มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2568

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1305	ทฤษฎีจำนวน	เวลา 16:00 - 19:00 วันพฤหัสบดี ที่ 19 มีนาคม 2569	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล... **รหัสนักศึกษา**................................ **หมู่เรียน**...............

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 15 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
   - **ตอนที่** 1 ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 3 ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ จำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								รวม
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

ตารางแสดงจำนวนเฉพาะไม่เกิน 1000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	419	421	431	433	439
443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509
521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	661
673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751
757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827	829
839	853	859	863	877	881	883	887	907	911	919	929
937	941	947	953	967	971	977	983	911	997		

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า

$$a \equiv b \pmod{m}$$

แล้วข้อใดต่อไปนี้กล่าว **ไม่ถูกต้อง**

ก. เศษเหลือที่เกิดจากการหาร a และ b ด้วย m มีค่าเท่ากัน

ข. $m \mid (b-a)$

ค. $2a \equiv a+b \pmod{m}$

ง. $2b \equiv a+b \pmod{m}$

จ. $2a \equiv b \pmod{m}$

2. สำหรับ $x = 6 + 9t$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$ **ไม่เป็นคำตอบ**ในรูปทั่วไปของสมการคอนกรูเอ็นซ์ในข้อใดต่อไปนี้

ก. $2x \equiv 3 \pmod{9}$

ข. $6x \equiv 9 \pmod{9}$

ค. $2x \equiv 6 \pmod{9}$

ง. $5x \equiv 3 \pmod{9}$

จ. $4x \equiv 6 \pmod{9}$

3. ข้อใดต่อไปนี้มี **ค่าน้อยที่สุด**

ก. $\left[\dfrac{600}{2^4}\right]$

ข. $\sigma_2(600)$

ค. $\tau(600)$

ง. $\sigma(599)$

จ. $\phi(599)$

4. ให้ a เป็นจำนวนเต็ม สมการไดโอแฟนไทน์

$$ax + 42y = 2569$$

มีคำตอบ เมื่อ a เป็นจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

ก. 8

ข. 7

ค. 6

ง. 4

จ. 3

5. กำหนดให้ $\{3, 4, a\}$, $\{7, 2b, 25\}$ และ $\{a, b, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (PT) แล้วข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

ก. $a + b = c$

ข. $ab = c$

ค. $\{a, 2b, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (PT)

ง. $\{a, b, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน (PPT)

จ. $\{2a, b, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (PT)

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ______________________

จงหา**เศษเหลือ**ที่เกิดจากที่หาร 2^{2166} ด้วย 109 (ตอบเป็นจำนวนบวก)

7. ______________________

จงหาค่าของ $\sum_{d|69} \sigma(d)$

8. ______________________

ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $ax - 4y = 7$ เป็นสมการไดโอแฟนไทน์ที่มีคำตอบ เมื่อหาคำตอบเฉพาะราย x_0, y_0 ของสมการนี้โดยใช้เมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccc|ccl}
a & = & a(1) & + & 4(0) & 1 & 0 & R_1 \\
4 & = & a(0) & + & 4(1) & 0 & 1 & R_2 \\
\hline
1 & = & a(1) & + & 4(-1) & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2
\end{array}$$

จงหาคำตอบเฉพาะรายของสมการนี้โดยวิธีดังกล่าว ตอบในรูปคู่อันดับ (x_0, y_0)

9. ______________________

ให้ k เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $90 < k < 100$ ถ้าสมการไดโอแฟนไทน์ต่อไปนี้**มีคำตอบ**

$$26x + 143y + 65z = k$$

แล้ว k คือจำนวนใด

10. ______________________

จงหาจำนวนเต็มบวก a ที่ทำให้ $\{a-7, a, a+1\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (PT)

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

11.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า $19 \mid (7^{2n+3} - 5^{3n})$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ โดยใช้คอนกรูเอ็นซ์

11.2 **(5 คะแนน)** จงหา**เลขท้ายสามตัว**ของ 7^{2399} (*ข้อเสนอแนะ*: ใช้ทฤษฎีบทของออยเลอร์)

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงหา**คำตอบที่ไม่คอนกรูเอนซ์มอดุโล 117** ของสมการ $18x \equiv 135 \pmod{117}$

12.2 **(5 คะแนน)** จงใช้**ทฤษฎีบทของวิลสัน หาเศษเหลือ**ที่เกิดจากการหาร

$$108! - 107! + 106! - 105! \quad \text{ด้วย} \quad 109$$

13. **(10 คะแนน)** จงหา**จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด** เมื่อ

$$\text{หารด้วย } 12, 15 \text{ และ } 20 \text{ เศษเหลือเท่ากับ } 7,\ 10 \text{ และ } 15 \text{ ตามลำดับ}$$

โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน (CRT)

14. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ฟังก์ชัน $\varphi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย

$$\varphi(n) = 2^{\ell\mathrm{n}(n)} \qquad \text{เมื่อ} \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

14.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า φ เป็น**ฟังก์ชันเชิงการคูณแบบบริบูรณ์** หรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

14.2 **(5 คะแนน)** ให้ $n \in \mathbb{Z}^+$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\varphi(120) \cdot \varphi(42) = 2^{\ell\mathrm{n}(n!)}$$

จงหา $\tau(n^2 \cdot 2^n)$

15. **(10 คะแนน)** ถ้า p, q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน

$$\phi(pq) + \tau(2^p \cdot 9^q) = 442$$

จงหา p, q ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

16. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $N = (26!)^2 - (25!)^2$

16.1 **(8 คะแนน)** จงใช้สูตรโพลิกแนค (Polignac's formula) เขียน **รูปแบบบัญญัติ** ของ N

16.2 **(2 คะแนน)** จงหา**จำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้าย**ของจำนวนเต็มบวก N

17. **(10 คะแนน)** น้องอินเตรียมทำอาหารเพื่อเข้าแข่งขันรายการ Master Chef Junior โดยฝึกทำอาหารหวานซึ่งต้องการไข่ไก่สดเบอร์ 0 จึงไปออกไปซื้อที่ซุปเปอร์มาร์เก็ต พบว่ามีไข่ไก่เบอร์ 0 จำนวน 3 แบบ ดังนี้

ไข่ไก่แบบ 30 ฟอง	แพ็คละ	125	บาท
ไข่ไก่แบบ 12 ฟอง	แพ็คละ	60	บาท
ไข่ไก่แบบ 4 ฟอง	แพ็คละ	25	บาท

ถ้าน้องอินตั้งใจจะซื้อไข่ 500 บาทและได้ครบทุกแบบ ถามว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จะใช้เงินพอดีในการซื้อไข่เบอร์ 0 ที่เขาต้องการ ถ้าเป็นไปได้ จะซื้อได้แต่ละแบบได้กี่แพ็คและรวมกันเป็นกี่ฟองในแต่ละแบบ
(โดยใช้สมการไดโอแฟนไทน์)

18. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

18.1 **(5 คะแนน)** จงหา**สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (PT)** ที่มีจำนวน 52 พร้อมทั้งระบุด้วยว่าสามจำนวนใดเป็นชนิดปฐมฐาน (PPT)

18.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\{a, b, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส **จงพิสูจน์ว่า**

$$\{|b^2 - a^2|, 2ab, c^2\} \quad \text{เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส}$$

โดยเรียกว่า **สามสิ่งอันดับพีทาโกรัสที่เกิดจาก** $\{a, b, c\}$
จงหาสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสที่เกิดจาก $\{3, 4, 5\}$ และ $\{5, 12, 13\}$

คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2568

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1305	ทฤษฎีจำนวน	เวลา 16:00 - 19:00 วันพฤหัสบดี ที่ 19 มีนาคม 2569	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า

$$a \equiv b \pmod{m}$$

แล้วข้อใดต่อไปนี้กล่าว **ไม่ถูกต้อง**

ก. เศษเหลือที่เกิดจากการหาร a และ b ด้วย m มีค่าเท่ากัน

ข. $m \mid (b-a)$

ค. $2a \equiv a+b \pmod{m}$

ง. $2b \equiv a+b \pmod{m}$

จ. $2a \equiv b \pmod{m}$ Answer

ตอบข้อ จ.

ก. ถูกต้อง เป็นไปตามบทนิยาม

ข. ถูกต้อง เป็นไปตามบทนิยาม

ค. ถูกต้อง โดยการบวก a เข้าไปสองข้าง

ง. ถูกต้อง โดยการบวก b เข้าไปสองข้าง

จ. ไม่ถูกต้อง ถ้าเลือก $a = b = 1$ และ $m = 2$ จะได้ว่า
$1 \equiv 1 \pmod{2}$ เป็นจริง แต่ $2 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{2}$ ไม่เป็นจริง

2. สำหรับ $x = 6 + 9t$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$ **ไม่เป็นคำตอบ**ในรูปทั่วไปของสมการคอนกรูเอ็นซ์ในข้อใดต่อไปนี้

   ก. $2x \equiv 3 \pmod 9$

   ข. $6x \equiv 9 \pmod 9$

   ค. $2x \equiv 6 \pmod 9$ Answer

   ง. $5x \equiv 3 \pmod 9$

   จ. $4x \equiv 6 \pmod 9$

ตอบข้อ ค. ตรวจสอบโดยแทน $x = 6$ ในสมการจะเห็นว่าเป็นจริงทุกข้อยกเว้น ค.

3. ข้อใดต่อไปนี้มี **ค่าน้อยที่สุด**

   ก. $\left[\dfrac{600}{2^4}\right]$

   ข. $\sigma_2(600)$

   ค. $\tau(600)$ Answer

   ง. $\sigma(599)$

   จ. $\phi(599)$

ตอบข้อ ค. จากตารางจำนวนเฉพาะ 599 เป็นจำนวนเฉพาะ และ $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{600}{2^4}\right] &= [37.5] = 37 \\
\sigma_2(600) &= \sigma_2(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2) \\
&= (1^2 + 2^2 + 4^2 + 8^2)(1^2 + 3^2)(1^2 + 5^2 + 25^2) \\
&= (85)(10)(651) = 553350 \\
\tau(600) &= \tau(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2) = (3+1)(1+1)(2+1) = 24 \\
\sigma(599) &= 1 + 599 = 600 \\
\phi(599) &= 599 - 1 = 588
\end{aligned}
$$

4. ให้ a เป็นจำนวนเต็ม สมการไดโอแฟนไทน์

$$ax + 42y = 2569$$

มีคำตอบ เมื่อ a เป็นจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

ก. 8

ข. 7 Answer

ค. 6

ง. 4

จ. 3

ตอบข้อ ข. จากทฤษฎีบทสมการจะมีคำตอบก็ต่อเมื่อ $\gcd(a, 42) \mid 2569$ เนื่องจาก $2569 = 7 \cdot 367$ จากตัวเลือก $a = 7$ จะทำให้สมการนี้มีคำตอบ

5. กำหนดให้ $\{3, 4, a\}$, $\{7, 2b, 25\}$ และ $\{a, b, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (PT) แล้วข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

ก. $a + b = c$

ข. $ab = c$

ค. $\{a, 2b, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (PT)

ง. $\{a, b, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน (PPT) Answer

จ. $\{2a, b, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (PT)

ตอบข้อ ง. พิจารณา $a^2 = 3^2 + 4^2$ จะได้ $a = 5$ และ $(2b)^2 = 25^2 - 7^2$ แล้ว $2b = 24$ นั่นคือ $b = 12$ และ

$$c^2 = a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 169$$

ฉะนั้น $c = 13$ ทำให้ได้ว่า $\{a, b, c\} = \{5, 12, 13\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน (PPT)

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ตอบ 64

จงหา**เศษเหลือ**ที่เกิดจากที่หาร 2^{2166} ด้วย 109 (ตอบเป็นจำนวนบวก)

แนวคำตอบ เนื่องจาก 109 เป็นจำนวนเฉพาะ และ $109 \nmid 2$ โดยทฤษฎีของแฟร์มาต์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
2^{109-1} &\equiv 1 &&(\bmod 109)\\
2^{108} &\equiv 1 &&(\bmod 109)\\
(2^{108})^{20} &\equiv (1)^{20} &&(\bmod 109)\\
2^{2160} &\equiv 1 &&(\bmod 109)\\
2^{2160}\cdot 2^{6} &\equiv 1\cdot 2^{6} &&(\bmod 109)\\
2^{2166} &\equiv 64 &&(\bmod 109)
\end{aligned}$$

ดังนั้นเศษเหลือที่เกิดจากที่หาร 2^{2166} ด้วย 109 เท่ากับ 64 $\#$

7. ตอบ 125

จงหาค่าของ $\displaystyle\sum_{d|69}\sigma(d)$

แนวคำตอบ เนื่องจากตัวหารของ 69 คือ 1, 3, 23, 69 ดังนั้น

$$\begin{aligned}
X = \sum_{d|69}\sigma(d) &= \sigma(1)+\sigma(3)+\sigma(23)+\sigma(69)\\
&= 1+(1+3)+\tau(1+23)+\sigma(3\cdot 23)\\
&= 1+(1+3)+\tau(1+23)+(1+3)(1+23)\\
&= 1+4+24+(4)(24)\\
&= 29+96\\
&= 125 \quad \#
\end{aligned}$$

8. ตอบ (7,7)

ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $ax-4y=7$ เป็นสมการไดโอแฟนไทน์ที่มีคำตอบ เมื่อหาคำตอบเฉพาะราย x_0, y_0 ของสมการนี้โดยใช้เมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccc|cc l}
a & = & a(1) & + & 4(0) & 1 & 0 & R_1\\
4 & = & a(0) & + & 4(1) & 0 & 1 & R_2\\
\hline
1 & = & a(1) & + & 4(-1) & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2
\end{array}$$

จงหาคำตอบเฉพาะรายของสมการนี้โดยวิธีดังกล่าว ตอบในรูปคู่อันดับ (x_0, y_0)

แนวคำตอบ จากเมทริกซ์จะได้ $a(1)-4(1)=1$ นำ 7 คูณตลอด

$$a(7)-4(7)=7$$

ดังนั้น $x_0=7$ และ $y_0=7$ เป็นคำตอบเฉพาะรายของสมการนี้

9. ตอบ 91

ให้ k เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $90 < k < 100$ ถ้าสมการไดโอแฟนไทน์ต่อไปนี้**มีคำตอบ**

$$26x + 143y + 65z = k$$

แล้ว k คือจำนวนใด

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\gcd(26, 143, 65) = 13$ สมการนี้จะมีคำตอบก็ต่อเมื่อ $13 \mid k$ นั่นคือ

$$k = 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, \ldots$$

จากเงื่อนไข จะได้ว่า $k = 91$ $\#$

10. ตอบ 12

จงหาจำนวนเต็มบวก a ที่ทำให้ $\{a-7, a, a+1\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (PT)

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}(a-7)^2 + a^2 &= (a+1)^2 \\ a^2 - 14a + 49 + a^2 &= a^2 + 2a + 1 \\ a^2 - 16a + 48 &= 0 \\ (a-12)(a-4) &= 0 \\ a &= 4, 12\end{aligned}$$

เนื่องจาก $a - 7 > 0$ ดังนั้น $a = 12$ $\#$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

11.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า $19 \mid (7^{2n+3} - 5^{3n})$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ โดยใช้คอนกรูเอ็นซ์

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก $49 \equiv 125 \pmod{19}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
7^2 &\equiv 5^3 && \pmod{19}\\
(7^2)^n &\equiv (5^3)^n && \pmod{19}\\
7^{2n} &\equiv 5^{3n} && \pmod{19}\\
7^{2n}\cdot 343 &\equiv 5^{3n}\cdot 343 && \pmod{19}\\
7^{2n}\cdot 7^3 &\equiv 5^{3n}\cdot (1) && \pmod{19}\\
7^{2n+3} &\equiv 5^{3n} && \pmod{19}
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $19 \mid (7^{2n+3} - 5^{3n})$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ □

11.2 **(5 คะแนน)** จงหา**เลขท้ายสามตัว**ของ 7^{2399} (*ข้อเสนอแนะ*: ใช้ทฤษฎีบทของออยเลอร์)

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(1000, 7) = 1$ และ

$$\phi(1000) = \phi(2^3 \cdot 5^3) = (2^3 - 2^2)(5^3 - 5^2) = 400$$

โดยทฤษฎีบทของออยเลอร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
7^{\phi(1000)} &\equiv 1 && \pmod{1000}\\
7^{400} &\equiv 1 && \pmod{1000}\\
(7^{400})^6 &\equiv 1^6 && \pmod{1000}\\
7^{2400} &\equiv 1 && \pmod{1000}\\
7\cdot 7^{2399} &\equiv 1 && \pmod{1000}\\
143\cdot 7\cdot 7^{2399} &\equiv 143\cdot 1 && \pmod{1000}\\
1001\cdot 7^{2399} &\equiv 143 && \pmod{1000}\\
7^{2399} &\equiv 143 && \pmod{1000}
\end{aligned}$$

ดังนั้นเลขท้ายสามตัวของ 7^{2399} คือ 143 #

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงหา**คำตอบที่ไม่คอนกรูเอนซ์มอดุโล 117** ของสมการ $18x \equiv 135 \pmod{117}$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(18, 117) = 9$ และ $9 \mid 135$ ดังนั้น $18x \equiv 135 \pmod{117}$ มีคำตอบ พิจารณา $2x \equiv 15 \ (\bmod\ 13)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 2 \quad (\bmod\ 13) \\ x &\equiv 1 \quad (\bmod\ 13) \quad \because \gcd(2, 13) = 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 1 + 13t$ เมื่อ $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ เป็นคำตอบที่ไม่คอนกรูเอนซ์มอดุโล 117 นั่นคือ

$$x = 1, 14, 27, 40, 53, 66, 79, 92, 105 \quad \#$$

12.2 **(5 คะแนน)** จงใช้**ทฤษฎีบทของวิลสัน** หา**เศษเหลือ**ที่เกิดจากการหาร

$$108! - 107! + 106! - 105! \quad \text{ด้วย} \quad 109$$

แนวคำตอบ นื่องจาก 109 เป็นจำนวนเฉพาะ โดยทฤษฎีของวิลสัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (109-1)! &\equiv -1 && (\text{mod } 109) \\ 108! &\equiv -1 && (\text{mod } 109) \\ 108 \cdot 107! &\equiv -1 && (\text{mod } 109) \\ -1 \cdot 107! &\equiv -1 && (\text{mod } 109) \\ 107! &\equiv 1 && (\text{mod } 109) \\ 107 \cdot 106! &\equiv 1 && (\text{mod } 109) \\ -2 \cdot 106! &\equiv 1 && (\text{mod } 109) \\ -108 \cdot 106! &\equiv 54 && (\text{mod } 109) \\ -(-1) \cdot 106! &\equiv 54 && (\text{mod } 109) \\ 106! &\equiv 54 && (\text{mod } 109) \\ 106 \cdot 105! &\equiv 54 && (\text{mod } 109) \\ -3 \cdot 105! &\equiv 54 && (\text{mod } 109) \\ -108 \cdot 105! &\equiv 54 \cdot 36 = 1944 && (\text{mod } 109) \\ -(-1) \cdot 105! &\equiv -18 && (\text{mod } 109) \\ 105! &\equiv -18 && (\text{mod } 109) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} 108! - 107! + 106! - 105! &\equiv -1 - 1 + 54 - (-18) && (\text{mod } 109) \\ &\equiv 70 && (\text{mod } 109) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่าเศษเหลือที่เกิดจากหาร $108! - 107! + 106! - 105!$ ด้วย 109 เท่ากับ 70 $\quad \#$

13. **(10 คะแนน)** จงหา**จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด** เมื่อ

หารด้วย $12, 15$ และ 20 เศษเหลือเท่ากับ 7, 10 และ 15 ตามลำดับ

โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน (CRT)

แนวคำตอบ ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\begin{aligned} x &\equiv 7 \pmod{12} \\ x &\equiv 10 \pmod{15} \\ x &\equiv 15 \pmod{20} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\gcd(12,15)=3$ ซึ่ง $3 \mid (7-10)$, $\gcd(12,20)=4$ ซึ่ง $4 \mid (7-15)$
และ $\gcd(15,20)=5$ ซึ่ง $5 \mid (10-15)$ ดังนั้นระบบสมการนี้มีคำตอบ
เนื่องจาก $\gcd(3,4)=1$ ฉะนั้น $x \equiv 7 \pmod{12}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 7 \pmod 3 \longrightarrow x \equiv 1 \pmod 3 \\ x &\equiv 7 \pmod 4 \longrightarrow x \equiv 3 \pmod 4 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\gcd(3,5)=1$ ฉะนั้น $x \equiv 10 \pmod{15}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 10 \pmod 3 \longrightarrow x \equiv 1 \pmod 3 \\ x &\equiv 10 \pmod 5 \longrightarrow x \equiv 0 \pmod 5 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\gcd(4,5)=1$ ฉะนั้น $x \equiv 15 \pmod{20}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 15 \pmod 4 \longrightarrow x \equiv 3 \pmod 4 \\ x &\equiv 15 \pmod 5 \longrightarrow x \equiv 0 \pmod 5 \end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการนี้จะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 4 \\ x &\equiv 0 \pmod 5 \end{aligned}$$

พิจารณาสมการ

$$\begin{aligned} 4(5)x &= 20x = -x \equiv 1 \pmod 3 \longrightarrow x_1 = -1 \\ 3(5)x &= 15x = -x \equiv 1 \pmod 4 \longrightarrow x_2 = -1 \\ 3(4)x &= 12x = 2x \equiv 1 \pmod 5 \longrightarrow x_3 = 3 \end{aligned}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv 4(5)(-1)(1) + 3(5)(-1)(3) + 3(4)(3)(0) \pmod{3 \cdot 4 \cdot 5} \\ &\equiv -20 - 45 + 0 \pmod{60} \\ &\equiv -65 \pmod{60} \\ &\equiv -5 \pmod{60} \\ &\equiv 55 \pmod{60} \end{aligned}$$

จะได้ว่าคำตอบของระบบสมการนี้คือ $x \equiv 55 \pmod{60}$ ดังนั้นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดเมื่อ
หารด้วย $12, 15$ และ 20 เศษเหลือเท่ากับ 7, 10 และ 15 ตามลำดับ เท่ากับ 55 $\#$

14. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ฟังก์ชัน $\varphi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย

$$\varphi(n) = 2^{\ell\text{n}(n)} \qquad \text{เมื่อ} \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

14.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า φ เป็น**ฟังก์ชันเชิงการคูณแบบบริบูรณ์** หรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

แนวคำตอบ ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\varphi(mn) = 2^{\ell\text{n}(mn)} = 2^{\ell\text{n}(m)+\ell\text{n}(n)} = 2^{\ell\text{n}(m)} \cdot 2^{\ell\text{n}(n)} = \varphi(m)\varphi(n)$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณบริบูรณ์

14.2 **(5 คะแนน)** ให้ $n \in \mathbb{Z}^+$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\varphi(120) \cdot \varphi(42) = 2^{\ell\text{n}(n!)}$$

จงหา $\tau(n^2 \cdot 2^n)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\varphi(120) \cdot \varphi(42) &= 2^{\ell\text{n}(n!)} \\
\varphi(120 \cdot 42) &= 2^{\ell\text{n}(n!)} \\
\varphi(5! \cdot 6 \cdot 7) &= 2^{\ell\text{n}(n!)} \\
\varphi(7!) &= 2^{\ell\text{n}(n!)} \\
2^{\ell\text{n}(7!)} &= 2^{\ell\text{n}(n!)}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $n = 7$ จะได้ว่า

$$\tau(n^2 \cdot 2^n) = \tau(7^2 \cdot 2^7) = (2+1)(7+1) = 24 \quad \#$$

15. **(10 คะแนน)** ถ้า p, q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน

$$\phi(pq) + \tau(2^p \cdot 9^q) = 442$$

จงหา p, q ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

แนวคำตอบ เนื่องจาก p, q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน จะได้ว่า $\gcd(p, q) = 1$ และ

$$\begin{aligned}
\phi(pq) + \tau(2^p \cdot 3^{2q}) &= 442 \\
\phi(p)\phi(q) + \tau(2^p)\tau(3^{2q}) &= 442 \\
(p-1)(q-1) + (p+1)(2q+1) &= 442 \\
pq - p - q + 1 + 2pq + p + 2q + 1 &= 442 \\
3pq + q &= 440 \\
q(3p+1) &= 440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11 \\
&= 2 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 11 = 2 \cdot 220 \\
&= 5 \cdot 2^3 \cdot 11 = 5 \cdot 88 \\
&= 11 \cdot 2^3 \cdot 5 = 11 \cdot 40
\end{aligned}$$

เนื่องจาก q เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $q = 2, 5, 11$ พิจารณา

q	$3p+1$	$3p$	p
2	220	219	73
5	88	87	29
11	40	39	13

สรุปจำนวนเฉพาะที่เป็นไปได้ทั้งหมด 3 คู่คือ $(p, q) = (2, 73), (5, 29), (11, 13)$ #

16. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $N = (26!)^2 - (25!)^2$

16.1 **(8 คะแนน)** จงใช้สูตรโพลิกแนค (Polignac's formula) เขียน **รูปแบบบัญญัติ** ของ N

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} N &= (26! - 25!)(26! + 25!) \\ &= (26 \cdot 25! - 25!)(26 \cdot 25! + 25!) \\ &= 25!(26-1) \cdot 25!(26+1) \\ &= (25!)^2(25)(27) \\ &= (25!)^2 \cdot 5^2 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

ใช้สูตรของโพลิกแนคกับ 25!

$$\begin{aligned} e_2(25) &= \left[\frac{25}{2}\right] + \left[\frac{25}{2^2}\right] + \left[\frac{25}{2^3}\right] + \left[\frac{25}{2^4}\right] = 12 + 6 + 3 + 1 = 22 \\ e_3(25) &= \left[\frac{25}{3}\right] + \left[\frac{25}{3^2}\right] = 8 + 2 = 10 \\ e_5(25) &= \left[\frac{25}{5}\right] + \left[\frac{25}{5^2}\right] = 5 + 1 = 6 \\ e_7(25) &= \left[\frac{25}{7}\right] = 3 \\ e_{11}(25) &= e_{13}(25) = e_{17}(25) = e_{19}(25) = e_{23}(25) = 1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 25! &= 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \\ (25!)^2 &= (2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23)^2 \\ &= 2^{44} \cdot 3^{20} \cdot 5^{12} \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \end{aligned}$$

ดังนั้นรูปแบบบัญญัติของ N คือ

$$\begin{aligned} N &= (25!)^2 \cdot 5^2 \cdot 3^3 \\ &= (2^{44} \cdot 3^{20} \cdot 5^{12} \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2) \cdot 5^2 \cdot 3^3 \\ &= 2^{44} \cdot 3^{23} \cdot 5^{14} \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \quad \# \end{aligned}$$

16.2 **(2 คะแนน)** จงหา**จำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้าย**ของจำนวนเต็มบวก N

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} N &= (2^{14} \cdot 2^{30}) \cdot 3^{23} \cdot 5^{14} \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \\ &= (2^{14} \cdot 5^{14}) \cdot 2^{30} \cdot 3^{23} \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \\ &= (2 \cdot 5)^{14} \cdot 2^{30} \cdot 3^{23} \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \\ &= 10^{14} \cdot 2^{30} \cdot 3^{23} \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้ายของจำนวนเต็มบวก N เท่ากับ 14 ตัว $\#$

17. **(10 คะแนน)** น้องอินเตรียมทำอาหารเพื่อเข้าแข่งขันรายการ Master Chef Junior โดยฝึกทำอาหารหวานซึ่งต้องการไข่ไก่สดเบอร์ 0 จึงไปออกไปซื้อที่ซุปเปอร์มาร์เก็ต พบว่ามีไข่ไก่เบอร์ 0 จำนวน 3 แบบ ดังนี้

ไข่ไก่แบบ 30 ฟอง	แพ็คละ	125	บาท
ไข่ไก่แบบ 12 ฟอง	แพ็คละ	60	บาท
ไข่ไก่แบบ 4 ฟอง	แพ็คละ	25	บาท

ถ้าน้องอินตั้งใจจะซื้อไข่ 500 บาทและได้ครบทุกแบบ ถามว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จะใช้เงินพอดีในการซื้อไข่เบอร์ 0 ที่เขาต้องการ ถ้าเป็นไปได้ จะซื้อได้แต่ละแบบได้กี่แพ็คและรวมกันเป็นกี่ฟองในแต่ละแบบ (โดยใช้สมการไดโอแฟนไทน์)

แนวคำตอบ กำหนดให้

x แทนจำนวนแพ็คของไข่เบอร์ 0 แบบ 30 ฟอง เมื่อ $x > 0$
y แทนจำนวนแพ็คของไข่เบอร์ 0 แบบ 12 ฟอง เมื่อ $y > 0$
z แทนจำนวนแพ็คของไข่เบอร์ 0 แบบ 4 ฟอง เมื่อ $z > 0$

ฉะนั้น

$$125x + 60y + 25z = 500$$

เนื่องจาก $\gcd(125, 60, 25) = 5$ แล้ว $5 \mid 500$ ดังนั้น สมการนี้มีคำตอบในระบบจำนวนเต็ม จัดรูปสมการได้เป็น $25x + 12y + 5z = 100$ พิจารณา

$$25x + 5z = 100 - 12y$$

เนื่องจาก $\gcd(25, 5) = 5$ ดังนั้น $5 \mid (100 - 12y)$ นั่นคือ $12y \equiv 100 \pmod 5$ หรือ $2y \equiv 0, \pmod 5$ ดังนั้น $y = 5t$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 25x + 5z &= 100 - 12(5t) \\ 5x + z &= 20 - 12t \\ z &= 20 - 12t - 5x \end{aligned}$$

ให้ $x = s$ เมื่อ $s \in \mathbb{Z}$ แล้ว $z = 20 - 12t - 5s$ ดังนั้นคำตอบของสมการ $125x + 60y + 25z = 500$ คือ

$$\begin{cases} x = s \\ y = 5t \\ z = 20 - 12t - 5s \end{cases} \quad \text{เมื่อ } t, s \in \mathbb{Z}$$

จาก $x > 0$ จะได้ว่า $t = 1, 2, \ldots$
จาก $y > 0$ จะได้ว่า $s = 1, 2, \ldots$
จาก $z > 0$ จะได้ว่า $20 - 12t - 5s > 0$ ฉะนั้น $12t + 5s < 20$
เป็นไปได้แบบเดียวคือ $t = 1$ และ $s = 1$ ทำให้ได้ว่า $x = 1, y = 5, z = 3$
สรุปซื้อได้เพียงแบบเดียว คือ

ไข่เบอร์ 0 แบบ 30 ฟอง จำนวน 1 แพ็ค
ไข่เบอร์ 0 แบบ 12 ฟอง จำนวน 5 แพ็ค
ไข่เบอร์ 0 แบบ 4 ฟอง จำนวน 3 แพ็ค

รวมไข่ทั้งหมดที่ซื้อได้ $30 \times 1 + 12 \times 5 + 4 \times 3 = 102$ ฟอง

18. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

18.1 **(5 คะแนน)** จงหา**สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (PT)** ที่มีจำนวน 52
พร้อมทั้งระบุด้วยว่าสามจำนวนใดเป็นชนิดปฐมฐาน (PPT)

แนวคำตอบ

กรณี $52 = 2(13 \cdot 2) = 2(26 \cdot 1) = 2uv$ ดังนั้น ($u = 13$ และ $v = 2$) หรือ ($u = 26$ และ $v = 1$)

กรณี $52 = 1 \cdot 52 = 2 \cdot 26 = 4 \cdot 13 = (u-v)(u+v)$ ดังนั้น

$$
\begin{array}{rcc|c|c}
u-v & = & 1 & 2 & 4 \\
u+v & = & 52 & 26 & 13 \\
\hline
2u & = & 53 & 28 & 17 \\
\hline
u & = & - & 14 & - \\
v & = & - & 12 & -
\end{array}
$$

สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส และชนิดปฐมฐานที่มีเงื่อนไข $u > v > 0,\ \gcd(u,v) = 1$ และ u, v ไม่ใช่จำนวนคู่พร้อมกันหรือคี่พร้อมกัน แสดงได้ดังนี้

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2uv$	$c = u^2 + v^2$	
13	2	165	52	173	PPT
26	1	675	52	677	PPT
14	12	52	336	340	

18.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\{a, b, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส **จงพิสูจน์ว่า**

$$\{|b^2 - a^2|, 2ab, c^2\} \qquad \text{เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส}$$

โดยเรียกว่า **สามสิ่งอันดับพีทาโกรัสที่เกิดจาก** $\{a, b, c\}$
จงหาสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสที่เกิดจาก $\{3, 4, 5\}$ และ $\{5, 12, 13\}$

แนวคำตอบ สมมติว่า $\{a, b, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส จะได้ว่า $c^2 = a^2 + b^2$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(|b^2 - a^2|)^2 + (2ab)^2 &= (b^4 - 2a^2b^2 + a^4) + 4a^2b^2 \\
&= b^4 + 2a^2b^2 + a^4 \\
&= (a^2 + b^2)^2 \\
&= (c^2)^2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\{|b^2 - a^2|, 2ab, c^2\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส
พิจารณา

a	b	c	$\lvert b^2 - a^2 \rvert$	$2ab$	c^2
3	4	5	$\lvert 4^2 - 3^2 \rvert = 7$	$2(3)(4) = 12$	$5^2 = 25$
5	12	13	$\lvert 12^2 - 5^2 \rvert = 119$	$2(5)(12) = 120$	$13^2 = 169$

ดังนั้นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสที่เกิดจาก $\{3, 4, 5\}$ คือ $\{7, 24, 25\}$
สามสิ่งอันดับพีทาโกรัสที่เกิดจาก $\{5, 12, 13\}$ คือ $\{119, 120, 169\}$