สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

1. ลักษณะของสมการแบบตัวแปรแยกกันได้

รูปแบบนี้ คือสมการที่สามารถจัดรูปได้เป็น

f(x)dx = g(y)dy

- f(x) เป็นฟังก์ชันของ x
- g(y) เป็นฟังก์ชันของ y

<u>ข้อสังเกต</u> รูปแบบนี้จะแยกตัวแปร x และ y ออกจากกันอย่างชัดเจน

<u>หมายเหตุ 1</u> โดยปกติ สมการอนุพันธ์จะไม่อยู่ในรูป f(x)dx = g(y)dy จึงต้องอาศัยการจัดรูปสมการก่อน

ตัวอย่างที่ 1 จงจัดรูปสมการต่อไปนี้ เพื่อหาฟังก์ชัน f(x) และ g(y)

$$(1+y)^2dx = \frac{1}{2x}dy$$

<u>วิธีทำ</u> เราสามารถจัดรูปสมการได้เป็น

$$2xdx = \frac{1}{(1+y)^2}dy = (1+y)^{-2}dy$$

ดังนั้น สมการจะเขียนได้ในรูป f(x)dx = g(y)dy เมื่อ

$$f(x) = 2x \quad \text{และ} \quad g(y) = (1+y)^{-2}$$

<u>หมายเหตุ 2</u> โดยทั่วไป สมการอนุพันธ์อาจอยู่ในรูป y′ จึงต้องแทน y′ ด้วย dy/dx แล้วค่อยจัดให้อยู่ในรูป f(x)dx = g(y)dy

ตัวอย่างที่ 2 จงจัดรูปสมการต่อไปนี้ เพื่อหาฟังก์ชัน f(x) และ g(y)

$$y' = \frac{x}{y}$$

<u>วิธีทำ</u> เราสามรถแทน y′ ด้วย dy/dx จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

และจะสามารถจัดรูปสมการได้เป็น

$$xdx = ydy$$

ดังนั้น สมการจะเขียนได้ในรูป f(x)dx = g(y)dy เมื่อ

$$f(x) = x \qquad \text{และ} \qquad g(y) = y$$

2. ผลเฉลยของสมการแบบตัวแปรแยกกันได้

สำหรับสมการในรูปแบบ

$$f(x)dx = g(y)dy$$

เราสามารถหาผลเฉลยได้โดยการอินทิเกรตดังนี้

$$\boxed{\int f(x)dx = \int g(y)dy + c}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

และเมื่อได้ผลการอินทิเกรตแล้ว เราจะจัดรูปต่อไปให้อยู่ในรูปที่ y เป็นฟังก์ชันของ x

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$(1+y)^2 dx = \frac{1}{2x} dy$$

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่างที่ 1 เราจัดรูปได้ f(x)dx = g(y)dy เมื่อ

$$f(x) = 2x, \quad g(y) = (1+y)^{-2}$$

ดังนั้น อินทิกรัลของ f(x) และ g(y) จะมีค่า

$$\int f(x)dx = \int 2x dx = x^2$$

และ

$$\int g(y)dy = \int (1+y)^{-2} dy = -(1+y)^{-1}$$

ดังนั้น จากสมการ

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$$

จะได้

$$x^2 = -(1+y)^{-1} + c$$

$$x^2 - c = -\frac{1}{1+y}$$

$$1 + y = -\frac{1}{x^2 - c}$$

$$y = -1 - \frac{1}{x^2-c} = -\left(1 + \frac{1}{x^2-c}\right) = -1 + \frac{1}{c - x^2}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y' = \frac{x}{y}$$

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่างที่ 2 เราจัดรูปได้ f(x)dx = g(y)dy เมื่อ

$$f(x) = x \qquad \text{และ} \qquad g(y) = y$$

ดังนั้น อินทิกรัลของ f(x) และ g(y) จะมีค่า

$$\int f(x)dx = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

และ

$$\int g(y)dy = \int ydy = \frac{y^2}{2}$$

ดังนั้น จากสมการ

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$$

จะได้

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - c$$

$$y^2 = x^2 - 2c$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 2c}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y' = \frac{y^2+1}{x^2}$$

<u>วิธีทำ</u> ในขั้นแรกจะต้องจัดสมการให้อยู่ในรูป f(x)dx = f(y)dy

เราสามรถแทน y’ ด้วย dy/dx จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{x^2}$$

และจะสามารถจัดรูปสมการได้เป็น

$$\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{y^2+1}dy$$

ดังนั้น สมการจะเขียนได้ในรูป f(x)dx = g(y)dy เมื่อ

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \qquad \text{และ} \qquad g(y) = \frac{1}{y^2+1}$$

ดังนั้น อินทิกรัลของ f(x) และ g(y) จะมีค่า

$$\int f(x)dx = \int x^{-2}dx = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$$

และ

$$\int g(y)dy = \int \frac{1}{y^2+1}dy = \tan^{-1}(y)$$

ดังนั้น จากสมการ

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$$

จะได้

$$-\frac{1}{x} = \tan^{-1}(y) + c$$

$$\tan^{-1}(y) = -\frac{1}{x} - c$$

จาก $\tan(\tan^{-1}(y)) = y$ จะได้

$$y = \tan\left(-\frac{1}{x} - c\right)$$

เอกสารอ้างอิง

ศ. ดร.มงคล เดชนครินทร์ คณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า พิมพ์ครั้งที่ 4 สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2558.