

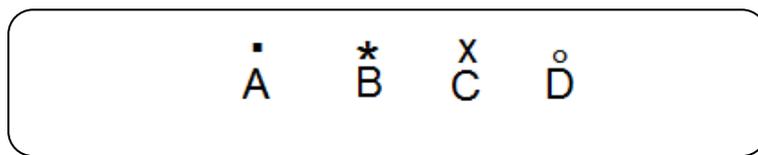
บทที่ 3

ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิต

ในบทที่ 3 จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานของเรขาคณิตในระบบยุคลิด ซึ่งประกอบด้วย
บทนิยาม สัจพจน์ และสิ่งที่เห็นจริงแล้ว เพื่อเป็นการให้ผู้อ่านเข้าใจ บทนิยาม และข้อตกลงขั้น
พื้นฐานของเรขาคณิตในระบบยุคลิด เพื่อที่จะนำความรู้ไปใช้ต่อไปในบทที่ 5 ที่ว่าด้วยทฤษฎีบท
เรขาคณิตในระบบยุคลิดต่อไป

1. ความรู้พื้นฐาน

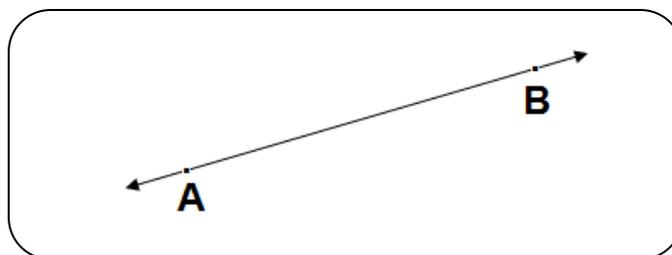
1.1 จุด (Point)



รูปที่ 13 การเขียนจุดทางเรขาคณิต

“จุด” เป็นคำอธิบาย (Undefined term) ที่ใช้ในการแสดงตำแหน่งของสิ่งต่างๆ เช่น
ตำแหน่งของสถานที่ในแผนที่ ตำแหน่งของดวงดาว ฯลฯ นิยมเขียนโดยใช้ตัวอักษรภาษาไทย
หรือตัวอักษรภาษาอังกฤษ (ตัวพิมพ์ใหญ่) เช่น จุด A จุด B เป็นต้น

1.2 เส้นตรง (Line)



รูปที่ 14 ตัวอย่างเส้นตรง AB

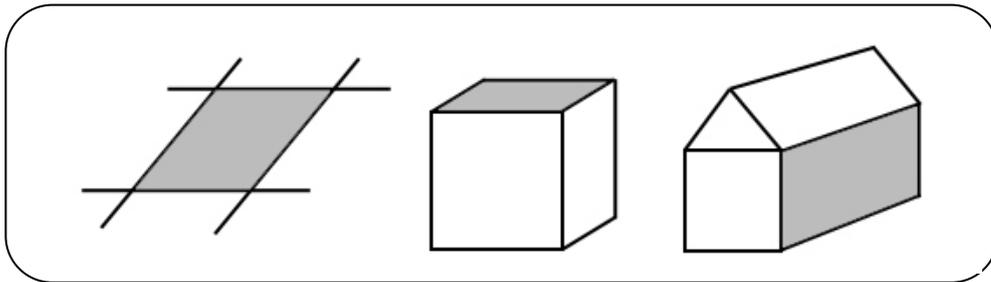
กำหนดจุดสองจุดบนกระดาษจากนั้นใช้เส้นตรงหรือเส้นไม้บรรทัดวางทาบให้ผ่านจุด
ทั้งสอง ขีดตามแนวเส้นตรงไปจนสุดขอบกระดาษทั้งสองข้าง สามารถเขียนรอยขีดตามแนวเส้นตรง
ให้ผ่านจุดสองจุดได้หนึ่งรอยขีดแต่ถ้าให้จุดสองจุดอยู่บนระนาบที่ไม่มีขอบเขตรอยขีดจะยาวไม่

สิ้นสุดเรียกรอยขีดนี้ว่า “เส้นตรง” เพื่อให้เข้าใจตรงกันจึงกำหนดชื่อจุดทั้งสองจุดบนเส้นตรง เช่น จุด A และจุด B แสดงเส้นตรง AB หรือเส้นตรง BA เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ \overleftrightarrow{AB} หรือ \overleftrightarrow{BA}

ดังนั้นเส้นตรงมีความยาวไม่สิ้นสุด และเส้นตรงเป็นคำอนิยาม (Undefined term)

เมื่อเขียนเส้นตรงบนส่วนของระนาบจึงเขียนลูกศรไว้ที่ปลายทั้งสองของเส้นตรง

1.3 ระนาบ (Plane)



รูปที่ 15 ตัวอย่างระนาบทางเรขาคณิต

พื้นผิวที่แบนและเรียบที่เราเห็นขอบเขตลักษณะเดียวกับแผ่นกระดาษ ไปสเตอร์แข็ง หรือ แผ่นกระจกเงาเรียกว่า “ส่วนของระนาบ” ส่วนของระนาบถ้าต่อออกไปหรือแผ่ขยายออกไปทุกทิศทางไม่สิ้นสุดหรือไม่มีขอบเขตโดยพื้นผิวยังคงแบนและเรียบอยู่เสมอจะเรียกว่า “ระนาบ” ระนาบเป็นคำอนิยาม (Undefined term) เช่นเดียวกับ จุด และเส้นตรง

1.4 ส่วนของเส้นตรง (Line Segment)



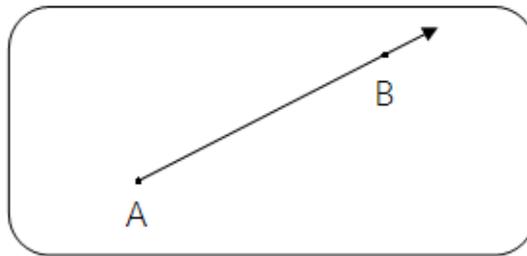
รูปที่ 16 ตัวอย่างส่วนของเส้นตรง AB

กำหนดจุดสองจุดบนกระดาษจากนั้นใช้สันตรงหรือสันไม้บรรทัดวางทาบให้ผ่านจุดทั้งสองนั้น ขีดตามแนวสันตรงจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง รอยขีดนี้เป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง เรียกว่าส่วนของเส้นตรงและเรียกจุดสองจุดนี้ว่า “จุดปลาย (end point)” ส่วนของเส้นตรงเป็นบทนิยาม (defined term)

เพื่อให้เข้าใจตรงกันจึงกำหนดชื่อจุดปลายทั้งสอง เช่น จุด A และ จุด B แสดงส่วนของเส้นตรง AB หรือส่วนของเส้นตรง BA เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ \overline{AB} หรือ \overline{BA}

1.5 รังสี (Ray)

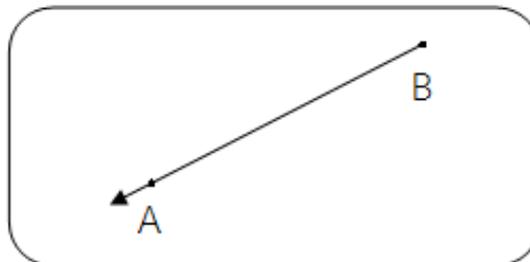
กำหนดจุดสองจุดบนกระดาษให้เป็นจุด A และจุด B จากนั้นใช้เส้นตรง หรือสันไม้บรรทัดวางทาบให้ผ่านจุดทั้งสอง ชีดตามแนวเส้นตรงจากจุด A ผ่านจุด B ไปจนสุดกระดาษด้านหนึ่ง ถ้าให้จุด A และจุด B อยู่บนระนาบแล้วรอยขีดที่ลากจากจุด A ผ่านจุด B จะยาวไม่สิ้นสุด เรียกรอยขีดนี้ว่า “รังสี” โดยมีจุด A เป็นจุดปลายเพียงจุดเดียว ซึ่งรังสีสามารถต่อออกไปได้ไม่สิ้นสุด ดังนั้นเวลาเขียนแสดงรังสีบนส่วนของระนาบจึงเขียนลูกศรไว้ที่ปลายอีกข้างหนึ่งดังรูป



รูปที่ 17 ตัวอย่างรังสี AB

แสดงรังสี AB เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ \overrightarrow{AB} มีจุด A เป็นจุดปลาย

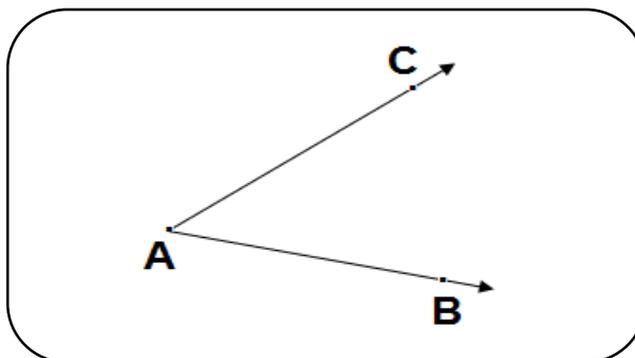
และ



รูปที่ 18 ตัวอย่างรังสี BA

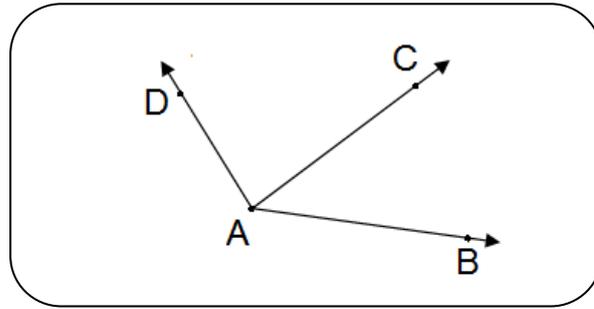
แสดงรังสี BA เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ \overrightarrow{BA} มีจุด B เป็นจุดปลาย
ดังนั้นรังสี AB กับรังสี BA ไม่ได้เป็นรังสีเดียวกัน

1.6 มุม (Angle)



รูปที่ 19 ตัวอย่างมุม BAC

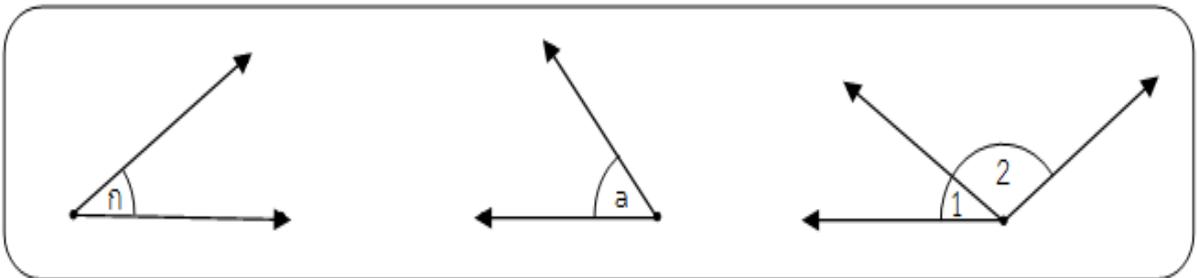
จากภาพรังสี AB และรังสี AC มีจุด A เป็นจุดปลายเดียวกันทำให้เกิดมุมที่มีจุด A เป็นจุดยอดมุมรังสี AB และรังสี AC เป็นแขนของมุมเรียกชื่อมุมนี้ว่ามุม BAC มีชื่อจุดยอดมุมอยู่ตรงกลางเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\angle BAC$ หรือ \widehat{BAC} เรียกย่อๆ ว่ามุม A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\angle A$ หรือ \widehat{A}



รูปที่ 20 มุมสองมุมที่มีจุดยอดมุมร่วมกัน

จากภาพรังสี AD รังสี AC รังสี AB มีจุดปลายเดียวกันคือจุด A ทำให้เกิดมุมหลายมุมที่มีจุด A เป็นจุดยอดมุมกรณีเช่นนี้เราจะเรียกมุมที่มีจุดยอดร่วมกันว่า “มุมประชิด” ในที่นี้จะกล่าวได้ว่า $\angle BAC$ เป็นมุมประชิด $\angle CAD$

เพื่อความสะดวกรวดเร็วในการเรียกชื่อมุมบางกรณีอาจกำหนดชื่อมุมเป็นตัวอักษรภาษาไทยหรือตัวอักษรภาษาอังกฤษ (ตัวพิมพ์เล็ก) หรือตัวเลขและให้เขียนเส้นโค้งไว้ที่มุมที่ต้องการกล่าวถึงเช่น



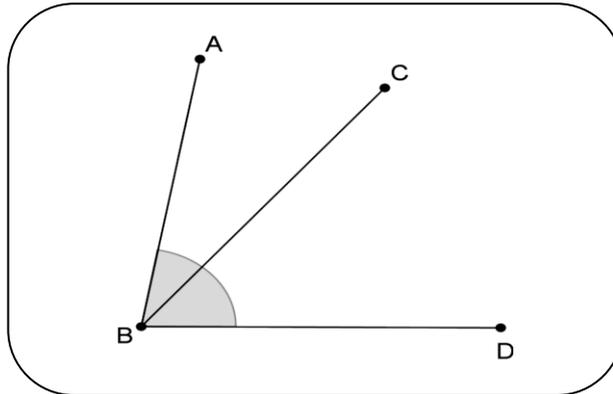
รูปที่ 21 ตัวอย่างการเขียนชื่อมุมในลักษณะต่างๆ

1.7 ชนิดของมุม (Classifying Angles)

1.7.1 มุมประชิด (Adjacent Angle)

มุมสองมุมที่มีจุดยอดมุม (Vertex) และแขนของมุมด้านใดด้านหนึ่งร่วมกัน แต่ไม่ได้ใช้จุดด้านในอื่นร่วมกันอีกเรียกว่า **มุมประชิด**

เช่น



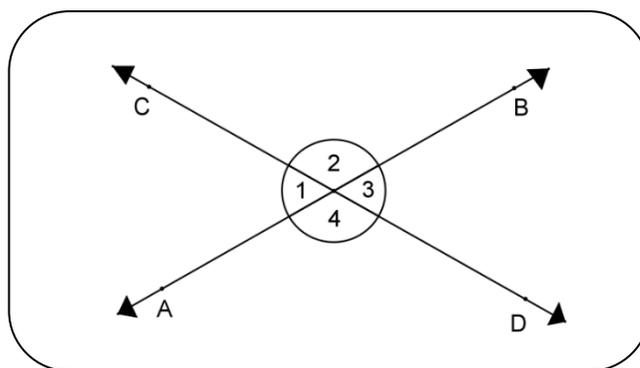
รูปที่ 22 ตัวอย่างการเขียนมุมประชิด

มุม ABC และมุม CBD ใช้จุดยอดมุม B เดียวกัน และใช้ด้าน BC ร่วมกัน แต่ไม่ได้ใช้ด้าน AB และด้าน DB ร่วมกัน จะเรียกมุม ABC และมุม CBD ว่า **มุมประชิด**

1.7.2 มุมตรงข้าม (Vertical Angle)

มุมตรงข้ามเป็นมุมที่เกิดขึ้นจากการตัดกันของเส้นตรงสองเส้น

เช่น



รูปที่ 23 ตัวอย่างการเขียนมุมตรงข้าม

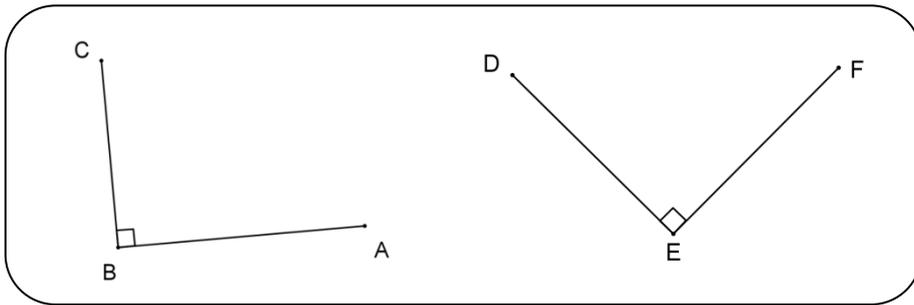
เส้นตรง AB ตัดกับเส้นตรง CD ทำให้เกิดมุม 1 มุม 2 มุม 3 และมุม 4 ดังรูป เรียก มุม 1 และมุม 3 ว่ามุมตรงข้าม (เช่นเดียวกับมุม 2 และมุม 4)

1.7.3) มุมฉาก (Right Angle)

ในสมัยก่อนยังไม่มีระบบของศา ยุคลิได้ให้คำนิยามว่า “เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งและทำให้เกิดมุมประชิดที่เท่ากัน จะเรียกแต่ละมุมว่า **มุมฉาก** และเรียกว่าเส้นตรงเส้นแรกตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นที่สอง ณ จุดที่เส้นแรกตั้งอยู่บนเส้นที่สอง”

ปัจจุบัน “มุมใดๆ ที่มีขนาดหนึ่งมุมฉาก หรือ 90 องศา หรือ 90° เรียกว่า **มุมฉาก**”

เช่น

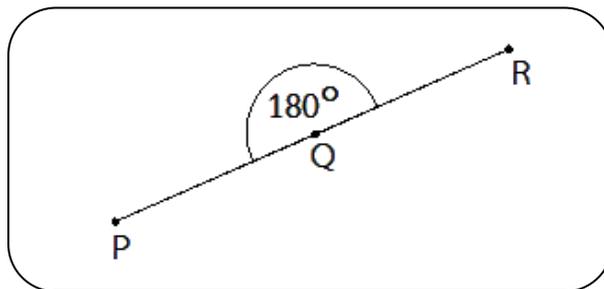


รูปที่ 24 ตัวอย่างการเขียนมุมฉาก

1.7.4) มุมตรง (Straight Angle)

ในสมัยก่อนไม่มีการระบุว่ามุมตรงคืออะไร แต่เป็นที่รู้กันว่ามุมตรง คือ มุมของเส้นตรง หรือ มุมที่มีขนาดเท่ากับสองมุมฉาก ปัจจุบันได้ให้บทนิยามว่า “มุมใดๆ ที่มีขนาดสองมุมฉาก หรือ 180 องศา หรือ 180° เรียกว่า **มุมตรง**”

เช่น



รูปที่ 25 ตัวอย่างการเขียนมุมตรง PQR

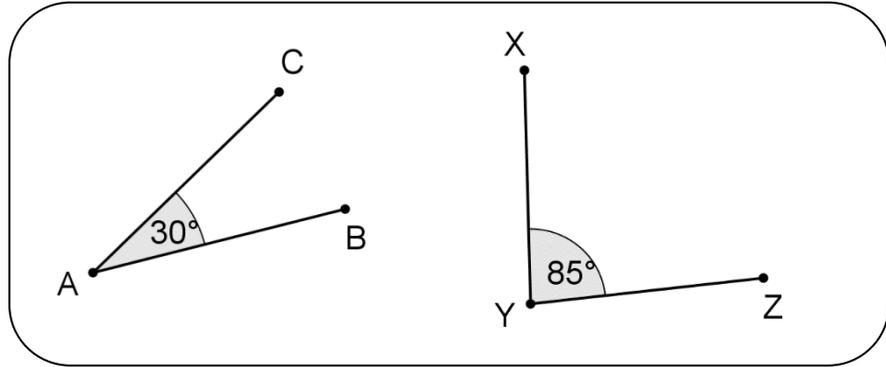
จากรูป มุม PQR มีขนาด 180° เรียกมุม PQR ว่าเป็นมุมตรง

1.7.5 มุมแหลม (Acute Angle)

ในสมัยก่อนคล้ายกับปัจจุบันคือ “มุมแหลม คือ มุมที่เล็กกว่ามุมฉาก”

ปัจจุบัน “มุมใดๆ ที่มีขนาดเล็กกว่า หนึ่งมุมฉาก หรือ 90 องศา หรือ 90° เรียกว่า **มุมแหลม**”

เช่น



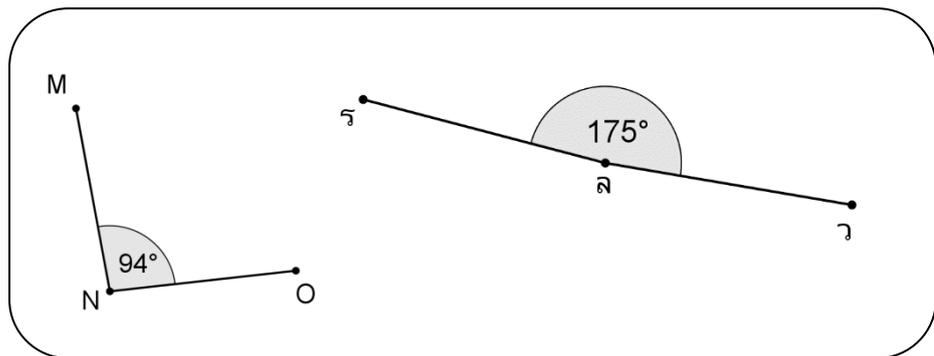
รูปที่ 26 ตัวอย่างการเขียนมุมแหลม

มุม BAC มีขนาด 30° ซึ่งเล็กกว่า 90° เรียกมุม BAC ว่าเป็นมุมแหลมและมุม XYZ มีขนาด 85° ซึ่งเล็กกว่า 90° เรียกมุม XYZ ว่าเป็นมุมแหลมเช่นกัน

1.7.6 มุมป้าน (Obtuse Angle)

ในสมัยก่อนมุมป้าน คือ มุมที่โตกว่ามุมฉาก จะเห็นได้ว่าความหมายจะรวมถึงมุมกลับในปัจจุบันด้วย ปัจจุบัน “มุมใดๆ ที่มีขนาดใหญ่กว่าหนึ่งมุมฉาก หรือ 90 องศา หรือ 90° แต่เล็กกว่าสองมุมฉาก หรือ 180 องศา หรือ 180° เรียกว่า **มุมป้าน**”

เช่น



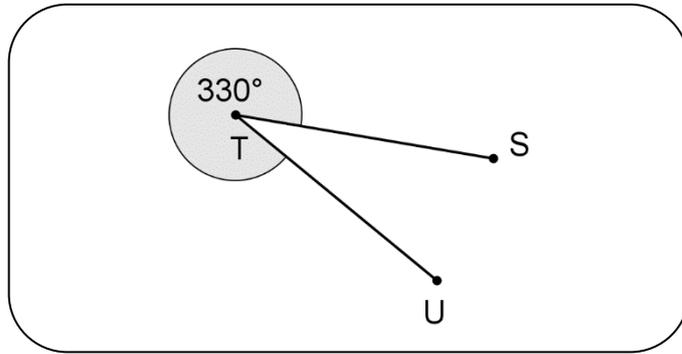
รูปที่ 27 ตัวอย่างการเขียนมุมป้าน

มุม MNO มีขนาด 94° ซึ่งใหญ่กว่า 90° แต่เล็กกว่า 180° เรียกมุม MNO ว่าเป็นมุมป้าน และมุม รลว มีขนาด 175° ซึ่งใหญ่กว่า 90° แต่เล็กกว่า 180° เรียกมุม รลว ว่าเป็นมุมป้านเช่นกัน

1.7.7) มุมกลับ (Reflex Angle)

ในสมัยก่อนยุคคิดไม่ได้ให้นิยามมุมกลับไว้ แต่ให้ความหมายรวมอยู่กับมุมป้าน
ปัจจุบัน “มุมใดๆ ที่มีขนาดใหญ่กว่า สองมุมฉาก หรือ 180 องศา หรือ 180° เรียกว่า **มุมกลับ**”

เช่น



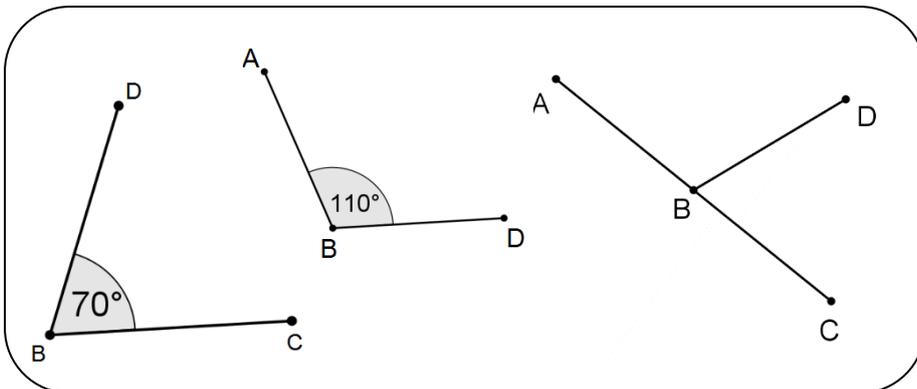
รูปที่ 28 ตัวอย่างการเขียนมุมกลับ

จากรูป มุม STU มีขนาด 330° ซึ่งใหญ่กว่า 180° เรียกมุม STU ว่าเป็นมุมกลับ

1.7.8) มุมประกอบสองมุมฉาก (Supplementary Angle)

มุมสองมุมที่มีขนาดบวกกัน หรือรวมกันได้ สองมุมฉาก หรือ 180 องศา หรือ 180°
เรียกว่า **มุมประกอบสองมุมฉาก**

เช่น



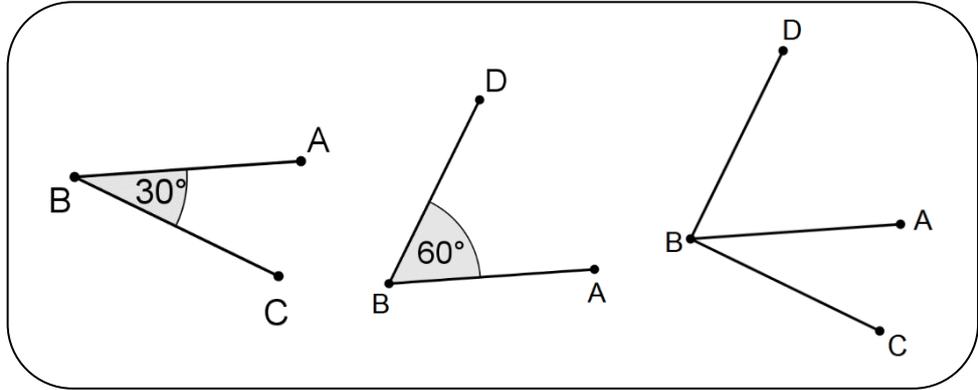
รูปที่ 29 ตัวอย่างมุมประกอบสองมุมฉาก

มุม ABD มีขนาด 110° และมุม DBC มีขนาด 70° ซึ่งรวมกันได้ 180° เรียกมุม ABD และ
มุม DBC ว่าเป็นมุมประกอบสองมุมฉาก หรือเมื่อ AC เป็นส่วนของเส้นตรง มุม ABD และมุม
DBC ซึ่งเป็นมุมประชิด แต่รวมกันได้ 180° เรียก มุม ABD และมุม DBC ว่าเป็นมุมประกอบสอง
มุมฉากเช่นกัน

1.7.9) มุมประกอบมุมฉาก (Complementary Angle)

มุมสองมุมที่มีขนาดบวกกัน หรือรวมกันได้ หนึ่งมุมฉาก หรือ 90 องศา หรือ 90° พอดี

เรียกว่า มุมประกอบมุมฉาก เช่น



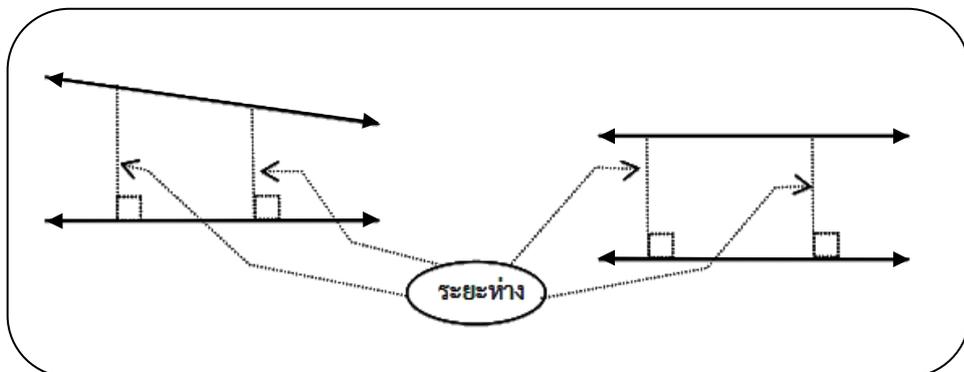
รูปที่ 30 ตัวอย่างมุมประกอบมุมฉาก

มุม ABC มีขนาด 30° และมุม DBA มีขนาด 60° ซึ่งรวมกันได้ 90° เรียกมุม ABC และมุม DBA ว่าเป็นมุมประกอบมุมฉาก หรือมุม ABC และมุม DBA ซึ่งเป็นมุมประชิด แต่รวมกันได้ 90° เรียก มุม ABC และมุม DBA ว่าเป็นมุมประกอบมุมฉากเช่นกัน

1.8 เส้นขนาน (Parallel line)

1.8.1) ระยะห่าง

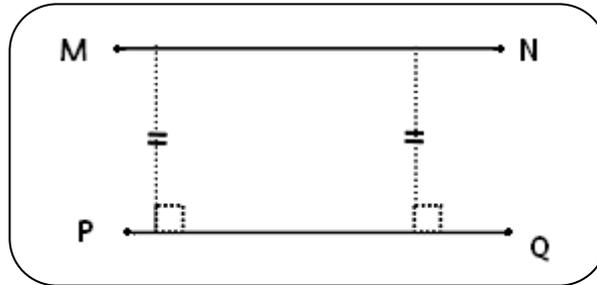
ระยะห่างระหว่างเส้นตรงสองเส้นคือความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ลากตั้งฉากจากเส้นตรงหนึ่งไปยังเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง



รูปที่ 31 ตัวอย่างแสดงระยะห่างเส้นตรงสองเส้น

1.8.2) เส้นขนาน

เส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกันขนานกันก็ต่อเมื่อ
เส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงทั้งสองเส้นมีระยะห่างเท่ากันเสมอ

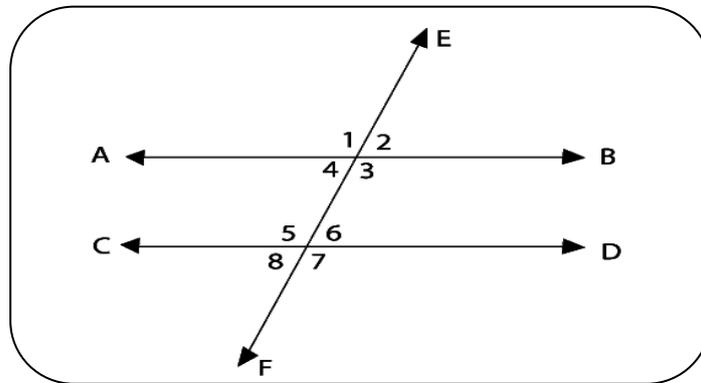


รูปที่ 32 ตัวอย่างเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน

จากภาพ \overline{MN} และ \overline{PQ} อยู่บนระนาบเดียวกันและมีระยะห่างเท่ากัน
ดังนั้น \overline{MN} ขนานกับ \overline{PQ} เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$

1.8.3) มุมแย้ง มุมภายในและมุมภายนอกที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

พิจารณาภาพเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง

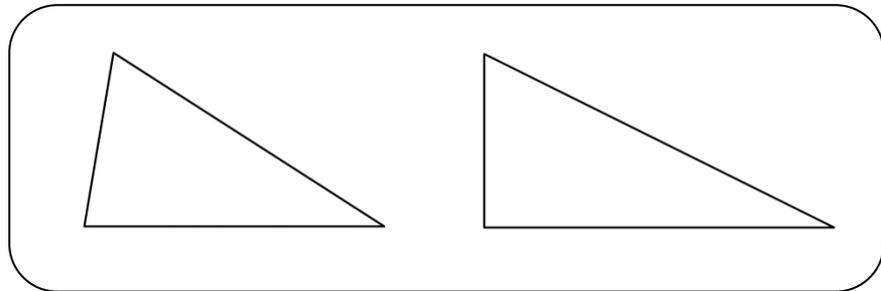


รูปที่ 33 ตัวอย่างมุมแย้ง มุมภายใน และมุมภายนอก

จากรูปจะได้ มุม 1 มุม 4 มุม 5 มุม 8 เป็นมุมที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด
มุม 2 มุม 3 มุม 6 มุม 7 เป็นมุมที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด
มุม 4 กับมุม 5 เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด
มุม 3 กับมุม 6 เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด
มุม 1 กับมุม 8 เป็นมุมภายนอกที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด
มุม 2 กับมุม 7 เป็นมุมภายนอกที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด
มุม 4 แแย้งกับมุม 6 และมุม 3 แแย้งกับมุม 5

1.9 รูปเรขาคณิตสองมิติ (Two-dimensional geometric figure)

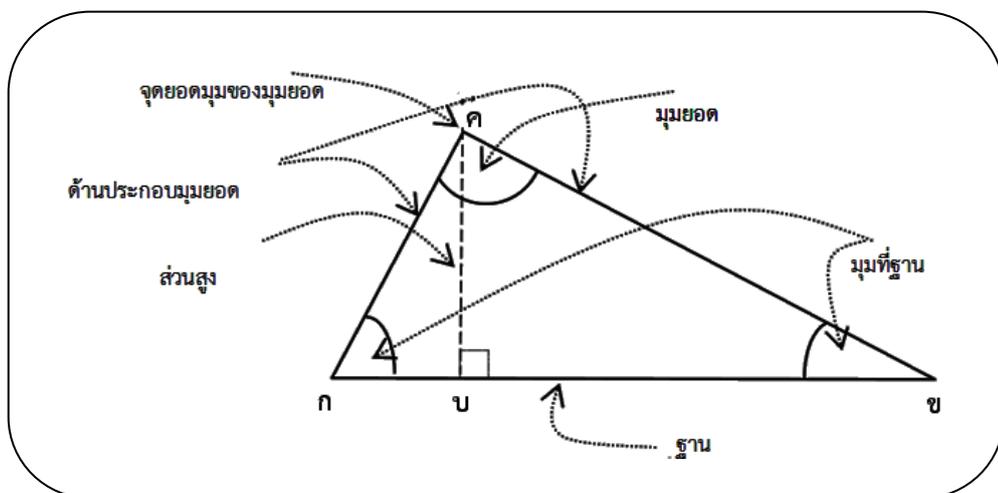
1.9.1) รูปสามเหลี่ยม



รูปที่ 34 ตัวอย่างรูปสามเหลี่ยม

รูปสามเหลี่ยม เป็นรูปปิดที่มีด้านสามด้านมีมุมสามมุมแต่ละมุมของรูปสามเหลี่ยมเรียกว่า มุมภายในของรูปสามเหลี่ยม

ฐาน มุมที่ฐาน มุมยอด จุดยอดมุม และด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม



รูปที่ 35 ตัวอย่างส่วนประกอบของรูปสามเหลี่ยม

- ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้ากำหนดให้ด้านใดด้านหนึ่งเป็นฐานของรูปสามเหลี่ยมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมที่มีฐานเป็นแขนหนึ่งของมุมเรียกว่า **“มุมที่ฐาน”**
- มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมที่อยู่ตรงข้ามกับฐานเรียกว่า **“มุมยอด”**
- ด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมที่ประกบกันเป็นมุมยอดเรียกว่า **“ด้านประกอบมุมยอด”**

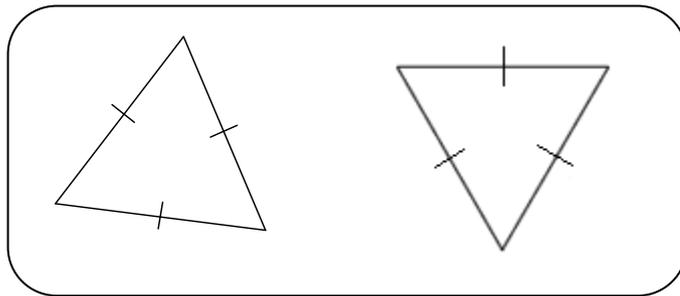
- ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดมุมของมุมยอดมาตั้งฉากกับฐานหรือส่วนที่ต่อออกไปในแนวเดียวกันกับฐานเรียกว่า “**ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม**”

จากรูปถ้าให้ $\overline{กข}$ เป็นฐานของรูปสามเหลี่ยม กขค มุม ก และมุม ข เป็นมุมที่มีฐานเป็นแขนหนึ่งของมุมจึงเรียก มุม ก และมุม ข ว่ามุมที่ฐาน มุม ค เป็นมุมที่อยู่ตรงข้ามกับฐานเรียกว่ามุมยอดและเรียกจุด ค ว่าจุดยอดมุมของมุมยอดด้าน กค และด้าน ขค เป็นด้านที่ประกอบกันเป็นมุมยอดเรียกว่าด้านประกอบมุมยอด และ $\overline{คป}$ ลากจากจุดยอดมุมของมุมยอดมาตั้งฉากกับฐานเรียกว่า “**ส่วนสูง**”

1.9.2) ชนิดของรูปสามเหลี่ยม

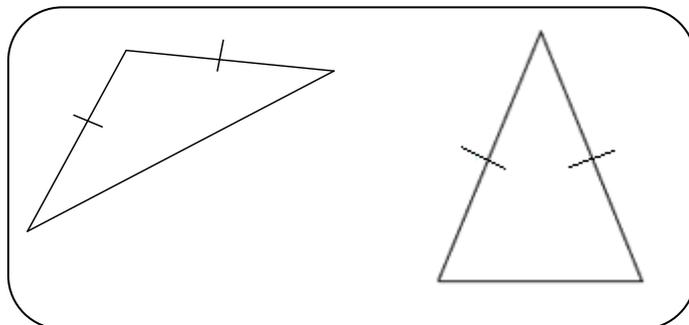
ชนิดของรูปสามเหลี่ยมจำแนกตามลักษณะของด้านได้ 3 ชนิดได้แก่

(1) **รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า** เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามยาวเท่ากัน
เช่น



รูปที่ 36 ตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

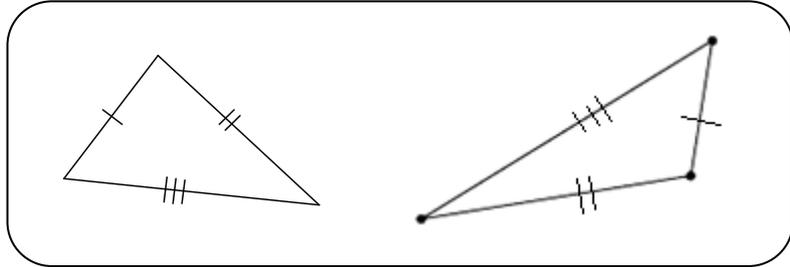
(2) **รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว** เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน
เช่น



รูปที่ 37 ตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

(3) รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า เป็นรูปสามเหลี่ยมที่ด้านทั้งสามยาวไม่เท่ากัน

เช่น

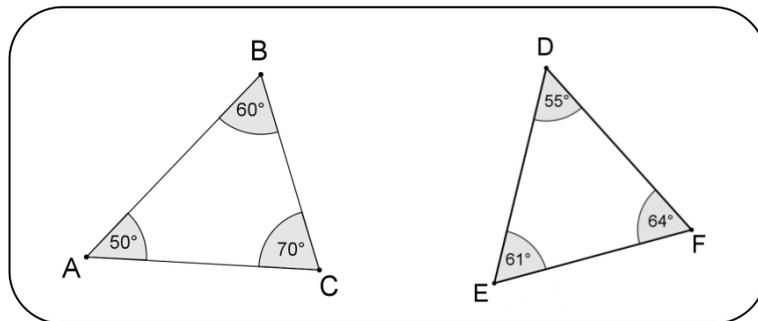


รูปที่ 38 ตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

ชนิดของรูปสามเหลี่ยมจำแนกตามลักษณะของมุมได้ 3 ชนิดได้แก่

(1) รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมทั้งสามเป็นมุมแหลม

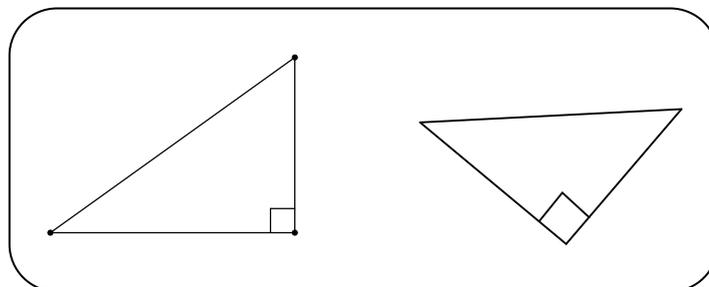
เช่น



รูปที่ 39 ตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม

(2) รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก

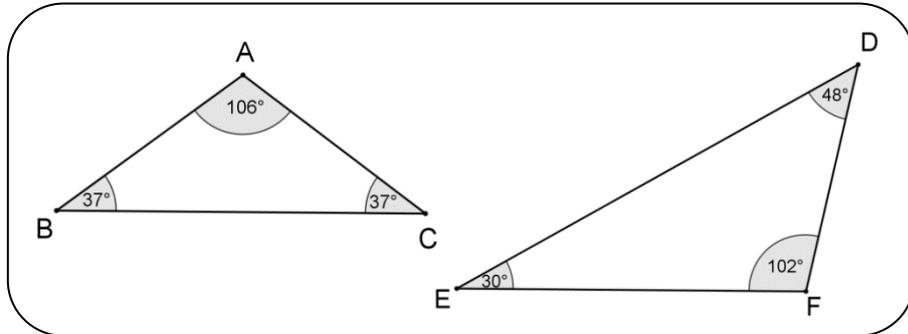
เช่น



รูปที่ 40 ตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

(3) รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งเป็นมุมป้าน

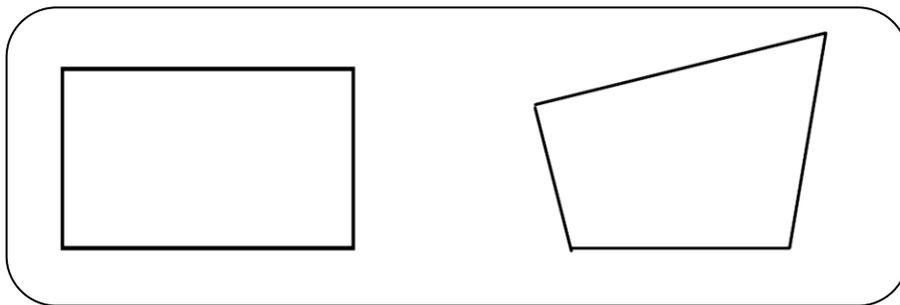
เช่น



รูปที่ 41 ตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

1.9.3) รูปสี่เหลี่ยม

รูปสี่เหลี่ยม เป็นรูปปิดที่มีด้านสี่ด้าน มุมสี่มุม แต่ละมุมเรียกว่ามุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม

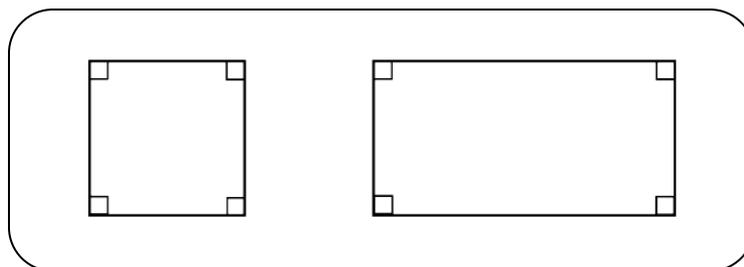


รูปที่ 42 ตัวอย่างรูปสี่เหลี่ยม หรือรูปสี่ด้าน

1.9.4) ชนิดของรูปสี่เหลี่ยม

1) รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

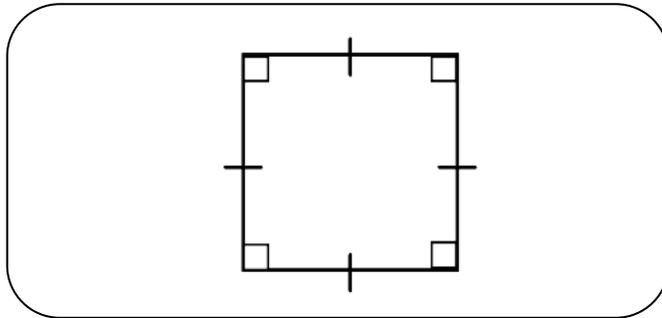
เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทั้งสี่เป็นมุมฉาก



รูปที่ 43 ตัวอย่างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

2) รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

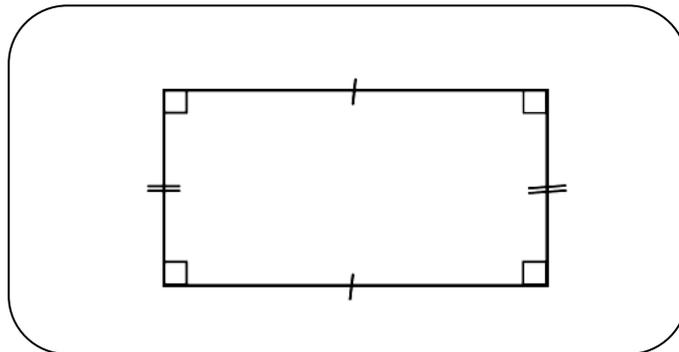
เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน



รูปที่ 44 ตัวอย่างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

3) รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

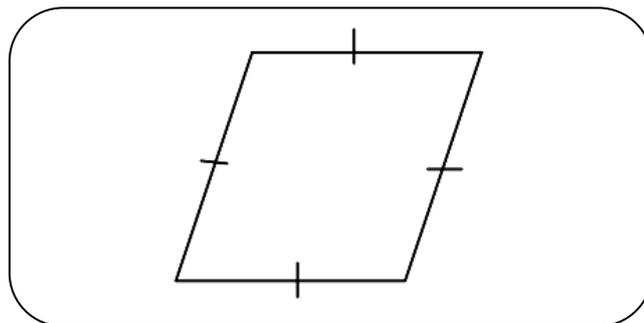
เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันแต่ด้านที่อยู่ติดกันยาวไม่เท่ากัน



รูปที่ 45 ตัวอย่างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

4) รูปสี่เหลี่ยมขนมเปี้ยกปูน

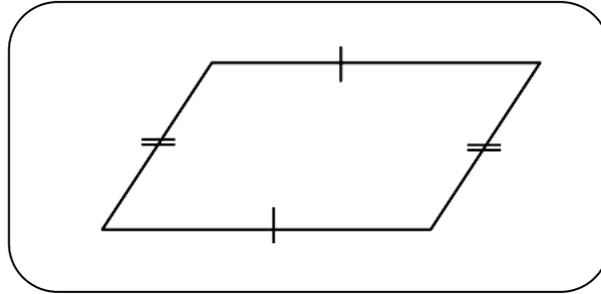
เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ด้านยาวเท่ากัน และมุมแต่ละมุมไม่เป็นมุมฉาก



รูปที่ 46 ตัวอย่างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปี้ยกปูน

5) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

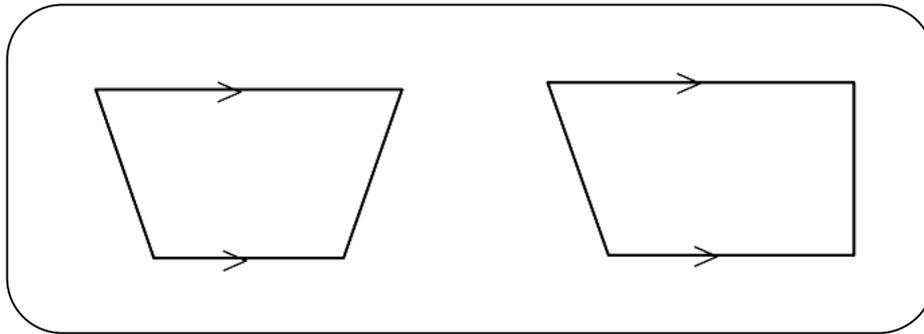
เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันและขนานกันสองคู่



รูปที่ 47 ตัวอย่างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

6) รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

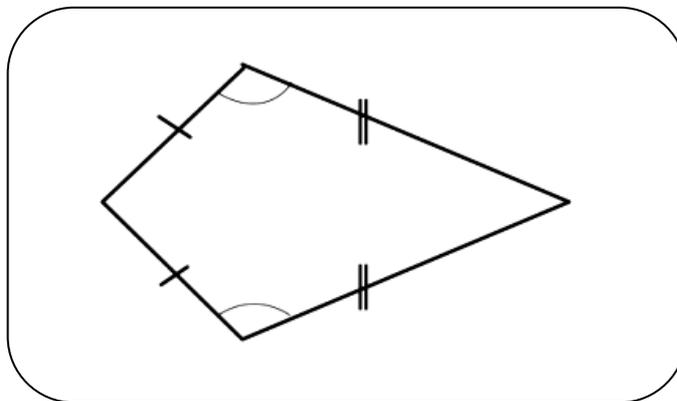
เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันเพียงคู่เดียว



รูปที่ 48 ตัวอย่างรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

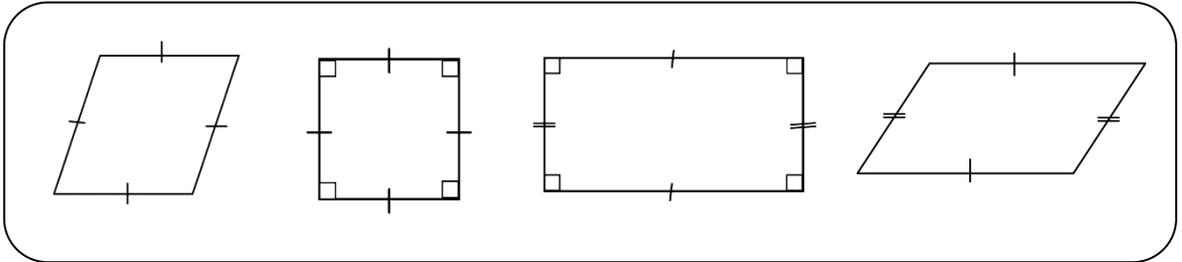
7) รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว

เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านที่อยู่ติดกันยาวเท่ากันสองคู่และมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากันหนึ่งคู่



รูปที่ 49 ตัวอย่างรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว

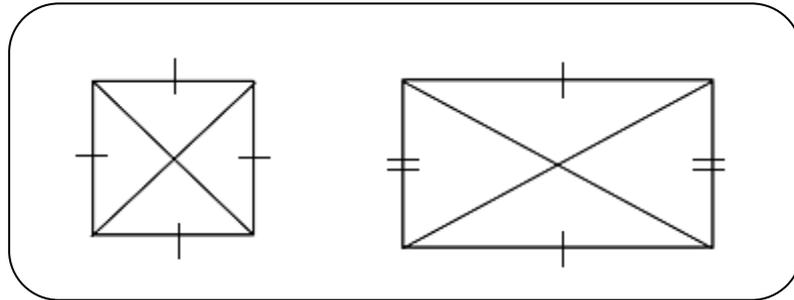
จากที่กล่าวข้างต้น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่เช่นเดียวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน จึงเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานด้วย



รูปที่ 50 ตัวอย่างกลุ่มรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานสองคู่

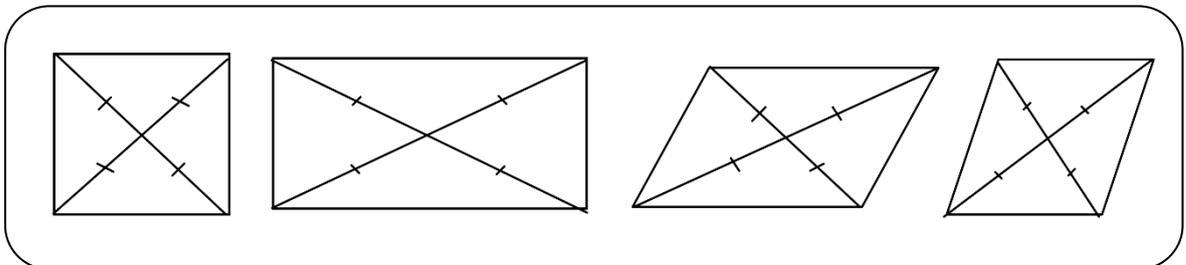
1.9.5) เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม

รูปสี่เหลี่ยมที่เส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน ได้แก่ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



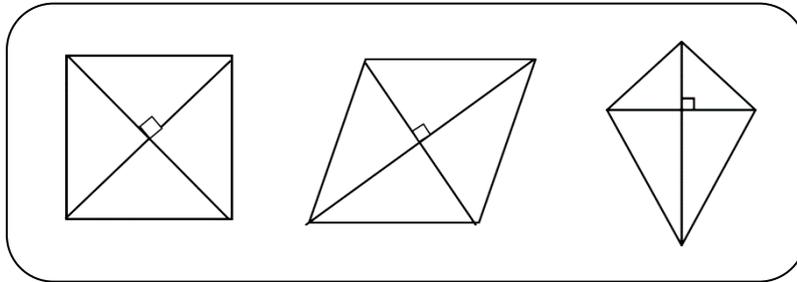
รูปที่ 51 ตัวอย่างเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม

รูปสี่เหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันได้แก่ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน



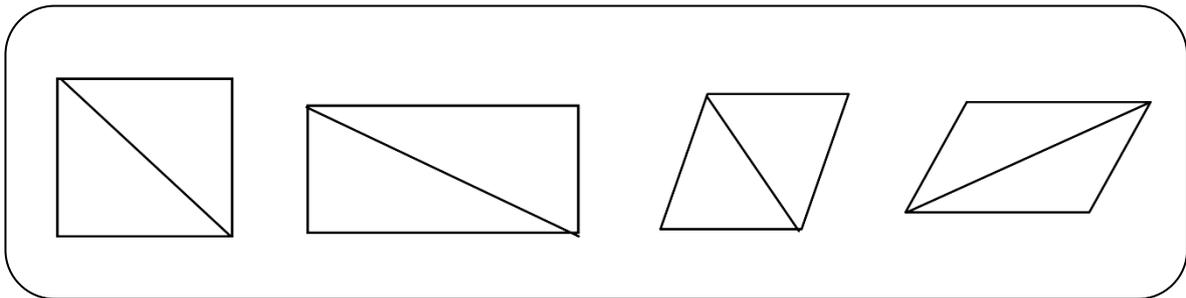
รูปที่ 52 ตัวอย่างรูปสี่เหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

รูปสี่เหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉากได้แก่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน และรูปสี่เหลี่ยมรูปร่าง



รูปที่ 53 ตัวอย่างรูปสี่เหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก

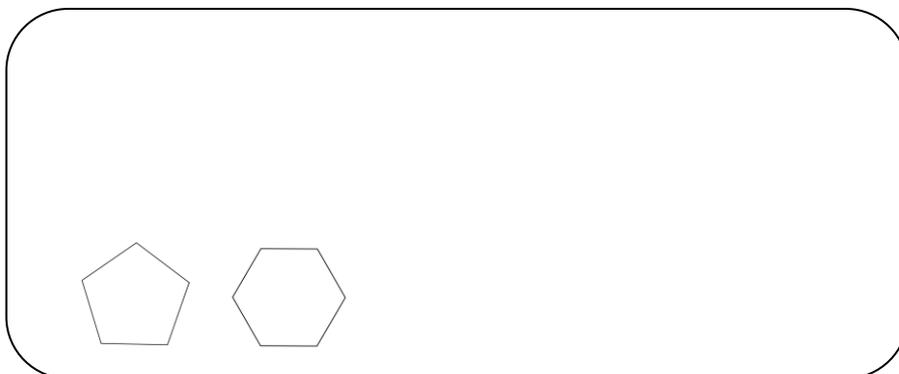
รูปสี่เหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุมแต่ละเส้นแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม
สองรูปเท่ากันได้แก่ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และรูปสี่เหลี่ยม
ขนมเปียกปูน



รูปที่ 54 ตัวอย่างแสดงสมบัติของเส้นทแยงมุม

1.9.6) รูปหลายเหลี่ยม

รูปหลายเหลี่ยม เป็นรูปปิดที่มีด้านมากกว่าสี่ด้านและมีมุมมากกว่าสี่มุม

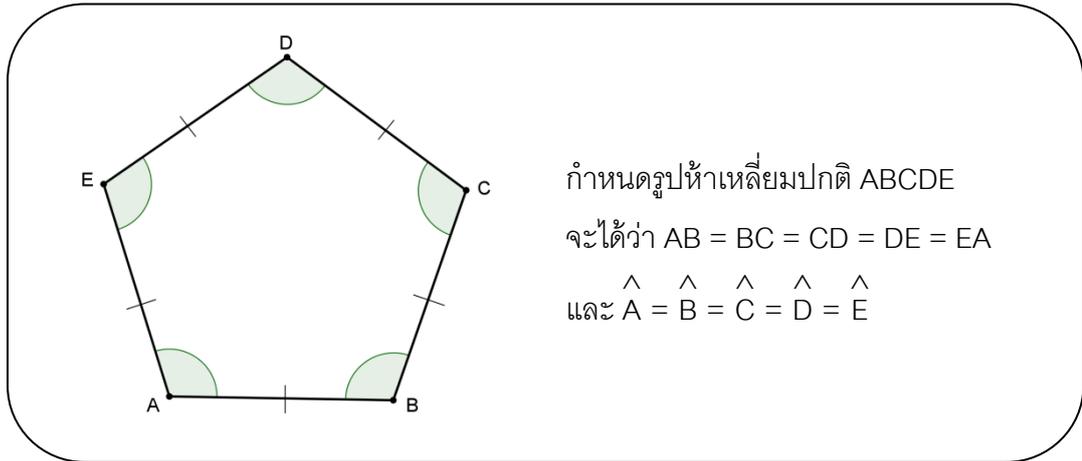


รูปที่ 55 ตัวอย่างรูปหลายเหลี่ยมทางเรขาคณิต

ประเภทของรูปหลายเหลี่ยม

1. รูปหลายเหลี่ยมแบบปกติ

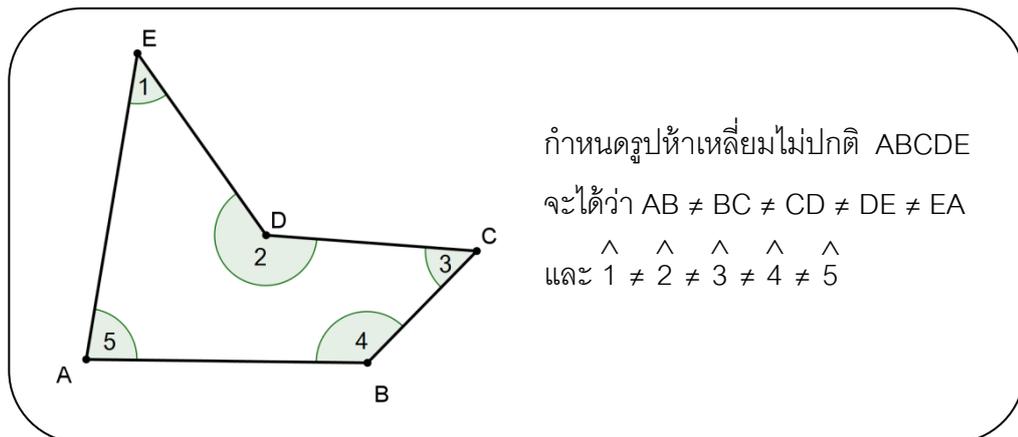
รูปหลายเหลี่ยมแบบปกติ คือรูปปิดที่มีด้านมากกว่าสี่ด้านโดยที่แต่ละด้านยาวเท่ากัน และมีมุมมากกว่าสี่มุมที่แต่ละมุมมีขนาดเท่ากัน เช่น



รูปที่ 56 ตัวอย่างรูปหลายเหลี่ยมแบบปกติ

2. รูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ปกติ

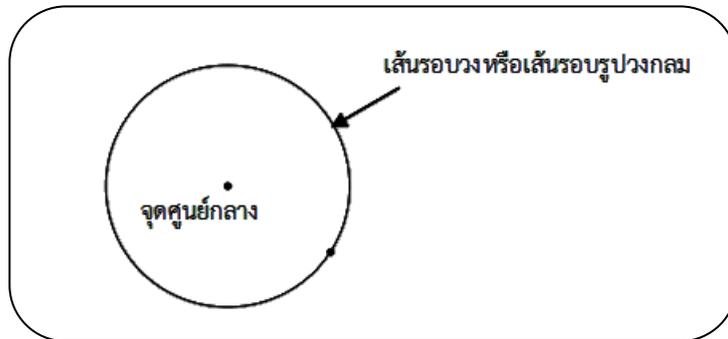
รูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ปกติ คือรูปปิดที่มีด้านมากกว่าสี่ด้านที่ไม่เท่ากัน และมีมุมมากกว่าสี่มุมที่ไม่เท่ากัน เช่น



รูปที่ 57 ตัวอย่างรูปหลายเหลี่ยมแบบไม่ปกติ

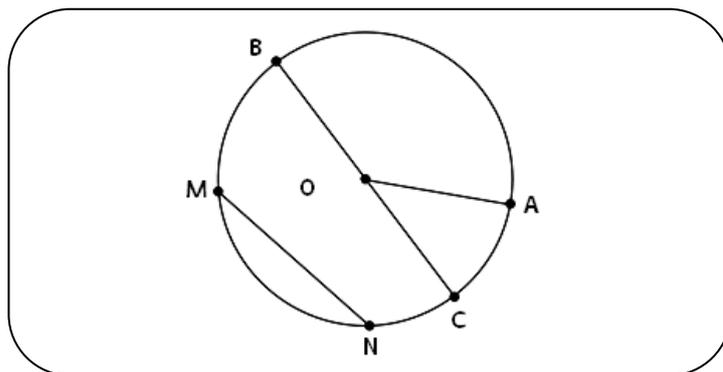
จากที่กล่าวข้างต้นจะเห็นความแตกต่างระหว่างรูปหลายเหลี่ยมปกติ และรูปหลายเหลี่ยมไม่ปกติ

1.9.7) รูปวงกลม



รูปที่ 58 ตัวอย่างรูปวงกลม

รูปบนระนาบที่จุดทุกจุดอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเรียกว่า “รูปวงกลม” ขอบของรูปเรียกว่า “เส้นรอบวง” หรือ “เส้นรอบรูปวงกลม” จุดคงที่เรียกว่า “จุดศูนย์กลาง”



รูปที่ 59 ตัวอย่างส่วนประกอบของรูปวงกลม

การเรียกชื่อรูปวงกลมให้เรียกชื่อตามชื่อของจุดศูนย์กลางของวงกลมจากรูปจุด O เป็นจุดศูนย์กลาง จึงเรียกรูปวงกลมนี้ว่ารูปวงกลม O

ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายข้างหนึ่งเป็นจุดศูนย์กลางและจุดปลายอีกข้างหนึ่งอยู่บนเส้นรอบวงเรียกว่า **รัศมี** ของรูปวงกลมจากรูป \overline{OA} \overline{OB} \overline{OC} เป็นรัศมี

ในรูปวงกลมเดียวกันสามารถเขียนรัศมีได้หลายเส้นแต่ละเส้นมีความยาวเท่ากันหรือรัศมีของรูปวงกลมเดียวกันยาวเท่ากันเสมอ

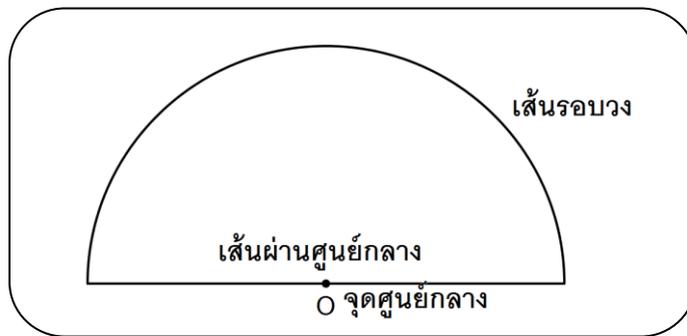
ส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางและมีจุดปลายทั้งสองข้างอยู่บนเส้นรอบวง เรียกว่า **เส้นผ่านศูนย์กลาง** ของรูปวงกลมจากรูป \overline{BC} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางในรูป

วงกลมเดียวกันสามารถเขียนเส้นผ่านศูนย์กลางได้หลายเส้น แต่ละเส้นมีความยาวเท่ากันหรือเส้นผ่านศูนย์กลางของรูปวงกลมเดียวกันยาวเท่ากันเสมอ

ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองข้างอยู่บนเส้นรอบวงเรียกว่า **คอร์ด** จากรูป \overline{MN} เป็นคอร์ด ในรูปวงกลมเดียวกันสามารถเขียนคอร์ดได้หลายเส้นคอร์ดที่ยาวที่สุดของรูปวงกลม คือเส้นผ่านศูนย์กลางของรูปวงกลมวงนั้น

ในรูปวงกลมเดียวกันเส้นผ่านศูนย์กลางมีความยาวเป็นสองเท่าของความยาวรัศมีหรือรัศมีมีความยาวเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวเส้นผ่านศูนย์กลาง

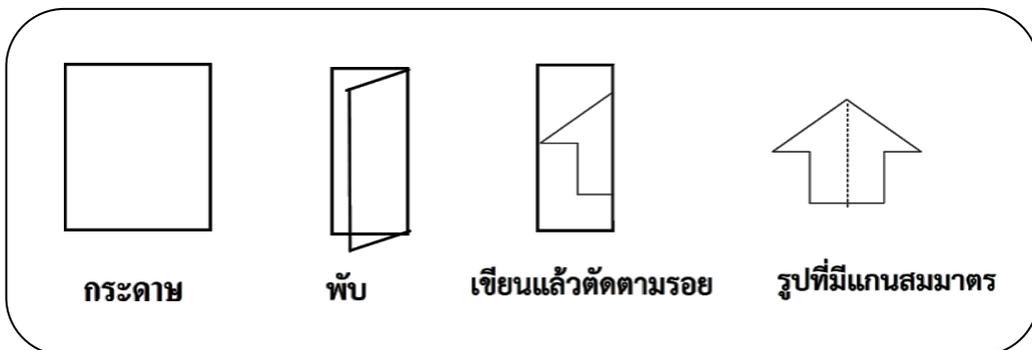
1.9.8) รูปครึ่งวงกลม



รูปที่ 60 ตัวอย่างส่วนประกอบของรูปครึ่งวงกลม

รูปครึ่งวงกลม คือรูปที่ประกอบด้วยเส้นผ่านศูนย์กลางและเส้นรอบวงที่ถูกตัดโดยเส้นผ่านศูนย์กลาง จุดศูนย์กลางของครึ่งวงกลม คือจุดศูนย์กลางของวงกลมเดิม

1.9.9) รูปที่มีแกนสมมาตร



รูปที่ 61 ตัวอย่างรูปที่มีแกนสมมาตร

“รูปที่พับแล้วแต่ละข้างของรอยพับทับกันสนิทเรียกว่ารูปที่มีแกนสมมาตร และเรียกรอยพับว่า **แกนสมมาตร**”

2. สัจพจน์ของยุคลิด (Euclid's Axiom or Euclid's Postulate)

ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 เกี่ยวกับระบบสัจพจน์ จะเห็นว่าสัจพจน์นั้นเป็นเสมือนกฎหรือกติกาศึกษาที่นักคณิตศาสตร์จะต้องดำเนินการตามกฎต่างๆ เหล่านั้น โดยต้องยอมรับว่ากฎ หรือกติกาต่างๆ เหล่านั้นถูกต้องเสมอ เช่นเดียวกันกับเรขาคณิตในระบบยุคลิดก็จะมีระบบสัจพจน์เป็นตัวกำหนดเช่นเดียวกัน ประกอบไปด้วยสัจพจน์ทั้งหมด 5 ข้อ ดังนี้

P-1. สามารถลากเส้นตรงจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งได้เสมอ

P-2. กำหนดส่วนเส้นตรงเส้นหนึ่ง สามารถลากต่อเส้นตรงดังกล่าวให้มีความยาวไม่จำกัด

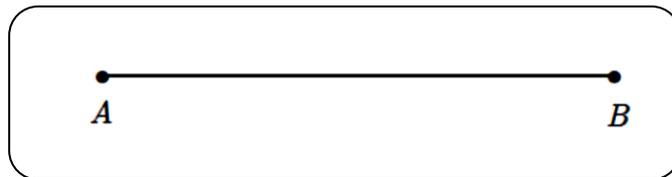
P-3. วงกลมสามารถสร้างได้จากจุดศูนย์กลางและระยะซึ่งเป็นรัศมีเสมอ

P-4. มุมที่ต่างก็เป็นมุมฉากย่อมเท่ากัน

P-5. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งทำให้มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันน้อยกว่าสองมุมฉาก และถ้าต่อเส้นทั้งสองดังกล่าวออกไป เส้นทั้งสองจะพบกันทางด้านที่มีมุมรวมกันน้อยกว่าสองมุมฉาก

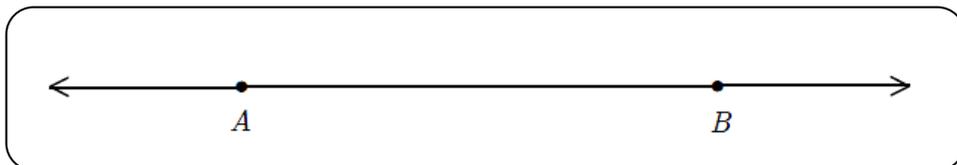
ตัวอย่าง 1 สัจพจน์ของยุคลิด

P-1 กำหนดจุด A และ จุด B เป็นจุด 2 จุดที่แตกต่างกัน จะได้



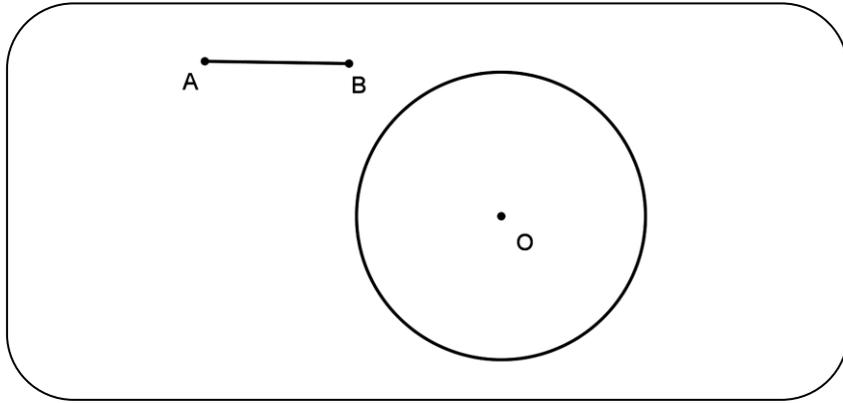
รูปที่ 62 ตัวอย่างสัจพจน์ข้อที่ 1

P-2 กำหนดส่วนของเส้นตรง AB จะได้



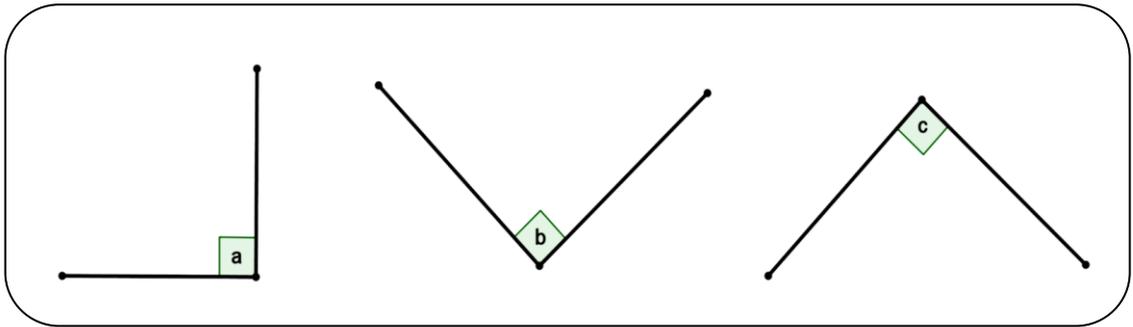
รูปที่ 63 ตัวอย่างสัจพจน์ข้อที่ 2

P-3 กำหนดจุด O และกำหนดระยะทาง AB จะได้



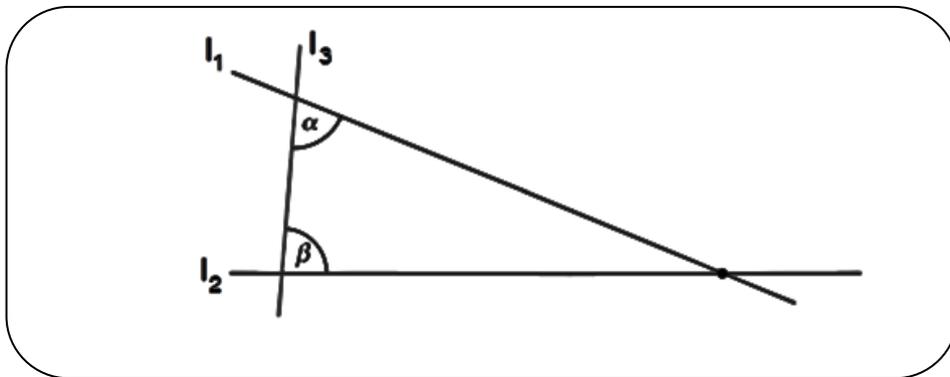
รูปที่ 64 ตัวอย่างสัจพจน์ข้อที่ 3

P-4 กำหนดให้ มุม a b และ c ต่างก็เป็นมุมฉาก จะได้



รูปที่ 65 ตัวอย่างสัจพจน์ข้อที่ 4

P-5 กำหนดเส้นตรง l_1, l_2, l_3 โดยให้ l_3 ตัด l_1 และ l_2 และ $\alpha + \beta < 180^\circ$ จะได้



รูปที่ 66 ตัวอย่างสัจพจน์ข้อที่ 5

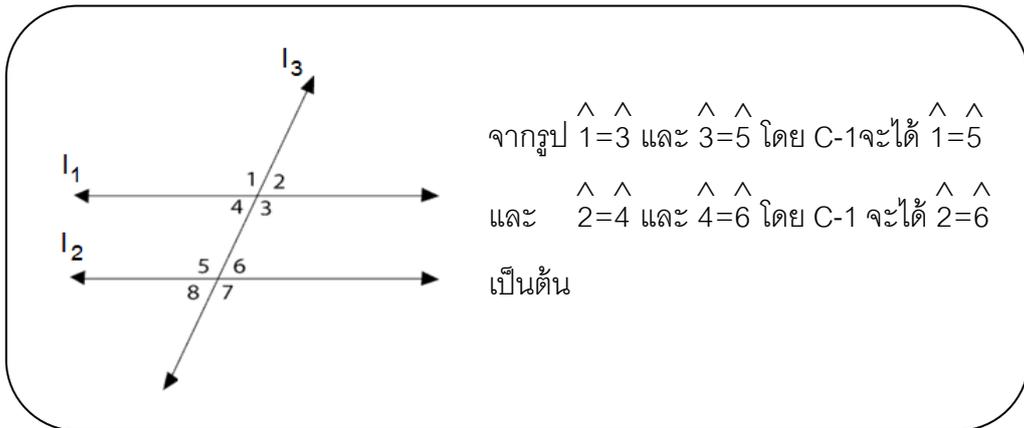
3. สิ่งที่เราเห็นจริงแล้ว (Common Notions)

สิ่งที่ปรากฏในการเขียนเรขาคณิตในระบบยุคลิดนั้นก็คือคำว่า “สิ่งที่เห็นจริงแล้ว” ซึ่งเป็นคำที่ทำหน้าที่คล้ายๆ กับสัจพจน์ แต่แตกต่างกับสัจพจน์ เปรียบเสมือนข้อสรุปร่วมกันที่เราเชื่อมั่นเป็นจริง โดยเป็นข้อสรุปที่พบจากการสังเกตแล้วสร้างออกมาเป็นกฎ มีด้วยกัน 5 ข้อ

- C-1. สิ่งที่เราเท่ากับสิ่งเดียวกันย่อมเท่ากัน
- C-2. สิ่งที่เราเท่ากันบวกด้วยสิ่งที่เท่ากันผลย่อมเท่ากัน
- C-3. สิ่งที่เราเท่ากันหักออกด้วยสิ่งที่เท่ากันผลย่อมเท่ากัน
- C-4. สิ่งที่เราทับกันสนิทย่อมเท่ากัน
- C-5. ส่วนรวมย่อมใหญ่กว่าส่วนย่อย

ตัวอย่าง 2 สิ่งที่เราเห็นจริงแล้ว

C-1. กำหนดให้ $l_1 \parallel l_2$ และมี l_3 เป็นเส้นตัดเส้นตรงคู่ที่ขนานกัน เกิดมุม 1 2 3 4 5 6 7 และ 8



รูปที่ 67 ตัวอย่างแสดงสิ่งที่เห็นจริงแล้วข้อที่ 1-3

C-2. จากรูปข้างบน เราทราบว่า $\hat{1} = \hat{3}$ จะได้ว่า $\hat{1} + \hat{2} = \hat{3} + \hat{2} = 180^\circ$ ในทำนองเดียวกัน

เราทราบว่า $\hat{2} = \hat{4}$ จะได้ว่า $\hat{2} + \hat{3} = \hat{4} + \hat{3} = 180^\circ$

C-3. จากรูปข้างบน เราทราบว่า $\hat{1} + \hat{2} = \hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$ แต่ $\hat{1} = \hat{3}$ จะได้ $\hat{2} = \hat{4}$

ในทำนองเดียวกัน เราทราบว่า $\hat{5} + \hat{6} = \hat{8} + \hat{7} = 180^\circ$ แต่ $\hat{5} = \hat{7}$ จะได้ $\hat{6} = \hat{8}$

C-4. กำหนด ΔABC และ ΔDEF ยกทั้งสองรูปมาทับกันสนิทโดยให้ จุด A ทับสนิทกับจุด D จุด B ทับสนิทกับจุด E และ จุด C ทับสนิทกับจุด F ดังรูป

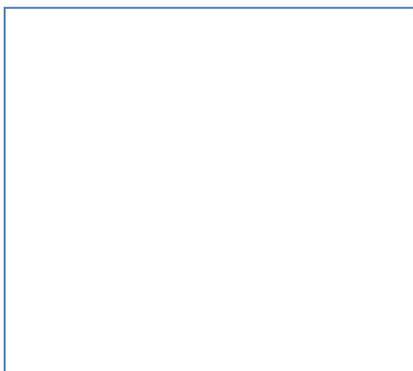


รูปที่ 68 ตัวอย่างแสดงสิ่งที่เห็นจริงแล้วข้อที่ 4

จากรูปจะเห็นว่า จุด A ทับสนิทกับจุด D และจุด B ทับสนิทกับจุด E และจุด C ทับสนิทกับจุด F

จะได้	\overline{AB} ทับสนิทกับ \overline{DE}	นั่นคือ $AB = DE$
และ	\overline{BC} ทับสนิทกับ \overline{EF}	นั่นคือ $BC = EF$
และ	\overline{AC} ทับสนิทกับ \overline{DF}	นั่นคือ $AC = DF$
นั่นคือ	มุม A ทับสนิทกับมุม D	นั่นคือ $\hat{A} = \hat{D}$
และ	มุม B ทับสนิทกับมุม E	นั่นคือ $\hat{B} = \hat{E}$
และ	มุม C ทับสนิทกับมุม F	นั่นคือ $\hat{C} = \hat{F}$ เป็นต้น

C-5 กำหนดมุม ABC และส่วนของเส้นตรง BD แบ่งมุม ABC ดังรูป



กำหนดมุม ABC และส่วนของเส้นตรง BD แบ่งมุม ABC

จะได้มุม DBC และ มุม ABD

โดยที่ $\hat{ABC} = \hat{ABD} + \hat{DBC}$ จะเห็นว่ามุม DBC และ

มุม ABD ต่างก็เป็นมุมย่อยของมุม ABC

ดังนั้น $\hat{ABC} > \hat{ABD}$ และ $\hat{ABC} > \hat{DBC}$

นั่นคือ “ส่วนรวมย่อมใหญ่กว่าส่วนย่อย”

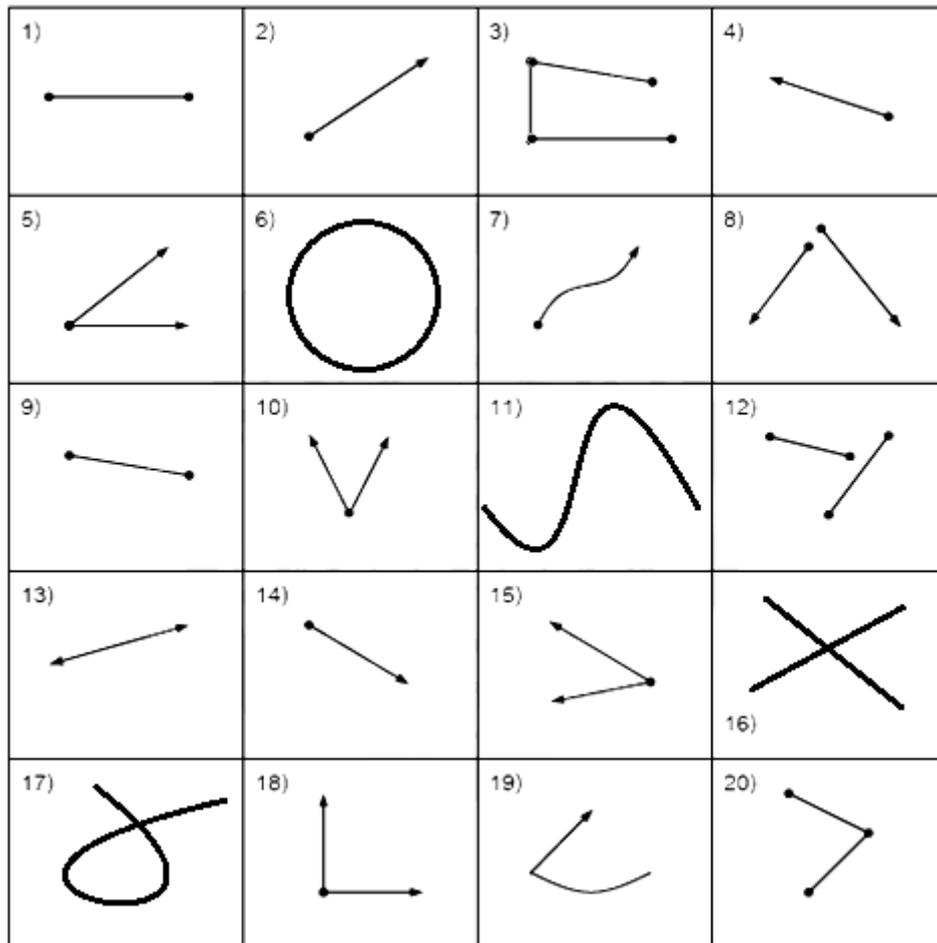
รูปที่ 69 ตัวอย่างแสดงสิ่งที่เห็นจริงแล้วข้อที่ 5

สรุป

ในบทที่ 3 กล่าวถึงความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตที่ผู้ศึกษาจำเป็นต้องทราบ ได้แก่ บทนิยาม และอนิยามต่างๆ ทางเรขาคณิต เช่น จุด เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง รัศมี มุม ประเภทของมุม(มุมแหลม มุมฉาก มุมป้าน) ชนิดของรูปสามเหลี่ยม (รูปสามเหลี่ยมจัตุรัส รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า) ชนิดของรูปสี่เหลี่ยม (รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมขนมเปี้ยกปูน รูปสี่เหลี่ยมคางหมู เป็นต้น) สัจพจน์ในระบบยุคลิด และสิ่งที่เห็นจริงแล้ว เป็นความรู้ที่จำเป็นต่อการนำไปใช้ในการศึกษาวิชาเรขาคณิต และนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิตในบทที่ 5

คำถามท้ายบทที่ 3

- 1) เมื่อกำหนดจุด 1 จุด บนระนาบ สามารถลากเส้นตรงผ่านจุดได้กี่เส้น
- 2) เมื่อกำหนดจุด 2 จุด บนระนาบ สามารถลากเส้นตรงผ่านจุดได้กี่เส้น
- 3) ลากเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน จะเกิดจุดตัดได้ทั้งหมดกี่จุด
- 4) จากรูปที่กำหนดให้



- 1) รูปที่เป็นส่วนของเส้นตรงได้แก่
- 2) รูปที่เป็นรังสีได้แก่
- 3) รูปที่เป็นมุมได้แก่
- 4) รูปที่เป็นเส้นตรงได้แก่
- 5) ให้นักศึกษาทำการวิเคราะห์เปรียบเทียบความแตกต่างของ เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง และรังสี

- 6) ให้นักศึกษาทำการวิเคราะห์สมบัติของรูปสามเหลี่ยมแต่ละชนิด
- 7) ให้นักศึกษาทำการวิเคราะห์สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมแต่ละชนิด
- 8) บอกส่วนประกอบของรูปวงกลม และอธิบายความสัมพันธ์ของส่วนประกอบในรูปวงกลม
- 9) ให้นักศึกษายกตัวอย่างสิ่งที่เห็นจริงแล้ว ที่พบในการเรียนคณิตศาสตร์

เอกสารอ้างอิง

- โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอน. (2553). *เรขาคณิต*. กรุงเทพฯ: ด้านสุทธาการพิมพ์.
- จิราพร พรายมณี. (2555). เอกสารประกอบการสอนวิชา. *เรขาคณิต*. กรุงเทพฯ.
- ฉวีวรรณ แก้วไทรสะ. (2542). *เรขาคณิตตามแนวคิดทางเซต*. กรุงเทพฯ: ศูนย์การพิมพ์ สถาบันราชภัฏสวนสุนันทา.
- วัฒนา เถาว์ทิพย์. (2554). เอกสารประกอบการบรรยาย. *วิชาเรขาคณิต*. ขอนแก่น: มหาวิทยาลัยขอนแก่น.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2553). *เอกสารสำหรับผู้รับการอบรมโครงการอบรมครูด้วยระบบทางไกล กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา หลักสูตรมาตรฐานการอบรมครู ปีที่ 3*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สิริวรรณ ตั้งจิตพัฒนกุล. (2538). *รากฐานเรขาคณิต*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- HALL, H.S. & STEVENS, F.H. (2419). *A TEXT-BOOK OF EUCLID'S ELEMENTS*. London: O. J. CLAY, M.A. & SONS, AT THE UNIVERSITY PRESS.