ตัวกำหนด

โดย ผศ.ดร.ธนวัฒน์ ศรีศิริวัฒน์

1. การเรียงสับเปลี่ยน

บทนิยามที่1 ให้ $S=\{1,2,...,n\}$ การเรียงสับเปลี่ยน (Permutations) สมาชิกในเซต S เขียนแทนด้วย $(j_1,j_2,...,j_n)$ โดยที่ j_k เป็นจำนวนเต็มบวกลำดับที่ k ของการเรียงสับเปลี่ยนและจะเรียก $(j_1,j_2,...,j_n)$ ว่าการเรียงสับเปลี่ยนของสมาชิกใน S

ให้ $S=\{1,2,3\}$ สามารถเรียงสับเปลี่ยนได้ 6 แบบคือ $(1,2,3)(1,3,2)(2,1,3)(2,3,1)(3,1,2)(3,2,1)$

แต่ละแบบเรียกว่าตัวเรียงสับเปลี่ยน

ถ้าให้ S_n เป็นเซตของการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดของการเรียงสับเปลี่ยนสมาชิกใน $S=\{1,2,\ldots,n\}$ แล้วจะได้จำนวนใน S_n เท่ากับ $n!$ แบบ

เช่น $S_3=\{1,2,3\}$ มีการเรียงสับเปลี่ยน $3!=3\cdot2\cdot1=6$ แบบ

$S_4=\{1,2,3,4\}$ มีการเรียงสับเปลี่ยน $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ แบบ

$S_5=\{1,2,3,4,5\}$ มีการเรียงสับเปลี่ยน $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ แบบ

บทนิยามที่ 2 การหาการผกผันหรืออินเวอร์ชัน (Inversion) ในการเรียงสับเปลี่ยน $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ เกิดเมื่อจำนวนเต็มที่มากกว่าอยู่หน้าจำนวนเต็มที่น้อยกว่า

จำนวนการผกผันใช้สัญลักษณ์ $t(j)$ แทนจำนวนการผกผันในการเรียงสับเปลี่ยน

เช่น $j_1=(1,3,2)$ การผกผันของ j_1 คือ $(3,2)$ จะได้การผกผันใน j_1 คือ 1 ดังนั้น $t(1,3,2)=1$

$j_2=(5,4,2,3,1)$ การผกผันของ j_2 คือ $(5,4)(5,2)(5,3)(5,1)(4,2)(4,3)(4,1)(2,1)(3,1)$

จะได้การผกผันใน j_2 คือ 9 ดังนั้น $t(5,4,2,3,1)=9$

$j_3=(1,2,5,3,4)$ การผกผันของ j_3 คือ $(5,3)(5,4)$ จะได้การผกผันใน j_3 คือ 2

ดังนั้น $t(1,2,5,3,4)=2$

บทนิยามที่ 3

การเรียงสับเปลี่ยนที่มีจำนวนการผกผันทั้งหมดเป็นจำนวนคู่เรียกว่า **การเรียงสับเปลี่ยนคู่**

การเรียงสับเปลี่ยนที่มีจำนวนการผกผันทั้งหมดเป็นจำนวนคี่เรียกว่า **การเรียงสับเปลี่ยนคี่**

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $j_1=(3,1,2,5,4), j_2=(4,1,3,2)$ และ $j_3=(1,2,3,4,5,6)$ จงหาว่า j_1,j_2,j_3 เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่หรือคี่

<u>วิธีทำ</u> $j_1=(3,1,2,5,4)$ การผกผันของ j_1 คือ $(3,1)(3,2)(5,4)$ จะได้การผกผันใน j_1 คือ 3 หรือ $t(3,1,2,5,4)=3$ ดังนั้นเป็นการเรียงสับเปลี่ยนคี่

$j_2=(4,1,3,2)$ การผกผันของ j_2 คือ $(4,1)(4,2)(4,3)(3,2)$ จะได้การผกผันใน j_2 คือ 4 หรือ $t(4,1,3,2)=4$ ดังนั้นเป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่

$j_3=(1,2,3,4,5,6)$ ไม่มีการผกผัน $t(1,2,3,4,5,6)=0$ ดังนั้นเป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่

จะเห็นว่า j_2,j_3 เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่ แต่ j_1 เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคี่

2. ตัวกำหนด

2. ตัวกำหนด

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ สามารถเขียน

ตัวกำหนด (Determinant) ของ A ด้วยสัญลักษณ์ $\det A$ หรือ $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n}$

บทนิยามที่ 4 กำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ตัวกำหนดของ A หาได้จาก $\det A=\sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$ ซึ่งเป็นผลบวกของจำนวนจริงในการเรียงสับเปลี่ยนจำนวน $n!$ จำนวน โดยที่ $(j_1,j_2,\ldots j_n)$ เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ $S=\{1,2,\ldots,n\}$

ถ้าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนคี่ จะใช้เครื่องหมาย $-$

ถ้าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่ จะใช้เครื่องหมาย $+$

1. กำหนดให้ $A=[a_{11}]_{1\times 1}$ จะหาตัวกำหนดได้จาก พิจารณา $S_1=\{1\}$ มีวิธีเรียงสับเปลี่ยน $1!=1$ แบบ $t(1=0)$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่ จะใช้เครื่องหมาย +

จะได้ $\boxed{\det A=\sum a_{11}=|a|=a_{11}}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A=[5]_{1\times 1}$ และ $B=\left[\frac{1}{2}\right]_{1\times 1}$ จงหาตัวกำหนดของ A และ B

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\det A &= \sum a_{11}\\ &= a_{11}\\ &= \ldots\ldots\ldots\\ \det B &= b_{11}\\ &= \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$ จะหาตัวกำหนดได้จาก พิจารณา $S_2 = \{1,2\}$ มีวิธีเรียงสับเปลี่ยน

$2! = 2$ แบบ คือ $(1,2)(2,1)$

$t(1,2) = 0$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่ ใช้เครื่องหมาย $+$

$t(2,1) = 1$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคี่ ใช้เครื่องหมาย $-$

จะได้ $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + (-1)a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

หรือพิจารณา $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$=$ (ผลคูณทแยงลง) $-$ (ผลคูณทแยงขึ้น)

ดังนั้น $\boxed{\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -3 & 2\end{bmatrix}_{2\times 2}, B=\begin{bmatrix}2 & -9\\ 3 & 5\end{bmatrix}_{2\times 2}$ จงหา $\det A$ และ $\det B$

3. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}_{3\times 3}$ จะหาตัวกำหนดได้จาก พิจารณา $S_3=\{1,2,3\}$ มีวิธีเรียงสับเปลี่ยน

$3!=6$ แบบ คือ $(1,2,3)(1,3,2)(2,1,3)(2,3,1)(3,1,2)(3,2,1)$

การเรียงสับเปลี่ยน	จำนวนการผกผัน	ประเภท	เครื่องหมาย
$(1,2,3)$	0	คู่	$+$
$(1,3,2)$	1	คี่	$-$
$(2,1,3)$	1	คี่	$-$
$(2,3,1)$	2	คู่	$+$
$(3,1,2)$	2	คู่	$+$
$(3,2,1)$	3	คี่	$-$

จะได้ $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

$$\det A = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}] - [a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}]$$

หรือ พิจารณา

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & - & - & - \\ \det A & = & \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right. & \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right. & & & \\ & & & & + & + & + \end{array}$$

$=$ (ผลคูณทแยงลง) – (ผลคูณทแยงขึ้น)

ดังนั้น $\det A = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}] - [a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}]$

หรือ พิจารณา $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

จะได้ $\boxed{\det A = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}] - [a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}]}$

ตัวอย่างที่ 2.4 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ จงหา $\det A$ และ $\det B$

3. คุณสมบัติของตัวกำหนด

ทฤษฎีบทที่ 1 ตัวกำหนดของเมทริกซ์ทรานสโพสมิติ $n\times n$ ใด ๆ จะเท่ากับตัวกำหนดของเมทริกซ์นั้น

$$\det A^T = \det A$$

<u>**พิสูจน์**</u> กำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A

นั่นคือ $b_{ij}=a_{ij}$

จะได้

$$\begin{aligned}\det A^T &= \det B\\ &= \sum(\pm)b_{1j_1}b_{2j_2}\ldots b_{nj_n}\\ &= \sum(\pm)a_{j_1 1}a_{j_2 2}\ldots a_{j_n n}\\ &= \sum(\pm)a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{nk_n}\end{aligned}$$

จำนวนการผกผันของการเรียงสับเปลี่ยน $(j_1,j_2,\ldots j_n)$ และ $(k_1,k_2,\ldots k_n)$ เท่ากัน นั่นคือ

$$\det A^T = \det B = \sum(\pm)a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{nk_n}$$

ยกตัวอย่างเช่น

$$b_{15}b_{24}b_{31}b_{42}b_{53} = a_{51}a_{42}a_{13}a_{24}a_{35} = a_{13}a_{24}a_{35}a_{42}a_{51}$$

จะเห็นว่าจำนวนการผกผันของ $(5,4,1,2,3)$ เท่ากับ 7 และจำนวนการผกผันของ $(3,4,5,2,1)$ เท่ากับ 7 ซึ่งเป็นจำนวนคี่ทั้งสอง ดังนั้นพจน์และเครื่องหมายจะเหมือนกัน ดังนั้น

$$\det A^T = \det A$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ จงหา $\det A^T = \det A$ และ $\det B^T = \det B$

ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้าเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการสลับที่ของ 2 แถว (หลัก) ใด ๆ ของเมทริกซ์ A แล้ว $\det B = -\det A$

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากเมทริกซ์ A สลับแถวที่ p และแถวที่ q ของ A สมมติให้ $p < q$ ดังนั้น $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับแถวที่ไม่เท่ากับแถว p และ q

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $b_{pj}=a_{qj}, b_{qj}=a_{pj}$ และ $b_{ij}=a_{ij}$ สำหรับ $j=1,2,\ldots,n$ และ $i\neq p, i\neq q$

ดังนั้น $$\begin{aligned}\det B &= \sum(\pm)b_{1j_1}b_{2j_2}\ldots b_{pj_p}\ldots b_{qj_q}\ldots b_{nj_n}\\ &= \sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{qj_q}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{nj_n}\end{aligned}$$

จะพบว่า การเรียงสับเปลี่ยน $j_1j_2\ldots j_q\ldots j_p\ldots j_n$ การเรียงสับเปลี่ยนที่เกิดจากการสลับที่ระหว่าง j_q และ j_p ที่อยู่ในการเรียงสับเปลี่ยน $j_1j_2\ldots j_q\ldots j_p\ldots j_n$ จะส่งผลทำให้เครื่องหมายของ $\det B$ ตรงกันข้ามกับเครื่องหมายของ $\det A$

ดังนั้น $$\begin{aligned}\det B &= \sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{qj_q}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{nj_n}\\ &= -\sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{qj_q}\ldots a_{nj_n}\\ &= -\det A\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

ถ้าเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการสลับที่แถวที่ 1 และแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ A จงแสดงว่า $\det B = -\det A$ และถ้าเมทริกซ์ D เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการสลับที่หลักที่ 1 และหลักที่ 3 ของเมทริกซ์ C จงแสดงว่า $\det D = -\det C$

ทฤษฎีบทที่ 3 ถ้าสมาชิก 2 แถว (หลัก) ใด ๆ ของเมทริกซ์ A เหมือนกันแล้ว $\det A = 0$

<u>**พิสูจน์**</u> กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ มีแถวที่ p และแถวที่ q เท่ากัน และ $B = \left[b_{ij}\right]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการสลับที่แถวที่ p กับแถวที่ q ของ A

จากทฤษฎีบทที่ 2.2 จะได้ว่า $\det B = -\det A$

แต่เนื่องจาก $B = A$ ดังนั้น $\det B = \det A$ นั่นคือ $\det A = -\det A$ จะได้ว่า $2\det A = 0$

เนื่องจาก $\det A$ เป็นจำนวนจริง และจะเป็นจริงเมื่อ $\det A = 0$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -8 \\ 3 & 3 & -10 \end{bmatrix}_{3\times 3}$,

$C=\begin{bmatrix} -8 & -2 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 9 & -5 & -8 & -5 \\ 10 & 7 & 9 & 7 \end{bmatrix}_{4\times 4}$, $D=\begin{bmatrix} 1 & -9 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ -8 & -7 & 5 & 11 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{5\times 5}$ จงหา $\det A, \det B, \det C$ และ $\det D$

ทฤษฎีบทที่ 4 ถ้าสมาชิกแถว (หลัก) ใด ๆ ของเมทริกซ์ A เป็น 0 ทั้งแถวแล้ว $\det A = 0$

<u>**พิสูจน์**</u> กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ และสมาชิกแถวที่ p ของ A เป็นศูนย์ทั้งหมด

จาก $\qquad \det A = \sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_j}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{nj_n}$

เมื่อ a_{pj_p} คือสมาชิกที่มาจากแถวที่ p ของ A และ $a_{pj_p} = 0$

เนื่องจากแต่ละเทอมของ $a_{1j_1}a_{2j_j}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{nj_n}$ ประกอบด้วยสมาชิกที่มาจากแถวที่ p ของ A

จะได้ $\qquad a_{1j_1}a_{2j_j}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{nj_n} = 0$

ดังนั้น $\qquad \det A = \sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_j}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{nj_n}a_{pj_p}$

$\qquad\qquad = 0$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 4 & -5\end{bmatrix}_{2\times 2}, B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 100\\ 36 & 0 & 63\\ -2 & 0 & -55\end{bmatrix}_{3\times 3}, C=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 6 & 7 & -8\\ 9 & -10 & 11 & 12\end{bmatrix}_{4\times 4}$

จงหา $\det A, \det B$ และ $\det C$

ทฤษฎีบทที่ 5 ถ้าเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการคูณแถว (หลัก) ใด ๆ ของเมทริกซ์ A ด้วยจำนวนจริงใด ๆ $c \neq 0$ แล้ว $\det B = c\det A$

<u>**พิสูจน์**</u> กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำจำนวนจริง $c \neq 0$ ไปคูณกับแถวที่ p ของ A

จะได้ว่า $b_{ij} = a_{ij}$ เมื่อ $i \neq p$ และ $b_{ij} = ca_{ij}$ เมื่อ $i = p$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{nj_n} \\
\det B &= \sum(\pm)b_{1j_1}b_{2j_2}\ldots b_{pj_p}\ldots b_{nj_n} \\
&= \sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{nj_n} \\
&= c\sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{nj_n} \\
&= c\det A
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

ถ้าเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากนำ $c_1=-3$ คูณเข้าแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ A จงแสดงว่า $\det B = c_1 \det A$ และถ้าเมทริกซ์ D เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากนำ $c_2=2$ คูณไขว้หลักที่ 3 ของเมทริกซ์ C จงแสดงว่า $\det D = c_2 \det C$

ทฤษฎีบทที่ 6 ถ้าเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำ $c \neq 0$ เท่าของแถว (หลัก) ที่ p ไปบวกกับแถว (หลัก) ที่ q ของเมทริกซ์ A แล้ว $\det B = \det A$

พิสูจน์ กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำจำนวนจริง $c \neq 0$ ไปคูณกับแถวที่ p และบวกเข้ากับแถวที่ q ของ A โดยที่ $p \neq q$

สมมติให้ $p < q$ สำหรับ $j = 1,2,\ldots,n$

จะได้ว่า $b_{ij} = a_{ij}$ เมื่อ $i \neq q$ และ $b_{qi} = a_{qi} + ca_{pi}$ เมื่อ $i = q$

ดังนั้น
$$
\begin{aligned}
\det A &= \sum(\pm)a_{1j_1}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{qj_q}\ldots a_{nj_n} \\
\det B &= \sum(\pm)b_{1j_1}\ldots b_{pj_p}\ldots b_{qj_q}\ldots b_{nj_n} \\
&= \sum(\pm)a_{1j_1}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{qj_q} + ca_{pj_p}\ldots a_{nj_n} \\
&= \left[\sum(\pm)a_{1j_1}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{qj_q}\ldots a_{nj_n}\right]\left[\sum(\pm)a_{1j_1}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{nj_n}\right]
\end{aligned}
$$

แต่เนื่องจาก $\sum(\pm)a_{1j_1}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{nj_n} = 0$

ดังนั้น
$$
\begin{aligned}
\det B &= \sum(\pm)a_{1j_1}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{qj_q}\ldots a_{nj_n} \\
&= \det A
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ และเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการ $R_2 \to -3R_1 + R_2$ ของเมทริกซ์ A จงแสดงว่า $\det B = \det A$

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีบทที่ 2.6

จาก $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\
&= [-32 - 6 + 0] - [0 - 10 + 0] \\
&= -38 + 10 \\
&= -28
\end{aligned}
$$

เมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการ $R_2 \to -3R_1 + R_2$ ของเมทริกซ์ A จะได้

$$\text{จาก } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 3} \overset{R_2 \to -3R_1 + R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -6 & 13 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 3} = B$$

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -6 & 13 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\ &= [-104 - 6 + 0] - [0 - 10 - 72] \\ &= -110 + 82 \\ &= -28 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\det B = \det A$

ทฤษฎีบทที่ 7 ถ้าเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (ล่าง) มิติ $n\times n$ แล้ว $\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$

<u>**พิสูจน์**</u> กำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนนั่นคือ $a_{ij}=0$ สำหรับทุก ๆ $i>j$

ดังนั้น $\det A \;=\; \Sigma(\pm)a_{1j_1}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{qj_q}\ldots a_{nj_n}$

ถ้าพิจารณาเทอม $a_{1j_1}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{qj_q}\ldots a_{nj_n}$ จะเห็นว่าเทอมเหล่านี้จะไม่เท่ากับศูนย์เมื่อ $1\le j_1, 2\le j_2,\ldots,n\le j_n$ ทุกตัว ซึ่งจะมีทางเป็นไปได้เมื่อ $1=j_1, 2=j_2,\ldots,n=j_n$ เนื่องจาก $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ เป็นตัวเลขที่ไม่ซ้ำกันและสลับกันอยู่ภายใน $1,2,\ldots,n$ เท่านั้น ดังนั้นเทอมอื่น ๆ จะมีค่าเท่ากับ 0 ยกเว้นเทอม $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ และเครื่องหมายหน้าเทอมนี้เป็นบวก

ดังนั้น $\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}_{2\times2}, B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{4\times4},$

$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}_{5\times5}$ จงหา $\det A, \det B, \det C$ และ $\det D$

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 9 \\ 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ จงใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวเปลี่ยนตัว กำหนดของเมทริกซ์ให้อยู่ในรูปสามเหลี่ยมบน พร้อมทั้งหาค่า

ทฤษฎีบทที่ 8 ถ้าเมทริกซ์ E, A เป็นเมทริกซ์ มิติ $n \times n$ โดยที่ E เป็นเมทริกซ์เบื้องต้น แล้ว $\det EA = \det E \det A$ และ $\det AE = \det E \det A$

<u>**พิสูจน์**</u> ถ้ากำหนดให้ E เป็นเมทริกซ์เบื้องต้นแบบที่ 1 ดังนั้น EA จะเป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการสลับแถวสองแถวของเมทริกซ์ A

จะได้เห็น $\det EA = -\det A = \det E \det A$ เนื่องจาก $\det E = -1$

ถ้ากำหนดให้ E เป็นเมทริกซ์เบื้องต้นแบบที่ 2 และ E จะเป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำ $c \neq 0$ คูณเข้าแถวหนึ่งของ I_n ดังนั้น EA จะเป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำ $c \neq 0$ คูณเข้าแถวนั้นของเมทริกซ์ A

จะได้ $\det EA = c \det A = \det E \det A$ เนื่องจาก $\det E = c$

ถ้ากำหนดให้ E เป็นเมทริกซ์เบื้องต้นแบบที่ 3 และ E จะเป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการคูณแถวที่ p ของ I_n ด้วย $c \neq 0$ แล้วบวกเข้ากับแถวที่ q ของ I_n เมื่อ $p \neq q$ ดังนั้น EA จะเป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำ $c \neq 0$ คูณเข้าแถวที่ p ของ A แล้วบวกเข้ากับแถวที่ q ของ A

จะได้ $\det EA = \det A = \det E \det A$ เนื่องจาก $\det E = 1$

จากทั้งสามกรณี สรุปได้ว่า $\det EA = \det E \det A$

สามารถพิสูจน์ทำนองเดียวกัน ได้ว่า $\det AE = \det E \det A$

จากทฤษฎีนี้ สามารถสรุปได้อีกว่า ถ้า $E_1, E_2, \ldots, E_p$ เป็นเมทริกซ์เบื้องต้น และถ้า $B = E_p, E_{p-1}, E_{p-2}, \ldots, E_1 A$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det B &= \det E_p \left(E_{p-1}, E_{p-2}, \ldots, E_1 A\right) \\ &= \det E_p \det\left(E_{p-1}, E_{p-2}, \ldots, E_1 A\right) \\ &= \det E_p \det E_{p-1} \ldots \det E_1 \det A \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 9 ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ A เป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน (Nonsingular Matrix) ก็ต่อเมื่อ $\det A \neq 0$

<u>**พิสูจน์**</u> $(\rightarrow)$ กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน จะได้ว่า A เป็นผลคูณของเมทริกซ์เบื้องต้นแบบแถว นั่นคือ $A = E_1 E_2 \ldots E_{p-1} E_p$

จะได้

$$\begin{aligned} \det A &= \det\left(E_1 E_2 \ldots E_{p-1} E_p\right) \\ &= \det E_1 \det E_2 \ldots \det E_{p-1} \det E_p \end{aligned}$$

เนื่องจาก $E_i, i = 1, 2, \ldots, p$ เป็นเมทริกซ์เบื้องต้น จะได้ว่า

$\det E_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, p$ ดังนั้น $\det A \neq 0$

$(\leftarrow)$ กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน จะได้ว่า A สมมูลกับเมทริกซ์ลดรูปเป็นขั้นแบบแถว B เมื่อ $B \neq I_n$ ดังนั้น B จะมีแถวซึ่งสมาชิกทุกตัวในแถวเป็นศูนย์ จะได้ว่า $\det B = 0$ เนื่องจาก $A \sim B$ จะได้ว่าจะมีเมทริกซ์เบื้องต้น $E_1 E_2 \ldots E_{p-1} E_p$ ซึ่งทำให้ $A = E_1 E_2 \ldots E_{p-1} E_p B$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \det A &= \det\left(E_1 E_2 \ldots E_{p-1} E_p B\right) \\ &= \det E_1 \det E_2 \ldots \det E_{p-1} \det E_p \det B \\ &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\det B = 0$

สรุปได้ว่า A เป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times3}$

จงหาว่า A,B เป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐานหรือไม่

ทฤษฎีบทที่ 10 ถ้าเมทริกซ์ A,B เป็นเมทริกซ์มิติ $n\times n$ แล้ว $\det AB = \det A \det B$

<u>**พิสูจน์**</u> ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐานแล้วจะได้ $A \overset{R}{\sim} I_n$ นั่นคือ $A = E_pE_{p-1}\ldots E_2E_1I_n = E_pE_{p-1}\ldots E_2E_1$ เมื่อ $E_1,E_2,\ldots,E_{p-1},E_p$ เป็นเมทริกซ์เบื้องต้นแบบแถว

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \det A &= \det\left(E_pE_{p-1}\ldots E_2E_1\right) \\ &= \det E_p \det E_{p-1}\ldots \det E_2 \det E_1 \end{aligned}$$

จะได้
$$\begin{aligned} \det AB &= \det\left(E_pE_{p-1}\ldots E_2E_1B\right) \\ &= \det E_p \det E_{p-1}\ldots \det E_2 \det E_1 \det B \\ &= \det A \det B \end{aligned}$$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน แล้ว $\det A = 0$ จะได้นั่นคือ A สมมูลแถวกับเมทริกซ์ลดรูปเป็นขั้นแบบแถว C ซึ่งมีแถวที่มีสมาชิกเป็นศูนย์ทั้งหมด ดังนั้น

$C = E_p E_{p-1} \ldots E_2 E_1 A$ ทำให้ $CB = E_p E_{p-1} \ldots E_2 E_1 AB$ จะได้ว่า $AB \overset{R}{\sim} CB$ เมื่อ C มีแถวที่เป็นศูนย์ทั้งหมด จึงทำให้ CB มีแถวที่เป็นศูนย์ทั้งหมดด้วย และทำให้ $\det CB = 0$ เพราะว่า

$$\begin{aligned}
\det CB &= \det\left(E_p E_{p-1} \ldots E_2 E_1 AB\right) \\
&= \det E_p \det E_{p-1} \ldots \det E_2 \det E_1 \det A \det B \\
&= 0
\end{aligned}$$

จาก $\det E_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, p$

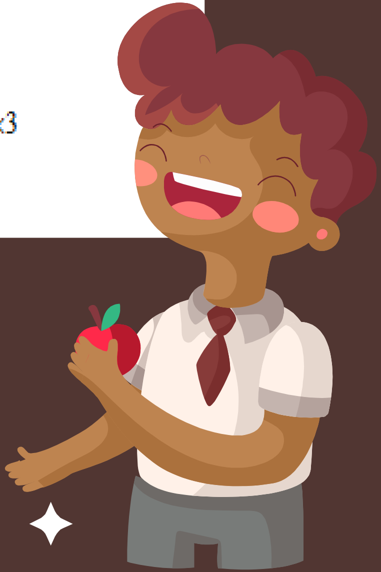
จะได้ $\det AB = 0$

จาก $\det A = 0$ $\det A \det B = 0$

จะสรุปได้ว่า $\det AB = \det A \det B$

ตัวอย่างที่ 14 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

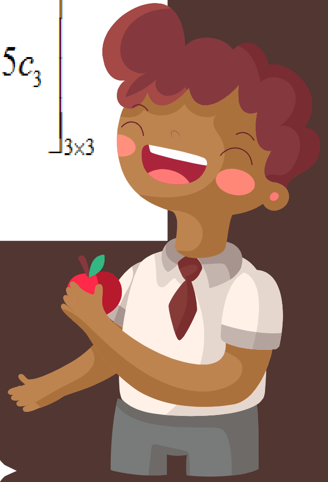
จงแสดงว่า $\det AB = \det A \det B$



ตัวอย่างที่ 15 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ มีค่า $\det A = -9$ และกำหนดให้

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}_{3\times 3}, C = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{bmatrix}_{3\times 3}, D = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -3a_1 + b_1 + 5c_1 & -3a_2 + b_2 + 5c_2 & -3a_3 + b_3 + 5c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

จงหา $\det B, \det C$ และ $\det D$



วิธีทำ เมทริกซ์ B มีสมาชิก แถวที่ 1 กับแถวที่ 3 เหมือนกันดังนั้น

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

เมทริกซ์ C เกิดจากการสลับที่หลักที่ 1 กับหลักที่ 2 ของ A จะได้ $\det C = -\det A$

เนื่องจาก $\det A = -9$ ดังนั้น

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} = -(-9)$$

$$= 9$$

เมทริกซ์ D เกิดจากการนำ -3 คูณเข้าแถวที่ 1 และ 5 คูณเข้าแถวที่ 3 แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 2 ของ A จะได้ $\det D = \det A$

ดังนั้น

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -3a_1+b_1+5c_1 & -3a_2+b_2+5c_2 & -3a_3+b_3+5c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -9$$

4. การกระจายโคแฟคเตอร์

4 การกระจายโคแฟคเตอร์

การหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ด้วยวิธีการกระจายโคแฟคเตอร์ (Cofactor Expansion) นี้ จะช่วยให้การหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ หาได้สะดวกมากยิ่งขึ้นและเป็นระบบที่แน่นอน ก่อนอื่นต้องทำความเข้าใจกับคำว่า ไมเนอร์ (Minor) และโคแฟคเตอร์ (Cofactor) ก่อน

บทนิยามที่ 5 ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ และให้ M_{ij} เป็นตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยของ A ที่เกิดจากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ออกเรียกว่า ไมเนอร์ (Minor) ของ a_{ij} และ $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ เรียกว่า โคแฟคเตอร์ (Cofactor) ของ a_{ij}

ตัวอย่างที่ 16 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ จงหา M_{11}, M_{21} และ C_{11}, C_{21}

ตัวอย่างที่ 17 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ จงหา M_{12}, M_{22}, M_{33} และ C_{12}, C_{22}, C_{33}

ตัวอย่างที่ 18 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \\ -3 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$ จงหา C_{13}, C_{32} และ C_{43}

ทฤษฎีบทที่ 11 $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}, n\geq 2$ ดังนั้น

เมื่อกระจายตามแถวที่ i ของ A $(1\leq i\leq n)$

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

หรือ เมื่อกระจายตามหลักที่ j ของ A $(1\leq j\leq n)$

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

พิสูจน์ จะพิสูจน์กรณี $n=3$

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$ จะได้

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)+a_{12}\left(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\left|M_{11}\right|+a_{12}(-1)^{1+2}\left|M_{12}\right|+a_{13}(-1)^{1+3}\left|M_{13}\right| \end{aligned}$$

ดังนั้น $\det A = a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}$ เป็นการกระจาย $\det A$ ตามแถวที่ 1

หรือ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) + a_{23}\left(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}\right) + a_{33}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) \\
&= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{13}(-1)^{1+3}\left|M_{13}\right| + a_{23}(-1)^{2+3}\left|M_{23}\right| + a_{33}(-1)^{3+3}\left|M_{33}\right|
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\det A = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}$ เป็นการกระจาย $\det A$ ตามหลักที่ 3

ตัวอย่างที่ 19 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ จงหา $\det A$ โดยการกระจายโคแฟคเตอร์

หมายเหตุ การหาตัวกำหนดโดยการกระจายโดยโคแฟคเตอร์ ควรเลือกกระจายตามแถวหรือหลักที่มี 0 มาก ๆ

ตัวอย่างที่ 20 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{4\times 4}$ จงหา $\det A$ โดยการกระจายโคแฟคเตอร์

ตัวอย่างที่ 21 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & -5 \end{bmatrix}_{4\times 4}$ จงหา $\det A$ โดยการกระจายโคแฟคเตอร์

ตัวอย่างที่ 2.22 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 5}$ จงหา $\det A$ โดยการกระจายโคแฟคเตอร์

ทฤษฎีบทที่ 12 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}, n \geq 2$ จะได้ว่า

(1) $a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} = 0 \qquad , i \neq j$

(2) $a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj} = 0 \qquad , j \neq i$

<u>**พิสูจน์**</u> พิสูจน์ข้อ (1) เมื่อ $i \neq j$ กำหนดให้

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{แถวที่ } i \\ \\ \text{แถวที่ } j \\ \\ \\ \end{array}$$

เมทริกซ์ B เกิดจาก A โดยการแทนที่แถวที่ j ด้วยแถวที่ i จะได้

$$
\begin{array}{cl}
B = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{แถวที่ } i \\ \\ \leftarrow \text{แถวที่ } j \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

จะเห็นว่า B เป็นเมทริกซ์ที่มีแถวสองแถวเท่ากัน ดังนั้น $\det B = 0$ เนื่องจากสมาชิกในแถวที่ j ของ B คือ $a_{i1}a_{i2}\ldots a_{in}$ ซึ่งมีโคแฟคเตอร์เป็น $C_{j1}, C_{j2}, \ldots C_{jn}$ ตามลำดับ

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det B &= a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \ldots + a_{in}C_{jn} \\ &= 0 \end{aligned}$$

จึงสรุปได้ว่า $a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \ldots + a_{in}C_{jn} = 0$

ตัวอย่างที่ 23 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ จงแสดงว่า $a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} + a_{23}C_{13} = 0$

$$\begin{aligned} &= -132 + 80 + 52 \\ &= 0 \end{aligned}$$

อ้างอิง

นิศากร สังวาระนที .(2558).**ตำรารายวิชาพีชคณิตเชิงเส้น**.คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.

พรพิศ ยิ้มประยูร .(2557). **พีชคณิตเชิงเส้น**.กรุงเทพฯ:สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.