

เนื้อหาสาระ (CONTENT)

- ธรรมชาติและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์
- ตรรกศาสตร์
- ระเบียบวิธีพิสูจน์
- เซต
- ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน
- ทฤษฎีจำนวน ระบบจำนวน
- จำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น



ผศ.บุญพล จันทร้อย

อ.วาริยา พุทธปฎิโมกข์

การวัด และประเมินผล

การเข้าเรียน
ตรงต่อเวลา (17 คาบ)
10%

การบ้าน
10%

นำเสนอรายงาน
10%

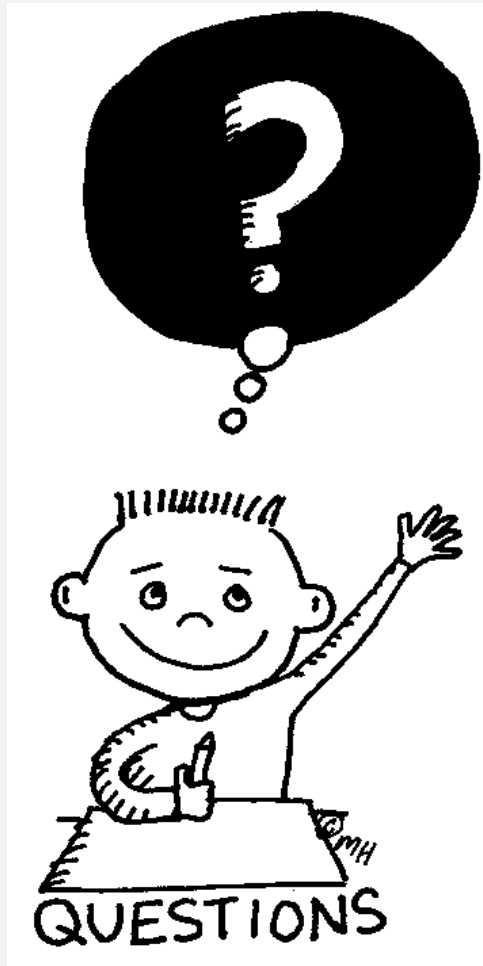
สอบทฤษฎี
(กลางภาค, ปลายภาค)
70%

***มีการนัดสอนนอกเวลา
ปกติ มีผลต่อการเข้าเรียน

ต่อจากหน้า 1 : ค่าระดับคะแนนของนักศึกษา

ตารางแนวปฏิบัติในการให้ค่าระดับคะแนน และช่วงคะแนนของแต่ละระดับ
(นักศึกษาใหม่ : รหัส ๔๗)

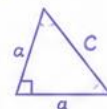
อักษร	ผลการศึกษ	ช่วงคะแนน	ค่าระดับคะแนน
A	ดียอดเยี่ยม	86.00-100	4
A-	ดีเยี่ยม	82.00-85.00	3.75
B+	ดีมาก	78.00-81.00	3.50
B	ดี	74.00-77.00	3.00
B-	ค่อนข้างดี	70.00-73.00	2.75
C+	ปานกลางค่อนข้างดี	66.00-69.00	2.50
C	ปานกลาง	62.00-65.00	2.00
C-	ปานกลางค่อนข้างอ่อน	58.00-61.00	1.75
D+	ค่อนข้างอ่อน	54.00-57.00	1.50
D	อ่อน	50.00-53.00	1.00
D-	อ่อนมาก	46.00-49.00	0.75
F	ตก	0.00-45.00	0
S	ผ่าน (ปรับพื้นฐาน)	50 ขึ้นไป	-
U	ไม่ผ่าน (ปรับพื้นฐาน)	ต่ำกว่า 50	-
I	ผลการเรียนไม่สมบูรณ์	-	-
W	ยกเลิกรายวิชา	-	-
V	ร่วมฟัง	-	-



คณิตศาสตร์

คืออะไร ????????

$$\sqrt{x}$$



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\pi$$



$$f(x)$$



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$y = ax^2 + bx + c$$



ให้เรียนอะไร

เรียนไปทำไม

ใช้อย่างไร

พูดอะไรไม่รู้
เรื่อง





ธรรมชาติของคณิตศาสตร์

MATH IN DAILY LIFE



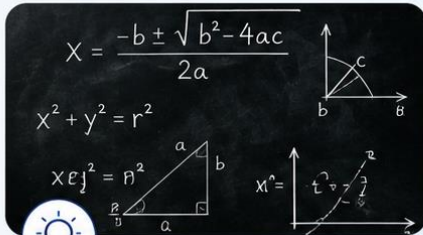
PATTERNS



MEASUREMENT



ESTIMATION



PROBLEM SOLVING



PROBABILITY



FRACTIONS



TIME



SYMMETRY



MONEY

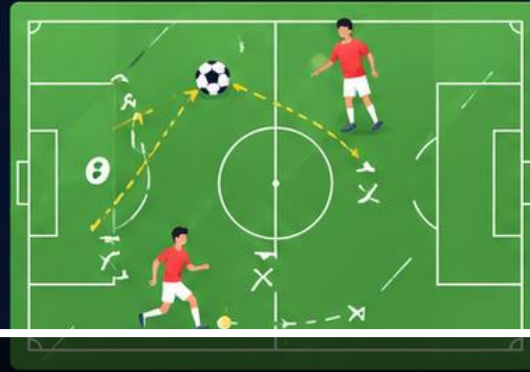


GEOMETRY

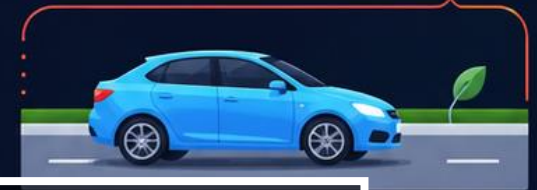


Math is everywhere. Math is everything.

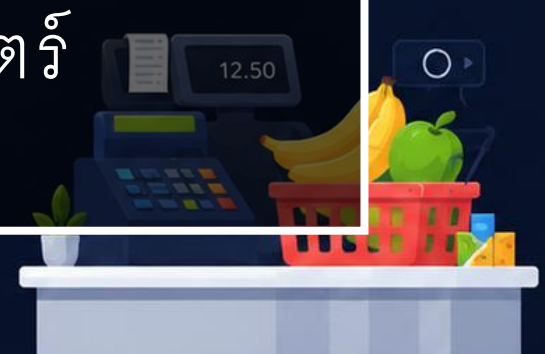
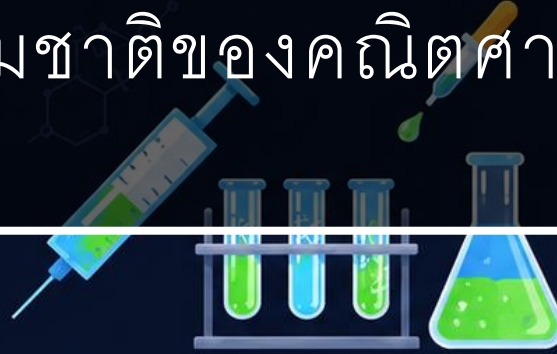
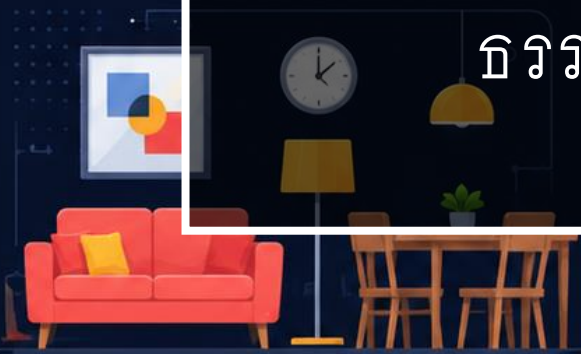




$$101 / 100 \text{ km} = \\ \approx 23.5244 \text{ mpg}$$

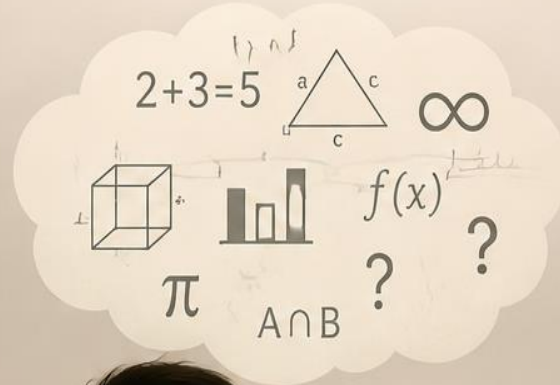


ธรรมชาติของคณิตศาสตร์



1 คณิตศาสตร์คืออะไร?

มากกว่าตัวเลข
มากกว่าการคำนวณ



คณิตศาสตร์ คือ

“ภาษาของความคิดที่ใช้ในการอธิบาย”
รูปแบบ ความสัมพันธ์ และเหตุผลของสิ่งต่าง ๆ

2 ทำไมต้องเรียน?

เพราะคณิตศาสตร์อยู่รอบตัวเรา
และช่วยให้เรา...



คณิตศาสตร์ = เครื่องมือคิด
ที่ทำให้เราเข้าใจโลก และสามารถเปลี่ยนแปลงโลกได้

3 ธรรมชาติที่แท้จริง ของคณิตศาสตร์

ไม่ใช่แค่การคำนวณ
แต่คือการใช้เหตุผลอย่างเป็นระบบ



เกี่ยวกับความคิดรวบยอด
มองเห็นสิ่งที่เป็นามธรรม



มีลักษณะเป็นสากล
ใช้ได้ทุกที่ ทุกเวลา



เป็นศิลปะอย่างหนึ่ง
ต้องอาศัยความคิดสร้างสรรค์
และความงามของแบบแผน



มีโครงสร้าง
เริ่มจากรากฐานเล็ก ๆ
ต่อยอดเป็นทฤษฎีที่ใหญ่ขึ้น



เน้นความเป็นเหตุเป็นผล
อ้างอิงได้ ตรวจสอบได้
และพิสูจน์ได้



คณิตศาสตร์ คือ
“ศาสตร์แห่งเหตุผล โครงสร้าง และความงาม”
ที่มนุษย์สร้างขึ้นเพื่อเข้าใจโลก
และพัฒนาชีวิตให้ดีขึ้น

เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอด

เป็นวิชาที่เน้นความเป็นเหตุเป็นผล

มีลักษณะเป็นสากล

เป็นศิลปะอย่างหนึ่ง

เป็นวิชาที่มีโครงสร้าง

1. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอด

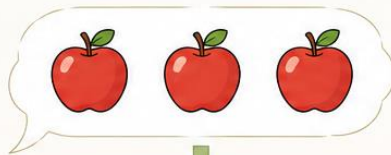
คณิตศาสตร์สนใจ **แนวคิด**

คณิตศาสตร์ไม่ได้เริ่มจากการจำคำตอบ แต่เริ่มจากการเข้าใจ**แนวคิด**ที่อยู่เบื้องหลัง

ยกตัวอย่าง

ยชน์

เด็ก ป.1



3

เด็กไม่ได้เรียนเลข 3
แต่กำลังเรียน “**ปริมาณ**”



หัวใจคือ เข้าใจว่า “มี 3 อัน”
ไม่ใช่การจำตัวเลข 3

อีกตัวอย่าง



เด็ก**ไม่ได้**โฟกัสที่รูป
แต่กำลังเรียน “**รูปทรง**”

ไม่เกี่ยวกับรูป แต่เกี่ยวกับ “**แนวคิดของรูปทรง**”
(สามเหลี่ยม วงกลม สี่เหลี่ยม)



หัวใจคือ เข้าใจ “**ลักษณะของรูปทรง**”
ไม่ใช่จำภาพหรือชื่อ



คณิตศาสตร์จึงเป็นวิชาที่ฝึกให้เด็ก “**คิดเป็น**” ไม่ใช่แค่ “**รู้คำตอบ**”

2. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เป็นเหตุเป็นผล

ตัวอย่าง : ทำไมพื้นที่สามเหลี่ยม = $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$?

เรียนแบบ “จำ”

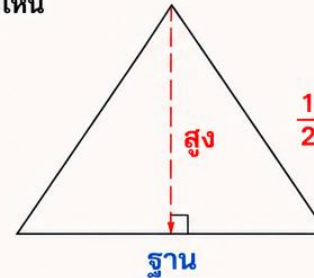
เด็กถาม
ทำไมพื้นที่สามเหลี่ยม
= $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$?

?

ครูตอบ
จำไว้ เดี่ยวสอบ

ผลที่เกิดขึ้น

จำได้แค่สูตร
แต่ไม่เข้าใจว่ามาจากไหน



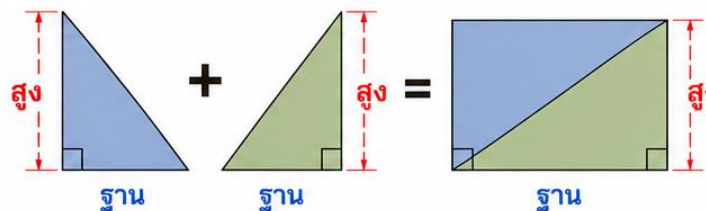
พื้นที่ =
 $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$

เรียนแบบ “เข้าใจเหตุผล”

เด็กถาม
ทำไมพื้นที่สามเหลี่ยม
= $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$?

ครูตอบ
เดี๋ยวเราพิสูจน์ให้ดู

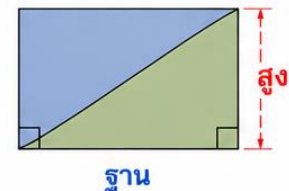
ประกอบ 2 รูปให้เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า



เมื่อประกอบกัน ได้สี่เหลี่ยมผืนผ้า
พื้นที่ = $\text{ฐาน} \times \text{สูง}$

ดังนั้น พื้นที่สามเหลี่ยม
= $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$

รูปถูก (ประกอบถูกต้อง)



✓ ประกอบกันได้เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า
พื้นที่เท่ากันพอดี



นี่คือความต่างของ
คณิตศาสตร์

ไม่หยุดแค่ “จำสูตร”

แต่ถามว่า “ทำไม?”

หาคำตอบด้วยเหตุผล

เข้าใจจริง นำไปใช้ได้ทุกสถานการณ์

2. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เป็นเหตุเป็นผล



สังเกต ทดลอง เก็บข้อมูล และตรวจสอบ เพื่อให้ได้ **หลักฐาน** ที่อธิบายปรากฏการณ์

“ถ้าเป็นคณิตศาสตร์ เราจะหาหลักเหตุผลมาพิสูจน์”

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$
$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$
$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

Use **logic**, **laws**, and **principles** in reasoning to systematically prove why things are the way they are.



ใช้**เหตุผล** **นิยาม** และ**สมการ**ในการวิเคราะห์อย่างเป็นระบบ เพื่อพิสูจน์ว่าทำไมจึงเป็นเช่นนั้น

3. คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นสากล

คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นสากล (Universal)



คณิตศาสตร์ไม่ขึ้นกับภาษา วัฒนธรรม หรือสถานที่
เมื่อโจทย์เดียวกัน ทุกคนทั่วโลกจะได้คำตอบเหมือนกัน

$$2 + 3 = 5$$

ถาม



ประเทศไทย

ได้ 5 ใช่ไหม?



ตอบ: ได้ 5



ญี่ปุ่น

5 になりますか?
(ได้ 5 ใช่ไหม?)



ตอบ: ได้ 5



อเมริกา

Is it 5?



ตอบ: ได้ 5



จีน

是 5 吗?
(ได้ 5 ใช่ไหม?)



ตอบ: ได้ 5



ทุกประเทศตอบเหมือนกัน นี่คือ Universal

4. คณิตศาสตร์เป็นศิลปะอย่างหนึ่ง



คณิตศาสตร์เป็นศิลปะอย่างหนึ่ง

เคยเห็นวิธีทำโจทย์เดียวกันหลายวิธีไหม ?



- โจทย์เดียวกัน
 - คำตอบเดียวกัน
 - แต่... วิธีคิดไม่เหมือนกัน
- ทุกคนถูกหมด !**

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์ว่า

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(n เป็นจำนวนเต็มบวก)

วิธี A ใช้อุปนัยคณิตศาสตร์

1 ฐาน ($n = 1$)

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$$

2 สมมติว่าเป็นจริงสำหรับ k

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

3 พิจารณา $k+1$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

ดังนั้น เป็นจริงสำหรับทุก n

วิธี B จับคู่ (Pairing)

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$



จับคู่จากสองด้าน

$$1 + n = n + 1$$

$$2 + (n-1) = n + 1$$

$$3 + (n-2) = n + 1$$

...

มีทั้งหมด n คู่ แต่ถ้า n เป็นคี่ จะมีตัวกลางคือ $\frac{n+1}{2}$

$$\text{ผลรวม} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \checkmark$$

วิธี C ใช้สูตรผลรวม

ใช้สูตรผลรวมของลำดับเลขคณิต

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$\text{ที่นี่ } a_1 = 1, d = 1$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2(1) + (n-1)(1)]$$

$$= \frac{n}{2} [n + 1]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \quad \checkmark$$

โจทย์เดียวกัน แต่แต่ละวิธี...

♥ มองคนละมุม

♥ ใช้เครื่องมือคนละแบบ

♥ ให้ความเข้าใจคนละแบบ

♥ แต่...สวยงามทุกวิธี



♥ ความสวยงามของคณิตศาสตร์ ♥



ไม่ได้อยู่ที่ “คำตอบ” → แต่อยู่ที่ “วิธีคิด”

วิธีที่ดี อาจง่าย สั้น สวยงาม
ลึกซึ้ง แปลกใหม่ หรือ ทำให้เข้าใจมากขึ้น
นั่นคือ “ศิลปะ” ของนักคณิตศาสตร์

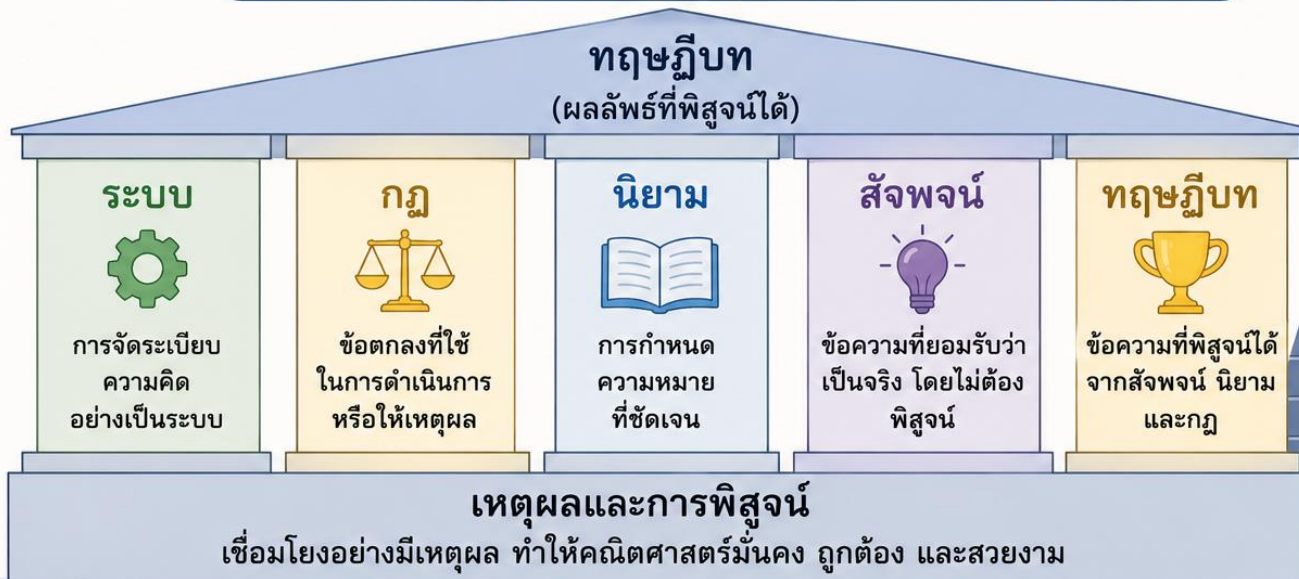
5. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีโครงสร้าง

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีโครงสร้าง



ทุกอย่างที่พูดมา
ไม่ได้เกิดขึ้นลอย ๆ
แต่เกิดจาก...

ระบบ กฎ นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท



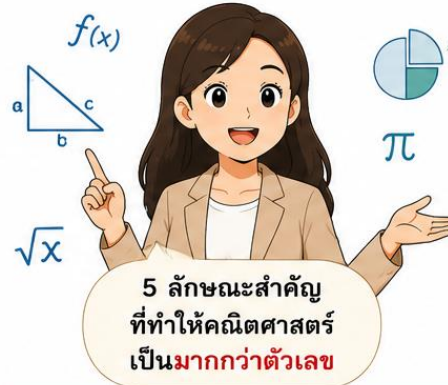
จากพื้นฐาน
สู่ความรู้
ที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น

ทำไมคณิตศาสตร์จึงน่าทึ่ง?

คณิตศาสตร์ไม่ใช่แค่ตัวเลข แต่คือวิธีคิดที่ทรงพลัง

1 คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอด

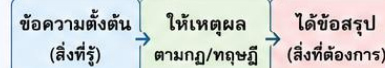
คณิตศาสตร์ไม่สอนแค่ “คำตอบ” แต่สอนให้เข้าใจ “แนวคิด” ที่อยู่เบื้องหลัง



5 ลักษณะสำคัญ
ที่ทำให้คณิตศาสตร์
เป็นมากกว่าตัวเลข

2 คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เน้นเหตุเป็นผล

ทุกข้อสรุปต้องมีเหตุผลรองรับ
ไม่เชื่อเพราะใครสอน แต่เชื่อเพราะพิสูจน์ได้



เชื่อมโยงอย่างเป็นขั้นตอน
จนเกิดความจริงที่ตรวจสอบได้



3 คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นสากล

ไม่ว่าคุณจะอยู่ประเทศไหน ใช้ภาษาอะไร
คำตอบที่ได้จากเหตุผลเดียวกัน จะเหมือนกัน

$$2 + 3 = 5$$



4 คณิตศาสตร์เป็นศิลปะอย่างหนึ่ง

ใจหยาบเดียวกัน อาจมีหลายวิธีทำ
ถูกต้องได้ทุกวิธี

ตัวอย่าง จงหาค่าผลบวก $1 + 2 + \dots + n$

วิธี A จับคู่

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ (n/2 \text{ คู่}) \end{array} + \begin{array}{l} n \\ (n-1) \\ (n-2) \\ \vdots \\ 1 \end{array}$$

$$\text{ผลรวม} = \frac{n(n+1)}{2}$$

วิธี B สมบัติผลบวก

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + \dots + n \\ S &= n + (n-1) + \dots + 1 \\ 2S &= (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) \\ &\quad (n \text{ จำนวน}) \\ 2S &= n(n+1) \\ S &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

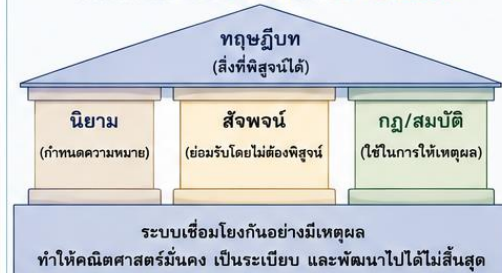
วิธี C อุปนัย

$$\begin{aligned} \text{ฐาน: } n=1, \text{ จริง} \\ \text{สมมติ } n=k, \text{ จริง} \\ 1+2+\dots+k &= \frac{k(k+1)}{2} \\ \text{พิสูจน์ } n=k+1 \\ 1+2+\dots+k+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

ความสวยงามของคณิตศาสตร์ ไม่ได้อยู่ที่คำตอบ
แต่อยู่ที่ “วิธีคิด”

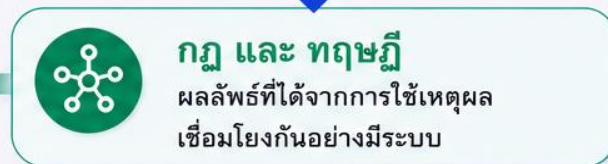
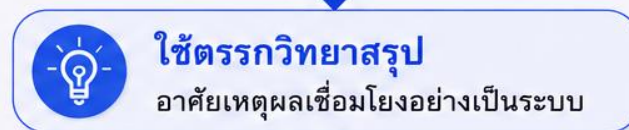
5 คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีโครงสร้าง

ทุกความรู้ไม่ได้เกิดขึ้นลอย ๆ
แต่เกิดจากระบบที่เชื่อมโยงกันอย่างเป็นระเบียบ



โครงสร้างทางคณิตศาสตร์

(Structure of Mathematics)



★ โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ คือ กระบวนการจากความเป็นจริง → นามธรรม → กฎเกณฑ์ → ทฤษฎี → การประยุกต์ใช้
ที่เชื่อมโยงกันอย่างเป็นระบบและมีเหตุผล

คณิตศาสตร์เกิดขึ้นได้อย่างไร?



จากชีวิตประจำวัน สู่โครงสร้างทางคณิตศาสตร์



1. ชีวิตประจำวัน



มนุษย์ต้องเผชิญกับสิ่งต่าง ๆ รอบตัวในชีวิตประจำวัน



2. มนุษย์เริ่มนับ



เพื่อบอกจำนวน และเปรียบเทียบ



3. สร้างสัญลักษณ์



กำหนดสัญลักษณ์แทนจำนวน เพื่อจดจำและสื่อสาร



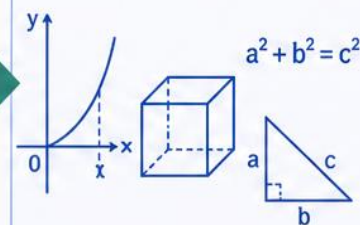
4. เกิดระบบตัวเลข

... 1 2 3 4 5
6 7 8 9 ...

พัฒนาสัญลักษณ์และกฎเกณฑ์ เป็นระบบตัวเลขที่ซับซ้อนขึ้น



5. เกิดโครงสร้างทางคณิตศาสตร์



นำระบบตัวเลขไปสร้างแนวคิด กฎเกณฑ์ ทฤษฎี และการพิสูจน์ เกิดเป็นคณิตศาสตร์



คณิตศาสตร์เริ่มต้นจากชีวิตจริงของมนุษย์ และพัฒนาอย่างเป็นระบบ



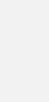
จนกลายเป็น ภาษาสากลของเหตุผลและความจริง

เลขบาบิโลน (Cuneiform Numerals)

 1	 11	 21	 31	 41	 51
 2	 12	 22	 32	 42	 52
 3	 13	 23	 33	 43	 53
 4	 14	 24	 34	 44	 54
 5	 15	 25	 35	 45	 55
 6	 16	 26	 36	 46	 56
 7	 17	 27	 37	 47	 57
 8	 18	 28	 38	 48	 58
 9	 19	 29	 39	 49	 59
 10	 20	 30	 40	 50	

ระบบตัวเลขอียิปต์โบราณ

(Egyptian Hieroglyphic Numerals)

	READING RIGHT TO LEFT					READING LEFT TO RIGHT				
1										
10	∩					∩				
100										
1,000										
10,000										
100,000										
1,000,000										

คำถาม ถ้าเราใช้ระบบตัวเลขอียิปต์โบราณเพื่อ
เขียน 356 เราจะเขียนอย่างไร

คำถาม"นักศึกษาคิดว่า ถ้าทุกคนสร้างสัญลักษณ์
เองหมด จะเกิดอะไรขึ้น"

เลขที่เราใช้ทุกวันนี้ 356 มี

3 อยู่หลักร้อย

5 อยู่หลักสิบ

6 อยู่หลักหน่วย

เรียกว่าระบบค่าประจำหลัก (PLACE VALUE
SYSTEM)

คำอธิบาย

(**UNDEFINED TERM**)

- คำสามัญพื้นฐานที่ไม่สามารถอธิบายได้
- คำที่มีความหมายที่หลากหลายหาข้อสรุปไม่ได้
- คำที่พยายามให้ความหมายแต่วกไปวนมา
- คำที่เข้าใจตรงกันได้เป็นสากล

คำใด? ที่ไม่ต้องพูดเยอะ
ก็เข้าใจตรงกัน

[https://wordwall.net/th/
resource/5032425](https://wordwall.net/th/resource/5032425)

คำนิยาม

(**DEFINED TERM**)

- คำที่ใช้ข้อกำหนดมาเขียนความหมาย
- คำที่สามารถให้ความหมายได้อย่างรัดกุม
- คำที่มีความหมายเพียงอย่างเดียวอย่างหนึ่งเท่านั้น
- คำที่ไม่มีข้อความขัดแย้งในตัวเอง

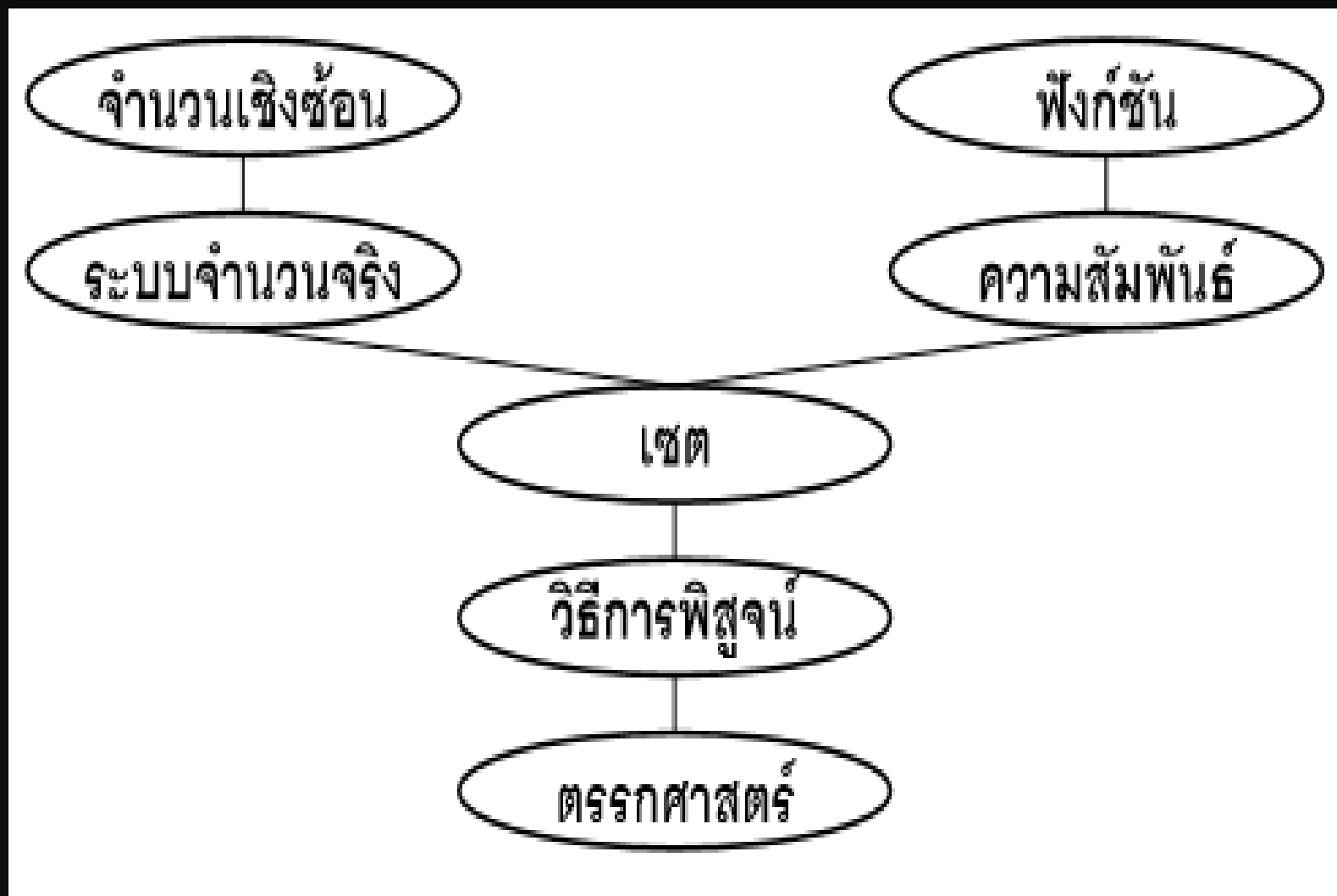
สัจพจน์ (AXIOM / POSTULATE)

ข้อความที่ยอมรับ
โดยไม่ต้องพิสูจน์

ข้อตกลงที่ยอมรับ
ร่วมกันและไม่มี
ความขัดแย้งกัน

ทฤษฎีบท (THEOREM)

ข้อความที่พิสูจน์โดยอาศัย อนิยาม นิยาม
สัจพจน์ หรือทฤษฎีที่มีก่อนหน้านี้ โดย
อาศัยกฎเกณฑ์ทางตรรกศาสตร์

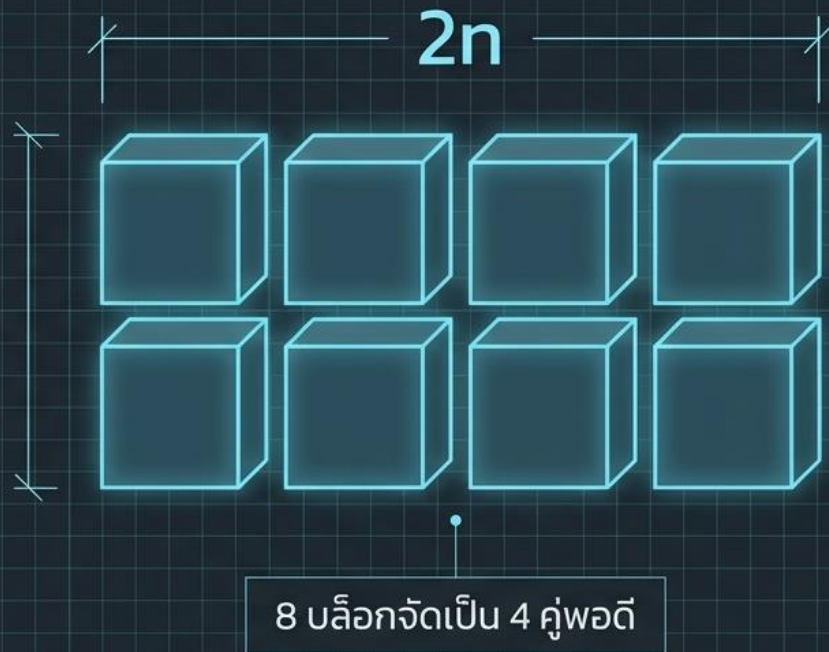


ตัวอย่างนิยามทางคณิตศาสตร์

จำนวนคู่

จำนวนเต็มใดๆ ที่สามารถจัดเป็น
คู่ได้พอดีโดยไม่มีเศษเหลือ
หรือจำนวนที่หารด้วย 2 ลงตัว

ตัวอย่าง: 2, 4, 6, 8, 10

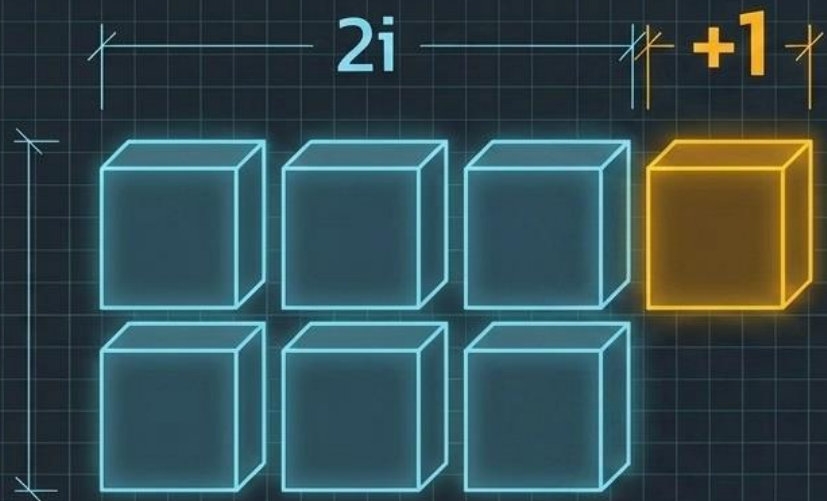


ตัวอย่างนิยามทางคณิตศาสตร์

จำนวนคี่

(อ้างอิงจาก Discrete Mathematics)
จำนวนเต็มที่มีรูปแบบสมการคือ $2i + 1$
เมื่อ i คือจำนวนเต็มใดๆ พุดง่ายๆ
คือจำนวนที่จัดคู่แล้วจะเหลือเศษ 1 เสมอ

ตัวอย่าง: 3, 5, 7, 9, 11



7 บล็อก = จัดได้ 3 คู่ + เศษ 1

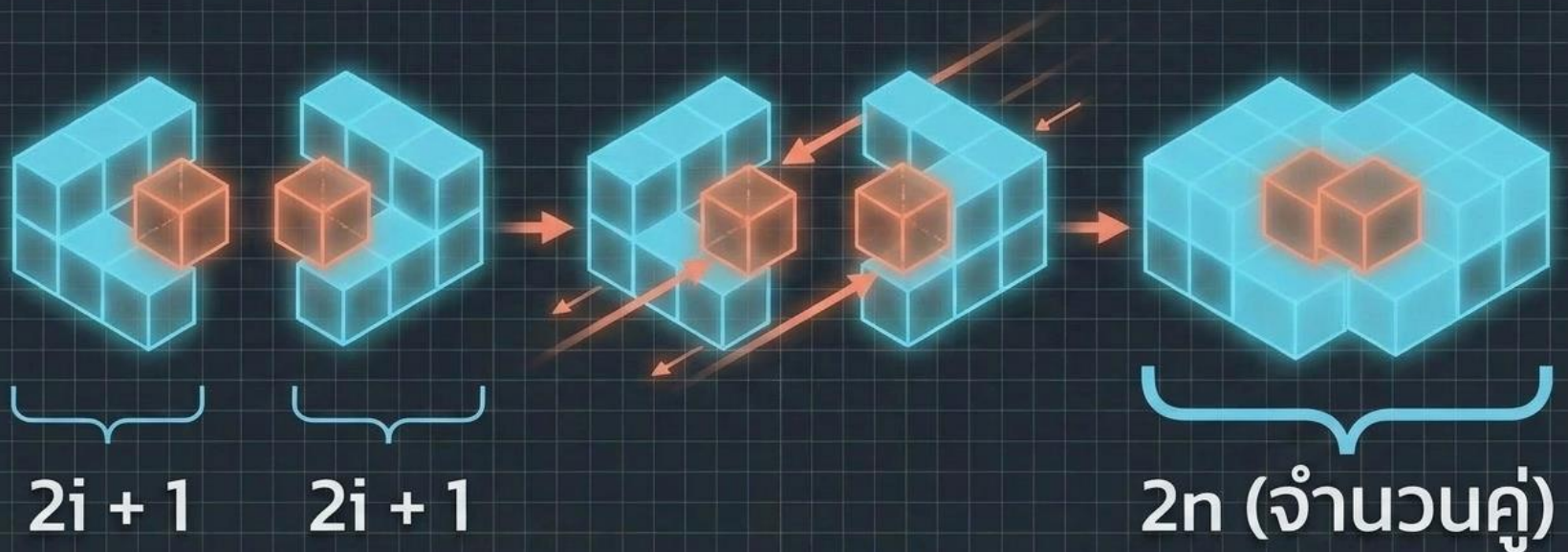
ตัวอย่างนิยามทางคณิตศาสตร์

เปรียบเทียบโครงสร้าง

	จำนวนคู่	จำนวนคี่
รูปแบบสมการ	$2n$	$2i + 1$
ภาพจำลอง		
การหารด้วย 2	ลงตัวเสมอ	เหลือเศษ 1 เสมอ

ตัวอย่างนิยามทางคณิตศาสตร์

เมื่อกฎพื้นฐานเชื่อมโยงกัน
จำนวนคี่ + จำนวนคี่ = จำนวนคู่



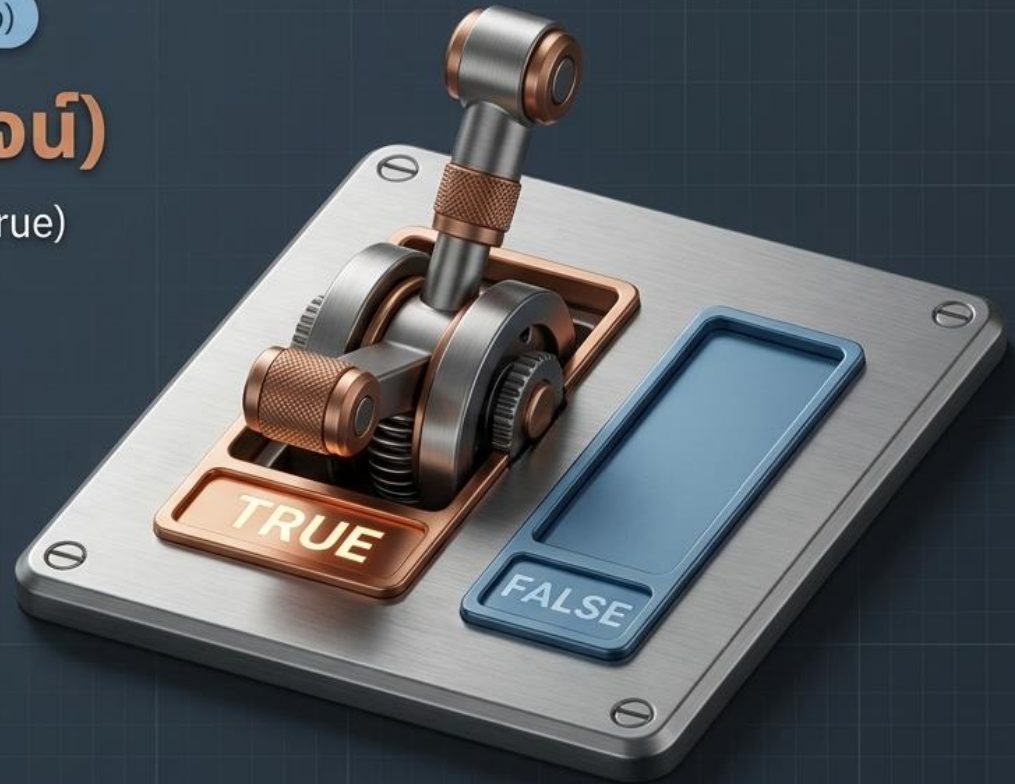
Pillar 2: The Logic of Truth (ตรรกะแห่งความจริง)

Proposition (ประพจน์)

ประโยคบอกเล่าที่มีค่าความจริงเป็น 'จริง' (True) หรือ 'เท็จ' (False) อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ห้ามเป็นทั้งสองอย่าง

ตัวอย่างในชีวิตจริง:

- “ผลคูณของเลขคู่สองตัวคือเลขคู่เสมอ”
-> เป็นประพจน์ (มีค่าเป็น จริง)
- “วิชานี้เรียนยากไหม?” -> ไม่เป็นประพจน์
(ตอบเป็นจริง/เท็จไม่ได้)



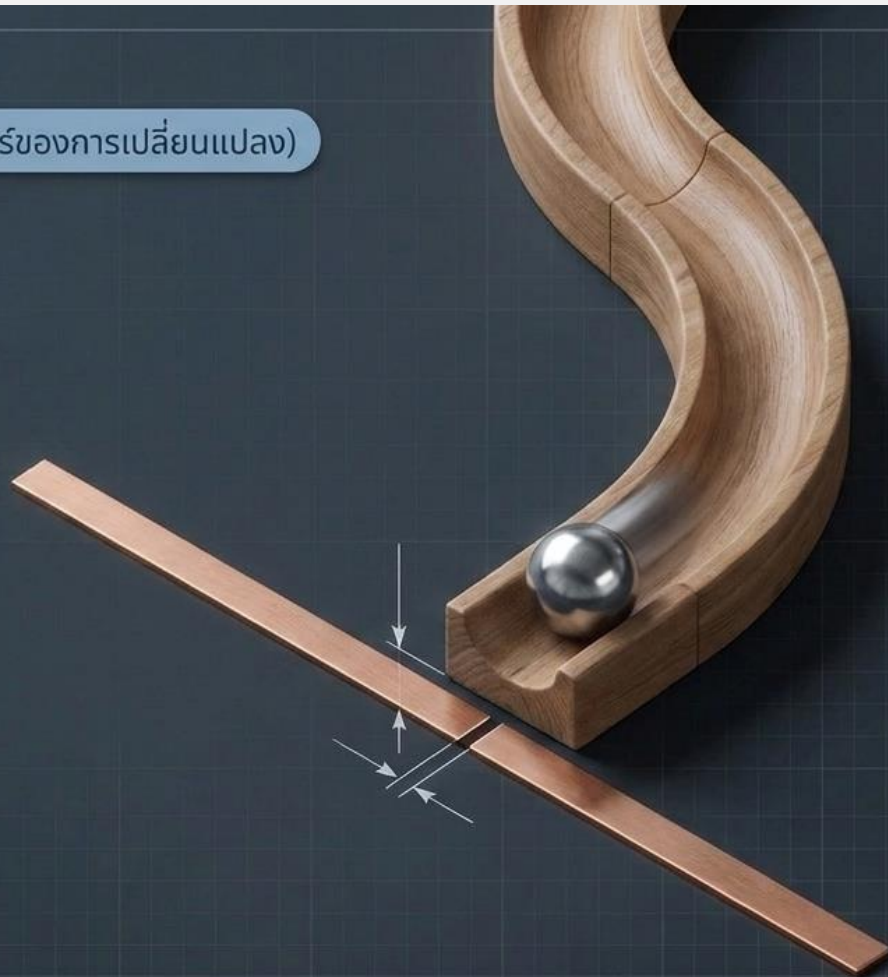
Pillar 3: The Mathematics of Change (คณิตศาสตร์ของการเปลี่ยนแปลง)

Limit (ลิมิต)

ค่าที่ฟังก์ชัน ‘พยายามจะไปให้ถึง’
เมื่อข้อมูล (Input) ขยับเข้าไปใกล้จุดๆ
หนึ่งอย่างมหาศาล

ตัวอย่างในชีวิตจริง:

ลองจินตนาการว่าคุณเดินครึ่งหนึ่งของระยะทาง
ไปสู่กำแพงในทุกๆ ก้าว (เช่น 1 เมตร, 0.5 เมตร,
0.25 เมตร...) คุณจะไม่มีวันแตะกำแพง แต่
‘ลิมิต’ หรือปลายทางของคุณ คือกำแพงนั่นเอง



Pillar 3: The Mathematics of Change
(คณิตศาสตร์ของการเปลี่ยนแปลง)

Derivative (อนุพันธ์)

อัตราการเปลี่ยนแปลงของสิ่งหนึ่ง
ณ 'เสี้ยววินาที' ใดวินาทีหนึ่ง
(เช่น ความเร็วขณะนั้น)

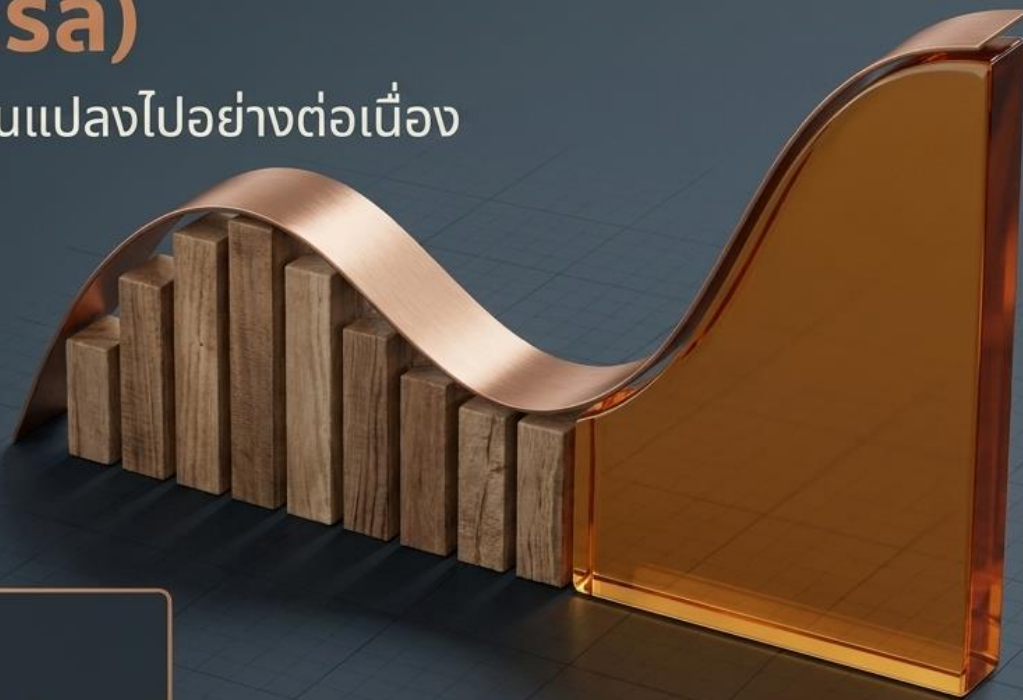
ตัวอย่างในชีวิตจริง:

หากฟังก์ชันคือข้อมูล 'ระยะทาง' ที่รถคันหนึ่งวิ่งไป
อนุพันธ์ของมันก็คือเข็ม 'ความเร็ว' บนหน้าปัดรถ
ณ เสี้ยววินาทีที่คุณก้มลงไปมองพอดี



Integral (อินทิกรัล)

การสะสมหรือการรวมค่าที่เปลี่ยนแปลงไปอย่างต่อเนื่อง
(การหาพื้นที่ใต้กราฟ)



ตัวอย่างในชีวิตจริง:

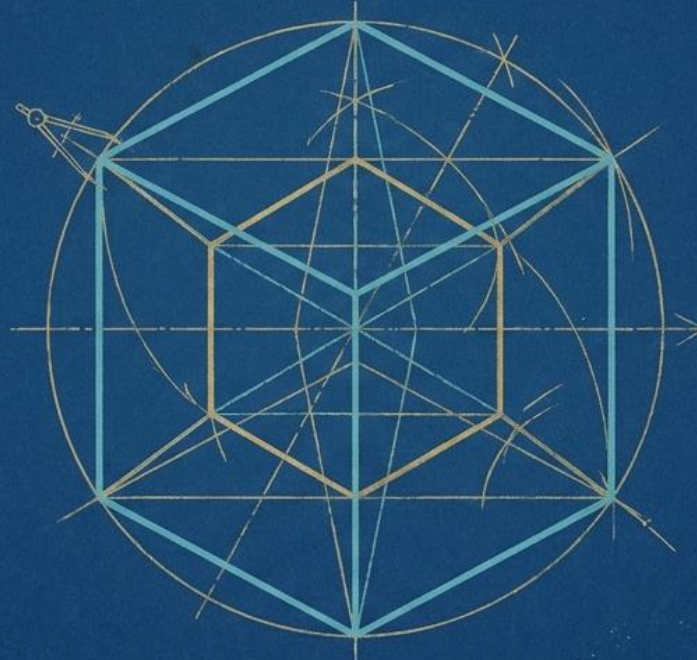
หากอนุพันธ์คือการดูความเร็วรถ

อินทิกรัลคือการเอาความเร็วเหล่านั้นมาต่อรวมกัน

เพื่อย้อนกลับไปหา 'ระยะทางทั้งหมด' ที่รถคันนั้นวิ่งผ่านไป

ระบบสัจพจน์ (Axiomatic Systems)

ถอดรหัสโครงสร้างพื้นฐานแห่งโลกคณิตศาสตร์

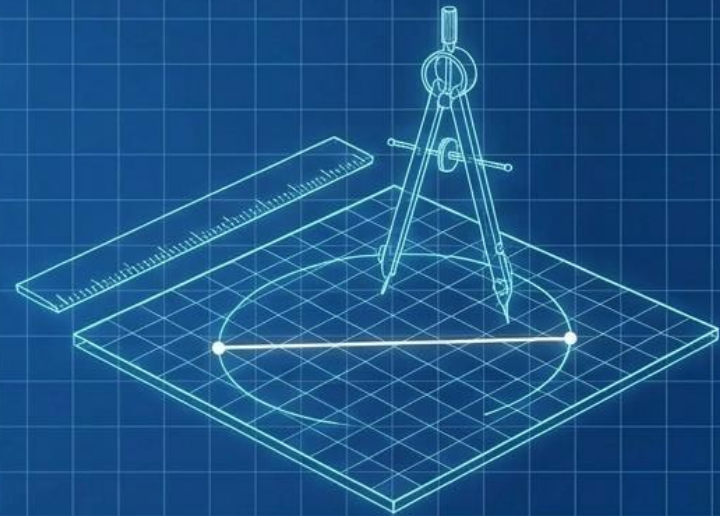


ระบบที่ 1: เรขาคณิตแบบยูคลิด

ระบบสัจพจน์ที่เก่าแก่และคุ้นเคยที่สุด อธิบายพื้นที่ที่มีลักษณะ ‘แบนราบ’ (Flat Space)

สัจพจน์ 5 ข้อของยูคลิด:

1. สามารถลากเส้นตรงระหว่างจุดสองจุดใดๆ ได้เสมอ
2. สามารถต่อเส้นตรงออกไปได้เรื่อยๆ อย่างไม่มีที่สิ้นสุด
3. สามารถวาดวงกลมได้ เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและรัศมี
4. มุมจากทุกมุมมีขนาดเท่ากันเสมอ
5. สัจพจน์เส้นขนาน (Parallel Postulate):
หากเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงสองเส้น
ทำให้มุมภายในข้างเดียวกันรวมกันน้อยกว่า 180 องศา
เส้นตรงสองเส้นนั้นจะตัดกันเมื่อลากยาวออกไป



สัจพจน์พื้นฐานเหล่านี้ก่อให้เกิดทฤษฎีบททั้งหมดในเรขาคณิตแบบยูคลิดที่เรารู้จัก

สัจพจน์ 11 ข้อของฟิลด์

(The 11 Field Axioms)

กลุ่มการบวก (Addition Group) - 5 ข้อ

5. ตัวผกผัน
(Inverse)
 $a + (-a) = 0$

4. เอกลักษณ์คือ 0
(Identity)
 $a + 0 = a$

3. การเปลี่ยนหมู่
(Associative)
 $(a + b) + c = a + (b + c)$

2. การสลับที่
(Commutative)
 $a + b = b + a$

1. การปิด
(Closure)
 $a + b \in \mathbb{F}$

สมบัติการแจกแจง (Distributive Property) - 1 ข้อ

$$a(b + c) = ab + ac$$

กลุ่มการคูณ (Multiplication Group) - 5 ข้อ

5. ตัวผกผันสำหรับจำนวนที่ไม่ใช่ 0
(Inverse for non-zero)
 $a \times \frac{1}{a} = 1 \ (a \neq 0)$

4. เอกลักษณ์คือ 1
(Identity)
 $a \times 1 = a$

3. การเปลี่ยนหมู่
(Associative)
 $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

2. การสลับที่
(Commutative)
 $a \times b = b \times a$

1. การปิด
(Closure)
 $a \times b \in \mathbb{F}$

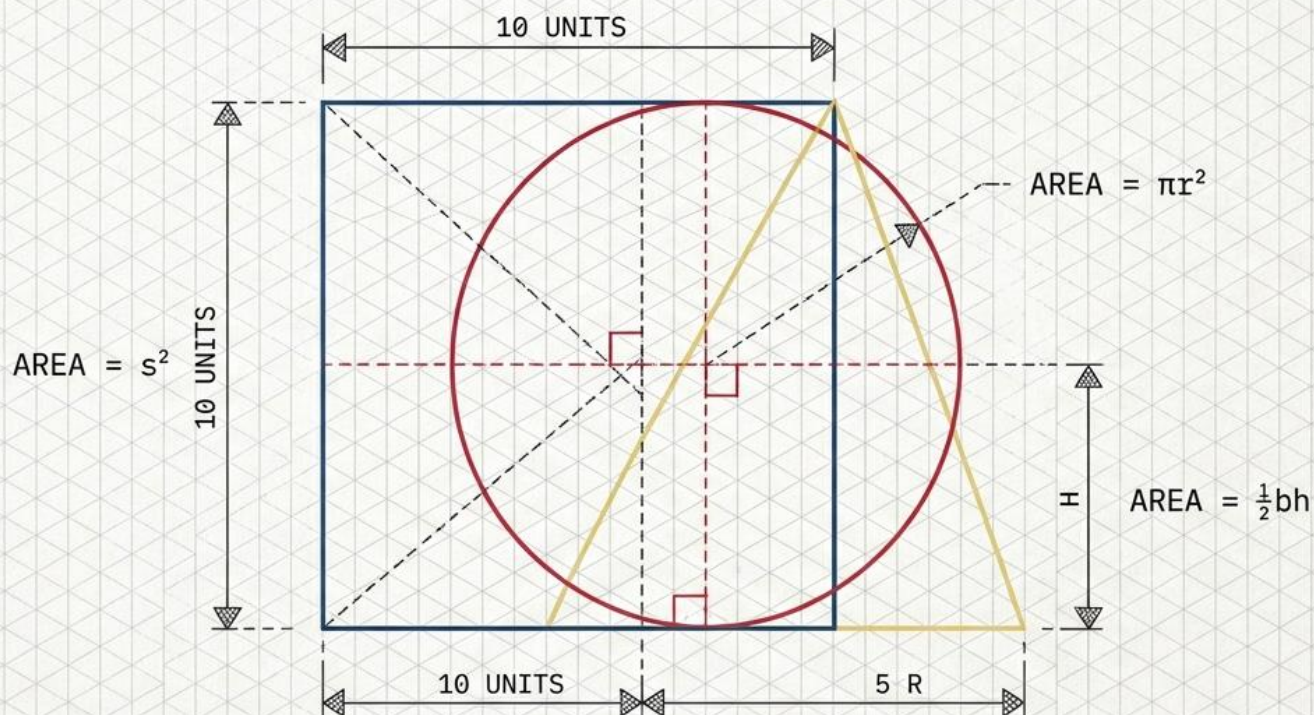
สัจพจน์คืออะไร? (What is an Axiom?)

สัจพจน์คือ "กฎของเกม" รากฐานของโครงสร้างคณิตศาสตร์

เป็นข้อความทางคณิตศาสตร์ที่ยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์
เพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการสร้างทฤษฎีอื่นๆ ต่อไป
คณิตศาสตร์เริ่มต้นจากสัจพจน์และนิยาม
แล้วจึงใช้การให้เหตุผลทางตรรกะเพื่อสร้างทฤษฎีบทที่ซับซ้อนขึ้น

พินัย์เขี้ยวเรขาคณิต: ถอดรหัสพื้นที่รูปทรง 2 มิติ

ทำความเข้าใจ “ที่มา” ของสูตรคณิตศาสตร์ ผ่านมุมมองของนักออกแบบ



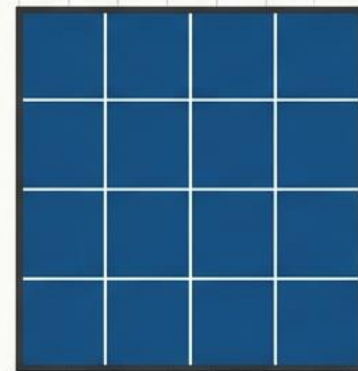
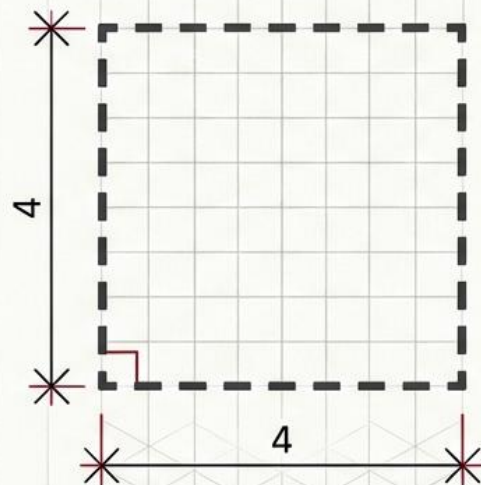
ตัวอย่างนิยามทางคณิตศาสตร์

พื้นที่คืออะไร? นิยามของ ‘ตารางหน่วย’

พื้นที่ (Area) ไม่ใช่แค่การท่องจำสมการ แต่คือ การนับจำนวนช่องสี่เหลี่ยมที่ซ่อนอยู่ภายในรูปทรงนั้นๆ



1 ตารางหน่วย

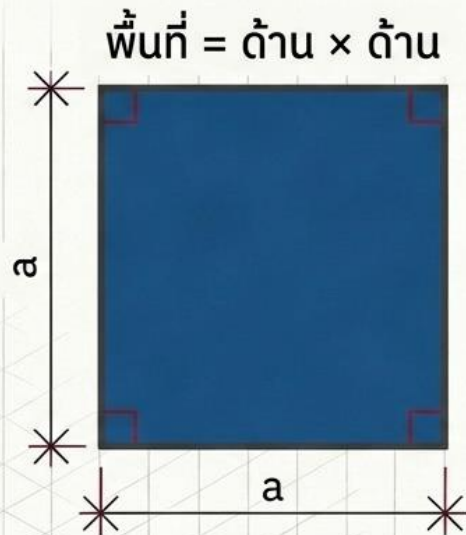


$4 \times 4 = 16$ ตารางหน่วย

ตัวอย่างนิยามทางคณิตศาสตร์

รูปทรงสมบูรณ์แบบ: สี่เหลี่ยมจัตุรัส

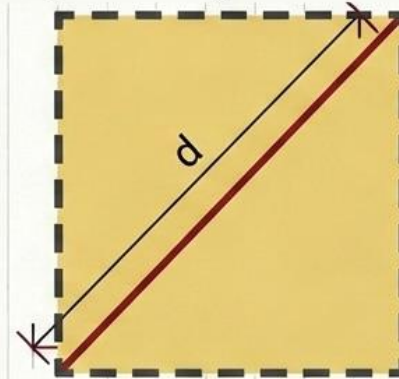
รูปทรงพื้นฐานที่สุดที่มีด้านเท่ากันทุกด้านและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก การหาพื้นที่คือการนำด้านมาคูณตัวเอง แต่หากทราบแค่เส้นทแยงมุม ก็สามารถหาพื้นที่ได้เช่นกัน



$$A = a^2$$

ด้าน 4 ซม. $\rightarrow 4 \times 4 = 16$ ตร.ซม.

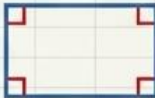
พื้นที่ = $1/2 \times$ ผลคูณของเส้นทแยงมุม



$$A = \frac{d^2}{2}$$

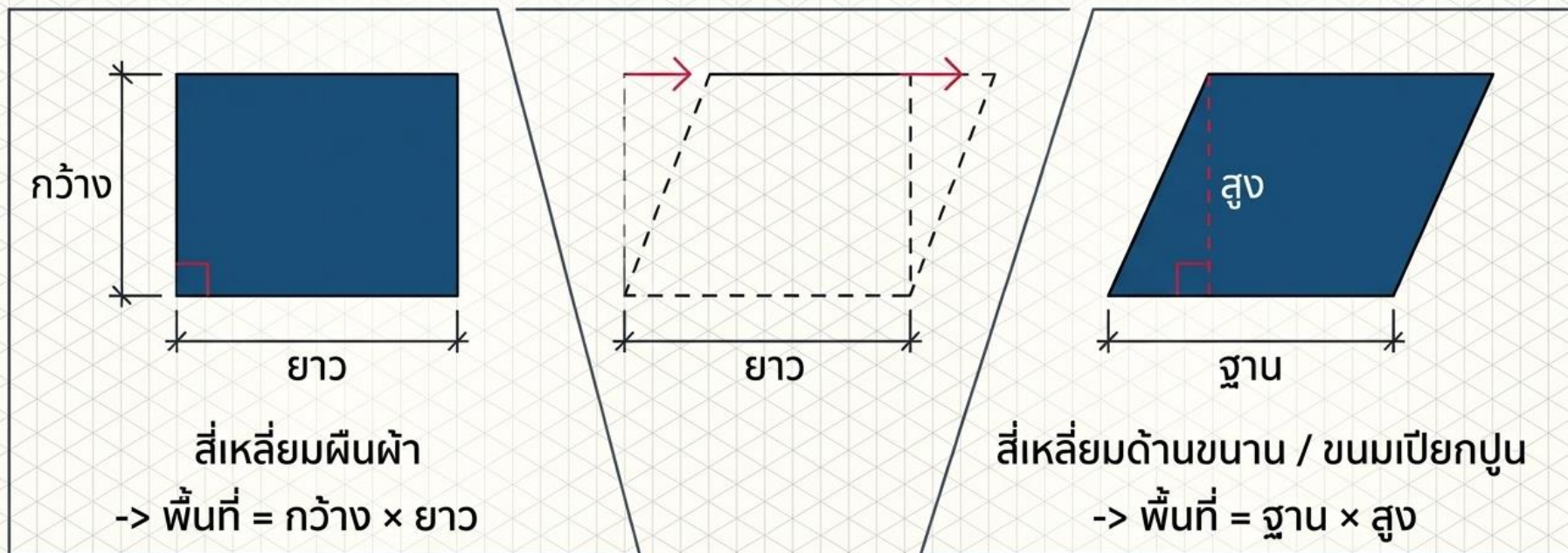
เมทริกซ์เปรียบเทียบตระกูลสี่เหลี่ยม

รูปสี่เหลี่ยมเหล่านี้มีคุณสมบัติที่คล้ายคลึงกัน จุดสังเกตต่อไปนี้จะช่วยให้คุณเลือกใช้สูตรได้ถูกต้อง

คุณสมบัติ	สี่เหลี่ยมจัตุรัส 	สี่เหลี่ยมผืนผ้า 	ขนมเปียกปูน 
ด้านเท่ากันทุกด้าน?	✓	✗	✓
มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก?	✓	✓	✗
เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก?	✓	✗	✓

พันธุกรรมร่วม: ตระกูล “ฐาน × สูง”

ไม่ว่ารูปทรงจะเอียงไปแค่ไหน ตราบใดที่ฐานและความสูงตั้งฉากกัน พื้นที่จะเท่าเดิมเสมอ



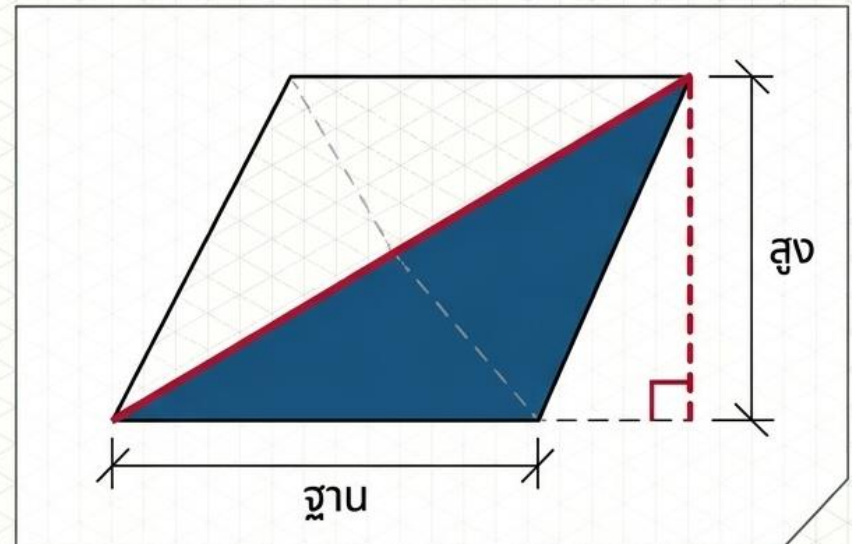
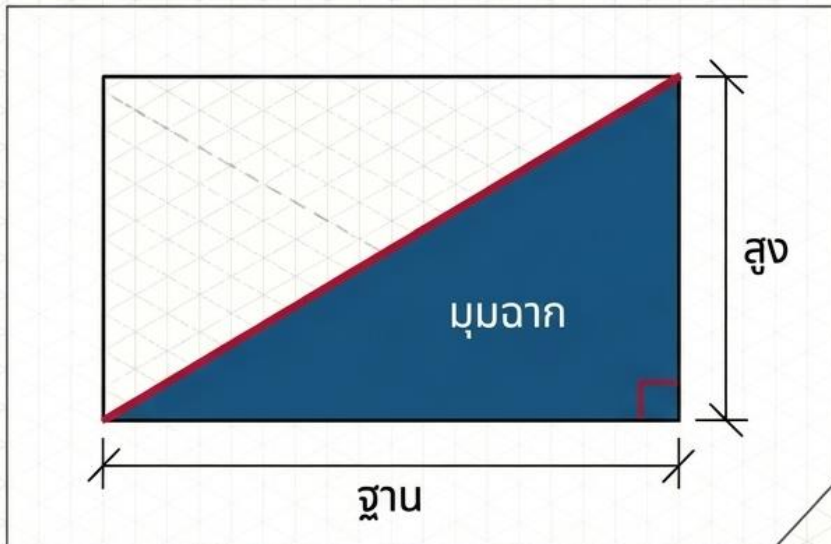
ข้อควรระวัง: ความสูงต้องตั้งฉากกับฐานเสมอ ห้ามใช้ความยาวของด้านเอียง!

กำเนิดรูปสามเหลี่ยม: ครึ่งหนึ่งของความสมบูรณ์

สามเหลี่ยมทุกรูปคือผลลัพธ์ของการผ่าครึ่งรูปสี่เหลี่ยมตรรก 'ฐาน × สูง'

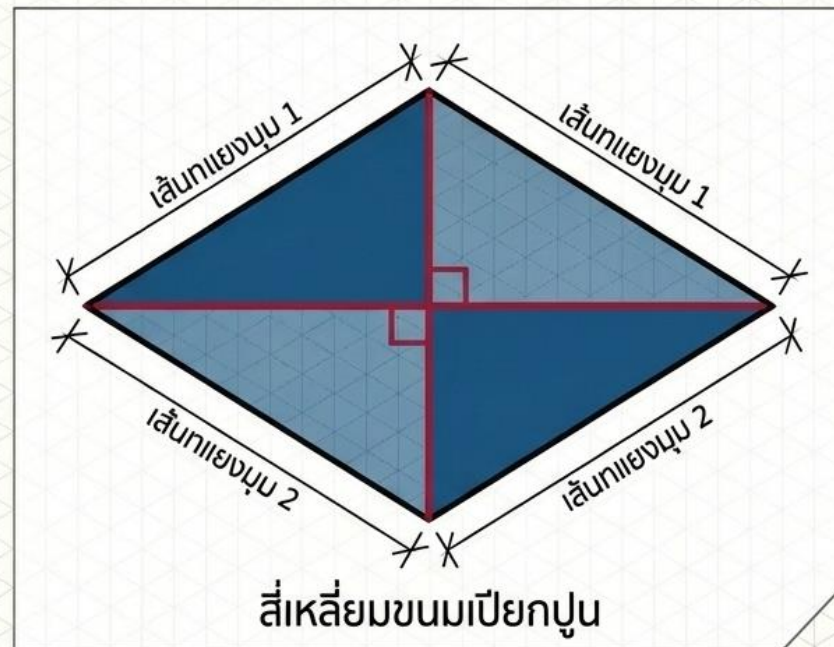
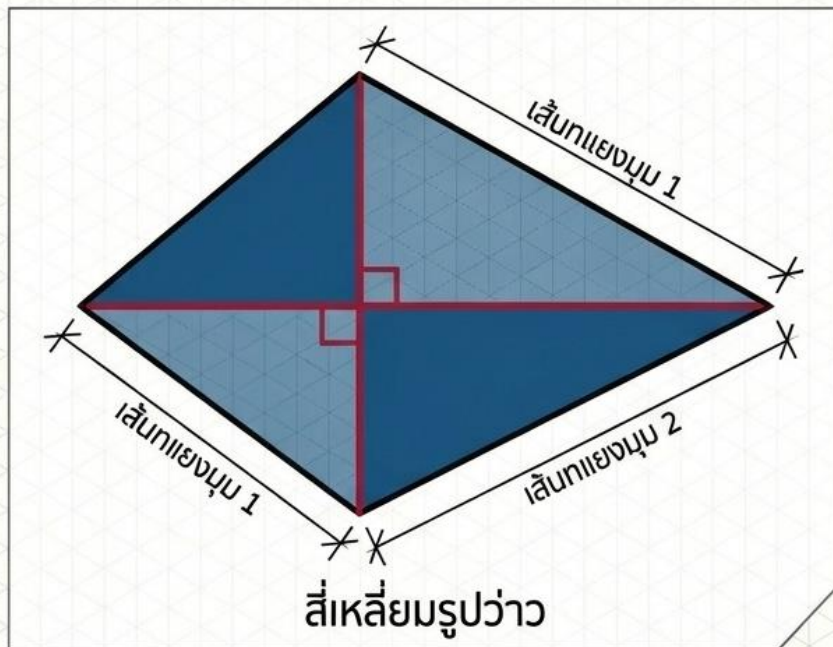
$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม} = 1/2 \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

สำหรับสามเหลี่ยมมุมฉาก ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ($a^2 + b^2 = c^2$) เพื่อหาความยาวด้านที่หายไปได้



พลังของเส้นทแยงมุมตัดจาก

สำหรับรูปสี่เหลี่ยมที่เส้นทแยงมุมตัดกันทำมุม 90 องศา เราสามารถหาพื้นที่ได้จากการดูโครงสร้างภายใน

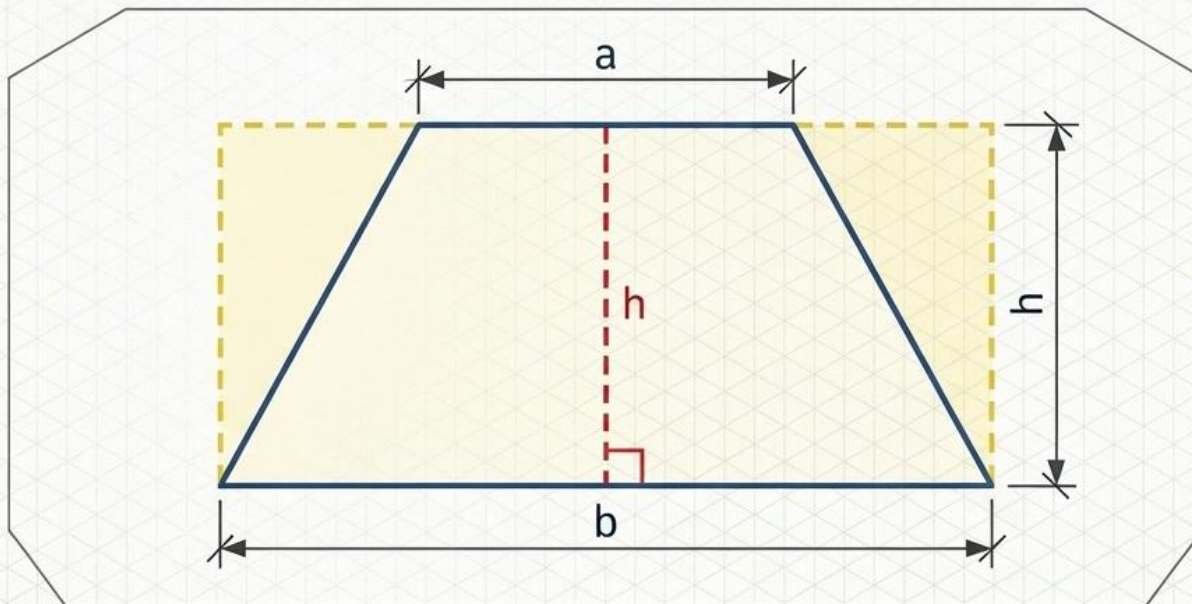


$$\frac{\text{พื้นที่สี่เหลี่ยมรูปว่าว}}{\text{ขนมเปียกปูน}} = \frac{1}{2} \times \text{ผลคูณของเส้นทแยงมุม}$$

สี่เหลี่ยมคางหมู: การหาค่าเฉลี่ยด้านคู่ขนาน

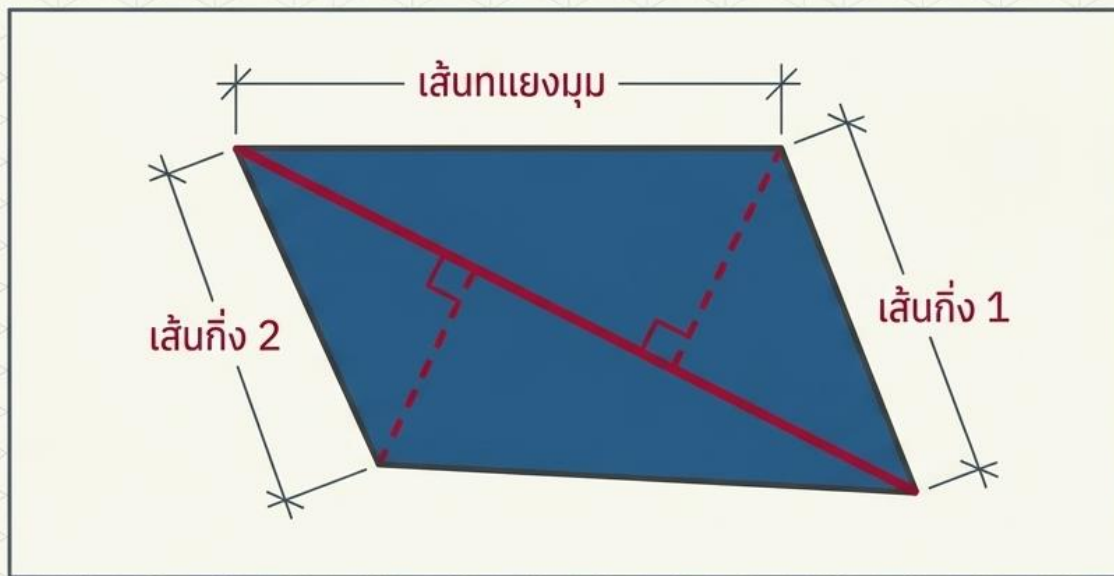
เมื่อมีด้านคู่ขนานที่ไม่เท่ากันเพียงคู่เดียว คณิตศาสตร์ใช้การ “หาค่าเฉลี่ย” ของสองด้านนั้นเพื่อสร้างสมดุล

$$\text{พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู} = 1/2 \times \text{ผลบวกด้านคู่ขนาน} \times \text{สูง}$$
$$A = ((a + b) / 2) \times h$$



สี่เหลี่ยมใดๆ: กลยุทธ์แบ่งแยกและพิชิต

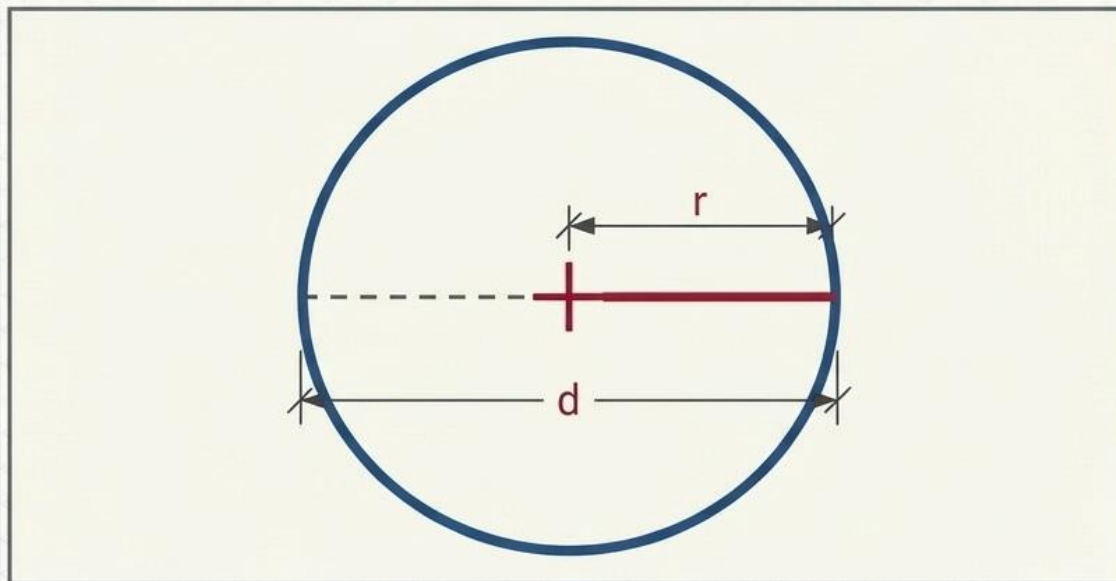
เมื่อรูปสี่เหลี่ยมไม่มีความสมมาตร หรือไม่มีด้านขนานกันเลย
ให้ใช้เทคนิคการตัดแบ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป



$$\text{พื้นที่สี่เหลี่ยมใดๆ} = \frac{1}{2} \times \text{เส้นทแยงมุม} \times \text{ผลบวกของเส้นกึ่ง}$$

ทะลุกรอบเส้นตรง: ความลับของวงกลม

รูปทรงที่ไม่มีมุม แต่เชื่อมโยงด้วยระยะห่างที่เท่ากันจากจุดศูนย์กลาง (รัศมี)



$$\text{พื้นที่วงกลม} = \pi r^2 \quad \text{พื้นที่วงกลม} = \frac{(\pi d^2)}{4}$$

ค่าของ $\pi \approx 22/7$ หรือ 3.14

จุดพรางตา: ข้อผิดพลาดที่พบบ่อยในห้องสอบ

สิ่งที่ต้องระวังก่อนเขียนคำตอบลงในกระดาษสอบ



สับสนระหว่าง 'พื้นที่' กับ 'เส้นรอบรูป'

เอาด้านไปคูณ 4 คือการหา 'เส้นรอบรูป' ไม่ใช่พื้นที่! (พื้นที่ต้อง ด้าน $\times$ ด้าน)



ลืมนยกกำลังสองที่หน่วย

ความยาวคือ cm หรือ m แต่พื้นที่ต้องเป็น 'ตาราง' (cm^2 หรือ m^2)

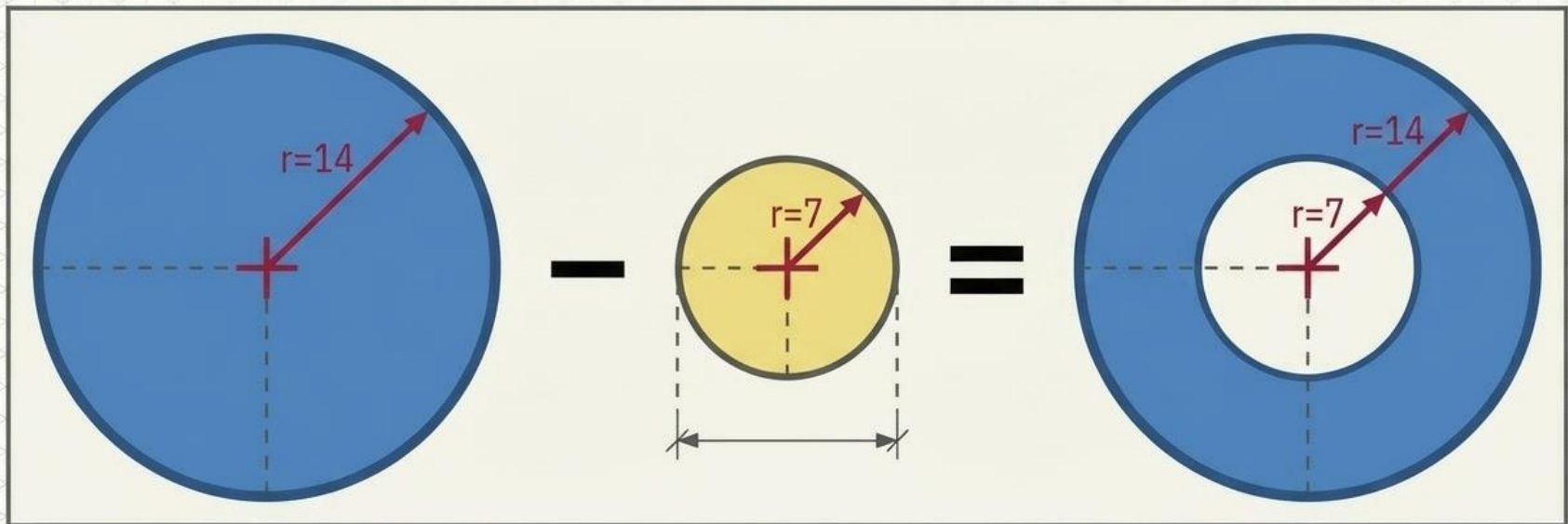


ใช้สูตรผิดประเภท

ระวังการใช้ กว้าง $\times$ ยาว กับรูปทรงที่ไม่ใช่มุมฉาก
(เช่น ขนมหีบยกปูนต้องใช้ ฐาน $\times$ สูง)

การถอดรหัสรูปทรงซ้อนทับ: พื้นที่วงแหวน

วงกลมสองวงมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน วงในรัศมี 7 ซม. วงนอกรัศมี 14 ซม. จงหาพื้นที่วงแหวน



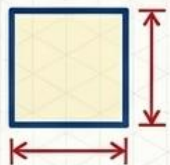
$$\begin{aligned}\text{พื้นที่วงนอก} &= \left(\frac{22}{7}\right) \times 14 \times 14 \\ &= 616 \text{ ตร.ซม.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่วงใน} &= \left(\frac{22}{7}\right) \times 7 \times 7 \\ &= 154 \text{ ตร.ซม.}\end{aligned}$$

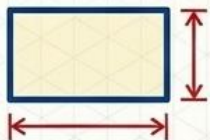
$$\begin{aligned}\text{พื้นที่วงแหวน} &= 616 - 154 \\ &= 462 \text{ ตร.ซม.}\end{aligned}$$

พิมพ์เขียวฉบับสมบูรณ์: รวมสูตรพื้นที่ 2 มิติ

ตระกูล ฐาน × สูง



สี่เหลี่ยมจัตุรัส
(ด้าน²)



สี่เหลี่ยมผืนผ้า
(กว้าง × ยาว)



สี่เหลี่ยมด้านขนาน
(ฐาน × สูง)

ตระกูล 1/2 (แบ่งครึ่ง)



สามเหลี่ยม
($1/2 \times$ ฐาน $\times$ สูง)



คางหมู
($1/2 \times$ ผลบวกด้าน
คู่ขนาน $\times$ สูง)

ตระกูลเส้นทแยงมุม



รูปว่าว / ขนนเปี้ยกปูน
($1/2 \times$ ผลคูณเส้นทแยงมุม)



สี่เหลี่ยมใดๆ
($1/2 \times$ เส้นทแยงมุม
 $\times$ ผลบวกเส้นตั้ง)

ตระกูลเส้นโค้ง



วงกลม
(πr^2)