ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ลิมิตของฟังก์ชัน (The limit of a function)

ลิมิตของฟังก์ชันเป็นพื้นฐานที่สำคัญอย่างยิ่งในวิชาแคลคูลัส เพื่อจะให้เข้าใจได้ง่ายขึ้นก่อนที่จะนิยามแนวคิดของลิมิต จะพิจารณาตัวอย่างที่จะนำไปสู่ความเข้าใจความหมายเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันดังนี้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x)=2x^2+1$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ มีค่าเป็นอย่างไร เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 มาก ๆ

วิธีทำ สร้างตารางแสดงค่าของ $f(x)$ สำหรับ x บางค่าที่น้อยกว่า 3 แต่มีค่าใกล้ ๆ 3

x	2.9	2.99	2.999	...
$f(x)=2x^2+1$	17.82	18.8802	18.98802	...

จากตารางจะเห็นว่า เมื่อ x ที่น้อยกว่า 3 ยิ่งมีค่าเพิ่มขึ้นใกล้ ๆ 3 แล้ว $2x^2+1$ มีค่าเข้าใกล้ ๆ 19 เราจะกล่าวว่า 19 เป็นลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางซ้ายมือ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} 2x^2+1 = 19$$

แล้วสร้างตารางแสดงค่าของ $f(x)$ สำหรับ x บางค่าที่มากกว่า 3 แต่มีค่าใกล้ ๆ 3 เหมือนกัน

x	3.1	3.01	3.001	...
$f(x)=2x^2+1$	20.22	19.1202	19.012002	...

จากตารางจะเห็นว่า เมื่อ x ที่มากกว่า 3 ยังมีค่าน้อยลงใกล้ ๆ 3 แล้ว $2x^2+1$ มีค่าเข้าใกล้ ๆ 19 เราจะกล่าวว่า 19 เป็นลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางขวามือ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 2x^2+1 = 19$$

ลิมิตด้านเดียว (One – sided limits)

จากตัวอย่าง 1.1.1 เราอาจให้ความหมายของลิมิตด้านเดียวของฟังก์ชันได้ดังนี้

1. **ลิมิตซ้าย (Left – hand limits)**

กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ และ a เป็นจำนวนจริง กล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายมือ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง L ที่ทำให้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายมือ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

2. **ลิมิตขวา (Right – hand limits)**

กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ และ a เป็นจำนวนจริง กล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวามือ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง L ที่ทำให้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทางขวามือ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ x+1 & , x \ge 2 \end{cases}$

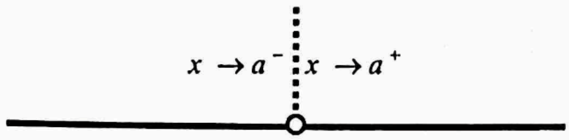
จงหา 1. $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ 2. $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x < 1 \\ 4 & , x = 1 \\ 5 & , x > 1 \end{cases}$

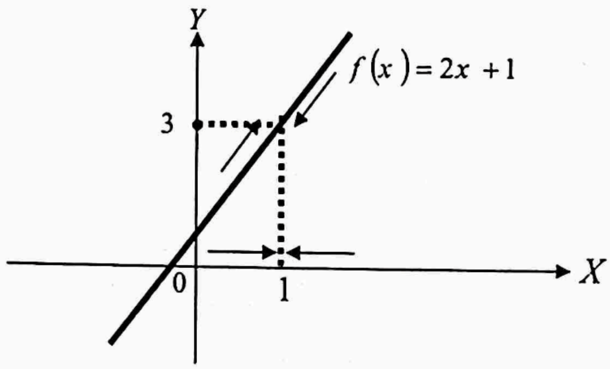
จงหา 1. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ 2. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

ลิมิตสองด้าน

เป็นการพิจารณาค่าของ $f(x)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ a โดยที่ " เข้าใกล้ a " ในที่นี้หมายถึงเข้าใกล้ทั้งสองด้านคือ ด้านซ้ายมือของ a และด้านขวามือของ a



เช่น กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 1$ เป็นกราฟเส้นตรง ดังรูป



จากกราฟของ $f(x)$ จะพบว่า

ถ้า $x \to 1^-$ แล้วจะได้ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$

ถ้า $x \to 1^+$ แล้วจะได้ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$

จากลักษณะดังกล่าวนี้กล่าวได้ว่า ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ 1 มีค่าเท่ากับ 3 ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

(สัญลักษณ์ $x \to 1$ หมายถึง x เข้าใกล้ 1 ทั้ง 2 ด้าน)

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \ , x \le 0 \\ \dfrac{1}{2}x + 1, x > 0 \end{cases}$

จงหา 1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

ตัวอย่าง กำหนด $f(x)=3x-2$ เมื่อ $x \in R$ และ $g(x)=\dfrac{3x^2-8x+4}{x-2}$ เมื่อ $x \in R$ และ $x \neq 2$

จงหา 1. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

ตัวอย่าง กำหนด $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1} & , x \neq 1 \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$

จงหา 1. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ 3. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

ทฤษฎีลิมิต (Theorems on limits)

กำหนดให้ a, c, A, B เป็นจำนวนจริง ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x\to a} f(x) = A$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = B$ แล้ว

1. $\lim_{x\to a} c = c$

2. $\lim_{x\to a} x = a$

3. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะ

4. $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x) = cA$

5. $\lim_{x\to a} cx^n = ca^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะ

6. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = A+B$

7. $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = A-B$

8. $\lim_{x\to a}\left[c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0\right] = c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0$

9. $\lim_{x\to a}[f(x)\bullet g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \bullet \lim_{x\to a} g(x) = A \bullet B$

10. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$ เมื่อ $B \neq 0$

11. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = A^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะ

12. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$ เมื่อ $\sqrt[n]{A}$ เป็นจำนวนจริง

13. $\lim_{x\to a}[f(x)]^{\frac{m}{n}} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\frac{m}{n}} = A^{\frac{m}{n}}$ เมื่อ $\sqrt[n]{A}^{\,m}$ เป็นจำนวนจริง

หมายเหตุ ทฤษฎีดังกล่าวเป็นจริง เมื่อแทนลิมิตของฟังก์ชันที่ a ด้วยลิมิตทางซ้าย หรือแทนลิมิตของฟังก์ชันที่ a ด้วยลิมิตทางขวา

14. ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$

15. ถ้า $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x\to a} f(x) = L$

ตัวอย่าง จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x \to 2} 4$
2. $\lim_{x \to 3} x$
3. $\lim_{x \to -1} x^3$
4. $\lim_{x \to 2} 4x^3$
5. $\lim_{x \to -2} (3x^2 + 5x)$
6. $\lim_{x \to -1} (4x^3 - 6x^2 - 9x + 1)$

ตัวอย่าง จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x \to 2}(x^3 + 2x - 5)(x^2 - 3x)$

2. $\lim_{x \to 1}\frac{3x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$

3. $\lim_{x \to -1}\frac{4x^3 - 3x + 3}{x^2 + 2x + 1}$

4. $\lim_{x \to 4}\frac{x^2 - 16}{x - 4}$

5. $\lim_{x \to 2}\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$

6. $\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{x + 16} - 4}{x}$

ตัวอย่าง จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2+7x-2\right)^4$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{x^2+5}$

5. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\left(4x^2+4x+9\right)^{\frac{2}{3}}$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-2x-8}{x+2}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

ลิมิตของฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง

สำหรับกรณีที่ฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง จะต้องหาลิมิตทั้งสองด้านที่จุดซึ่งมีการเปลี่ยนเงื่อนไขหรือสูตรฟังก์ชันนั้น และทำได้โดยการหาลิมิตแต่ละด้านที่จุดเปลี่ยนเงื่อนไขนั้นก่อน

ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-5}{2-3x} & , x<-3 \\ \sqrt[3]{2+x} & , X\geq -3\end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

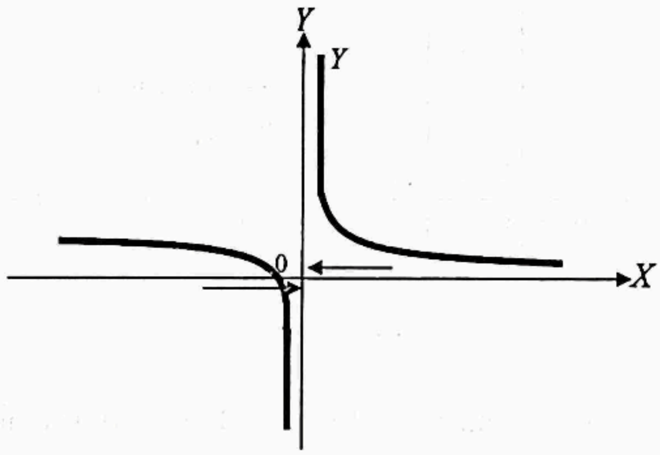
ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(x-1)^2} & , x\leq 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x+1} & , X>0\end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ลิมิตอนันต์ (Infinite limit)

เราจะพิจารณาถึงฟังก์ชันที่มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่มีขอบเขต เมื่อตัวแปรอิสระมีค่าเข้าใกล้จำนวนจริงที่เป็นค่าคงตัวค่าหนึ่ง นั่นคือเป็นการพิจารณาหาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง a แล้วค่าของ $f(x)$ อาจเป็นค่าบวกเพิ่มขึ้นไปเรื่อย ๆ โดยไม่มีขอบเขต หรือเป็นค่าลบลดลงไปเรื่อย ๆ โดยไม่มีขอบเขต เช่น

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ค่าของ $f(x)$ เป็นดังตาราง และมีกราฟดังรูป

$x<0$	-1	-0.5	-0.1	-0.01	…→0
$f(x)$	-1	-2	-10	-100	ลดลงโดยไม่มีขอบเขต $(-\infty)$
$x>0$	1	0.5	0.1	0.01	…→0
$f(x)$	1	2	10	100	เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต (∞)



จะเห็นว่า เมื่อ $x \to 0^-$ ค่าของ $f(x)$ ลดลงโดยไม่มีขอบเขต ลักษณะเช่นนี้เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

และ เมื่อ $x \to 0^+$ ค่าของ $f(x)$ เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต ลักษณะเช่นนี้เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$$

เราเรียกลิมิตทั้งสองแบบนี้ว่า ลิมิตอนันต์

ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ จงหา $\lim_{x\to 1} f(x)$

ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1-2x}{|x-2|}$ จงหา $\lim_{x\to 2} f(x)$

ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}$ จงหา $\lim_{x\to 0} f(x)$

ทฤษฎีลิมิตที่อนันต์

กำหนดให้ c, A, B เป็นจำนวนจริง ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ และ $\lim_{x\to\infty} g(x) = B$ แล้ว

1. $\lim_{x\to\infty} c = c$
2. $\lim_{x\to-\infty} c = c$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x} = 0$, $c \neq 0$
4. $\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x} = 0$, $c \neq 0$
5. ถ้า $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$ หรือ $\lim_{x\to\infty} h(x) = -\infty$ แล้ว $\lim_{x\to\infty} \frac{c}{h(x)} = 0$, $c \neq 0$
6. ถ้า $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \infty$ หรือ $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ แล้ว $\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{h(x)} = 0$, $c \neq 0$
7. ถ้า $x > 0$ แล้ว $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงบวก
8. ถ้า $x < 0$ และ $x^n \in R$ แล้ว $\lim_{x\to\infty} x^n = \begin{cases} \infty & , x^n > 0 \\ -\infty & , x^n < 0 \end{cases}$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงบวก
9. ถ้า $x > 0$ แล้ว $\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^n} = 0$, $c \neq 0$ และ n เป็นจำนวนจริงบวก
10. ถ้า $x < 0$ และ $x^n \in R$ แล้ว $\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^n} = 0$, $c \neq 0$ และ n เป็นจำนวนจริงบวก
11. $\lim_{x\to\infty}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x) = A + B$
12. $\lim_{x\to\infty}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to\infty} g(x) = A - B$
13. $\lim_{x\to\infty}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\infty} g(x) = A \cdot B$
14. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)} = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$
15. $\lim_{x\to\infty}[cf(x)] = c\lim_{x\to\infty} f(x) = cA$

หมายเหตุ ทฤษฎี 11–15 ยังคงเป็นจริง เมื่อเปลี่ยน $x \to \infty$ ด้วย $x \to -\infty$

ตัวอย่าง จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x \to \infty} 3$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{3}$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2}{x}$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{3x+4}$
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x^3}$

ลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะ เมื่อ $x \to \infty$ หรือ $x \to -\infty$

ในการหาลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะ เมื่อ $x \to \infty$ หรือ $x \to -\infty$ สามารถทำได้โดยการหารเศษและส่วนของฟังก์ชันตรรกยะ ด้วยตัวแปร (x) ที่มีกำลังสูงที่สุดที่ปรากฏในฟังก์ชันหรือค่ามากที่สุดที่ปรากฏในฟังก์ชัน แล้วเทอมที่เป็นตัวแปร (x) กำลังต่าง ๆ จะเป็นค่าของตัวหรืออยู่ในรูปกำลังต่าง ๆ ของ $\frac{1}{x}$ และสามารถใช้ทฤษฎี 9 และ 10 ได้

ตัวอย่าง จงหา $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x-3}{6x+5}$

ตัวอย่าง จงหา $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^2-x+1}{2x^3-3x+5}$

ตัวอย่าง จงหา $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-2}{2x^2+3x+3}$

ตัวอย่าง จงหา 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$

ตัวอย่าง จงหา $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^x}$

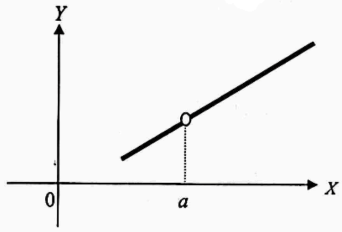
ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

นิยาม กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ $a \in R$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous function) ที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

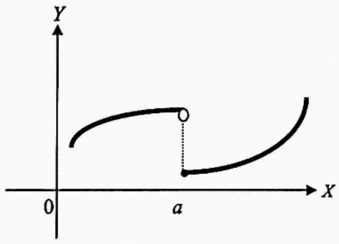
1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้

และ 3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

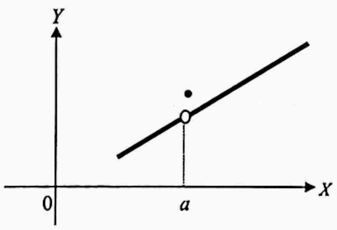
ฟังก์ชันที่มีกราฟดังรูป ไม่ต่อเนื่องที่ $x = a$



$f(a)$ หาค่าไม่ได้

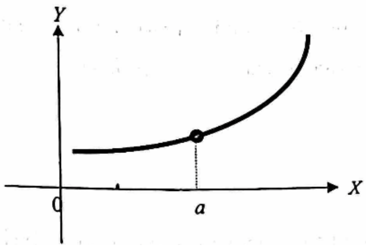


$\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้



$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

ฟังก์ชันที่มีกราฟดังรูป ต่อเนื่องที่ $x = a$



ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 3x^2 + x - 2$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$

ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & , x\neq -3 \\ -6 & , x=-3 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=-3$ หรือไม่

ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^3-1} & , x\neq 1 \\ \dfrac{3}{2} & , x=1 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$ หรือไม่

ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & , 5<x\leq 8 \\ 10 & , x=5 \end{cases}$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[5,8]$