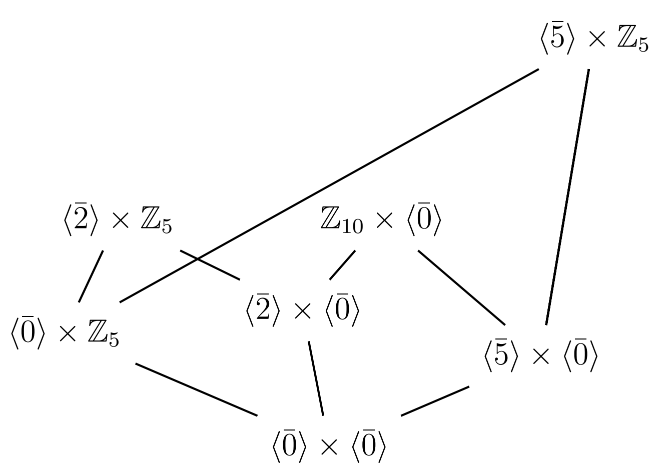


   จากแผนภาพจะได้ว่า $\mathbb{Z}_8 \times \langle\bar{0}\rangle$ และ $\langle\bar{2}\rangle \times \mathbb{Z}_3$ เป็นไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$

   1.2 $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_5$
   วิธีทำ ไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_5$ คือ

$$\begin{array}{cccc} \langle\bar{0}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{0}\rangle \times \mathbb{Z}_5 & \langle\bar{2}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{2}\rangle \times \mathbb{Z}_5 \\ \langle\bar{5}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{5}\rangle \times \mathbb{Z}_5 & \mathbb{Z}_{10} \times \langle\bar{0}\rangle & \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_5 \end{array}$$

   เขียนเลตทิซโดยไม่มีไอดีส $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_5$ ได้ดังรูป



   จากแผนภาพจะได้ว่า $\mathbb{Z}_{10} \times \langle\bar{0}\rangle$, $\langle\bar{5}\rangle \times \mathbb{Z}_5$ และ $\langle\bar{2}\rangle \times \mathbb{Z}_5$ เป็นไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_5$

2. จงหา**จำนวนไอดีลทั้งหมดที่ไม่ใช่ไอดีลเฉพาะ** ของ

2.1 $\mathbb{Z}_{500}$
วิธีทำ เนื่องจาก $\tau(500) = \tau(2^2 \cdot 5^3) = (2+1)(3+1) = 3 \cdot 4 = 12$ ดังนั้นมีไอดีสทั้งหมด 12 ไอดีล และไอดีลเฉพาะมี 2 ไอดีล คือ $\langle \bar{2} \rangle$ และ $\langle \bar{3} \rangle$ ดังนั้น จำนวนไอดีลทั้งหมดที่ไม่ใช่ไอดีลเฉพาะเท่ากับ $12 - 2 = 10$

2.2 $\mathbb{Z}_{800}$
วิธีทำ เนื่องจาก $\tau(800) = \tau(2^5 \cdot 5^2) = (5+1)(2+1) = 6 \cdot 3 = 18$ ดังนั้นมีไอดีสทั้งหมด 12 ไอดีล และไอดีลเฉพาะมี 2 ไอดีล คือ $\langle \bar{2} \rangle$ และ $\langle \bar{3} \rangle$ ดังนั้น จำนวนไอดีลทั้งหมดที่ไม่ใช่ไอดีลเฉพาะเท่ากับ $18 - 2 = 16$

3. จงแสดงว่า

3.1 $\mathbb{Z} \times \{0\}$ เป็นไอดีลเฉพาะของ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
วิธีทำ ให้ $(x,y), (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ โดยที่ $(xa, yb) = (x,y) \cdot (a,b) \in \mathbb{Z} \times \{0\}$
ดังนั้น $yb = 0$ นั่นคือ $y = 0$ หรือ $b = 0$ ฉะนั้น

$$(a,b) = (a,0) \in \mathbb{Z} \times \{0\} \quad \text{หรือ} \quad (x,y) = (x,0) \in \mathbb{Z} \times \{0\}$$

สรุปได้ว่า $\mathbb{Z} \times \{0\}$ เป็นไอดีลเฉพาะของ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

3.2 $\mathbb{Z} \times \{0\}$ ไม่เป็นไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
วิธีทำ เนื่องจาก $\mathbb{Z}$ และ $2\mathbb{Z}$ เป็นไอดีลของ $\mathbb{Z}$ จะได้ว่า $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ เป็นไอดีลของ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ซึ่ง

$$\mathbb{Z} \times \{0\} \subseteq \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

แต่ $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z} \times \{0\}$ และ $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ดังนั้น $\mathbb{Z} \times \{0\}$ ไม่เป็นไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

4. ให้ I เป็นไอดีลของริง R และ $I \subseteq J \subseteq R$ จะได้ว่า

$$J \text{ เป็นไอดีลของ } R \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad J/I \text{ เป็นไอดีลของ } R/I$$

บทพิสูจน์. ให้ I เป็นไอดีลของริง R และ $I \subseteq J \subseteq R$
สมมติว่า J เป็นไอดีลของ R ให้ $I+a, I+b \in J/I$ เมื่อ $a, b \in J$ จะได้ว่า $a - b \in J$ แล้ว

$$(I+a) - (I+b) = I + (a-b) \in J/I$$

ดังนั้น $(J/I, +)$ เป็นกรุปย่อยของ R/I ให้ $I + a \in J/I$ และ $I + r \in R/I$ เมื่อ $a \in J$ และ $r \in R$ เนื่องจาก J เป็นไอดีลของ R จะได้ว่า $ar \in J$ และ $ra \in J$ ดังนั้น

$$(I+a)(I+r) = I + ar \in J/I \quad \text{และ} \quad (I+r)(I+a) = I + ra \in J/I$$

ดังนั้น J/I เป็นไอดีลของ R/I ในทางกลับกันสมมติว่า J/I เป็นไอดีลของ R/I ให้ $x, y \in J$ แล้ว

$$I + (x-y) = (I+x) - (I+y) \in J/I$$

ดังนั้น $x - y \in J$ นั่นคือ $(J, +)$ เป็นกรุปย่อยของ R ให้ $x \in J$ และ $r \in R$ จะได้ว่า

$$I + rx = (I+r)(I+x) \in (R/I)(J/I) \subseteq J/I$$

และ

$$I + xr = (I+x)(I+r) \in (J/I)(R/I) \subseteq J/I$$

ดังนั้น $rx, xr \in J$ ดังนั้น J เป็นไอดีลของ R $\square$