



แคลคูลัส 2
Calculus 2

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสุรินทร์

2568

MAI1303

แคลคูลัส 2

Calculus 2

ดร. สุรนนท์ เย็นศิริ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

สารบัญ

1	ลำดับและอนุกรม	1
1.1	ลำดับของจำนวนจริง	1
1.2	อนุกรมของจำนวนจริง	8
1.3	การทดสอบแบบอินทิกรัล	14
1.4	การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ	17
1.5	การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์	20
1.6	การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน	24
2	อนุกรมกำลัง	29
2.1	รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า	29
2.2	ฟังก์ชันในรูปอนุกรมกำลัง	34
2.3	ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์	40
2.4	อนุกรมเทย์เลอร์	43
3	ปริภูมิสามมิติ	49
3.1	ระบบพิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ	49
3.2	เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ	52
3.3	เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ	62
3.4	ระนาบในปริภูมิสามมิติ	68
4	ระบบพิกัดเชิงขั้ว	75
4.1	พิกัดเชิงขั้ว	75
4.2	กราฟของสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว	80
4.3	การหาพื้นที่ของบริเวณในระบบพิกัดเชิงขั้ว	89
5	ฟังก์ชันหลายตัวแปร	93
5.1	ฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร	93
5.2	ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันสองตัวแปร	94
5.3	อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปร	100
5.4	กฎลูกโซ่	103
5.5	อนุพันธ์อันดับสูง	106
5.6	การประมาณค่าเชิงเส้น	109

6	อินทิกรัลของฟังก์ชันสองตัวแปร	113
6.1	อินทิกรัลบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	113
6.2	อินทิกรัลบนโดเมนทั่วไป	118
6.3	อินทิกรัลบนระบบพิกัดเชิงขั้ว	123
7	สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น	131
7.1	สมการเชิงอนุพันธ์	131
7.2	สมการแยกตัวแปรได้	135
7.3	สมการเอกพันธ์	137
7.4	สมการแม่นตรง	140
7.5	ตัวประกอบอินทิกรัล	144
7.6	สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง	148

บทที่ 1

ลำดับและอนุกรม

1.1 ลำดับของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.1.1 ลำดับของจำนวนจริง (Real Sequence) คือฟังก์ชันที่โดเมนเป็น \mathbb{N} และค่าของฟังก์ชันเป็นจำนวนจริง

ให้ $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และกำหนดค่าของ $a(n)$ เขียนแทนด้วย a_n จึงได้ว่า

$$a = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n), \dots\}$$

เนื่องจาก a_n ต้องคู่กับ n เสมอ ในคู่อันดับ (n, a_n) ดังนั้นจะลดรูปเขียนลำดับ a ด้วยสัญลักษณ์

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \text{ หรือ } \{a_n\}$$

ตัวอย่าง 1.1.2 จงเติมคำตอบในช่องว่างให้สมบูรณ์

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$	พจน์ทั่วไป $\{a_n\}$
1, 2, 3, 4, ...	
1, 3, 5, 7, ...	
	$\{(-1)^n\}$
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$	
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots$	

บทนิยาม 1.1.3 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L \in \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า L เป็นลิมิตของ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริงบวก ε ใดๆ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{ทุกๆ จำนวนนับ } n > N$$

และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

ข้อสังเกต ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน และกำหนดให้ $a_n = f(n)$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

ทฤษฎีบท 1.1.4 ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L, M, k \in \mathbb{R}$

โดยที่ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$ จะได้ว่า

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} k = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = kL$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n + b_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L + M$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n - b_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L - M$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = LM$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^m = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^m = L^m$ เมื่อ $m \in \mathbb{N}$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$ เมื่อ $m \in \mathbb{N}$ และ $\sqrt[m]{L} \in \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 1.1.5 ให้ $r, t \in \mathbb{R}$ เป็นเป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^t} = 0$ เมื่อ $t > 0$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ เมื่อ $|r| < 1$

ตัวอย่าง 1.1.6 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 3}{1 - 3n + 2n^2}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{3^{n-1} - 3 \cdot 2^n}$$

ทฤษฎีบท 1.1.7 The Squeeze Theorem

ให้ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง เมื่อ $L \in \mathbb{R}$ ถ้า

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{ทุกจำนวนนับ } n$$

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$

ตัวอย่าง 1.1.8 จงหาค่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$

บทนิยาม 1.1.9 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะกล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่เข้า** (convergent) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง L ซึ่ง

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

ในกรณีอื่นจะกล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่ออก** (divergent)

บทนิยาม 1.1.10 ให้ $\{n_k\}$ เป็นลำดับของจำนวนนับ ซึ่ง

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ กำหนดให้ $b_k = a_{n_k}$ จะเรียกลำดับ $\{b_k\}$ ว่า **ลำดับย่อย** (subsequence) ของ $\{a_n\}$

ตัวอย่าง 1.1.11 จงยกตัวอย่างลำดับย่อยของ $\{n^2\}$

ทฤษฎีบท 1.1.12 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็นจำนวนจริง L แล้วจะได้ว่า ทุกลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็น L

หมายเหตุ

1. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลำดับย่อยที่ลู่ออก แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก
2. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีสองลำดับย่อยที่ลิมิตต่างกัน แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่าง 1.1.13 จงแสดงว่า $\left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} \right\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.1.17 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตและลำดับทางเดียว แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.1.18 จงแสดงว่า $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาลิมิตต่อไปนี้

1.1
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 1} + n}{\sqrt[3]{n^3 + 3}}$$

1.2
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)^5 (1 - n)^2}{n^4 (2n - 1)^3}$$

1.3
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

1.4
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n + 1)$$

1.5
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$$

1.6
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 3n}{\sqrt{n + 5}}$$

1.7
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n + n^2}{e^n + n}$$

1.8
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

1.9
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n) - 2n^2}{n^2 + 1}$$

1.10
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3n^2 + 1)}{\ln(n + 1)}$$

1.11
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}}}{2n + \sqrt[3]{n^3 + 5}}$$

1.12
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\cos^2 n}$$

2. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้ เป็นลำดับลู่ออกหรือลู่เข้า

2.1
$$\left\{ \frac{\ln n}{n^2} \right\}$$

2.2
$$\left\{ \frac{n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n + 1} \right\}$$

2.3
$$\left\{ \frac{(3n + 1)^2}{\sqrt{n^4 + 4}} \right\}$$

2.4
$$\left\{ \frac{\sqrt{9^n + n}}{2^n + 3^n} \right\}$$

2.5
$$\left\{ \frac{n}{\ln(e^n + 1)} \right\}$$

2.6
$$\left\{ \frac{3^n + 2}{2^n + 1} \right\}$$

2.7
$$\left\{ \frac{e^n(2n^4 + n^3 + 1)}{n^4(e^n + 2^n)} \right\}$$

2.8
$$\left\{ \frac{n + (-1)^n}{2n + 1} \right\}$$

2.9
$$\left\{ \frac{n}{n(-1)^n + 2} \right\}$$

2.10
$$\left\{ \frac{\ln n}{\ln(n + 1)} \right\}$$

2.11
$$\left\{ \frac{(2n - 1)!}{(2n + 1)!} \right\}$$

2.12
$$\left\{ \frac{n!2^n}{(2n)!} \right\}$$

3. จงทดสอบว่าลำดับ $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 3) \cdot (2n - 1)}{n!}$ เป็นลำดับลู่ออกหรือลู่เข้า4. จงหาลิมิตของลำดับ $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$

1.2 อนุกรมของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.2.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

⋮

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^k a_n$$

เรียก S_k ว่า ผลบวกย่อย (partial sum) ของ k พจน์แรกของ $\{a_n\}$

อนุกรมอนันต์ (infinite series) ของจำนวนจริง เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้าลิมิต $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ หาค่าได้ และเป็นอนุกรมลู่ออก ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ โดยค่าของอนุกรมลู่เข้าหาได้จาก

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$$

ทฤษฎีบท 1.2.2 อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $|r| < 1$ โดยมีผลบวกของอนุกรมเป็น $\frac{a}{1-r}$ และเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $|r| \geq 1$

ตัวอย่าง 1.2.3 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{-n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n-1}}{5^n}$

ทฤษฎีบท 1.2.4 Telescoping Series

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^k (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{k+1}$$

ทฤษฎีบท 1.2.5 Telescoping Series Test

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับคู่เข้า จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$$

ตัวอย่าง 1.2.6 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1.
$$\sum_{n=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

ทฤษฎีบท 1.2.7 สูตรของเกาส์ (Gauss' Formula)

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ทฤษฎีบท 1.2.8 สูตรของฟอลฮาเบอร์ (Faulhaber's Formula)

$$1. \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$2. \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

ตัวอย่าง 1.2.9 จงหาผลบวกต่อไปนี้

$$\sum_{k=1}^{10} (2k-1)^3$$

ทฤษฎีบท 1.2.10 การทดสอบอนุกรมลู่ออก (Divergent Test)

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.11 จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่ออก

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n + 1}$$

ทฤษฎีบท 1.2.12 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

$$\text{และ } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ทฤษฎีบท 1.2.13 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

ตัวอย่าง 1.2.14 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่ออกหรือลู่ออก

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{4^n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{n}{n+1} \right)$$

ตัวอย่าง 1.2.15 จงยกตัวอย่างอนุกรมลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และอนุกรมลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ที่ทำให้

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก พร้อมให้เหตุผลว่าทำไมจึงเป็นเช่นนั้น

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4 + n} - 1}{3n^2 + 1}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{n^2}{n+1}\right)$$

$$3. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^n} + \left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{3^n + 5^n}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n} - 4^n}{10^n}$$

$$17. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{-n} + 1}{2^n}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \cos n$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 4n + 3} + 4^{-n}\right)$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 + 4 + 6 + \dots + (2n)}$$

2. จงหาค่าของ $\sum_{k=1}^{100} \sin k$

1.3 การทดสอบแบบอินทิกรัล

ทฤษฎีบท 1.3.1 การทดสอบแบบอินทิกรัล (Integral Test)

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริงที่ $a_n \geq 0$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีสมบัติดังนี้

1. $f(n) = a_n$ ทุก $n \in \mathbb{N}$
2. f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม และมีความต่อเนื่องบนช่วง $[1, \infty)$
3. $t_n = \int_1^n f(x) dx, \quad n \geq 1$

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้า $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ถ้า $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่าง 1.3.2 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

บทนิยาม 1.3.3 **อนุกรมพี (p-Series)** คืออนุกรมที่เขียนในรูป $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว

ทฤษฎีบท 1.3.4 อนุกรมพีจะเป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $p > 1$ และเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $p \leq 1$

ตัวอย่าง 1.3.5 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-2} + (-2)^n)$

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก โดยใช้การทดสอบแบบอินทิกรัล

$$1.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + 1}$$

$$1.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$$

$$1.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n+2}$$

$$1.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

$$1.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2 + 1}$$

$$1.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4 + 4}$$

$$1.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}$$

$$1.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$1.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2+1}}$$

$$1.10 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$$

$$1.11 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$1.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\ln n}}{n(2^{-\ln n} + 1)}$$

$$1.13 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-n} + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} \right)$$

$$1.14 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$$

2. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

$$2.1 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5}}$$

$$2.2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$$

$$2.3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-n} + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} \right)$$

$$2.4 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^4} \right)$$

$$2.5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{3^{-n}} + \sqrt{\frac{n}{\sqrt{n^5}}} \right)$$

$$2.6 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^4} \right)$$

1.4 การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ

ทฤษฎีบท 1.4.1 การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ (The Comparison Test)

ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง สมมติว่า

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{สำหรับ } n \geq 1$$

จะได้ว่า

1. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.2 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

ทฤษฎีบท 1.4.3 การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบกับลิมิต (The Limit Comparison Test)

ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า $a_n \geq 0$ และ $b_n \geq 0$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L > 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $L = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
3. ถ้า $L = \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.4 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 3}{n^3 + 3n^2 + 1}$$

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

$$1.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{(3n - 1)^4}$$

$$1.2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{n} \right)^4$$

$$1.3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n + 1} \right)^2$$

$$1.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \ln n}{n(n + 1)^3}$$

$$1.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n + 1)}$$

$$1.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n + 5}$$

$$1.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt{n^3 + 1}}$$

$$1.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$$

$$1.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}$$

$$1.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n \ln(n + 2)}$$

$$1.11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n3^n - 2}$$

$$1.12 \sum_{n=1}^{\infty} (n + 2)^{-2 \ln n}$$

$$1.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 1)^5}$$

$$1.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$$

$$1.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n}$$

$$1.16 \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n^3}$$

2. จงหาเงื่อนไขของจำนวนจริง p ซึ่งทำให้อนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 1)^p}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้าและเป็นอนุกรมลู่ออก

3. ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และ $a_n \geq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n + 1)^p} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า ทุก ๆ } p > 1$$

1.5 การลู่เข้าแบบสลับ

บทนิยาม 1.5.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $a_n > 0$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ อนุกรมในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{หรือ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

เรียกว่า **อนุกรมสลับ** (alternating series)

ทฤษฎีบท 1.5.2 อนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้าสอดคล้อง 2 เงื่อนไขต่อไปนี้

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
2. $a_{n+1} < a_n$ ทุก $n \geq 1$

ตัวอย่าง 1.5.3 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$

ทฤษฎีบท 1.5.4 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.5.5 จงตัวอย่างค้านบทกลับของทฤษฎีบท 1.5.4

ตัวอย่าง 1.5.6 จงทดสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

บทนิยาม 1.5.7 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วเรียกอนุกรมนี้ว่าเป็นอนุกรม

1. **ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ (absolute convergence)** ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. **ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข (conditional convergence)** ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.5.8 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3 + 5}$$

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

$$1.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$1.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$1.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln(n+2)}$$

$$1.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\ln n}}$$

$$1.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^4 - n + 1}$$

$$1.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$1.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{4^n + 3^n}$$

$$1.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{4n^3 - 1}$$

$$1.9 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$1.10 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan n$$

$$1.11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi}{1 + \sqrt{n}}$$

$$1.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n \pi}{2^n}$$

$$1.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(e^n + 1)}$$

$$1.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\ln(n+2)}$$

$$1.15 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$$

$$1.16 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{1}{n}}$$

2. จงหาค่า p ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้า

$$2.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

$$2.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^n}$$

$$2.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$$

$$2.4 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$$

1.6 การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน

ทฤษฎีบท 1.6.1 การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน (The Ratio Test)

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_n \neq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $L > 1$ หรือ $L = \infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $L = 1$ สรุปไม่ได้

ตัวอย่าง 1.6.2 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{2^n}$

ทฤษฎีบท 1.6.3 การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์ (The Root Test)

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1. ถ้า $L < 1$ | แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า |
| 2. ถ้า $L > 1$ หรือ $L = \infty$ | แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก |
| 3. ถ้า $L = 1$ | สรุปไม่ได้ |

ตัวอย่าง 1.6.4 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$

แบบฝึกหัด 1.6

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

$$1.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{e^n}$$

$$1.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$1.3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$1.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n + n + 1}$$

$$1.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^n}$$

$$1.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$$

$$1.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$1.8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln(n+1)}\right)^n$$

$$1.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln(n+1)}{3^n}$$

$$1.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln(n+1)}$$

$$1.11 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^3}$$

$$1.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$$

$$1.13 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$1.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$$

$$1.15 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n}{n+1}\right)^{-5n}$$

$$1.16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100} 100^n}{n!}$$

2. จงหาจำนวนจริง x ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

$$2.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n}$$

$$2.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

แบบฝึกหัดระคน

จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{(2n + 3)^2}$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sec^4 n}{\sqrt[3]{n}}$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} + n^{-n} \right)$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-n}$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^7 + 3}}$$

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right)$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n - 1}$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$$

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n 4^{-n^2}$$

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n - n}$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \frac{2}{2n+1} \right)$$

14.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)^{-\ln(e^n + n)}$$

15.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+4)}$$

16.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pi - 2 \arctan n)$$

17.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)}$$

18.
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2} n^n$$

19.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n \sqrt[4]{n}}$$

20.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(3^n + 1)}$$

21.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (3 + \cos n)^{-n}$$

22.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$$

23.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n+10}{n+5} \right)$$

24.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4 + 1} - n^2 \right)$$

25.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt{n^2 + 1}}$$

26.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n!}$$

27.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2 + \ln n)^2}$$

28.
$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-\ln n}$$

29.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{3^n - n}$$

30.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n} 2^n + 1}$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{3^n}{4^n - 1} \right)$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{4} \right)^{-n}$$

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} + 1 \right)^{-2n}$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \ln n}$$

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{3^n} + \frac{\cos^2 n}{4^n} \right)$$

$$36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^9}{n^3(n+2)^{10}}$$

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(5)(7)(9) \cdots (2n+3)}$$

$$39. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)(4)(6) \cdots (2n)}{n!}$$

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1)(3)(5) \cdots (2n-1)}{(2n-1)!}$$

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}$$

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}$$

$$45. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \left(\frac{1}{n^3} \right)$$

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\ln(e^n+1)}$$

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n!}$$

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n-3n^2}{\sqrt{n^6+2}}$$

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n+2)}{n}$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin^2 n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sin n}$$

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\sqrt{n^2+1} - n \right) \cos n \right]^n$$

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n!}$$

$$54. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1} \right)^n$$

$$55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{n^{\frac{2}{3}} - 2}$$

$$56. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$

$$57. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$$

$$58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}$$

$$59. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - n \right)$$

$$60. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n!}$$

บทที่ 2

อนุกรมกำลัง

อนุกรมกำลัง (power series) รอบจุด a เมื่อ $a \in \mathbb{R}$ คืออนุกรมอนันต์ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

เรียก a ว่า จุดศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง (center of power series)

และเรียก $c_n \in \mathbb{R}$ ว่า สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง (coefficients of power series)

หมายเหตุ อนุกรมกำลังเป็นอนุกรมลู่เข้าเมื่อ $x = a$ เสมอ

2.1 รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า

ตัวอย่าง 2.1.1 จงหา x ที่ทำให้ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x - 1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.1.2 สำหรับอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

จะเป็นไปตามกรณีใดกรณีหนึ่งใน 3 กรณีนี้เท่านั้น

1. อนุกรมลู่เข้าเฉพาะเพียงจุดเดียวที่จุดศูนย์กลาง a
2. มีจำนวนจริงบวก R ที่ทำให้
อนุกรมลู่เข้าทุกค่า x ซึ่ง $|x-a| < R$ และ อนุกรมลู่ออกทุกค่า x ซึ่ง $|x-a| > R$
3. อนุกรมลู่เข้าทุกค่า $x \in \mathbb{R}$

บทนิยาม 2.1.3 จำนวน R ในทฤษฎีบท 2.1.2 ข้อ 2 เรียกว่า **รัศมีแห่งการลู่เข้า** (radius of convergence) ของอนุกรมกำลัง ในข้อ 1 ให้ $R = 0$ และในข้อ 3 ให้ $R = \infty$

บทนิยาม 2.1.4 เรียกเซต

$$I = \left\{ x : \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า} \right\}$$

ว่า **ช่วงแห่งการลู่เข้า** (interval of convergence) ของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

จะได้ว่าอนุกรมกำลังที่มีรัศมีแห่งการลู่เข้า R มีช่วงแห่งการลู่เข้าแบบใดแบบหนึ่งเท่านั้น

$$(a-R, a+R), (a-R, a+R], [a-R, a+R), [a-R, a+R] \text{ และ } (-\infty, \infty)$$

ตัวอย่าง 2.1.5 จงหารรัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

ตัวอย่าง 2.1.6 จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่อู่ของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$$

ทฤษฎีบท 2.1.7 ให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลัง สมมติว่ามี $n_0 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $c_n \neq 0$ ทุก ๆ $n \geq n_0$ จะได้รัศมีแห่งการลู่อเข้าคือ

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad \text{หรือ} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

ตัวอย่าง 2.1.8 จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่อเข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่อู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

$$1.1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$$

$$1.2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$$

$$1.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\ln(n+1)}$$

$$1.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{n!}$$

$$1.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{3^n}$$

$$1.6 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n(x-3)}{\cos n} \right)^n$$

$$1.7 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x-2)^n}{n^4+1}$$

$$1.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{n^2+1}$$

$$1.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-e)^n}{n e^n}$$

$$1.10 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} x^n$$

$$1.11 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n}$$

$$1.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{n 4^n}$$

$$1.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{n^2 4^n}$$

$$1.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n \cdot 27^n}$$

$$1.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$1.16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

$$1.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{n \sqrt{n}}$$

$$1.18 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{4^n \ln n}$$

$$1.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-3)^n}{n^3}$$

$$1.20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2. จงหาโดเมนของ ฟังก์ชันเบสเซล (Bessel function) อันดับ 0 และ 1 ที่กำหนดโดย

$$2.1 J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

$$2.2 J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)! 2^{2n+1}}$$

2.2 ฟังก์ชันในรูปอนุกรมกำลัง

บทนิยาม 2.2.1 ให้อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ สู่เข้าบนช่วง I ถ้าอนุกรมนี้มีผลบวกเป็น $f(x)$ ทุก $x \in I$ นั่นคือ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \text{ทุก } x \in I$$

เรียก f ว่า ฟังก์ชันผลบวก (sum function) ของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ บน I

ต่อไปเราจะใช้อนุกรมเรขาคณิต (เป็นอนุกรมกำลังรอบจุด 0)

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad \text{เมื่อ } |r| < 1$$

เป็นเครื่องมือสำคัญในการหาฟังก์ชันผลบวกดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2.2 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (2x-1)^n$

ตัวอย่าง 2.2.3 จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้

1. $\frac{1}{1+2x}$

3. $\frac{1}{x}$

2. $\frac{1}{1+x^2}$

4. $\frac{1}{x^2-1}$

บทนิยาม 2.2.4 กำหนดให้

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \text{ บนช่วง } (a-R, a+R)$$

เมื่อ R เป็นรัศมีแห่งการลู่ออกของอนุกรมนี้ จะได้ว่า f มีอนุพันธ์ทุกค่า $x \in (a-R, a+R)$ และ

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(x-a)^{n-1} \text{ ทุกค่า } x \in (a-R, a+R)$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\int f(x) dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

ตัวอย่าง 2.2.5 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$

ตัวอย่าง 2.2.6 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}$

ตัวอย่าง 2.2.7 ให้ $f(x) = \ln(x + 1)$

1. จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x)$

2. จงแสดงว่า $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

ตัวอย่าง 2.2.8 ให้ $f(x) = \arctan x$

1. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x)$

2. จงแสดงว่า $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

$$1.1 \sum_{n=1}^{\infty} (-3)^{n-1} nx^n$$

$$1.2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)x^n}{2}$$

$$1.3 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$$

$$1.4 \sum_{n=0}^{\infty} n(-x)^{n-1}$$

$$1.5 \sum_{n=1}^{\infty} n(2x)^n$$

$$1.6 \sum_{n=0}^{\infty} nx^{3n}$$

$$1.7 \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^{n+1}$$

$$1.8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n+1}$$

$$1.9 \sum_{n=1}^{\infty} n(-3x)^{n+1}$$

$$1.10 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{2^n}$$

2. จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้

$$2.1 f(x) = \frac{2}{3-2x}$$

$$2.2 f(x) = \frac{3}{1-x^4}$$

$$2.3 f(x) = \frac{1}{x+10}$$

$$2.4 f(x) = \frac{x}{9+x^2}$$

$$2.5 f(x) = \frac{1+x}{1+x}$$

$$2.6 f(x) = \frac{x}{2x^2+1}$$

$$2.7 f(x) = \frac{1}{x^2-x-2}$$

$$2.8 f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$$

$$2.9 f(x) = -\frac{x^3}{(1+x)^2}$$

$$2.10 f(x) = \frac{1}{(1-x)^4}$$

$$2.11 f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$$

$$2.12 f(x) = \frac{x^2}{(1-5x)^2}$$

3. จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้

$$3.1 f(x) = \ln(5-x)$$

$$3.2 f(x) = x \ln(x+1)$$

$$3.3 f(x) = x^2 \arctan(x^3)$$

$$3.4 f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$$

$$3.5 f(x) = \left(\frac{x}{2-x} \right)^3$$

$$3.6 f(x) = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

$$3.7 f(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

2.3 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์

บทนิยาม 2.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด a ถึงอันดับที่ n จะกล่าวว่า

$T_n(x)$ เป็น พหุนามเทย์เลอร์ (Taylor polynomial) ดีกรี n ของ f ที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

ในกรณีที่ $a = 0$ จะเรียกว่า พหุนามแมคลอริน (Maclaurin polynomial) นั่นคือ

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหาพหุนามแมคลอรินดีกรี 4 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = e^x$

2. $f(x) = \sin x$

ตัวอย่าง 2.3.3 จงหาพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด $x = 1$ ของ $f(x) = \ln x$

ทฤษฎีบท 2.3.4 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor's Theorem)

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ถึงอันดับที่ $n + 1$ บนช่วงเปิด I สำหรับ $x, a \in I$ จะได้ว่ามี c อยู่ระหว่าง a กับ x ที่ทำให้

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

เมื่อ $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ เรียกว่า ค่าความผิดพลาด

ตัวอย่าง 2.3.5 ให้ $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ จงประมาณค่าของ $\sqrt[3]{2}$ โดยใช้ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ดีกรี 2 ของ f รอบจุด $x = 1$

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาพหุนามเทย์เลอร์ $T_n(x)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้รอบจุด a

1.1 $f(x) = \sin x$; $a = 0$; $n = 9$

1.2 $f(x) = \cos x$; $a = 0$; $n = 8$

1.3 $f(x) = \ln(x + 1)$; $a = 0$; $n = 6$

1.4 $f(x) = \sqrt{x + 1}$; $a = 3$; $n = 5$

1.5 $f(x) = e^{x^2}$; $a = 0$; $n = 6$

1.6 $f(x) = x^2 \ln x$; $a = 1$; $n = 4$

1.7 $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1$; $a = 1$; $n = 3$

1.8 $f(x) = \ln(\cos x)$; $a = \frac{\pi}{4}$; $n = 3$

1.9 $f(x) = x \cos x$; $a = 0$; $n = 7$

1.10 $f(x) = x^2 \sin x$; $a = 0$; $n = 7$

2. จงหาค่าประมาณของค่าต่อไปนี้โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 3

2.1 $\sin 12^\circ$

2.4 $\sqrt{4.2}$

2.2 $\cos 12^\circ$

2.5 $e^{0.5}$

2.3 $\ln(1.02)$

2.6 $\sqrt[3]{7.9}$

3. ให้ $f(x) = \sqrt{x + 1}$ จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{1.2}$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f

4. ให้ $f(x) = e^x$ จงหาค่าประมาณของ $\int_0^{0.6} e^{-x^2} dx$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 4 ของ f

2.4 อนุกรมเทย์เลอร์

สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ โดยที่ $|x-a| < R$ จะได้ว่า

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \dots \quad (2.1)$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots \quad (2.2)$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \dots \quad (2.3)$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + \dots \quad (2.4)$$

เมื่อแทน $x = a$ ในสมการ (2.1)-(2.4) จะได้

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!} \quad \text{และ} \quad c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

บทนิยาม 2.4.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ทุกอันดับ และ f มีค่าที่จุด a อนุกรมกำลังที่เขียนในรูป

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

หรือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

เรียกว่า **อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series)** ของ f รอบจุด a

ในกรณีที่ $a = 0$ จะเรียกว่า **อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin series)** นั่นคือ

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \quad \text{หรือ} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

ตัวอย่าง 2.4.2 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \frac{1}{x}$ รอบจุด 1

ทฤษฎีบท 2.4.3 ให้ $T_n(x)$ เป็นพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี n ของ f รอบจุด a

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

สำหรับ $|x - a| < R$ เมื่อ R คือรัศมีแห่งการลู่ออกของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$ จะได้ว่า

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$$

ตัวอย่าง 2.4.4 จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน

1. $f(x) = e^x$

2. $f(x) = \sin x$

ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots & R = 1 \\ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots & R = \infty \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots & R = \infty \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots & R = \infty \\ \arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots & R = 1 \\ \ln(x+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots & R = 1 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.4.5 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x) = \ln x$ รอบจุด 1

ตัวอย่าง 2.4.6 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

ตัวอย่าง 2.4.7 จงใช้อนุกรมแมคลอรินของ e^x หาค่าลิมิตของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ รอบจุด a

$$1.1 \quad f(x) = \ln(1-x) \quad ; \quad a = 0$$

$$1.2 \quad f(x) = \cos x \quad ; \quad a = \pi$$

$$1.3 \quad f(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad a = 1$$

$$1.4 \quad f(x) = \sqrt[3]{x} \quad ; \quad a = 1$$

$$1.5 \quad f(x) = \sqrt[3]{x+2} \quad ; \quad a = -1$$

$$1.6 \quad f(x) = \frac{1}{3-x} \quad ; \quad a = 2$$

$$1.7 \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad a = 0$$

2. จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

$$2.1 \quad f(x) = \sin(x^2)$$

$$2.4 \quad f(x) = e^x + e^{2x}$$

$$2.2 \quad f(x) = x^2 \cos x$$

$$2.5 \quad f(x) = x \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$2.3 \quad f(x) = x \ln(x-1)$$

$$2.6 \quad f(x) = x^2 \ln(1+x^3)$$

3. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

$$3.1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n)!}$$

$$3.2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!}$$

4. จงใช้อนุกรมแมคลอรินหาค่าลิมิตของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

บทที่ 3

ปริภูมิสามมิติ

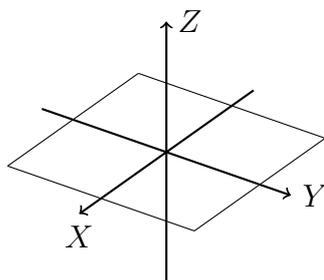
3.1 ระบบพิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ

การบอกตำแหน่งของจุดใน ปริภูมิสามมิติ (three-dimensional space) ทำได้จากการอ้างอิงเส้นตรงสามเส้นคือ แกน X แกน Y และแกน Z ซึ่งตัดกันที่จุด O เรียกว่า จุดกำเนิด (origin) และเรียก

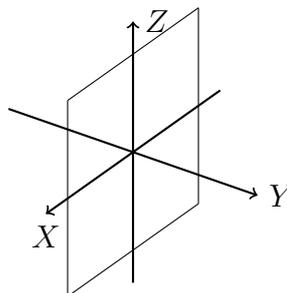
ระนาบที่ผ่าน แกน X และแกน Y ว่า ระนาบ XY (XY-plane)

ระนาบที่ผ่าน แกน X และแกน Z ว่า ระนาบ XZ (XZ-plane)

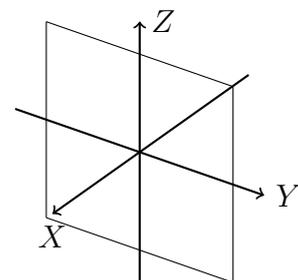
ระนาบที่ผ่าน แกน Y และแกน Z ว่า ระนาบ YZ (YZ-plane)



ระนาบ XY

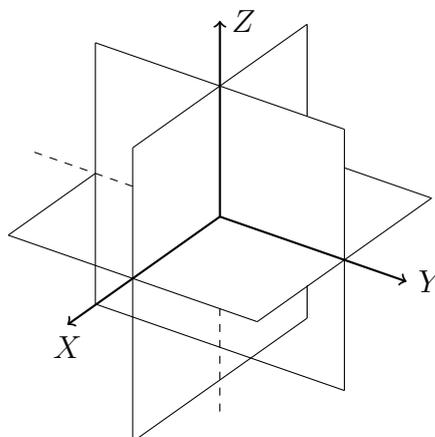


ระนาบ XZ

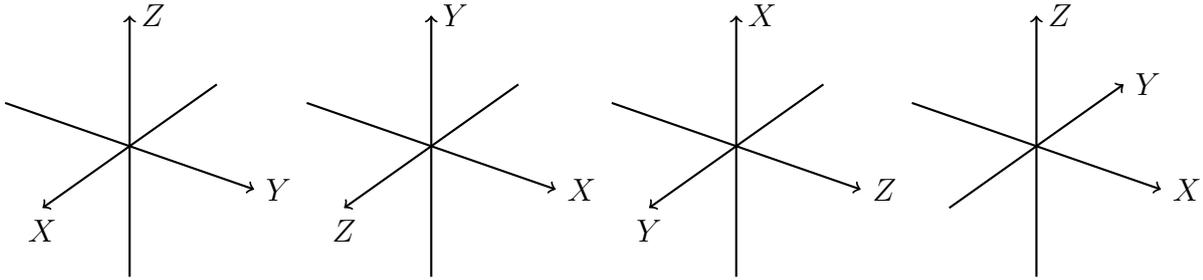


ระนาบ YZ

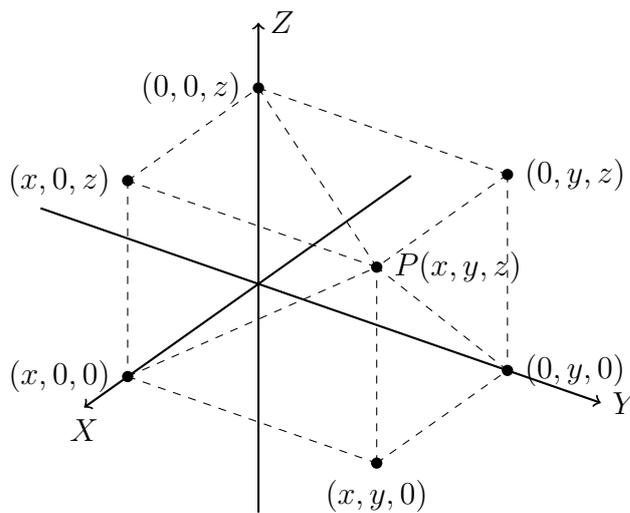
ระนาบพิกัดฉากทั้งสามจะแบ่งปริภูมิสามมิติออกเป็น 8 ส่วนเรียกว่า **อัฐภาค (Octant)**



การเลือกทิศทางที่เป็นบวกของพิกัดฉาก เรายินยอมใช้กฎมือขวาโดยให้นิ้วหัวแม่มือไปทางแกน Z บวก นิ้วชี้ไปทางแกน X บวก และนิ้วกลางชี้ไปทางแกน Y บวก ตั้งฉากกันเสมอ ตัวอย่างดังรูปต่อไปนี้ เราจะเลือกใช้แบบใดแบบหนึ่งตามความเหมาะสม



การบอกตำแหน่งของจุด P ในปริภูมิสามมิติ มีแกนพิกัดที่เป็นที่อ้างอิงบอกได้โดยใช้จำนวนจริง (x, y, z) เรียกว่าพิกัดฉากของจุด P และใช้ \mathbb{R}^3 แทนเซตของจุด (x, y, z) ในปริภูมิสามมิติ



- จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานระนาบ XY ไปยังแกน Z จะได้จุด $(0, 0, z)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉาย (projection) ของ P แกน Z
- จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานระนาบ YZ ไปยังแกน X จะได้จุด $(x, 0, 0)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P แกน X
- จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานระนาบ XZ ไปยังแกน Y จะได้จุด $(0, y, 0)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P แกน Y
- จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานแกน Z ไปที่ระนาบ XY จะได้จุด $(x, y, 0)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P บนระนาบ XY
- จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานแกน X ไปที่ระนาบ YZ จะได้จุด $(0, y, z)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P บนระนาบ YZ
- จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานแกน Y ไปที่ระนาบ XZ จะได้จุด $(x, 0, z)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P บนระนาบ XZ

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงเขียนกราฟในปริภูมิสามมิติแสดงจุดดังต่อไปนี้

1.1 $A(5, 0, 0)$

1.2 $B(0, 2, 1)$

1.3 $C(3, 1, 0)$

1.4 $D(-3, 0, 2)$

1.5 $E(1, 1, 3)$

1.6 $F(-4, 2, -3)$

1.7 $G(2, 1, -2)$

1.8 $H(3, -2, 6)$

2. จงหาภาพฉายของจุด P บนระนาบ XY, XZ และ YZ

2.1 $P(3, 1, 2)$

2.2 $P(1, 2, -2)$

2.3 $P(4, -1, 0)$

2.4 $P(-8, 9, 7)$

3. จงหาภาพฉายของจุด P บนแกน X, Y และ Z

3.1 $A(5, 0, 0)$

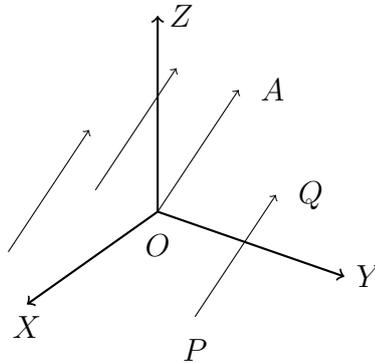
3.2 $B(0, 2, 1)$

3.3 $C(3, 1, 0)$

3.4 $D(-3, 0, 2)$

3.2 เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

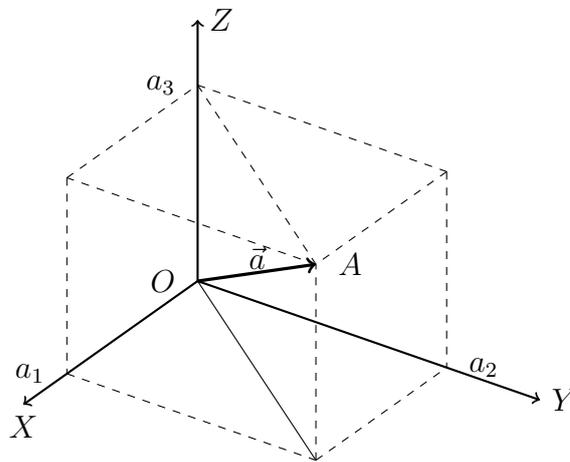
เวกเตอร์ (vector) คือปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง โดยทั่วไปใช้ส่วนของเส้นตรงเชื่อมโยงกันระหว่างจุดสองจุดและมีลูกศรกำกับแทนเวกเตอร์ และความยาวแทนขนาดของเวกเตอร์ ใช้สัญลักษณ์ \vec{PQ} แทนเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด P สิ้นสุดที่จุด Q มีทิศทางจาก P ไป Q และใช้ $\|\vec{PQ}\|$ แทนความยาวหรือขนาด (length/magnitude/norm) ของ \vec{PQ} และเวกเตอร์ทั้งสองจะเท่ากันก็ต่อเมื่อทั้งสองมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน



บทนิยาม 3.2.1 กำหนดให้ $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุดในปริภูมิสามมิติ แล้ว \vec{a} เป็นเวกเตอร์ตำแหน่ง (position vector) ของ \vec{PQ} คือ

$$\vec{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

ถ้า $a_1 = x_2 - x_1, a_2 = y_2 - y_1$ และ $a_3 = z_2 - z_1$ ดังนั้น $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ เรียก a_1, a_2 และ a_3 ว่า**ส่วนประกอบ** (component) ของ \vec{a} ตามแกน X แกน Y และ แกน Z ตามลำดับ



จากรูปโดยใช้ความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ว่า

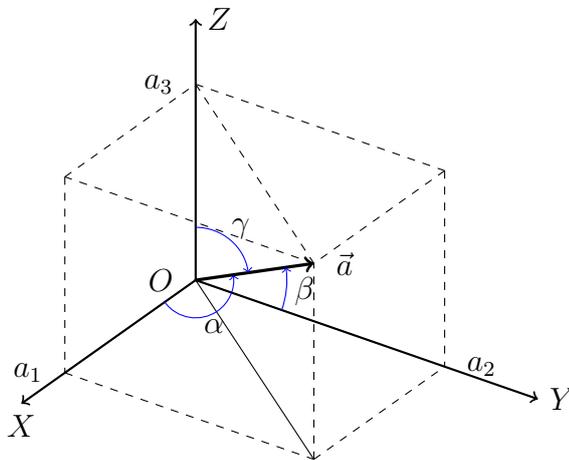
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

บทนิยาม 3.2.2 เวกเตอร์ที่มีส่วนประกอบทุกตัวเป็นศูนย์เรียกว่า **เวกเตอร์ศูนย์** (zero vector) เขียนแทนด้วย $\vec{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$

ข้อตกลง เมื่อ A เป็นจุดใน \mathbb{R}^3 และ O เป็นจุดกำเนิด เราจะเขียนเวกเตอร์ \vec{OA} แทนด้วย \vec{A}

มุมแสดงทิศทาง

บทนิยาม 3.2.3 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ที่ทำมุม α, β, γ กับแกน X แกน Y และแกน Z ด้านบวกตามลำดับโดยที่ $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ เรียก α, β, γ ว่ามุมแสดงทิศทาง (direction angles) ของ \vec{a} และ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ว่าโคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosines) ของ \vec{a}



จากรูปจะได้ว่า $\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}$ $\cos\beta = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}$ $\cos\gamma = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|}$

ตัวอย่าง 3.2.4 จงหาเวกเตอร์ตำแหน่งของ \vec{PQ} ขนาดและโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์นั้น

1. $P(1, 2, -3)$ และ $Q(-1, 0, -4)$
2. $P(4, -1, 2)$ และ $Q(5, -2, 3)$

บทนิยาม 3.2.5 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ และ $k \in \mathbb{R}$

1. $\vec{a} = \vec{b}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ และ $a_3 = b_3$
2. $\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
3. $k\vec{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
4. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

บทนิยาม 3.2.6 เราเรียกเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย** (unit vector)

ให้ \vec{a} เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ใน \mathbb{R}^3 และจะได้ว่า

$$\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \text{ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศเดียวกับ } \vec{a}$$

$$-\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \text{ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศตรงข้ามกับ } \vec{a}$$

ตัวอย่าง 3.2.7 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\langle 1, -2, 2 \rangle$

2. $\langle 3\sin\theta, 4\sin\theta, 5\cos\theta \rangle$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน X แกน Y และ แกน Z คือ \vec{i}, \vec{j} และ \vec{k} ตามลำดับ

$$\vec{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad \vec{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \quad \vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ แล้วจะได้ว่า

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\langle 1, 0, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1, 0 \rangle + a_3\langle 0, 0, 1 \rangle = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

ผลคูณเชิงสเกลาร์

บทนิยาม 3.2.8 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ของ \vec{a} และ \vec{b} เขียนแทนด้วย $\vec{a} \cdot \vec{b}$ นิยามโดย

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

ตัวอย่าง 3.2.9 จงหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ \vec{a} และ \vec{b}

1. $\vec{a} = \langle 3, -1, 5 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, 6, -3 \rangle$

2. $\vec{a} = \langle 2\sin x, \cos x, 1 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle \sin x, 2\cos x, 1 \rangle$

ทฤษฎีบท 3.2.10 ให้ \vec{a} , \vec{b} และ \vec{c} เป็นเวกเตอร์ใน \mathbb{R}^3 และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

3. $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

ตัวอย่าง 3.2.11 ให้ \vec{a} และ \vec{b} เป็นเวกเตอร์ใน \mathbb{R}^3 จงแสดงว่า

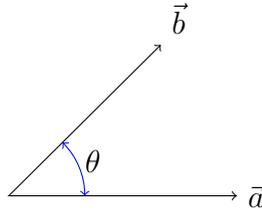
$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$$

มุมระหว่างเวกเตอร์

ทฤษฎีบท 3.2.12 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน \mathbb{R}^3 แล้ว

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง \vec{a} และ \vec{b} เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$ ดังรูป

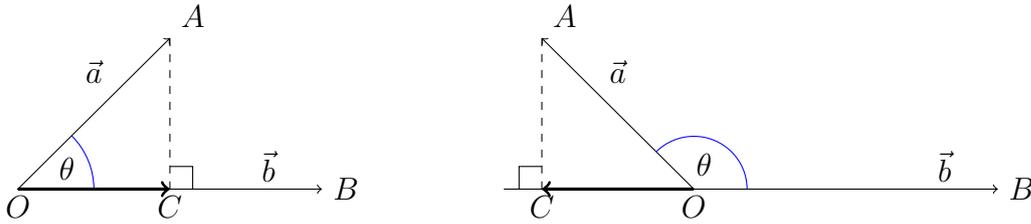


ข้อสังเกต \vec{a} และ \vec{b} ตั้งฉากกัน (orthogonal) ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

ตัวอย่าง 3.2.13 ให้ $\vec{a} = \langle 3, 2, -1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 1, -1, 1 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle 3, 4, -2 \rangle$
จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์คู่ใดที่ตั้งฉากกัน

ภาพฉายเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.14 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ และ θ เป็นมุมระหว่าง \vec{a} และ \vec{b} ลากเส้นตรงจาก A ไปตั้งฉากกับ \vec{OB} ที่จุด C ดังรูป



เรียก \vec{OC} ว่า ภาพฉายเวกเตอร์ (vector projection) ของ \vec{a} บน \vec{b} เขียนแทนด้วย $\text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a}$

ทฤษฎีบท 3.2.15 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ แล้วจะได้ว่า

$$\text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b} \quad \text{และ} \quad \text{ขนาดของภาพฉาย คือ} \quad \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{b}\|}$$

ตัวอย่าง 3.2.16 จงหาภาพฉายเวกเตอร์และขนาดของภาพฉายของ \vec{a} บน \vec{b}

$$\vec{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle \quad \text{และ} \quad \vec{b} = \langle 1, -2, -2 \rangle$$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.17 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

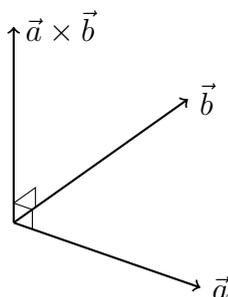
ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (vector product/cross product) ของ \vec{a} และ \vec{b} เขียนแทนด้วย $\vec{a} \times \vec{b}$ คือ

$$\vec{a} \times \vec{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

หรือ

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

เมื่อ $|M|$ แทนดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ M



ตัวอย่าง 3.2.18 จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{a} = \langle 1, -3, 4 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 2, 2, 1 \rangle$

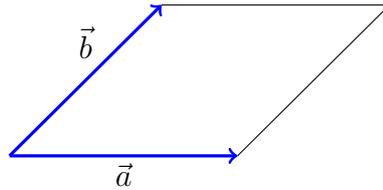
พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน

ทฤษฎีบท 3.2.19 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน \mathbb{R}^3 และ θ เป็นมุมระหว่าง \vec{a} และ \vec{b} แล้ว

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$$

ข้อสังเกต \vec{a} และ \vec{b} ขนานกัน (parallel) ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ หรือ $\theta = 0$ หรือ π

ทฤษฎีบท 3.2.20 ให้ \vec{a} และ \vec{b} เป็นเวกเตอร์ใน \mathbb{R}^3 แล้วพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram) ที่มีด้านประชิดเป็น \vec{a} และ \vec{b} มีค่าเท่ากับ $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$



ตัวอย่าง 3.2.21 จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $A(2, 1, 1)$, $B(-1, 3, 1)$ และ $C(0, 2, 1)$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.22 ให้ \vec{a} , \vec{b} และ \vec{c} เป็นเวกเตอร์ใน \mathbb{R}^3 แล้วผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ (scalar triple products) ของ \vec{a} , \vec{b} และ \vec{c} คือ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ นั่นคือ

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

เมื่อ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$

โดยสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์จะได้ว่า $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

แบบฝึกหัด 3.2

1. กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1, 2, 0 \rangle$, $\vec{b} = \langle 1, -1, 2 \rangle$, $\vec{c} = \langle 1, 0, 3 \rangle$ และ $\vec{d} = \langle -2, 1, 5 \rangle$ จงหา

1.1 $2\vec{a} - 3\vec{b}$

1.2 $\|\vec{c} + 2\vec{d}\| + \|2\vec{a} + \vec{b}\|$

1.3 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $2\vec{c} - \vec{d}$

1.4 โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{b} + \vec{c}$

1.5 มุมระหว่าง $\vec{a} + \vec{c}$ กับ $\vec{a} - \vec{c}$

1.6 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$

1.7 ภาพฉายเวกเตอร์และภาพฉายสเกลาร์ของ \vec{b} บน \vec{c}

1.8 เวกเตอร์ 5 หน่วยที่ตั้งฉากกับ \vec{a} และ \vec{c}

1.9 จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ \vec{a} และ \vec{d}

2. จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ใดต่อไปนี้ตั้งฉากกันบ้าง

$$\vec{a} = \langle 1, 2, 1 \rangle, \vec{b} = \langle 1, -2, 3 \rangle, \vec{c} = \langle -3, 3, 1 \rangle \text{ และ } \vec{d} = \langle -1, 1, 7 \rangle$$

3. จงหาพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $(-3, 1, 2)$, $(-5, 1, 0)$ และ $(4, -2, 1)$

4. กำหนดให้ $A(1, 1, 2)$, $B(2, 0, 3)$, $C(3, 0, 0)$ และ $D(2, 1, -1)$ จงแสดงว่ารูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้

5. จงยกตัวอย่างเวกเตอร์ \vec{a} , \vec{b} และ \vec{c} ที่ทำให้ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

6. จงใช้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์แสดงว่า $\langle 1, 5, -2 \rangle$, $\langle 3, -1, 0 \rangle$ และ $\langle 5, 9, -4 \rangle$ อยู่บนระนาบเดียวกัน

7. ให้ \vec{a} , \vec{b} และ \vec{c} เป็นเวกเตอร์ใน \mathbb{R}^3 จงแสดงว่า

7.1 $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

7.2 ถ้า $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ แล้ว $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$

7.3 $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$

7.4 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

7.5 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$

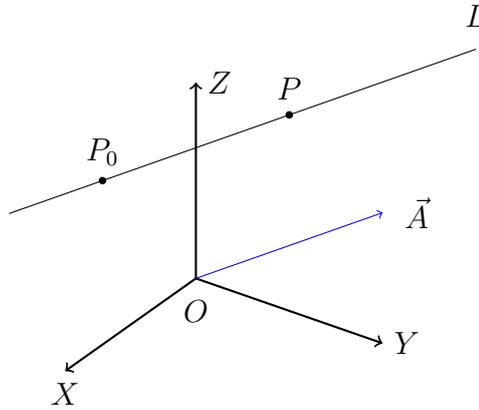
7.6 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$

3.3 เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

บทนิยาม 3.3.1 ให้ P_0 เป็นจุดใน \mathbb{R}^3 และ $\vec{A} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน \mathbb{R}^3 เราจะเรียก

เซตของจุด P ใดๆ ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{P_0P}$ ขนานกับ \vec{A} ว่า **เส้นตรง (Line)** ที่ผ่านจุด P_0 และขนานกับ \vec{A}

และเรียก \vec{A} ว่า **เวกเตอร์แสดงทิศทาง (direction vector)** ของเส้นตรง



เนื่องจาก $\overrightarrow{P_0P}$ ขนานกับ \vec{A} ดังนั้นจะได้ว่ามี $t \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{A} \quad \text{หรือ} \quad \vec{P} = \vec{P}_0 + t\vec{A} \quad (3.1)$$

เรียกสมการ (3.1) ว่า **สมการเวกเตอร์ (vector equation)** ของเส้นตรง L

ถ้ากำหนดจุด $P(x, y, z)$ และ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และ $\vec{A} = \langle a, b, c \rangle$ ดังนั้น

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle a, b, c \rangle = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct \rangle$$

เราจะแยกเขียนสมการสำหรับส่วนประกอบได้เป็น

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct \quad (3.2)$$

เรียกสมการ (3.2) ว่า **สมการอิงตัวแปรเสริม (parametric equation)** ของเส้นตรง L

ถ้า a, b, c ไม่มีจำนวนใดเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (3.3)$$

เรียกสมการ (3.3) ว่า **สมการสมมาตร (symmetric equation)** ของเส้นตรง L

ตัวอย่าง 3.3.2 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(1, 2, 3)$ และขนานกับ $\vec{A} = \langle 1, 2, -1 \rangle$

การตรวจสอบว่าจุด $P(x, y, z)$ อยู่บนเส้นตรง L หรือไม่ทำได้โดยการแทนค่า x, y, z ลงในสมการเส้นตรง L ว่าสอดคล้องกับสมการของเส้นตรง L หรือไม่

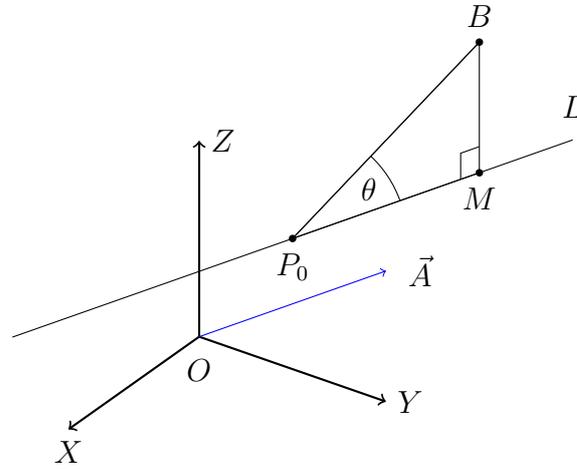
ตัวอย่าง 3.3.3 จงตรวจสอบว่าจุด $P(1, -2, 3)$ อยู่บนเส้นตรงต่อไปนี้หรือไม่

1. $x = 3 - t, y = 2 - 4t, z = 3 + t$

2. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{3} = z-2$

ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง

การวัดระยะทางระหว่างจุด B กับเส้นตรง L คือความยาวที่สั้นที่สุดจากจุด B ไปยังเส้นตรง L หมายถึงความยาวของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด B ไปยังเส้นตรง L ที่จุด M เรียกจุด M ว่า **จุดเชิงเส้นตั้งฉาก** (Orthogonal point)



จากรูปจะได้ว่า $\|\vec{BM}\| = \|\vec{P_0B}\| \sin \theta$ เนื่องจาก \vec{A} ขนานกับ $\vec{P_0M}$ ดังนั้น θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{P_0B}$ กับ \vec{A} ดังนั้น

$$\|\vec{BM}\| = \frac{\|\vec{P_0B}\| \|\vec{A}\| \sin \theta}{\|\vec{A}\|} = \frac{\|\vec{P_0B} \times \vec{A}\|}{\|\vec{A}\|}$$

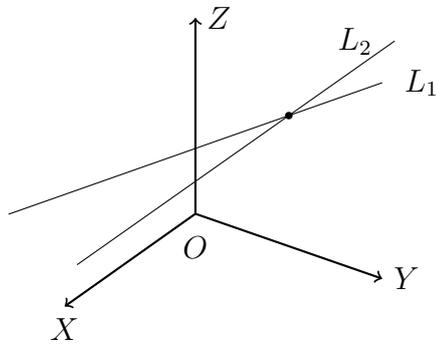
ตัวอย่าง 3.3.4 จงหาระยะทางจากจุด $B(2, 1, -1)$ ไปยังเส้นตรง

$$x = 5 + 4t, \quad y = 2 - t, \quad z = 4 + 3t$$

การตัดกันของเส้นตรง

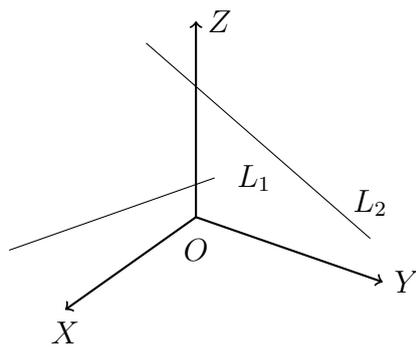
ความสัมพันธ์ของเส้นตรง L_1 และ L_2 ในปริภูมิสามมิติมีลักษณะดังนี้

1. ตัดกัน

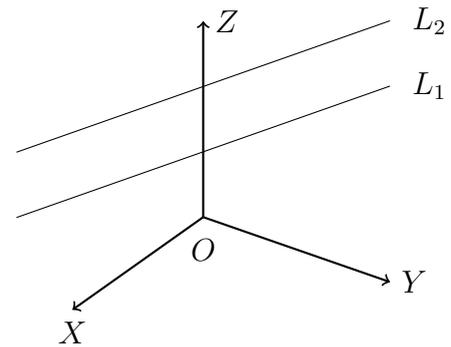


2. ไม่ตัดกัน

2.1 ไม่ตัดกัน และไม่ขนานกัน



2.2 ไม่ตัดกัน และขนานกัน



ตัวอย่าง 3.3.5 จงตรวจสอบว่า L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดจงหาจุดตัด

$$L_1 : x = 2 + t, y = 4 - t, z = 3 + 2t$$

$$L_2 : x = 1 - s, y = 9 + 3s, z = 2 + s$$

การขนานกันของเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.6 เส้นตรงสองเส้นขนานกัน (parallel line) ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้งสองเส้นขนานกัน

ตัวอย่าง 3.3.7 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 2, 3)$ และขนานกับเส้นตรง

$$x + 2 = \frac{4 - y}{2} = 1 - z$$

การไขว้ต่างระนาบของเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.8 เราจะเรียกเส้นตรงสองเส้นว่า **เส้นไขว้ต่างระนาบ** (skew line) ก็ต่อเมื่อเราไม่สามารถหาระนาบที่เส้นตรงทั้งสองอยู่บนระนาบเดียวกันได้ หรือกล่าวได้อีกอย่างว่าเส้นตรงทั้งสองไม่ตัดกันและไม่ขนานกัน

ตัวอย่าง 3.3.9 จงพิจารณา L_1 และ L_2 ว่าเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบกันหรือไม่

$$L_1 : x = \frac{y}{2} = z - 1$$

$$L_2 : \frac{x + 1}{2} = y - 1 = \frac{z + 2}{3}$$

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_0 และขนานกับ \vec{A}

1.1 $P_0(2, 1, 1)$ และ $\vec{A} = \langle 1, -1, 3 \rangle$

1.2 $P_0(-1, 3, 5)$ และ $\vec{A} = \langle 0, 2, -1 \rangle$

2. จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 และ P_2

2.1 $P_1(1, -1, 0)$ และ $P_2(2, -3, 5)$

2.2 $P_1(-1, -3, -2)$ และ $P_2(-5, 0, 1)$

3. จงตรวจสอบว่าจุด $(1, 2, -3)$ อยู่บนเส้นตรงใดต่อไปหรือไม่

3.1 $x = 3 - 2t, y = 3 + t, z = 1 - 4t$

3.3 $2x - 1 = \frac{y + 2}{2} = \frac{z}{3}$

3.2 $2x = 3 + 2t, y = 1 - 2t, 3z = 4t - 7$

3.4 $\frac{x + 7}{4} = 4 - y = \frac{z + 9}{3}$

4. จงพิจารณาว่าจุด $A(3, 3, 1), B(-1, 5, -7)$ และ $C(5, 2, 5)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

5. จงหาระยะทางจากจุด $B(1, -2, 1)$ ไปยังเส้นตรงต่อไปนี้

5.1 $x = 6 + 4t, y = 3 - 2t, z = 1 + t$

5.2 $\frac{x - 1}{2} = \frac{1 - y}{3} = \frac{z + 1}{4}$

6. จงตรวจสอบว่า L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดจงหาจุดตัด

6.1 $L_1: x = 2 + t, y = -1 + 3t, z = 2 - 3t$

$L_2: x = 4 + s, y = 5 + 3s, z = s$

6.2 $L_1: \frac{x - 1}{2} = 2 - y = z$

$L_2: \frac{2x + 1}{3} = y = z - 2$

7. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง $x = \frac{3 - y}{2} = z - 2$

8. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 2, 1)$ และขนานกับเส้นตรง $\frac{x + 3}{2} = \frac{1 - y}{5} = 2 - z$

9. จงพิจารณา L_1 และ L_2 ว่าเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบกันหรือไม่

9.1 $L_1: 2x = 1 + 4t, y = 2 - t, z = t$

$L_2: x = -4s, y = 1 + 2s, 3z = 1 - 6s$

9.2 $L_1: x - 1 = \frac{3 - y}{2} = 2z + 1$

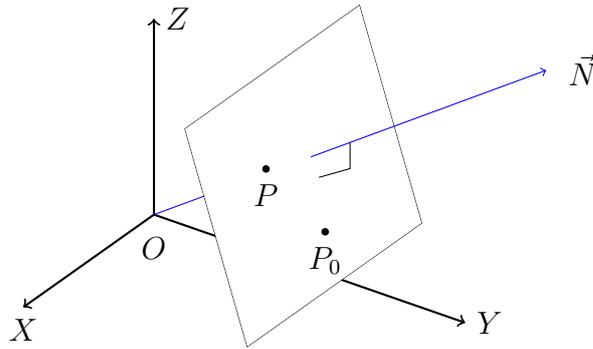
$L_2: 2 - x = \frac{y - 1}{2} = \frac{1 - 4z}{2}$

3.4 ระนาบในปริภูมิสามมิติ

บทนิยาม 3.4.1 ให้ P_0 เป็นจุดใน \mathbb{R}^3 และ $\vec{N} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน \mathbb{R}^3 เราจะเรียก

เซตของจุด P ใด ๆ ซึ่งทำให้ $\vec{P_0P}$ ตั้งฉากกับ \vec{N} ว่า **ระนาบ (plane)** ที่ผ่านจุด P_0 และตั้งฉากกับเวกเตอร์ \vec{N}

และเรียก \vec{N} ว่า **เวกเตอร์แนวฉาก (normal vector)**



เนื่องจาก $\vec{P_0P}$ ตั้งฉากกับ \vec{N} ดังนั้น $\vec{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$ หรือ

$$(\vec{P} - \vec{P_0}) \cdot \vec{N} = 0 \tag{3.4}$$

เราจะเรียกสมการ (3.4) ว่า **สมการเวกเตอร์ของระนาบ (vector equation of the plane)**

ถ้ากำหนดให้ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$ และ $\vec{N} = \langle a, b, c \rangle$ จะได้ว่า

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{3.5}$$

เรียกสมการ (3.5) ว่า **สมการสเกลาร์ (scalar equation)** ของระนาบที่ผ่านจุด (x_0, y_0, z_0) และมี $\langle a, b, c \rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

ถ้าเราจัดรูปสมการ (3.5) โดยกำหนดให้ $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ จะได้ว่า

$$ax + by + cz = d \tag{3.6}$$

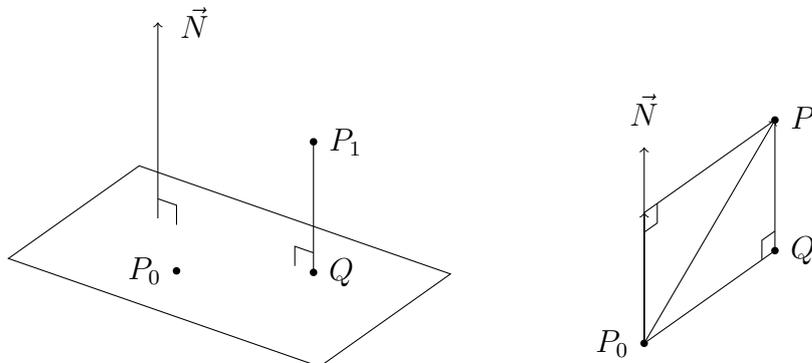
เรียกสมการ (3.6) ว่า **สมการคาร์ทีเซียน (cartesian equation)** ของระนาบ ที่มี $\langle a, b, c \rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

ตัวอย่าง 3.4.2 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการสเกลาร์ และสมการคาร์ทีเซียนของระนาบที่ผ่านจุด $P_0(1, 2, 3)$ และตั้งฉากกับ $\vec{N} = \langle 1, -1, 4 \rangle$

ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ

บทนิยาม 3.4.3 ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ คือระยะทางตั้งฉากจากจุดนั้นไปยังระนาบ

ให้ระนาบ M มีสมการเวกเตอร์เป็น $(\vec{P} - \vec{P}_0) \cdot \vec{N} = 0$ และ P_1 เป็นจุดใน \mathbb{R}^3 ลากไปตั้งฉากกับระนาบ M ที่จุด Q ดังรูป



จากรูปจะได้ว่า $\|\overrightarrow{QP_1}\|$ = ขนาดของภาพฉายของ $\overrightarrow{P_0P_1}$ บน \vec{N} จะได้ว่า

$$\|\overrightarrow{QP_1}\| = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

กำหนดให้ระนาบ M ผ่านจุด $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ และมี $\vec{N} = \langle a, b, c \rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก M จะมีสมการคาร์ทีเซียนเป็น $ax + by + cz = d$ เมื่อ $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ แล้ว

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{QP_1}\| &= \frac{|(\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|\langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle \cdot \langle a, b, c \rangle|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

ดังนั้นระยะทางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ กับระนาบ $ax + by + cz = d$ คือ

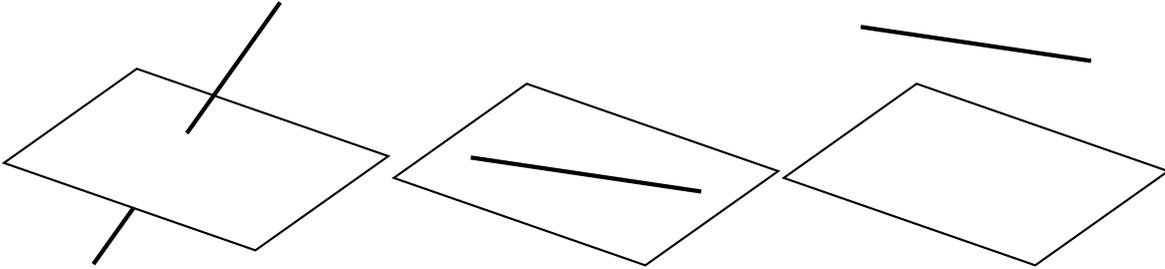
$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ตัวอย่าง 3.4.4 จงหาระยะทางระหว่างจุด $P_1(4, 3, -1)$ กับระนาบ $x - 2y + 2z = 5$

เส้นตรงกับระนาบ

เส้นตรงกับระนาบมีความสัมพันธ์กัน 3 ลักษณะคือ

1. เส้นตรงกับระนาบมีจุดร่วมกันจุดเดียว เรียกว่าเส้นตรงตัดกับระนาบ
2. เส้นตรงกับระนาบมีจุดร่วมกันมากกว่าหนึ่งจุด นั่นคือเส้นต้องอยู่บนระนาบ
3. เส้นตรงกับระนาบไม่มีจุดร่วม นั่นคือเส้นตรงขนานกับระนาบ



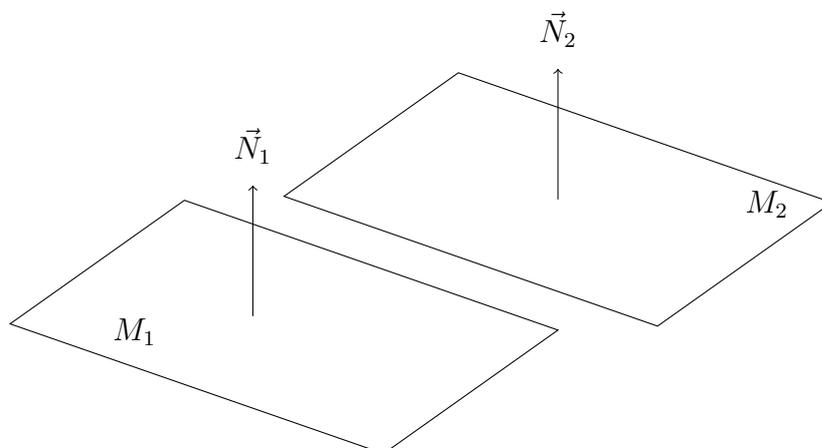
ตัวอย่าง 3.4.5 จงพิจารณาว่าเส้นตรงกับระนาบต่อไปนี้ตัดกันหรือขนานกัน ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด ถ้าขนานกันจงพิจารณาว่าเส้นตรงอยู่บนระนาบหรือไม่

1. $x = 1 + 2t, y = 2 + t, z = 3 - 3t$ และ $x + 4y + 2z = 5$

2. $x - 1 = \frac{y + 3}{2} = z$ และ $2x - y + z = 7$

การขนานกันของระนาบ

ระนาบขนานกัน ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสองขนานกัน



ตัวอย่าง 3.4.6 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(1, 2, -3)$ และขนานกับระนาบ $x + 2y - z = 5$

บทนิยาม 3.4.7 ระยะทางระหว่างระนาบทั้งสอง คือระยะฉากระหว่างระนาบทั้งสอง

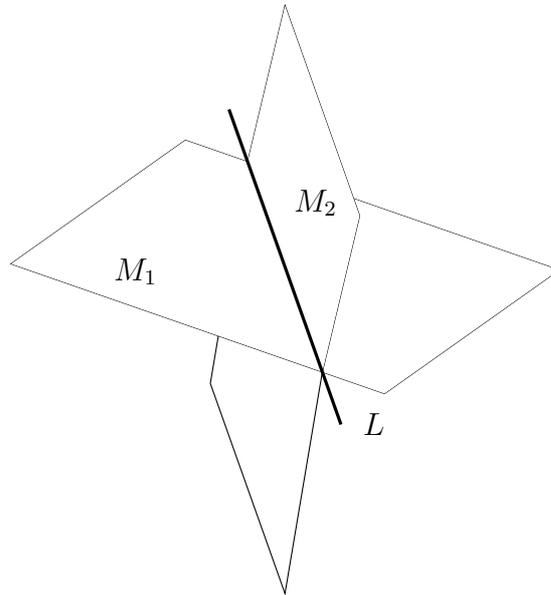
ให้ M_1 และ M_2 เป็นระนาบที่ขนานกันมีสมการดังนี้ $ax + by + cz = d_1$ และ $ax + by + cz = d_2$ ตามลำดับ ให้ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ เป็นจุดบนระนาบ M_1 ดังนั้น

$$\begin{aligned} \text{ระยะทางระหว่างระนาบ } M_1 \text{ และ } M_2 &= \text{ระยะทางระหว่างจุด } P_1 \text{ กับระนาบ } M_2 \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.4.8 จงหาระยะทางระหว่างระนาบ $x + 2y - 2z = 10$ และ $x + 2y - 2z = 1$

การตัดกันของระนาบ

ระนาบที่ตัดกันคือระนาบที่ไม่ขนานกัน (พิจารณาจากเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสองขนานกันหรือไม่) รอยตัดที่เกิดขึ้นย่อมเป็นเส้นตรง



จากรูปเนื่องจากเส้นตรง L อยู่บนระนาบ M_1 และ M_2 ดังนั้นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L ต้องตั้งฉากกับ \vec{N}_1 และ \vec{N}_2 ดังนั้น $\vec{A} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$

ตัวอย่าง 3.4.9 จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ

$$2x - y + z = 1 \quad \text{และ} \quad x + y - 2z = 5$$

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด P_0 และมี \vec{N} เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

1.1 $P_0(2, 1, 1)$ และ $\vec{N} = \langle 2, -1, 5 \rangle$

1.3 $P_0(1, 3, -3)$ และ $\vec{N} = \langle 0, 3, -2 \rangle$

1.2 $P_0(-1, 0, 5)$ และ $\vec{N} = \langle 3, 2, 1 \rangle$

1.4 $P_0(2, 6, -4)$ และ $\vec{N} = \langle -1, -3, 1 \rangle$

2. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุดทั้ง 3 จุด

2.1 $(1, -1, 0)$, $(0, -1, 2)$ และ $(-1, -3, 5)$

2.2 $(-1, -3, -2)$, $(2, 5, 0)$ และ $(1, -2, 1)$

3. จงเขียนกราฟของระนาบต่อไปนี้

3.1 $x = z$

3.3 $x - y + z = 2$

3.5 $5x + 2y - 3z = 15$

3.2 $3x + y = 2$

3.4 $2x - y + z = 5$

3.6 $3x + 3y + 2z = 6$

4. จงพิจารณาว่าจุดทั้ง 4 จุดอยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่

4.1 $(1, 1, 1)$, $(-2, 4, 1)$, $(3, 1, 2)$ และ $(5, 1, 3)$

4.2 $(1, 2, 7)$, $(-1, 1, 2)$, $(2, 0, 7)$ และ $(1, 1, 2)$

5. จงหาระยะทางระหว่างจุดกับระนาบที่กำหนดให้ต่อไปนี้

5.1 $(1, -2, 3)$ กับ $3x + 2y - z = 12$

5.2 $(-1, 1, -2)$ กับ $3x + 4y - 5z = 15$

6. จงหาจุดบนระนาบ $x - 2y + 3z = 4$ ซึ่งอยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $(2, 3, -2)$

7. พิจารณาเส้นตรง L กับระนาบ M ที่กำหนดให้ตัดกันหรือขนานกัน ถ้าตัดกันจงหาจุดตัดและมุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบ ถ้าขนานกันจงพิจารณาว่าเส้นตรงอยู่บนระนาบหรือไม่ และจงหาระยะทางระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

7.1 $L : \frac{x}{6} = y = \frac{1-z}{2}$
 $M : x - 2y + 2z = 4$

7.3 $L : x = 3 + t, y = -1 + 3t, z = 1 + 2t$
 $M : 2x - y + 3z = 5$

7.2 $L : \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z$
 $M : 5x + 4y - 3z = 15$

7.4 $L : 1 - x = \frac{y}{2} = z - 2$
 $M : 3x + y + z = 3$

8. จงหาสมการระนาบที่สัมผัสคล่องเงื่อนไซต่อไปนี้

8.1 ผ่านจุด $(1, 0, 2)$ และเส้นตรง $\frac{x}{3} = y + 1 = \frac{2-z}{2}$

8.2 ผ่านเส้นตรง $\frac{x-2}{2} = y + 1 = -z$ และ $\frac{1-x}{2} = -y = z + 1$

8.3 ผ่านจุด $(2, 1, -3)$ และขนานกับเส้นตรง $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$ และ $x - 1 = y + 1 = \frac{z}{2}$

8.4 ผ่านเส้นตรง $x = 3 + 2t, y = -t, z = 2t$ และ $x - 2 = \frac{-1-y}{2} = -3 - z$

8.5 ผ่านจุด $(2, -1, 0)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$

8.6 ผ่านจุด $(1, 2, 3)$ และ $(2, 0, 2)$ และขนานกับเส้นตรง $x = y - 1 = \frac{z}{2}$

9. จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ M_1 และ M_2

9.1 $M_1 : x + y + z = 2$

$M_2 : 2x - y + z = 3$

9.2 $M_1 : x + y + 3z = 5$

$M_2 : x - 5y + z = 1$

10. จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(1, 2, 3)$, $(2, 0, 1)$ และตั้งฉากกับระนาบ $x + y - z = 1$

บทที่ 4

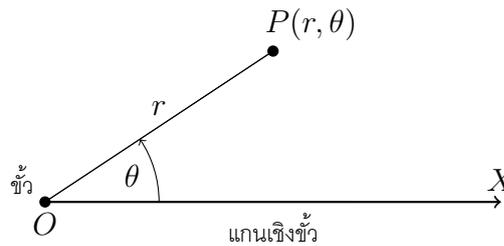
ระบบพิกัดเชิงขั้ว

4.1 พิกัดเชิงขั้ว

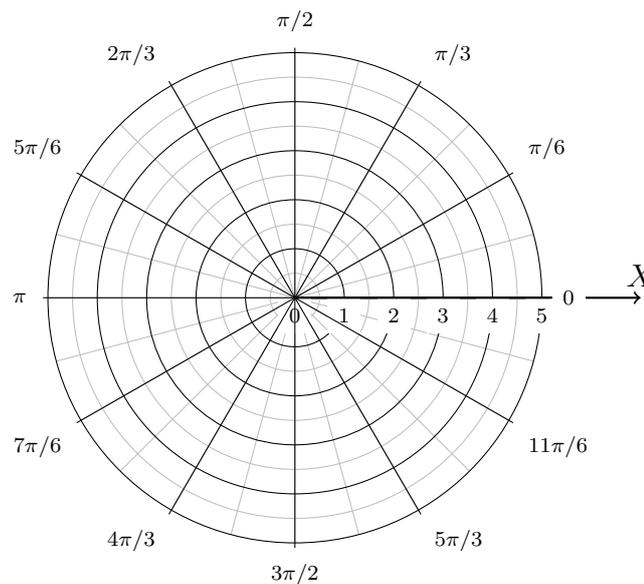
บทนิยาม 4.1.1 ให้ P เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ XY

ถ้า r เป็นระยะทางจาก O (จุดกำเนิด) ไปยังจุด P และส่วนของเส้นตรง OP ทำมุม θ กับแกน OX (วัดแบบทวนเข็มนาฬิกา)

เราจะเรียกจุด (r, θ) ว่าพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) ของจุด P

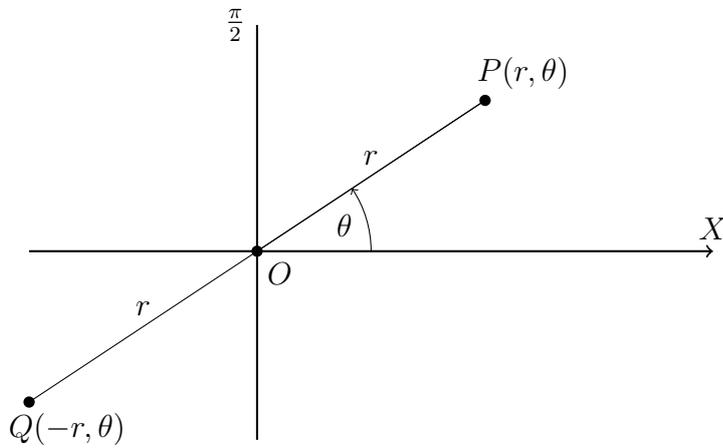


ตัวอย่าง 4.1.2 จงเขียนจุดต่อไปนี้อยู่ในระนาบพิกัดเชิงขั้ว $A(1, \frac{\pi}{4})$, $B(2, \frac{\pi}{2})$, $C(3, \frac{3\pi}{4})$, $D(4, \frac{11\pi}{6})$ และ $E(2.5, -\frac{2\pi}{3})$

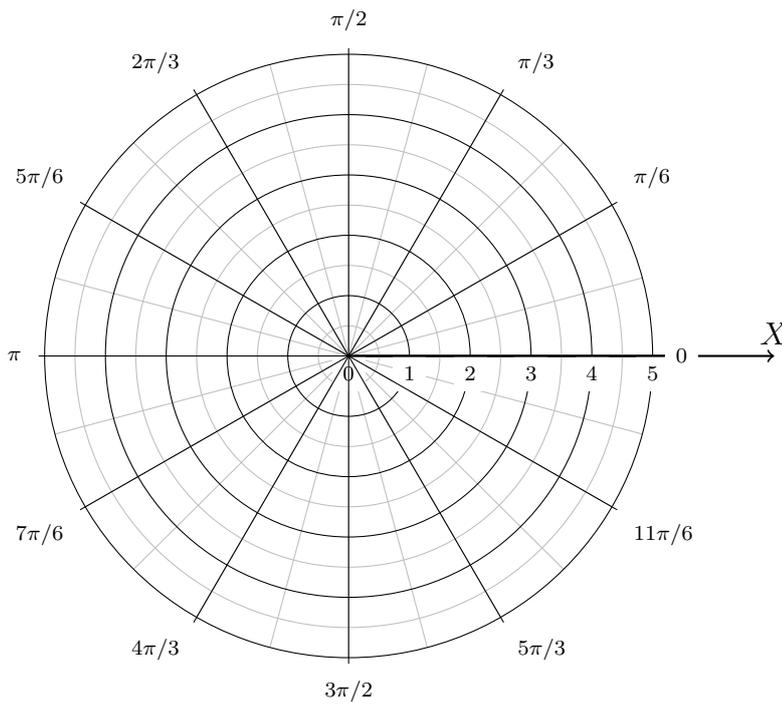


บทนิยาม 4.1.3 ถ้า P มีพิกัดเชิงขั้วเป็น (r, θ) เมื่อ $r > 0$ แล้ว

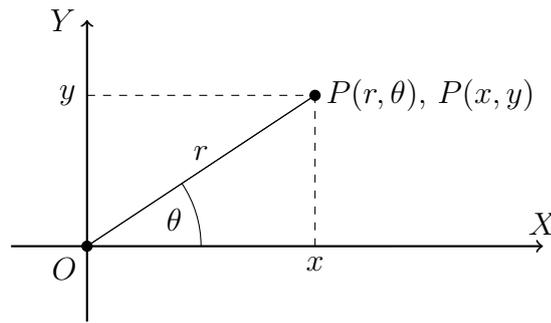
$(-r, \theta)$ หมายถึงพิกัดของจุดปลายที่ได้จากการลากเส้นตรงจากขั้วไปในทิศตรงกันข้ามกับ \overrightarrow{OP} เป็นระยะ r



ตัวอย่าง 4.1.4 จงเขียนจุดต่อไปนี้ลงในระบบพิกัดเชิงขั้ว $A(-1, \frac{\pi}{4})$, $B(-2, \frac{3\pi}{2})$, $C(-3.5, \frac{5\pi}{6})$ และ $D(-3, -\frac{2\pi}{3})$



ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) และพิกัดฉาก (x, y) ของจุด P โดยที่ไม่ใช่จุดกำเนิด



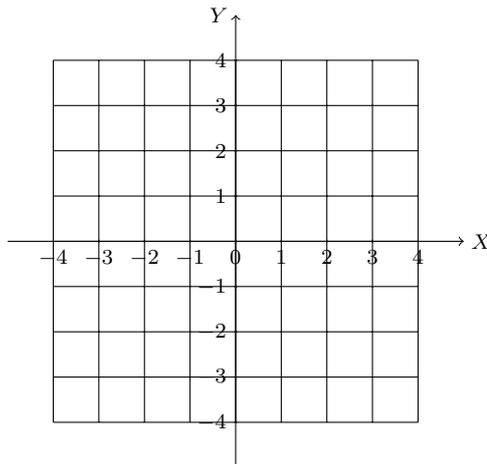
จะได้ $x^2 + y^2 = r^2$

$x = r \cos \theta$ และ $y = r \sin \theta$

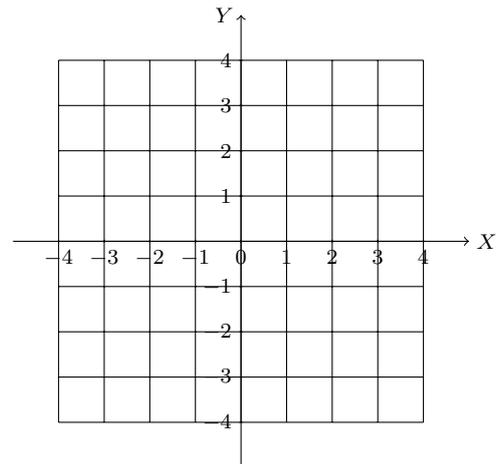
ดังนั้น $\tan \theta = \frac{y}{x}$

ตัวอย่าง 4.1.5 จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดพิกัดฉากต่อไปนี้ เมื่อ $r > 0$ และ $0 \leq \theta < 2\pi$

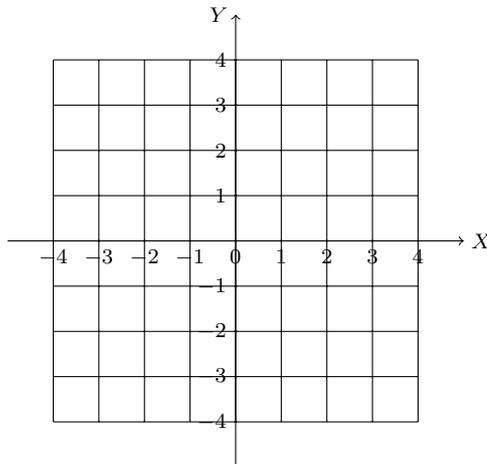
1. $(2, 0)$



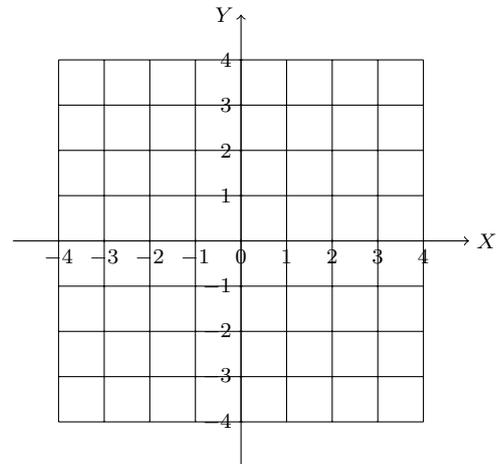
3. $(-2, 2\sqrt{3})$



2. $(2, 2)$



4. $(-\sqrt{3}, -1)$



ตัวอย่าง 4.1.6 จงหาพิกัดฉากของจุดที่มีพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

1. $(4, \frac{5\pi}{3})$

2. $(-5, -\frac{3\pi}{4})$

ตัวอย่าง 4.1.7 จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

1. $r = \frac{6}{3\cos\theta + 2\sin\theta}$

2. $r = \frac{5}{2 - \cos\theta}$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ เมื่อ $r > 0$ และ $0 \leq \theta < 2\pi$

1.1 $(-1, 1)$

1.3 $(-1, \sqrt{3})$

1.5 $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

1.2 $(-3, -3)$

1.4 $(4\sqrt{3}, -1)$

1.6 $(8, 4\sqrt{3})$

2. จงเขียนจุดในระบบพิกัดฉาก และหาพิกัดฉากของจุดต่อไปนี้

2.1 $A(2, \frac{\pi}{4})$

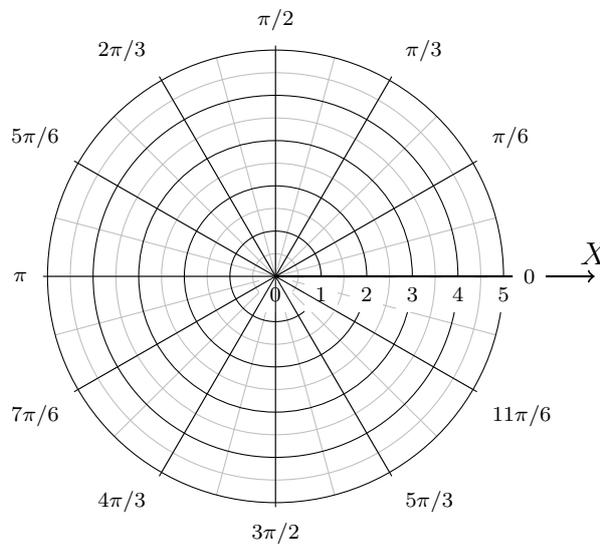
2.3 $C(-3, \frac{5\pi}{6})$

2.5 $E(-5, \frac{11\pi}{6})$

2.2 $B(-1, \frac{3\pi}{3})$

2.4 $D(4, -\frac{\pi}{4})$

2.6 $E(2.5, \frac{4\pi}{3})$



3. จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดพิกัดฉากต่อไปนี้มาอย่างน้อย 5 จุด

3.1 $(-1, 1)$

3.2 $(-3, -\sqrt{3})$

3.3 $(\sqrt{2}, \sqrt{6})$

4. จงเขียนสมการในระบบพิกัดฉากให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

4.1 $x + y = 2$

4.3 $x^2 + y^2 = 4$

4.5 $x^2 - y^2 = xy$

4.2 $y = x^2$

4.4 $x^2 + y^2 = 2x$

4.6 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

5. จงเขียนสมการในระบบเชิงขั้วให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

5.1 $r = 3$

5.3 $r = 2\cos 2\theta$

5.5 $r = \frac{1}{1 - \sin\theta}$

5.2 $r = 5\sin\theta$

5.4 $r = 1 - \sin\theta$

5.6 $r = \tan\theta$

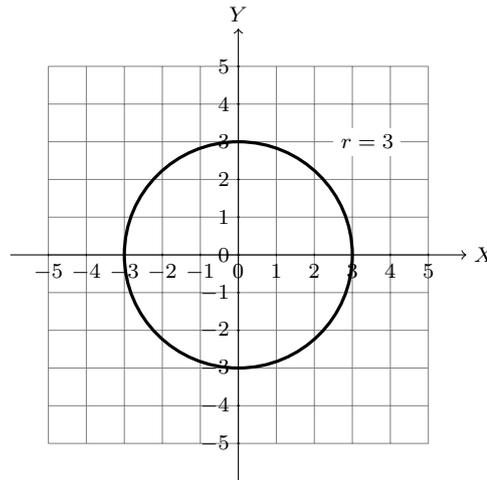
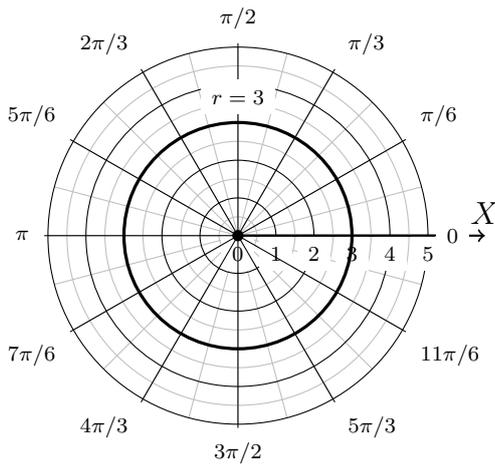
4.2 กราฟของสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว

การเขียนกราฟของสมการ $r = f(\theta)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว มีแนวคิดเหมือนกับการเขียนกราฟของสมการในระบบพิกัดฉาก โดยการนำจุด (r, θ) ที่สอดคล้องสมการไปเขียนลงบนพิกัด ต่อไปตัวอย่างกราฟของระบบพิกัดเชิงขั้วที่สำคัญ

1. สมการ $f(\theta) = k$

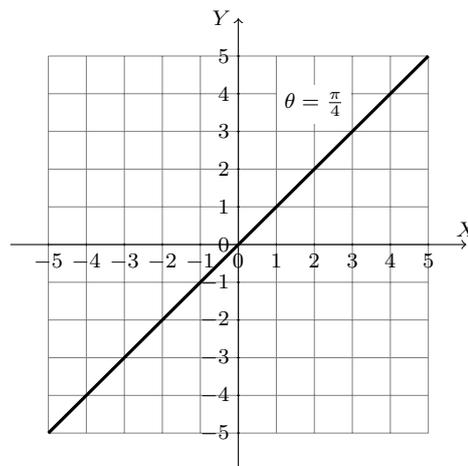
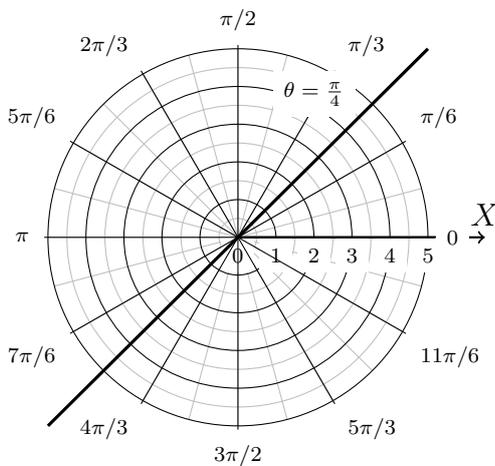
สมการ $r = f(\theta) = k$ เมื่อ $k \neq 0$ เป็นกราฟวงกลมที่มีรัศมี $|k|$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$

ตัวอย่างเช่น $r = 3$



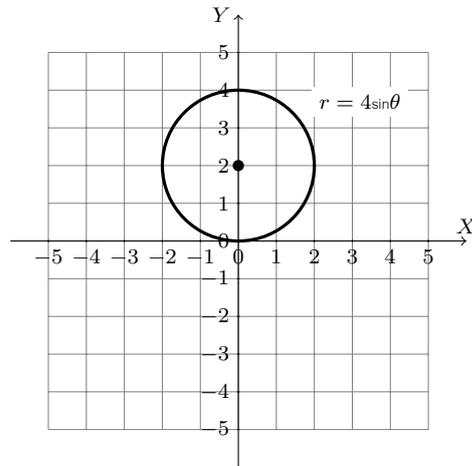
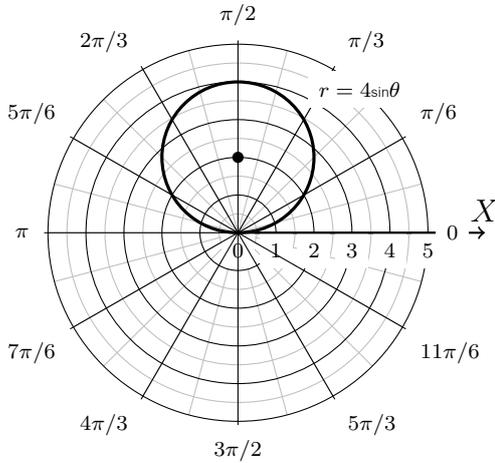
2. สมการ $\theta = \theta_0$

สมการ $\theta = \theta_0$ เป็นกราฟเส้นตรงที่ทำมุม θ_0 กับแกน X ตัวอย่างเช่น $\theta = \frac{\pi}{4}$

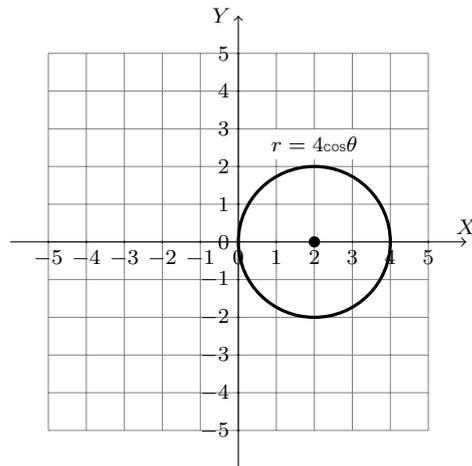
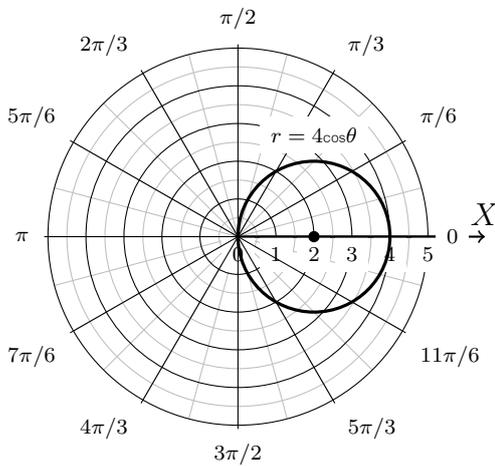


3. สมการ $f(\theta) = 2k\sin\theta$ และ $f(\theta) = 2k\cos\theta$

สมการ $r = f(\theta) = 2k\sin\theta$ เมื่อ $k \neq 0$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$ เป็นกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางกลางอยู่ที่ $(k, \frac{\pi}{2})$ รัศมี $|k|$ ตัวอย่างเช่น $r = 4\sin\theta$

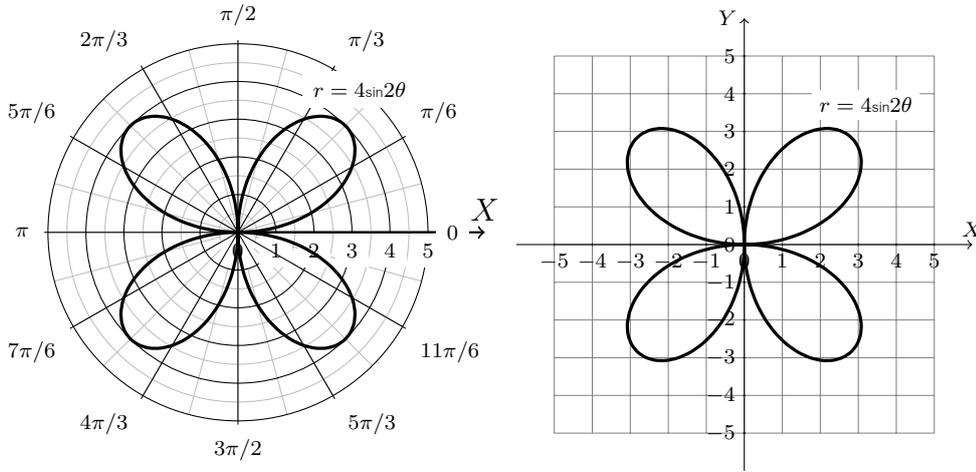


สมการ $r = f(\theta) = 2k\cos\theta$ เมื่อ $k \neq 0$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$ เป็นกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางกลางอยู่ที่ $(k, 0)$ รัศมี $|k|$ ตัวอย่างเช่น $r = 4\cos\theta$

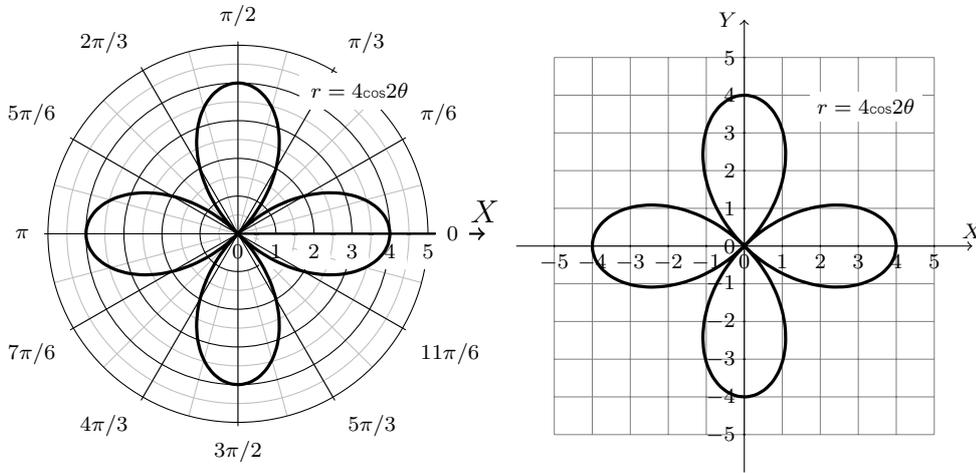


4. สมการ $f(\theta) = k\sin 2n\theta$ และ $f(\theta) = k\cos 2n\theta$

สมการ $r = f(\theta) = k\sin 2n\theta$ เมื่อ $k \neq 0, n \in \mathbb{N}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $4n$ กลีบ ตัวอย่างเช่น $r = 4\sin 2\theta$

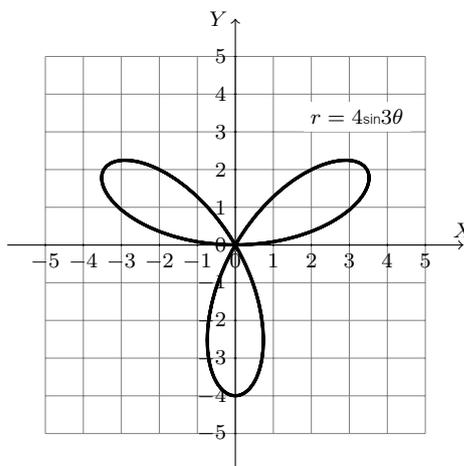
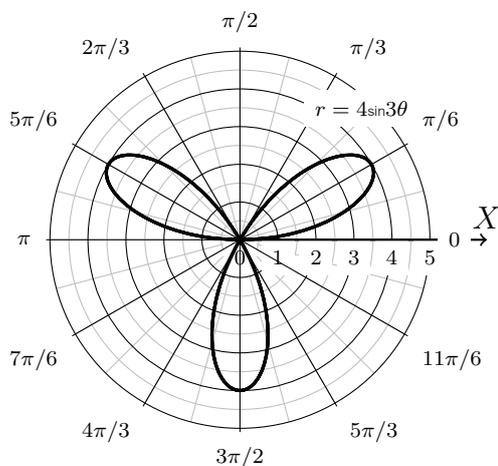


สมการ $r = f(\theta) = k\cos 2n\theta$ เมื่อ $k \neq 0, n \in \mathbb{Z}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $4n$ กลีบ ตัวอย่างเช่น $r = 4\cos 2\theta$

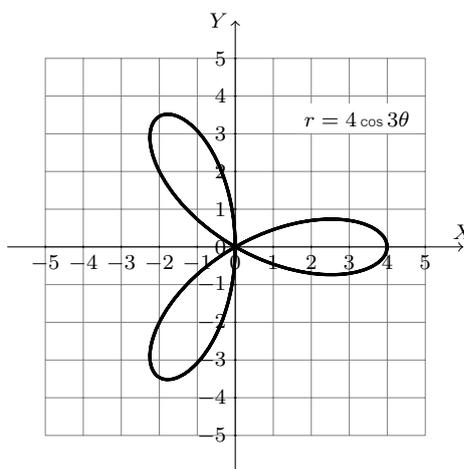
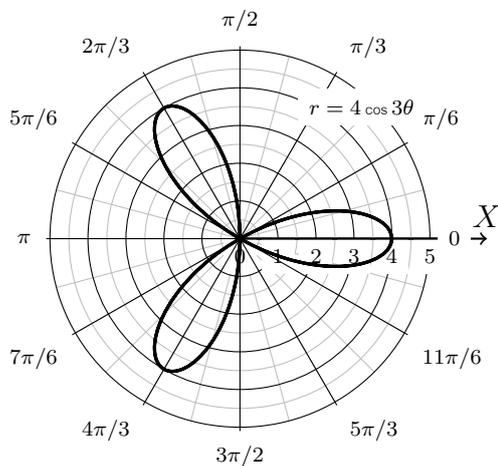


5. สมการ $f(\theta) = k\sin(2n - 1)\theta$ และ $f(\theta) = k\cos(2n - 1)\theta$

สมการ $r = f(\theta) = k\sin(2n - 1)\theta$ เมื่อ $k \neq 0, n \in \mathbb{N}$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $2n - 1$ กลีบ ตัวอย่างเช่น $r = 4\sin 3\theta$



สมการ $r = f(\theta) = k\cos(2n - 1)\theta$ เมื่อ $k \neq 0, n \in \mathbb{N}$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $2n - 1$ กลีบ ตัวอย่างเช่น $r = 4\cos 3\theta$



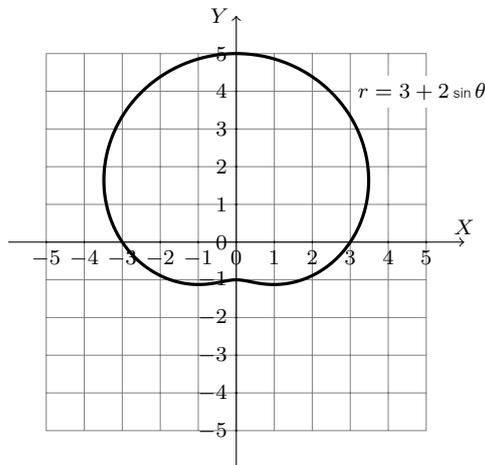
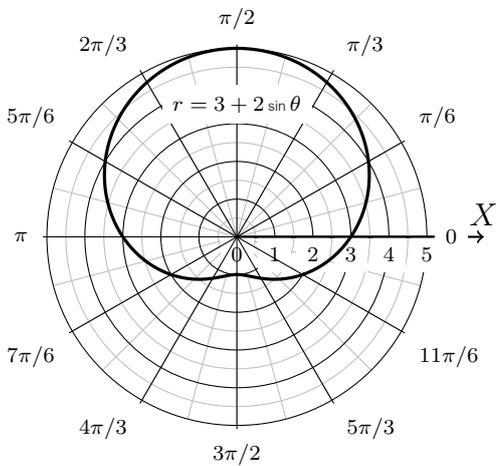
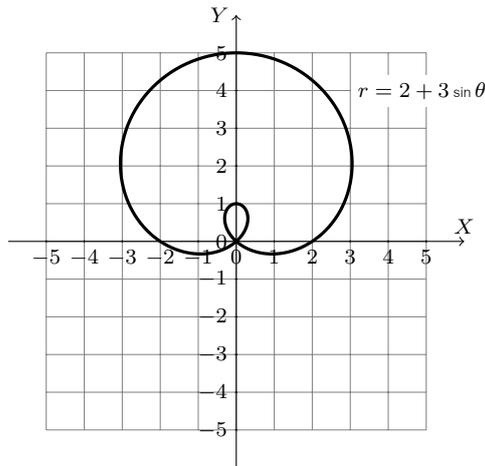
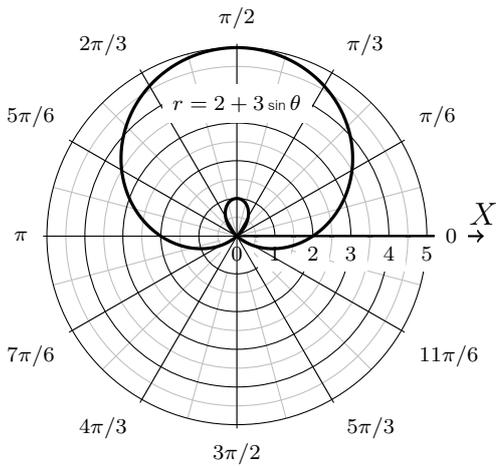
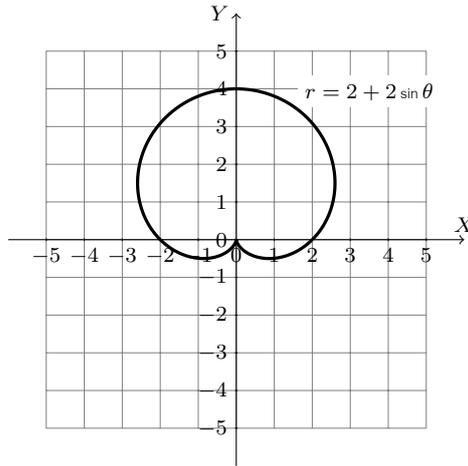
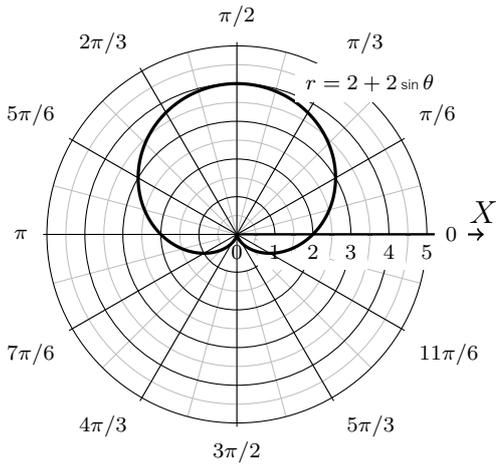
6. สมการ $f(\theta) = r = a + b\sin\theta$ และ $f(\theta) = r = a + b\cos\theta$

ถ้า $|a| = |b|$ แล้วกราฟนี้จะผ่านขั้ว และเรียกกราฟนี้ว่า คาร์ดิออยด์ (cardioid)

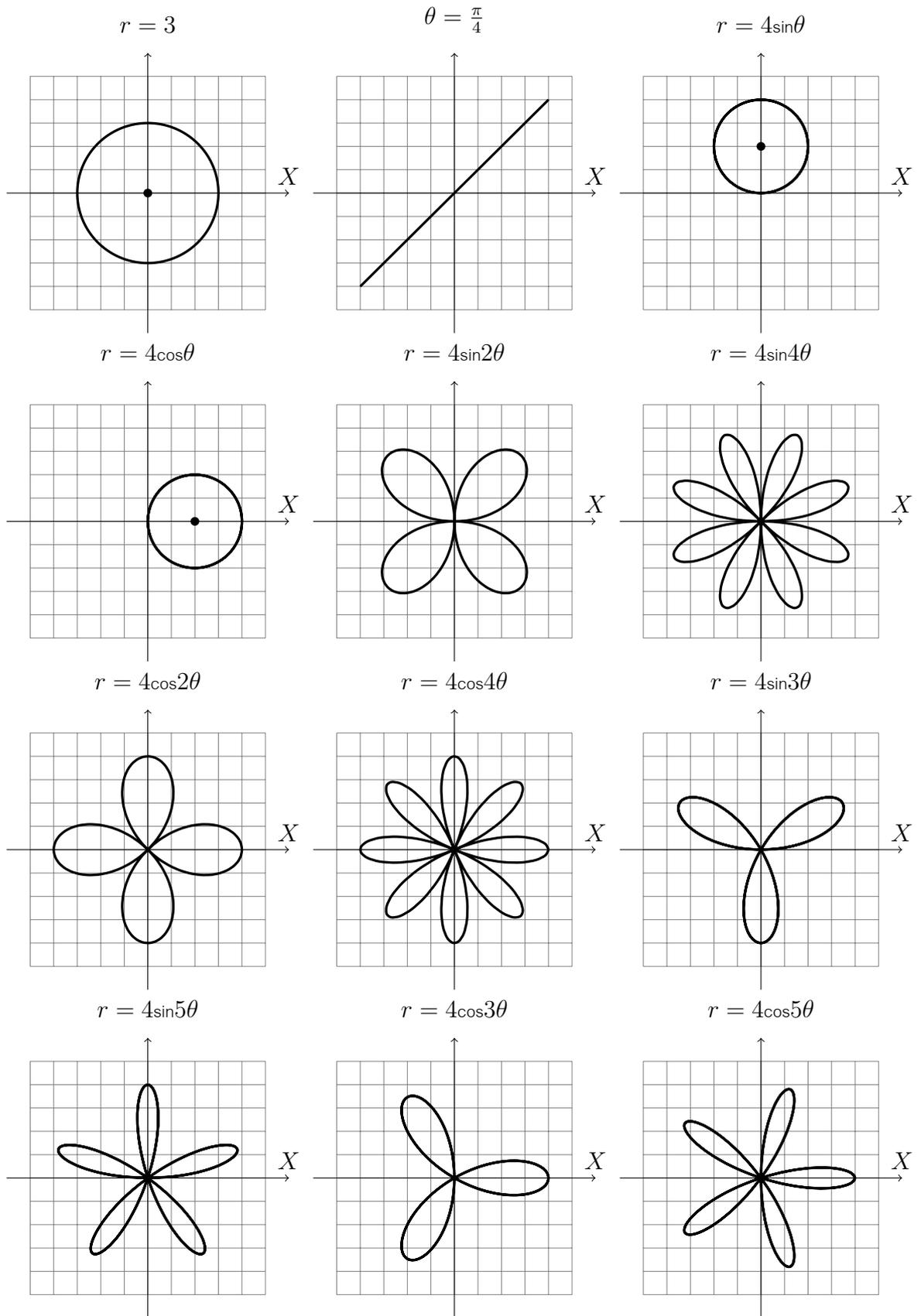
ถ้า $|a| \neq |b|$ จะเรียกกราฟนี้ว่า ลิมาซอน (limaçon)

ถ้า $|a| > |b|$ กราฟนี้จะไม่ผ่านขั้ว

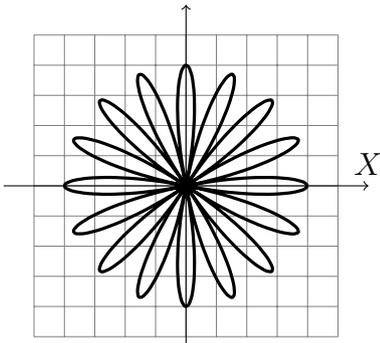
ถ้า $|a| < |b|$ กราฟนี้จะผ่านขั้ว และมีวงวน (loop) อยู่ภายใน



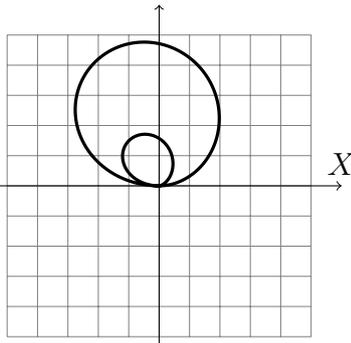
ตัวอย่างกราฟเชิงขั้ว



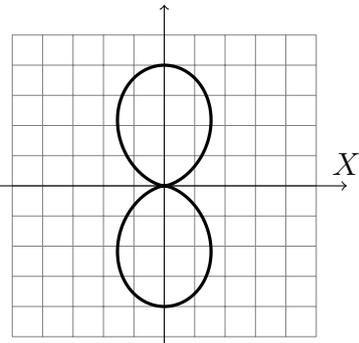
$$r = 4\cos 8\theta$$



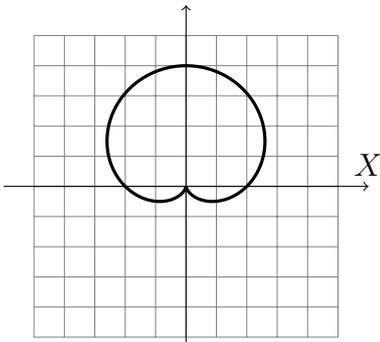
$$r = \theta \sin \theta$$



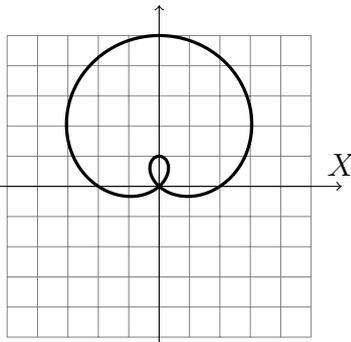
$$r = 4\sin^2 \theta$$



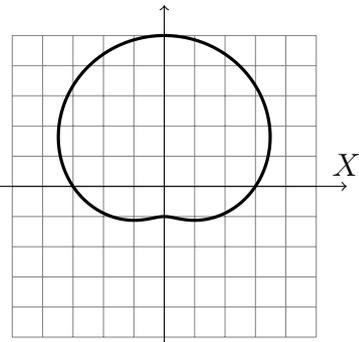
$$r = 2 + 2\sin \theta$$



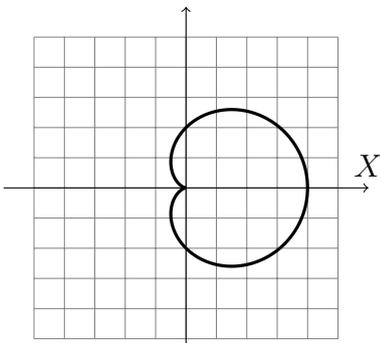
$$r = 2 + 3\sin \theta$$



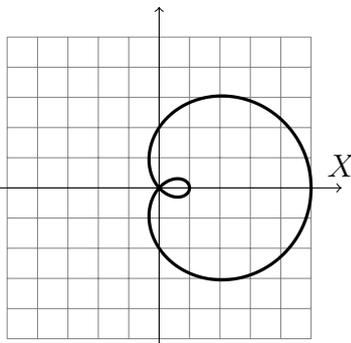
$$r = 3 + 2\sin \theta$$



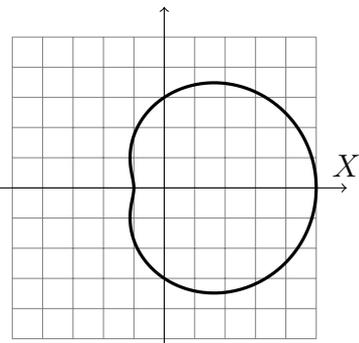
$$r = 2 + 2\cos \theta$$



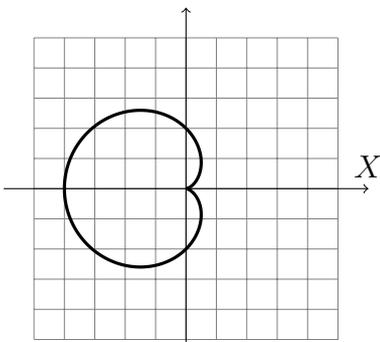
$$r = 2 + 3\cos \theta$$



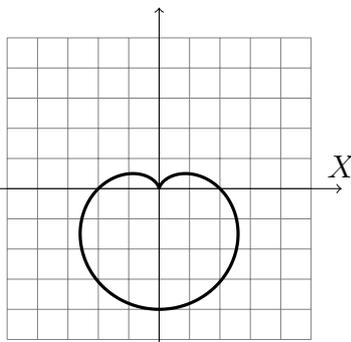
$$r = 3 + 2\cos \theta$$



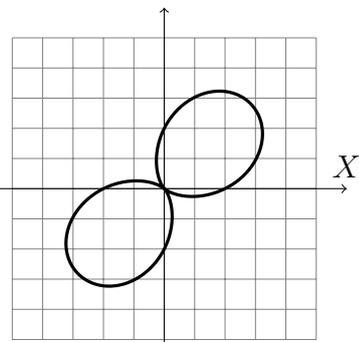
$$r = 2 - 2\cos \theta$$



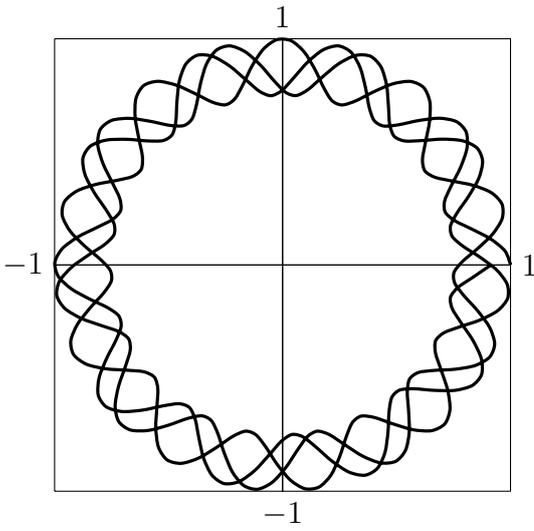
$$r = 2 - 2\sin \theta$$



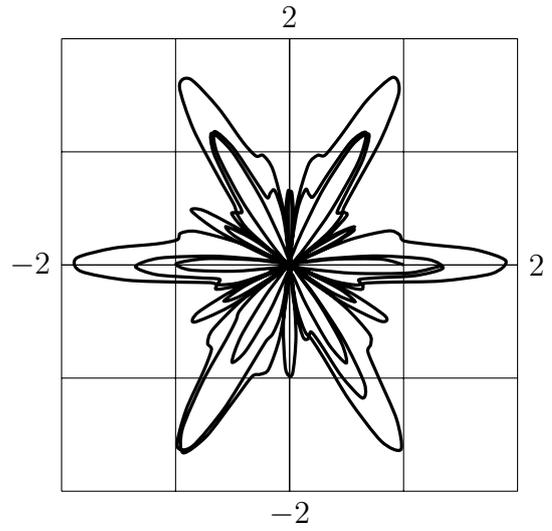
$$r = 2 + 2\sin 2\theta$$



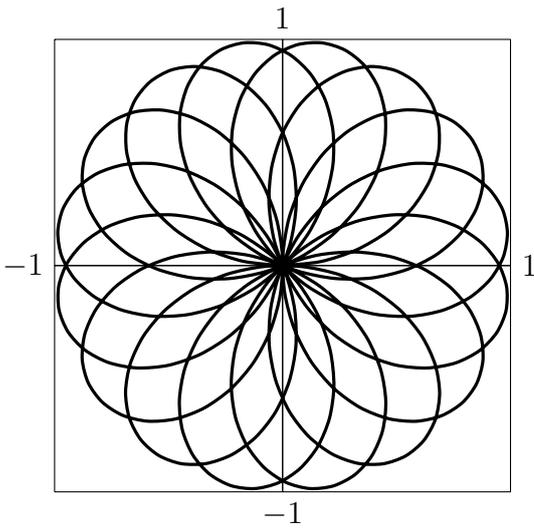
$$r = \sin^2(2.4\theta) + \cos^4(2.4\theta)$$



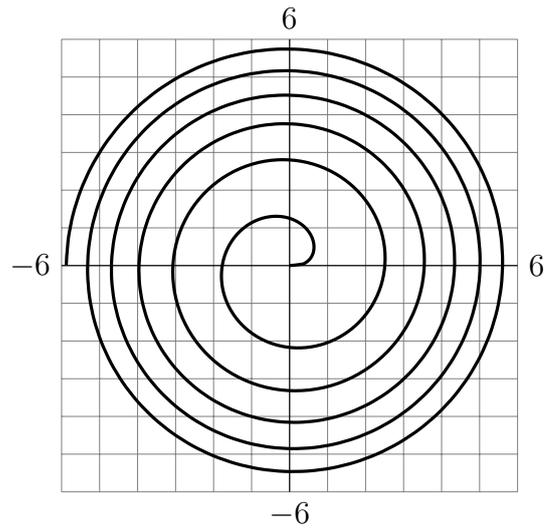
$$r = \sin^2(1.2\theta) + \cos^3(6\theta)$$



$$r = \sin\left(\frac{8}{5}\theta\right)$$



$$r = \sqrt{\theta}$$



แบบฝึกหัด 4.2

1. จงเขียนกราฟของสมการในระบบเชิงขั้วต่อไปนี้

1.1 $r = 2$

1.4 $r = 5\cos 2\theta$

1.7 $r = 5\sin 6\theta$

1.2 $2\theta = \pi$

1.5 $r = -3\sin 4\theta$

1.8 $r = 6\cos 7\theta$

1.3 $4\theta = 3\pi$

1.6 $r = 4\cos 3\theta$

1.9 $r = -4\cos 5\theta$

2. จงเขียนกราฟของสมการในระบบเชิงขั้วต่อไปนี้

2.1 $r = 1 - 3\cos\theta$

2.3 $r = 1 + \cos\theta$

2.5 $r = 3 + 3\cos\theta$

2.2 $r = 3 + 4\cos\theta$

2.4 $r = 2 - 4\sin\theta$

2.6 $r = -4 - 4\sin\theta$

3. จงยกตัวอย่างสมการที่ให้กราฟกลีบกุหลาบ 5 กลีบ มาอย่างน้อย 3 สมการ

4. จงยกตัวอย่างสมการที่ให้กราฟกลีบกุหลาบ 8 กลีบ มาอย่างน้อย 3 สมการ

5. จงจับคู่สมการในระบบเชิงขั้วในแต่ละข้อต่อไปนี้กับกราฟที่กำหนดให้

5.1 $r = 3\sin 3\theta$

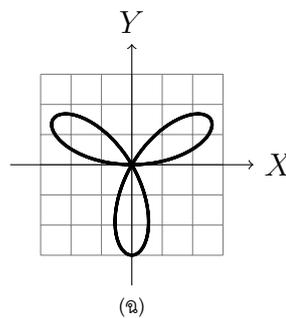
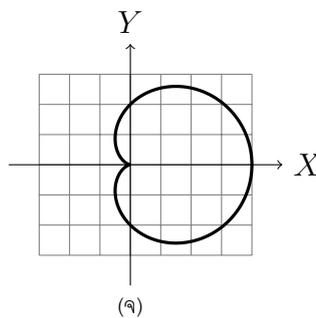
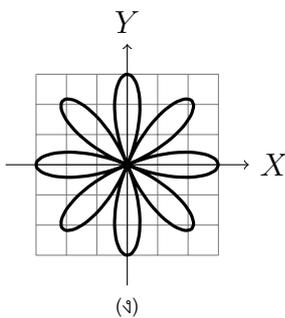
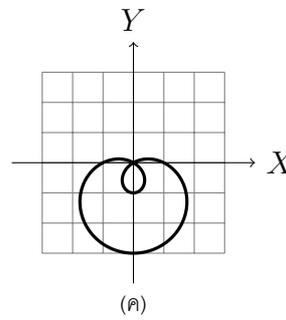
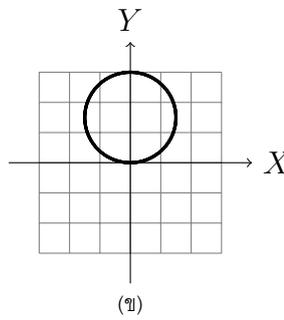
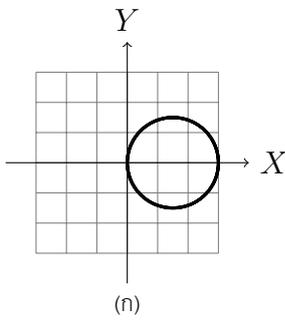
5.3 $r = 2 + 2\cos\theta$

5.5 $r = 3\cos 4\theta$

5.2 $r = 3\cos\theta$

5.4 $r = 1 - 2\sin\theta$

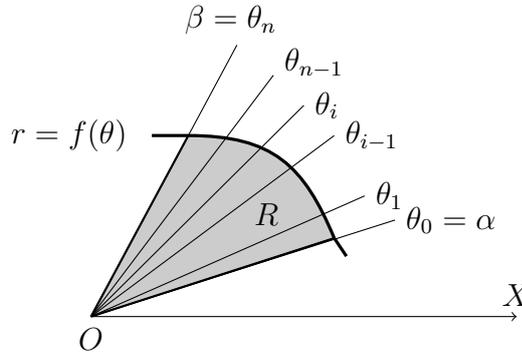
5.6 $r = 3\sin\theta$



4.3 การหาพื้นที่ของบริเวณในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ให้ R เป็นพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน $r = f(\theta)$ และเส้นตรง $\theta = \alpha$ และ $\theta = \beta$ เมื่อ $r > 0$ แบ่ง $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยจุด $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ โดยที่

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = \beta$$

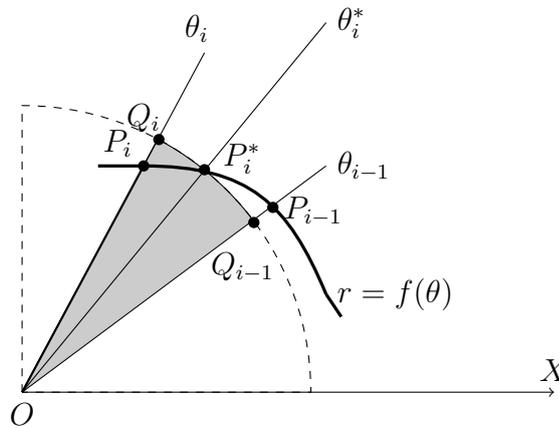


สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ให้

R_i เป็นพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $\theta = \theta_{i-1}$ และ $\theta = \theta_i$ ด้วยเส้นโค้ง $r = f(\theta)$

P_i เป็นจุด $(f(\theta_i), \theta_i)$ และ P_{i-1} เป็นจุด $(f(\theta_{i-1}), \theta_{i-1})$

ให้ $\theta_i^* \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ และ P_i^* เป็นจุด $(f(\theta_i^*), \theta_i^*)$



พิจารณาวงกลมรัศมี OP_i^* ตัดกับเส้นตรง $\theta = \theta_{i-1}$ ที่จุด Q_{i-1} และเส้นตรง $\theta = \theta_i$ ที่จุด Q_i และให้ $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$

$$R_i \approx \text{พื้นที่เซกเตอร์ } OQ_iQ_{i-1} = \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta_i$$

ดังนั้น

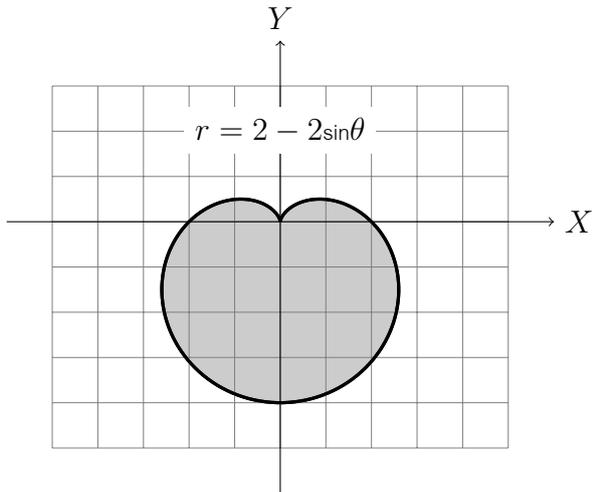
$$R = \sum_{i=1}^n R_i \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta_i$$

เมื่อแบ่ง n มาก ๆ และทำให้ $\Delta\theta_i$ มีค่าน้อยๆ และ $r = f(\theta)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยใช้ผลบวกของรีมันน์จะได้ว่า

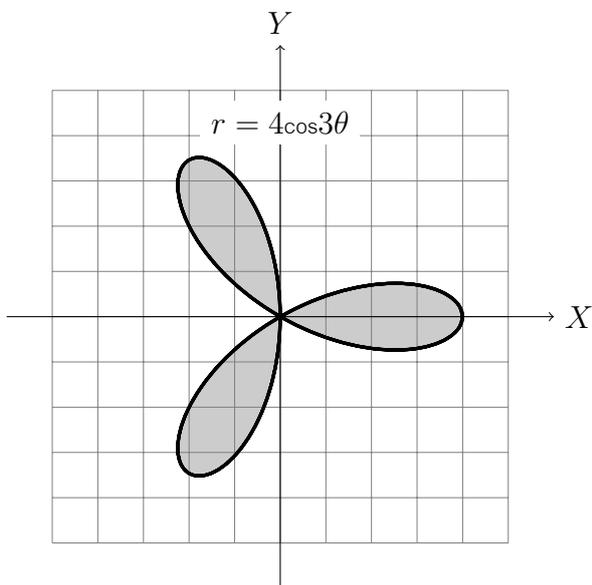
$$\text{พื้นที่ } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta_i = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

ตัวอย่าง 4.3.1 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย

1. $r = 2 - 2\sin\theta$

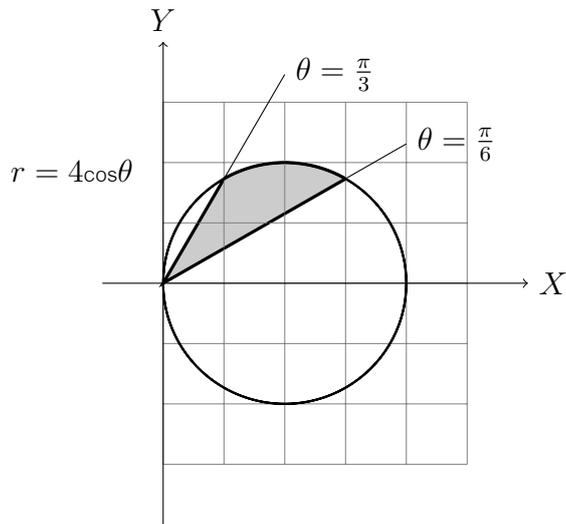


2. $r = 4\cos 3\theta$

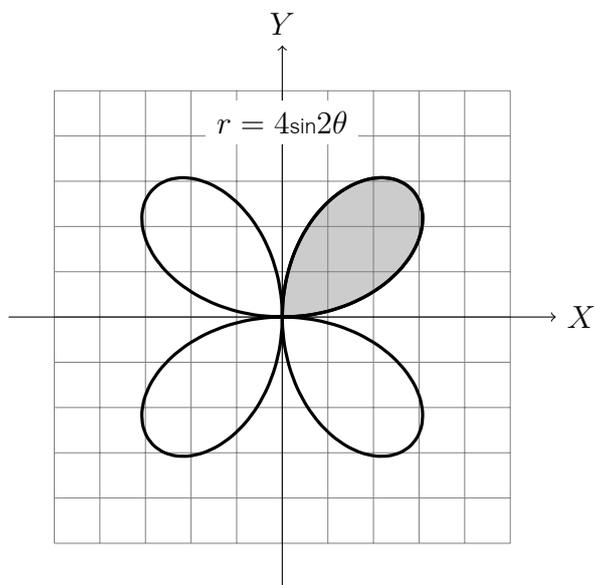


ตัวอย่าง 4.3.2 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย

1. $r = 4\cos\theta$ บนช่วง $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$



2. $r = 4\sin 2\theta$ บนช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

$$1.1 \quad r = 1 + \cos\theta$$

$$1.4 \quad r = 3 - 2\cos\theta$$

$$1.2 \quad r = \sin\theta + \cos\theta$$

$$1.5 \quad r = 2\sin 3\theta$$

$$1.3 \quad r = 2\cos 2\theta$$

$$1.6 \quad r = 4\cos^2\theta$$

2. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

$$2.1 \quad r = 4 + 3\cos\theta \quad \text{บนช่วง } [0, \pi]$$

$$2.4 \quad r = 2 + 2\cos\theta \quad \text{บนช่วง } [0, 2\pi]$$

$$2.2 \quad r = 8\cos 2\theta \quad \text{บนช่วง } \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$2.5 \quad r = 3\sin\theta \quad \text{บนช่วง } \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$2.3 \quad r = 12\sin 3\theta \quad \text{บนช่วง } \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$$

$$2.6 \quad r = 2 - 2\sin\theta \quad \text{บนช่วง } \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

3. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ในเส้นโค้ง $r = 4\sin\theta$ และ $r = 4\sqrt{3}\cos\theta$

4. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ในเส้นโค้ง $r = 4\sin 2\theta$ และ $r = 4\cos\theta$

5. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ในเส้นโค้ง $r = 2 + \sin\theta$ และ $r = 2 + \sqrt{3}\cos\theta$

6. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ในเส้นโค้ง $r = 2\sin 3\theta$ และ $r = 2\sin\theta$

7. จงหาพื้นที่ที่อยู่ในวงกลม $x^2 + y^2 - x - y = 0$ และ $x^2 + y^2 + x - y = 0$

8. จงหาพื้นที่ที่อยู่ในวงกลม $x^2 + y^2 - 4y = 0$ เฉพาะส่วนที่ $x \geq \sqrt{3}$

9. จงหาพื้นที่ที่อยู่ในวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ เฉพาะส่วนที่ $y \geq 4$

บทที่ 5

ฟังก์ชันหลายตัวแปร

ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 1 จะเรียก f ว่า ฟังก์ชันค่าจริงของ n ตัวแปร ตัวอย่างเช่น

$$f(x, y) = \sqrt{x + y}, g(x, y, z) = xy + xz + yz \text{ และ } h(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

สำหรับฟังก์ชันที่ไม่ระบุโดเมนให้ถือว่าเป็นโดเมนใหญ่สุดที่เป็นสับเซตของ \mathbb{R}^n

5.1 ฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร

ตัวอย่าง 5.1.1 กำหนดให้ $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

จงหาค่าของ $f(0, 0)$ และเขียนกราฟแสดงโดเมน

ตัวอย่าง 5.1.2 กำหนดให้ $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + x - y^2}}$

จงหาค่าของ $f(3, 0)$ และเขียนกราฟแสดงโดเมน

5.2 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันสองตัวแปร

บทนิยาม 5.2.1 ให้ $D \subset \mathbb{R}^2$ และ $(x_0, y_0) \in D$ เราจะกล่าวว่า (x_0, y_0) เป็น **จุดลิมิต** (limit point) ใน D ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $r > 0$

$$(B_r(x_0, y_0) - \{(x_0, y_0)\}) \cap D \neq \emptyset$$

เมื่อ $B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$

บทนิยาม 5.2.2 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และให้ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ที่มีจุดใน D ที่อยู่ใกล้ ๆ (x_0, y_0) เราจะกล่าวว่า $f(x, y)$ มีลิมิตเป็น L เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (x_0, y_0) เขียนแทนด้วย

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x, y) - L| < \epsilon \quad \text{ทุก ๆ จำนวน } (x, y) \in D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

ทฤษฎีบท 5.2.3 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป \mathbb{R} และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D และให้ c, L, M เป็นจำนวนจริง แล้ว

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} c = c$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} y = y_0$
4. ถ้า $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$ และ $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = M$ แล้ว
 - 4.1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x, y) + g(x, y)] = L + M$
 - 4.2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = LM$
 - 4.3 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
 - 4.4 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} |f(x, y)| = |L|$
 - 4.5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x, y)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $\sqrt[n]{L}$ เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 5.2.4 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (4x^2y - x^3y - 4x + 1)$$

$$2. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\sin(xy) + x}{x - y}$$

ตัวอย่าง 5.2.5 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$$

$$2. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + 3xy + 2y^2}$$

$$3. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2y - y - 3x^2 + 3}{xy - 3x - y + 3}$$

ทฤษฎีบท 5.2.6 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป \mathbb{R} และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D ถ้า

1. มีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่ง $|f(x, y)| < M$ ทุก $(x, y) \in D$ ซึ่ง $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = 0$

จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = 0$$

ตัวอย่าง 5.2.7 จงหาลิมิตของ

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^4}{x^4 + y^4}$$

ตัวอย่าง 5.2.8 จงหาลิมิตของ

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 y^3}{x^2 + y^2}$$

ทฤษฎีบท 5.2.9 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D และ C เป็นเส้นโค้งใน \mathbb{R}^2 ที่ผ่านจุด (x_0, y_0) จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ}$$

$f(x, y)$ มีลิมิตเป็น L เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (x_0, y_0) ตามเส้นโค้ง C

ตัวอย่าง 5.2.10 กำหนดให้ $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ จงแสดงว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ไม่มีค่า

ตัวอย่าง 5.2.11 กำหนดให้ $f(x, y) = \frac{x^2 + y^4}{x^2 + y^3}$ จงแสดงว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ไม่มีค่า

บทนิยาม 5.2.12 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ และ $(x_0, y_0) \in D$ จะกล่าวว่า f ต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) ก็ต่อเมื่อ

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ มีค่า
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

และกล่าวว่า f ต่อเนื่องบนเซต $S \subset D$ ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องทุกจุดในเซต S

ตัวอย่าง 5.2.13 กำหนดให้ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

แล้ว f ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ หรือไม่

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1.1
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (xy + x^2)$$

1.2
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{x^4 - y^4}$$

1.3
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x^2y - xy^2}$$

1.4
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$$

1.5
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^4 + y^4}$$

1.6
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^4 + y^6}$$

1.7
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y^4}{x^6 + y^6}$$

1.8
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}$$

1.9
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^2 + y^4)^3}$$

1.10
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2x - y^2}{xy - y}$$

1.11
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy - 2x}{xy - 6 - 2x + 3y}$$

1.12
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4 + x^2y^2 + y^4}$$

1.13
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}{y}$$

1.14
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2x}{x^2 + |xy| + y^2}$$

1.15
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^3 + 3xy - x^2y - 3y^2}{x^4 + xy^2 - x^3y - y^3}$$

1.16
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^3 - 8y^3}{x^2 - xy - 2y^2}$$

2. จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องบนจุดที่กำหนดให้หรือไม่

2.1
$$f(x, y) = \frac{x^3y^2}{1 - xy} \quad \text{ที่จุด } (1, 1)$$

2.2
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x - y} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (1, 1) \\ 1 & \text{เมื่อ } (x, y) = (1, 1) \end{cases} \quad \text{ที่จุด } (1, 1)$$

2.3
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{ที่จุด } (0, 0)$$

3. กำหนดให้ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

แล้ว f ต่อเนื่องบนโดเมน f หรือไม่4. จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องมีความต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

4.1
$$f(x, y) = \sqrt{y - x}$$

4.4
$$f(x, y) = e^{xy} \cos(xy^2 + 1)$$

4.2
$$f(x, y) = \frac{x^2 + 4y^2}{x^2 - 4y^2}$$

4.5
$$f(x, y) = 5x^2y \ln|1 - x^2 - y^2|$$

4.3
$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 - 4}}$$

4.6
$$f(x, y) = \arcsin(xy)$$

5.3 อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปร

บทนิยาม 5.3.1 ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ $(a, b) \in D_f$

อนุพันธ์ย่อย (partial derivatives) ของ f เทียบกับ x ที่จุด (a, b) คือ

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \quad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (a, b) คือ

$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h} \quad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

ดังนั้นอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน f คือ f_x และ f_y

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad \text{และ} \quad f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

สัญลักษณ์ที่นิยมใช้แทนอนุพันธ์ย่อย

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= f_x = f_1 = D_1 f = D_x f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} \\ f_y(x, y) &= f_y = f_2 = D_2 f = D_y f = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.3.2 กำหนดให้ $f(x, y) = x^2 y$ จงหาค่าของ $f_x(1, 0)$ และ $f_y(1, 0)$ โดยใช้บทนิยาม

ตัวอย่าง 5.3.3 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x, y) = \frac{2x + y^2}{x + y}$

ตัวอย่าง 5.3.4 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x, y) = e^{x^2y} \sin^2(5y)$

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1.1 \quad f(x, y) = 3xy - 5x^4y^4$$

$$1.5 \quad f(x, y) = y^2 + x^2 \tan(xy)$$

$$1.2 \quad f(x, y) = \sqrt[3]{1 - \sin^2(xy)}$$

$$1.6 \quad f(x, y) = 5e^{x^2y^2} + e^{x \sin(x+y^2)}$$

$$1.3 \quad f(x, y) = \ln(\cos \sqrt{x+y})$$

$$1.7 \quad f(x, y) = e^x (\cos xy + \sin xy)$$

$$1.4 \quad f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$1.8 \quad f(x, y) = \arctan \left(\frac{x}{y} \right)$$

2. กำหนดให้ $f(x, y) = x^2ye^{xy}$ จงหาค่าของ $D_1f(1, 1)$ และ $D_2f(1, 1)$

3. กำหนดให้ $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 - y^2}$ จงหาค่าของ $f_1(2, 1)$ และ $f_2(2, 1)$

4. กำหนดให้ $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}e^{\sin(x^2y)}$ จงหาค่าของ $f_x(1, 0)$

5. กำหนดให้ $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ จงหาค่าของ $f_x(0, 0)$

6. กำหนดให้ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

จงหาค่าของ $f_x(0, 0)$ และ $f_y(0, 0)$

7. กำหนดให้ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2 + 4y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

จงหาค่าของ $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

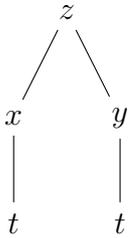
8. ให้ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x + y} & \text{เมื่อ } x + y \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x + y = 0 \end{cases}$

จงหาค่าของ $D_1f(0, y)$ เมื่อ $y \neq 0$ และ $D_2f(x, 0)$ เมื่อ $x \neq 0$

5.4 กฎลูกโซ่

ทฤษฎีบท 5.4.1 กฎลูกโซ่ (Chain Rule)

กำหนดให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ $x = x(t), y = y(t)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร ถ้า x, y หาอนุพันธ์ได้แล้ว

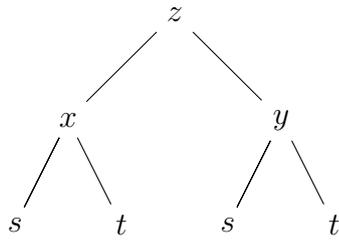


$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

ตัวอย่าง 5.4.2 กำหนดให้ $z = x^2y$, $x = t \cos t$ และ $y = t \sin t$ จงหา $\frac{dz}{dt}$

ตัวอย่าง 5.4.3 กำหนดให้ $z = \ln(2x^2 + xy)$, $x = \sqrt{t}$ และ $y = 3t - 1$
 จงหา $\frac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

ทฤษฎีบท 5.4.4 กำหนดให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ $x = x(s, t), y = y(s, t)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้า x, y หาอนุพันธ์ได้แล้ว



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

ตัวอย่าง 5.4.5 กำหนดให้ $z = e^{xy}$, $x = 2s + t$ และ $y = \frac{s}{t}$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$

ตัวอย่าง 5.4.6 กำหนดให้ $u = 3s - t^2$, $s = x + y \ln x$ และ $t = x^2 - y \ln y$
 จงหา $\frac{\partial u}{\partial x}$ และ $\frac{\partial u}{\partial y}$ เมื่อ $(x, y) = (1, 1)$

แบบฝึกหัด 5.4

1. จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\frac{dz}{dt}$ เมื่อ $z = x^2e^y$, $x = 2\sin t$ และ $y = t^4$

1.2 $\frac{dz}{dt}$ เมื่อ $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $x = \ln t$ และ $y = \cos t^2$

1.3 $\frac{dz}{dt}$ เมื่อ $z = x^2y^3 + x\sin y + tx$, $x = t + \frac{1}{t}$ และ $y = \sqrt{t}$

1.4 $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$ เมื่อ $z = 3x^2 + xy + 2y^2 + 3x - y$, $x = 2s - 3t$ และ $y = st + s^2$

1.5 $\frac{\partial z}{\partial t}$ และ $\frac{\partial z}{\partial r}$ เมื่อ $z = e^{\frac{y}{x}}$, $x = r\cos^2 t$ และ $y = r^2\sin t$

1.6 $\frac{\partial z}{\partial r}$ และ $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ เมื่อ $z = xye^{xy}$, $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$

2. กำหนดให้ $z = \sqrt{5 + x - 2xy^4}$ เมื่อ $x = t^2$ และ $y = t - 1$

จงหา $\frac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

3. กำหนดให้ $z = f(x^2 - y^2)$ จงแสดงว่า $x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

4. ถ้ำรัศมีของกรวยกลมใบหนึ่งกำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 1 เซนติเมตรต่อวินาที และความสูงกำลังลดลงด้วยอัตรา 2 เซนติเมตรต่อวินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรกรวยใบนี้ เมื่อรัศมีและความสูงของกรวยเป็น 10 และ 20 เซนติเมตรตามลำดับ

5. สี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่ง ด้านกว้างกำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 1 ฟุตต่อวินาที และด้านยาวกำลังลดลงด้วยอัตรา 2 ฟุตต่อวินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ เมื่อความยาวของด้านกว้างเป็น 6 ฟุต และความยาวด้านยาวเป็น 12 ฟุต

6. รางน้ำอันหนึ่งยาว 300 เซนติเมตร หน้าตัดเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก ถ้าให้น้ำลงในรางด้วยอัตรา 50,000 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที ระดับน้ำในรางจะสูงขึ้นด้วยอัตราเท่าใด เมื่อน้ำลึก 150 เซนติเมตร

5.5 อนุพันธ์อันดับสูง

บทนิยาม 5.5.1 ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร จะเรียก $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$ ว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง (first-order partial derivative)

และนิยามอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง (second-order partial derivative) ดังนี้

$$1. \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \text{เขียนแทนด้วย} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f_{xx}, f_{11} \quad \text{หรือ} \quad D_{11}f$$

$$2. \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \text{เขียนแทนด้วย} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, f_{xy}, f_{12} \quad \text{หรือ} \quad D_{12}f$$

$$3. \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{เขียนแทนด้วย} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, f_{yx}, f_{21} \quad \text{หรือ} \quad D_{21}f$$

$$4. \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{เขียนแทนด้วย} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, f_{yy}, f_{22} \quad \text{หรือ} \quad D_{22}f$$

อนุพันธ์ย่อยอันดับอื่น ๆ นิยามทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 5.5.2 จงหาอนุพันธ์อันดับสองของ $f(x, y) = ye^{xy} + x^3y^2$

ตัวอย่าง 5.5.3 กำหนดให้ $f(x, y) = x^3y^2 - x^2\sin y$ จงหา f_{xy}

ตัวอย่าง 5.5.4 กำหนดให้ $z = xe^y + ye^x$, $x = 2t + 3s$ และ $y = st$ จงหา $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$

แบบฝึกหัด 5.5

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $f(x, y) = x^2 - 2xy^3 + 5y^6 + 3$

1.2 $f(x, y) = \ln(x^2 - 5y)$

1.3 $f(x, y) = xe^y + ye^x$

1.4 $f(x, y) = \sin(\cos(2x + 3y))$

1.5 $f(x, y) = e^{xy} + y\sqrt{x}$

2. กำหนดให้ $f(x, y) = x^3y^5 - 2x^2y + x$ จงหา $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$ และ $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$

3. กำหนดให้ $f(x, y) = (2x + y)^5$ จงหา $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ และ $\frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$

4. กำหนดให้ $f(x, y) = x^3e^{-5y}$ จงหา $f_{xyy}(0, 1)$, $f_{xxx}(0, 1)$ และ $f_{yyxx}(0, 1)$

5.6 การประมาณค่าเชิงเส้น

บทนิยาม 5.6.1 ค่าเชิงอนุพันธ์ (differential) ของ f ที่จุด (x, y) เขียนแทนด้วย $df(x, y)$ และกำหนดโดย

$$df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

ตัวอย่าง 5.6.2 กำหนดให้ $f(x, y) = x^2 \sin xy$ จงหา $df(x, y)$

เราจะประมาณค่า $f(x + dx, y + dy) - f(x, y) \approx df(x, y)$ เมื่อ dx, dy มีค่าน้อย ๆ เราจะได้สูตรการประมาณค่าเชิงเส้น (Linear approximation) ดังนี้

$$f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

ตัวอย่าง 5.6.3 จงประมาณค่าเชิงเส้นของ $\sqrt[3]{(2.01)^2 + (1.98)^2}$

ตัวอย่าง 5.6.4 จงหาปริมาตรโดยประมาณของกล่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีความยาวด้านละ 5.003 เซนติเมตร และสูง 9.997 เซนติเมตร

แบบฝึกหัด 5.6

1. จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1.1 \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + xy}$$

$$1.2 \quad f(x, y) = e^x \cos xy$$

$$1.3 \quad f(x, y) = \frac{xy}{x + y}$$

$$1.4 \quad f(x, y) = x^3 \sin x \ln y$$

2. จงประมาณค่าต่อไปนี้

$$2.1 \quad \sqrt{(3.01)^2 + (3.97)^2}$$

$$2.2 \quad (1.002)e^{0.001}$$

$$2.3 \quad \frac{1}{\sqrt[3]{(0.003)^3 + (7.979)^3}}$$

$$2.4 \quad (0.99)^{3.001}$$

3. ทรงกระบอกใบหนึ่งรัศมีฐานเป็น 5.026 เซนติเมตร และวัดส่วนสูงได้ 24.003 เซนติเมตร จงคำนวณปริมาตรโดยประมาณของทรงกระบอกนี้
4. กรวยกลมใบหนึ่งมีการเปลี่ยนแปลงรัศมีจาก 3 ฟุต และสูง 4 ฟุต ไปเป็นรัศมี 2.9 ฟุต และสูง 4.3 ฟุต จงหาค่าส่วนการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกรวยใบนี้โดยใช้ค่าอนุพันธ์
5. ในการคำนวณปริมาตรของกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งวัดความกว้าง ความยาว และความสูงได้ 10 13 และ 16 นิ้วตามลำดับ ถ้าวัดความผิดพลาดไม่เกิน 0.03 นิ้ว จงหาขอบเขตของความผิดพลาดสัมพัทธ์

บทที่ 6

อินทิกรัลของฟังก์ชันสองตัวแปร

6.1 อินทิกรัลบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

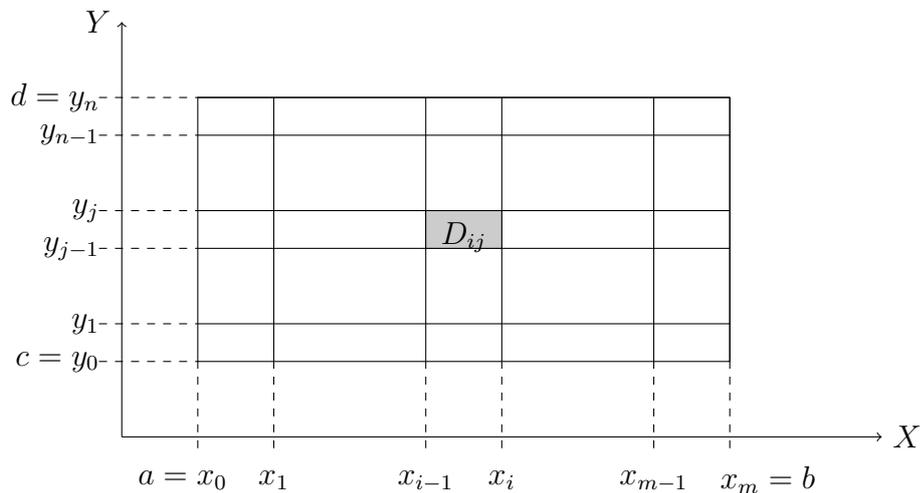
ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D = [a, b] \times [c, d]$ พิจารณาการแบ่งช่วง
แบ่ง $[a, b]$ ออกเป็น m ช่วง ด้วยจุด $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ โดยที่

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$$

แบ่ง $[c, d]$ ออกเป็น n ช่วง ด้วยจุด $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ โดยที่

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d$$

ให้ $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อยของรูป ij เมื่อ $i = 1, 2, \dots, m$ และ $j = 1, 2, \dots, n$



ให้ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ และ $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ และ $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ ให้ $(x_{ij}, y_{ij}) \in D_{ij}$ แล้ว

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A_{ij}$$

เรียก S_{mn} ว่า ผลบวกรีมันน์ (Reimann sum) ของ f บน D

ถ้าเราแบ่ง Δx_i และ Δy_j มีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ m และ n มีค่ามาก ๆ และ

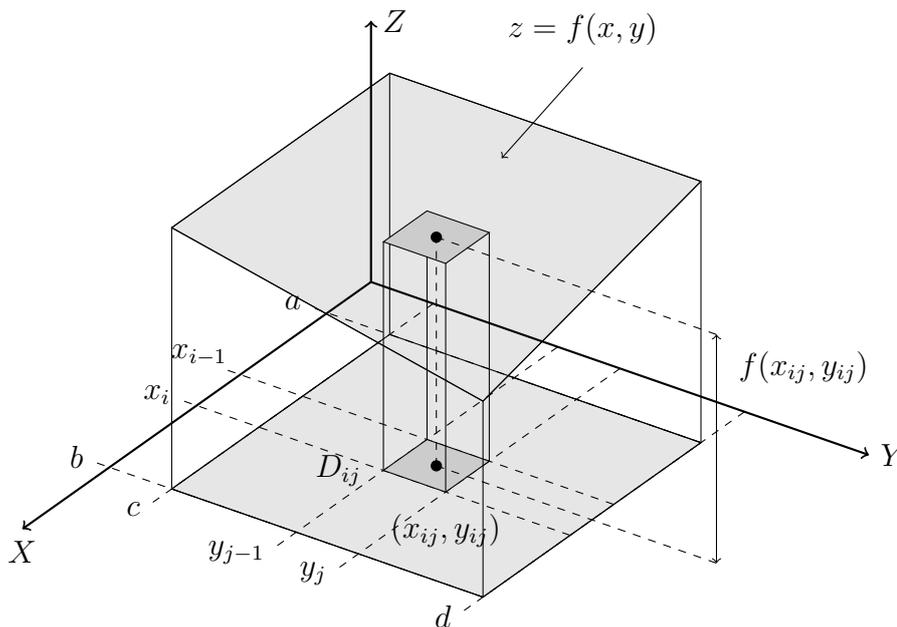
$$\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} S_{mn} = L$$

แล้วเราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ (integrable) บน D และเรียกค่าลิมิต L ว่าอินทิกรัลสองชั้น (double integral) ของ f บน D ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$\iint_D f \quad \text{หรือ} \quad \iint_D f \, dA \quad \text{หรือ} \quad \iint_D f \, dx \, dy$$

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x, y) \geq 0$ ทุก $(x, y) \in D$ ซึ่งอินทิเกรตได้บน D

$$f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij} = \text{ปริมาตรรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความสูง } f(x_{ij}, y_{ij}) \text{ บนสี่เหลี่ยมผืนผ้า } D_{ij}$$



ดังนั้น

$$\iint_D f \, dA = \text{ปริมาตรรูปทรงตันที่อยู่ภายใต้ผิว } z = f(x, y) \text{ บน } D$$

สำหรับ $f(x, y) = 1$ จะได้ว่า

$$\iint_D dA = \text{พื้นที่อาณาบริเวณของ } D$$

เนื่องจากการคำนวณค่าอินทิกรัลสองชั้นผ่านลิมิตของผลบวกรีมันน์ค่อนข้างยุ่งยาก เราจึงพิจารณา เหมือนกับการอินทิเกรตในหนึ่งตัวแปร

$$\int f(x, y) dx \text{ มอง } y \text{ เป็นค่าคงตัว} \quad \text{และ} \quad \int f(x, y) dy \text{ มอง } x \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_1^2 xy \, dy dx &= \int_0^1 \left(\int_1^2 xy \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2 \right]_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x(2)^2 - \frac{1}{2}x(1)^2 \right] dx \\ &= \int_0^1 \frac{3}{2}x \, dx \\ &= \left[\frac{3}{4}x^2 \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.1.1 จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\int_{-2}^4 \int_1^3 (3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2) \, dy dx$

ทฤษฎีบท 6.1.2 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D = [a, b] \times [c, d]$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D แล้ว

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

ตัวอย่าง 6.1.3 จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^3 \int_0^1 2x\sqrt{x^2 + y} dx dy$

ตัวอย่าง 6.1.4 จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\iint_D x \sin(xy) dA$ เมื่อ $D = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

แบบฝึกหัด 6.1

1. จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้นต่อไปนี้

$$1.1 \int_1^2 \int_2^3 (x^2y + xy^2) dx dy$$

$$1.4 \int_0^2 \int_0^1 y \sin x dy dx$$

$$1.2 \int_0^1 \int_1^6 \frac{1}{x+1} dx dy$$

$$1.5 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^2 y \cos(xy) dx dy$$

$$1.3 \int_{-2}^2 \int_3^8 dx dy$$

$$1.6 \int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 3} e^{x+y} \sin x dx dy$$

2. จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้นต่อไปนี้บนอาณาบริเวณที่กำหนดให้

$$2.1 \iint_D \frac{y}{(xy+1)^2} dA \quad D = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$2.2 \iint_D y dA \quad D = \{(x, y) : -3 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 5\}$$

$$2.3 \iint_D x \sqrt{1-x^2} dA \quad D = \text{อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย } x=0, x=1, y=2$$

และ $y=3$

$$2.4 \iint_D x \cos(xy) \cos^2(\pi x) dA \quad D = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \pi]$$

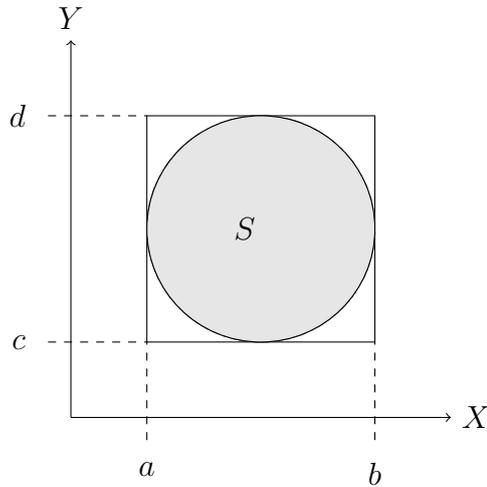
3. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่อยู่ภายใต้พื้นที่ผิว $z = 4x^3 + 3x^2y$ และอยู่เหนือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4\}$

4. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้วย

$$\text{ระนาบ } x=0, z=0, x=5, z-y=0 \text{ และ } z=6-2y$$

6.2 อินทิกรัลบนโดเมนทั่วไป

ให้ $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $S \subset D = [a, b] \times [c, d]$



ให้ $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย

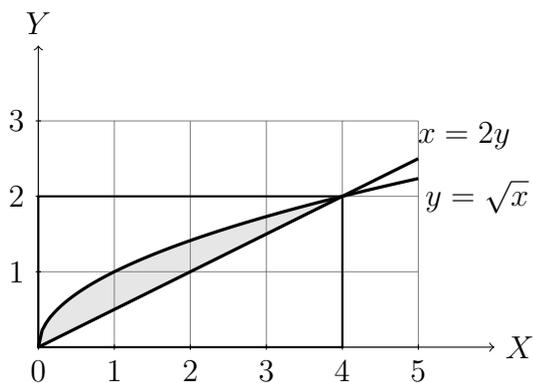
$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{เมื่อ } x \in S \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin S \end{cases}$$

ถ้า \tilde{f} เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D เราจะกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน S โดยนิยามค่าของอินทิกรัลเป็น

$$\iint_S f = \iint_D \tilde{f}$$

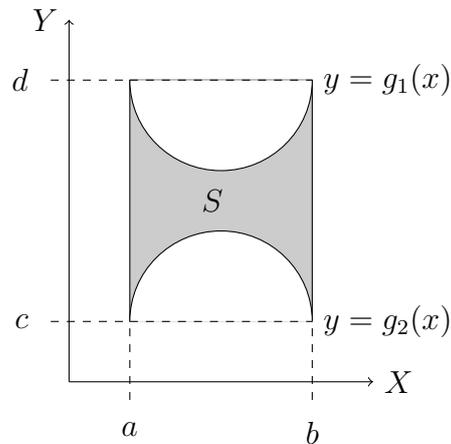
ตัวอย่าง 6.2.1 กำหนดให้ $f(x, y) = xy$ และ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และเส้นตรง $x = 2y$ จงหาค่าของ

$$\iint_S f$$



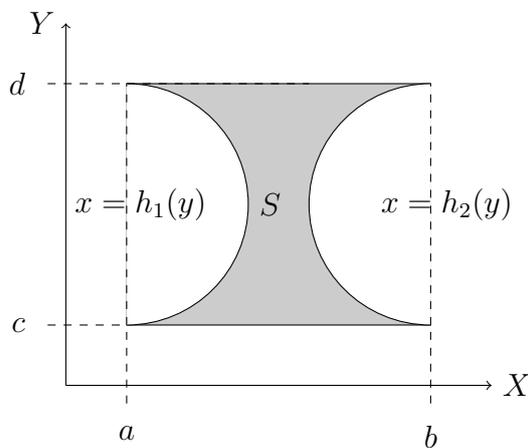
เราสามารถหาอินทิกรัลสองชั้นโดยการพิจารณาโดเมนได้สองลักษณะคือ

1. แบบที่ 1 $S = \{(x, y) : g_1(x) \leq y \leq g_2(x), a \leq x \leq b\}$



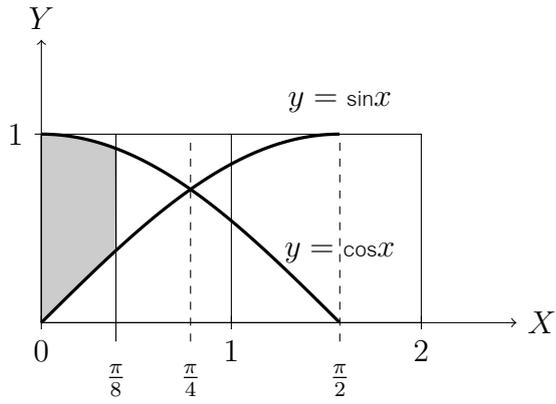
$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } c \leq y < g_1(x) \\ f(x, y) & \text{เมื่อ } g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \\ 0 & \text{เมื่อ } g_2(x) < y \leq d \end{cases} \quad \text{และ} \quad \iint_S f = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

2. แบบที่ 2 $S = \{(x, y) : h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$

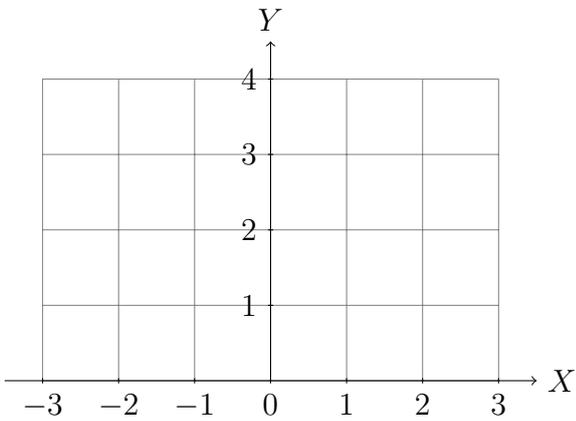


$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } a \leq x < h_1(y) \\ f(x, y) & \text{เมื่อ } h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ 0 & \text{เมื่อ } h_2(y) < x \leq b \end{cases} \quad \text{และ} \quad \iint_S f = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

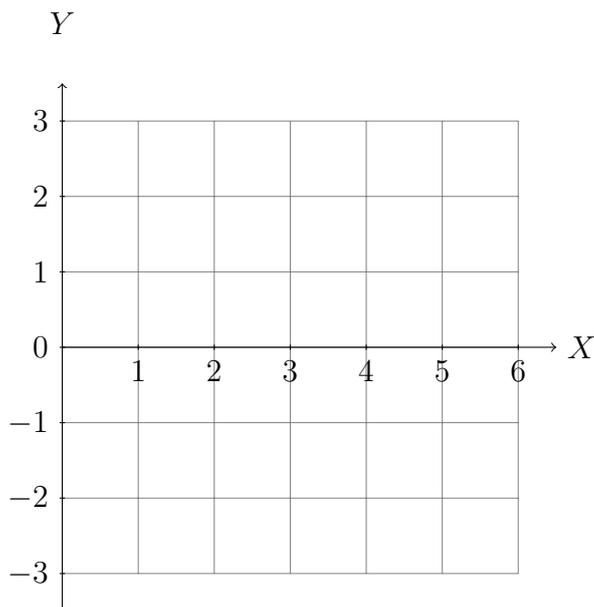
ตัวอย่าง 6.2.2 จงหาค่าของ $\iint_S y$ เมื่อ $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}, \sin x \leq y \leq \cos x\}$



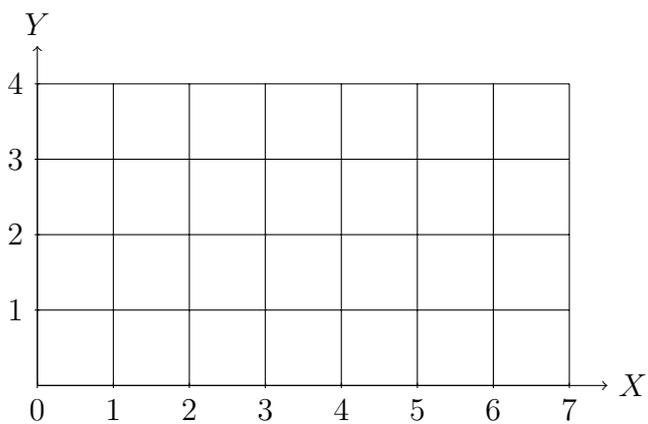
ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้นของ $f(x, y) = x - 3y^2$ บนอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = |x| + 1$ และ $y = 3$



ตัวอย่าง 6.2.4 จงเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตของ $\int_{-2}^0 \int_{1+y^2}^5 f(x, y) dx dy$



ตัวอย่าง 6.2.5 จงเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตของ $\int_2^6 \int_{|x-3|}^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy dx$



แบบฝึกหัด 6.2

1. จงเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรต และเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณของการอินทิเกรต

$$1.1 \int_{-2}^0 \int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx$$

$$1.3 \int_0^1 \int_{y^2-4}^0 f(x, y) dx dy$$

$$1.2 \int_0^2 \int_1^{e^y} f(x, y) dx dy$$

$$1.4 \int_0^3 \int_{(y-1)^2}^{y+1} f(x, y) dx dy$$

2. จงหาค่าของ

$$2.1 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x dx dy$$

$$2.6 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{x^2} \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) dy dx$$

$$2.2 \int_1^2 \int_x^{2x} \frac{1}{(x+y)^3} dy dx$$

$$2.7 \int_1^3 \int_0^x \frac{2}{x^2+y^2} dy dx$$

$$2.3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^y xye^{x^2} dx dy$$

$$2.8 \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} (1+y^6) dy dx$$

$$2.4 \int_0^1 \int_0^1 |x-y| dy dx$$

$$2.9 \int_0^1 \int_{4x}^x e^{-y^2} dy dx$$

$$2.5 \int_0^1 \int_0^y x\sqrt{y^2-x^2} dx dy$$

$$2.10 \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2(\cos x) dx dy$$

3. จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\iint_S f(x, y) dA$ ต่อไปนี้บนอาณาบริเวณที่กำหนดให้

$$3.1 f(x, y) = \cos(x+y) \quad S \text{ คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย } y = x, x = \pi \text{ และแกน } x$$

$$3.2 f(x, y) = xy^2 \quad S \text{ คืออาณาบริเวณเหนือเส้นตรง } y = 1-x \text{ และอยู่ภายในวงกลม } x^2 + y^2 = 1$$

$$3.3 f(x, y) = \frac{2y-1}{x+1} \quad S \text{ คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย } y = 2x-4, y = 0 \text{ และ } x = 1$$

4. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่ปิดล้อมด้วย

$$4.1 \text{ ระนาบ } x + 2y + 3z = 6 \text{ ในอัฐภาคที่หนึ่ง}$$

$$4.2 \text{ พื้นผิว } z = 1 - x^2 - y^2 \text{ เหนือระนาบ } XY$$

$$4.3 \text{ ระนาบ } x + y + z = 3, y = x, x + y = 2, x = 0 \text{ และ } z = 0 \text{ โดยที่ } x + y \geq 2$$

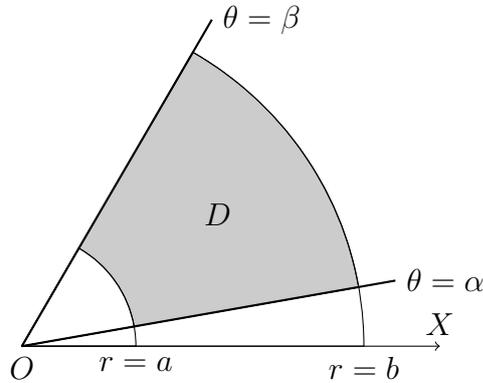
$$4.4 \text{ พื้นผิว } 4x^2 + y^2 = 9 \text{ ระนาบ } z = y + 3 \text{ และอยู่เหนือระนาบ } XY$$

$$4.5 \text{ พื้นผิว } z = x^2 + y^2 \text{ และ } x^2 + y^2 = 4 \text{ ในอัฐภาคที่หนึ่ง}$$

6.3 อินทิกรัลบนระบบพิกัดเชิงขั้ว

พิจารณาโดเมน

$$D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$



ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D จะแบ่งอาณาบริเวณ D ออกเป็นส่วนย่อย ๆ คือ แบ่ง $[a, b]$ ออกเป็น m ช่วงย่อยด้วยจุด $r_0, r_1, r_2, \dots, r_m$ โดยที่

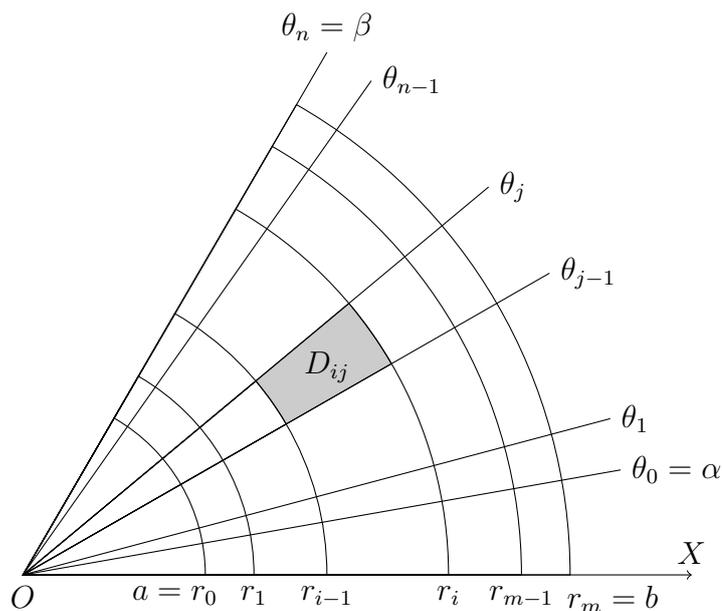
$$a = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_m = b$$

แบ่ง $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยจุด $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ โดยที่

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = \beta$$

สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, m$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ให้

$$D_{ij} = \{(r, \theta) : r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$$

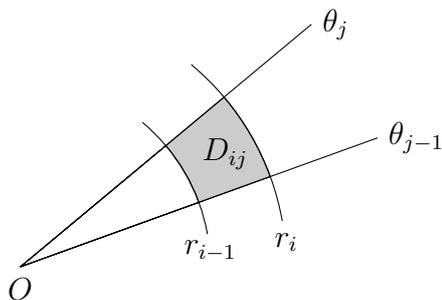


ให้ (x_{ij}, y_{ij}) เป็นจุดใน D_{ij} ดังนั้น

$$x_{ij} = r_{ij}\cos\theta_{ij} \quad \text{และ} \quad y_{ij} = r_{ij}\sin\theta_{ij} \quad \text{เมื่อ} \quad r_{i-1} \leq r_{ij} \leq r_i \quad \text{และ} \quad \theta_{j-1} \leq \theta_{ij} \leq \theta_j$$

และ ΔA_{ij} เป็นพื้นที่ของอาณาบริเวณ D_{ij} ดังนั้นผลบวกรีมันน์คือ

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A_{ij}$$



$$\begin{aligned} \Delta A_{ij} &= \frac{1}{2}r_i^2(\theta_j - \theta_{j-1}) - \frac{1}{2}r_{i-1}^2(\theta_j - \theta_{j-1}) = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)(\theta_j - \theta_{j-1}) \\ &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1}) \\ &= r_{ij}(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1}) \quad (\text{เลือก } r_{ij} = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1}) \text{ เป็นจุดกึ่งกลาง}) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\sin\theta_{ij}) r_{ij}(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1})$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D ดังนั้น

$$\iint_D f = \lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} S_{mn} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \, dr \, d\theta$$

สรุปได้ว่า

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \, dr \, d\theta$$

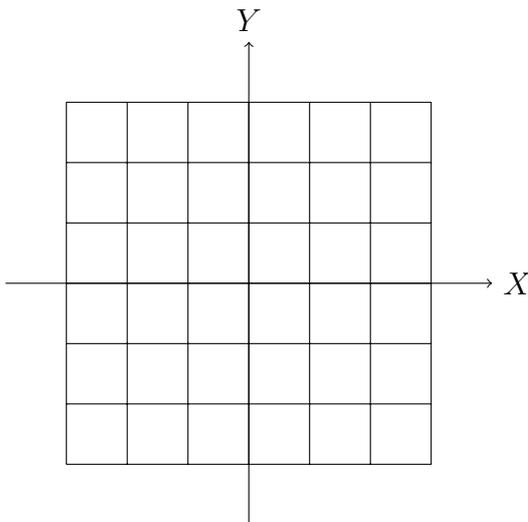
หรือ

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \, d\theta \, dr$$

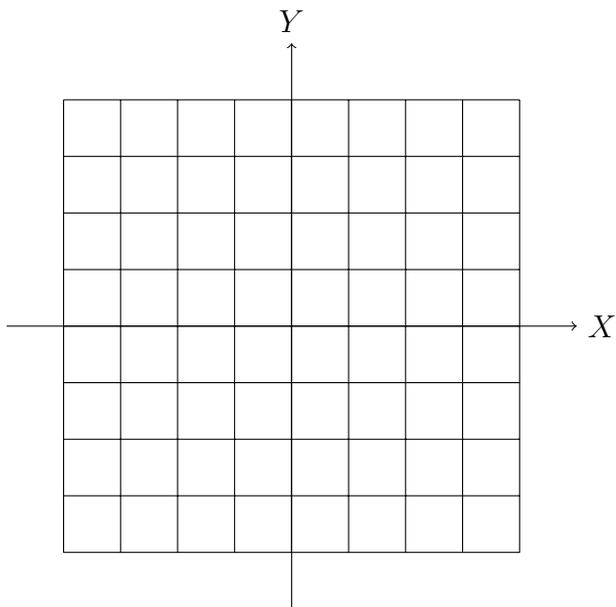
ตัวอย่าง 6.3.1 กำหนดให้ $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ จงหาค่าของ $\int_0^\pi \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r \, drd\theta$

ตัวอย่าง 6.3.2 ให้ D เป็นอาณาบริเวณในจุดภาคที่หนึ่ง ซึ่งอยู่ระหว่างวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ และ $x^2 + y^2 = 4$ จงหา

$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dA$$



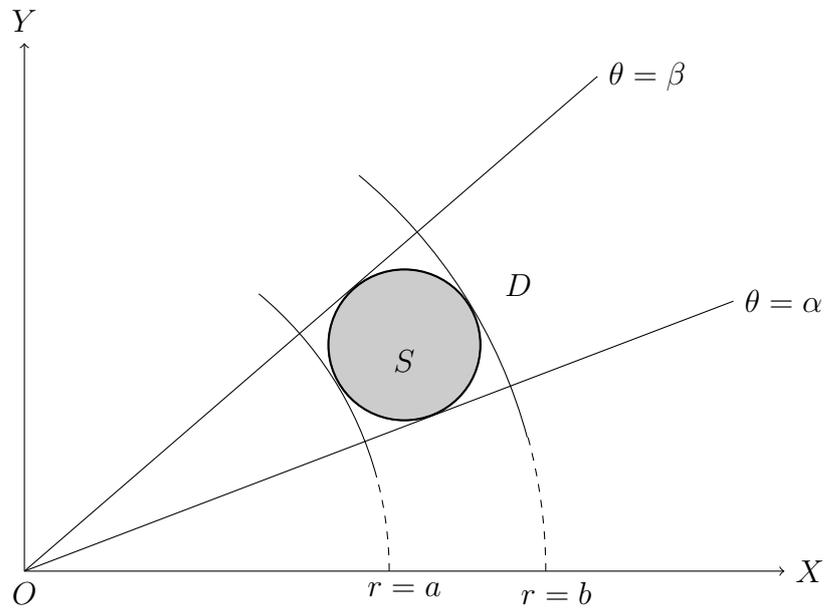
ตัวอย่าง 6.3.3 จงหาค่าของ $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2} dx dy$



การอินทิเกรตบนโดเมน S ใดๆ เมื่อ $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ เราจะหาค่าของ $\iint_S f$ โดยการสร้างรูป

$$D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

ล้อมรอบ S



และกำหนดฟังก์ชัน $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย

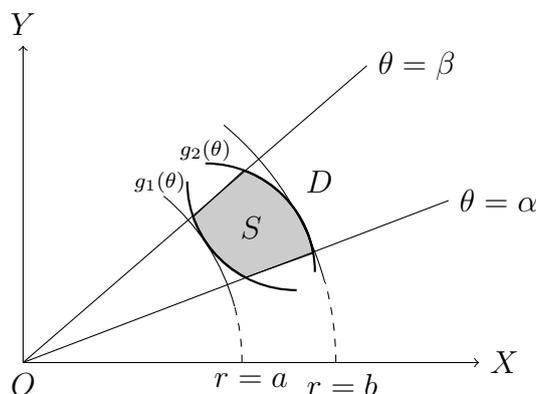
$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{เมื่อ } x \in S \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin S \end{cases}$$

ถ้า \tilde{f} เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D เราจะกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน S โดยนิยามค่าของอินทิกรัลเป็น

$$\iint_S f(x, y) dA = \iint_D \tilde{f}(x, y) dA$$

การหาอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วพิจารณาโดเมนได้ 2 แบบคือ

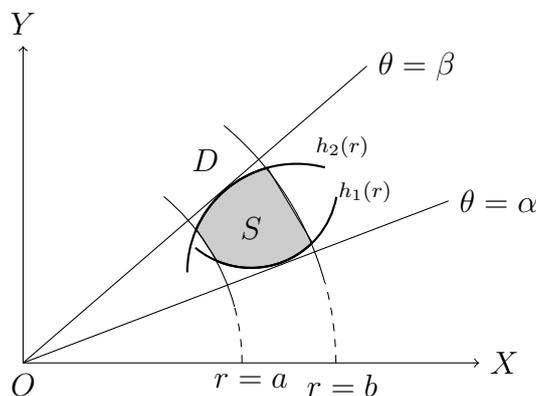
1. แบบที่ 1 $S = \{(r, \theta) : g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$



$$\tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } a \leq r < g_1(\theta) \\ f(r \cos \theta, r \sin \theta) & \text{เมื่อ } g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta) \\ 0 & \text{เมื่อ } g_2(\theta) < r \leq b \end{cases}$$

$$\iint_S f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

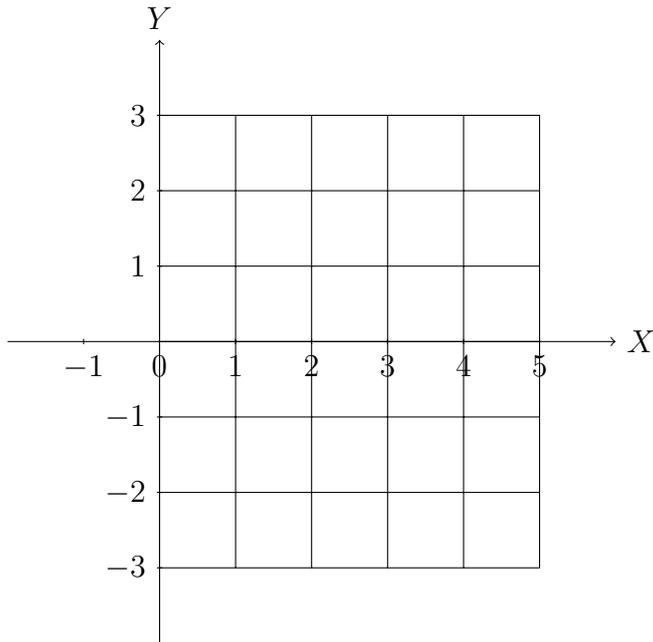
2. แบบที่ 2 $S = \{(r, \theta) : h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r), a \leq r \leq b\}$



$$\tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } \alpha \leq \theta < h_1(r) \\ f(r \cos \theta, r \sin \theta) & \text{เมื่อ } h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r) \\ 0 & \text{เมื่อ } h_2(r) < \theta \leq \beta \end{cases}$$

$$\iint_S f(x, y) dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

ตัวอย่าง 6.3.4 จงเขียนอินทิกรัล $\int_{-2}^2 \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} xy \, dx \, dy$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



แบบฝึกหัด 6.3

1. จงเขียนอินทิกรัลต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้วพร้อมทั้งเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณการอินทิเกรต

$$1.1 \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy$$

$$1.3 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{|y|}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy$$

$$1.2 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx$$

$$1.4 \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$$

2. จงเขียนอินทิกรัลต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปพิกัดฉากพร้อมทั้งเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณการอินทิเกรต

$$2.1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} r^2 \, dr \, d\theta$$

$$2.2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\csc\theta}^{2\csc\theta} r \cos\theta \, dr \, d\theta$$

3. จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\iint_S f(x, y) \, dA$ ต่อไปนี้บนอาณาบริเวณที่กำหนดให้

$$3.1 \quad f(x, y) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \quad S \text{ คืออาณาบริเวณในจุดภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วย } x^2 + y^2 = 4$$

$$3.2 \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad S \text{ คืออาณาบริเวณที่อยู่ภายในวงกลม } x^2 + y^2 = 4x \text{ และอยู่ภายนอกวงกลม } x^2 + y^2 = 4$$

$$3.3 \quad f(x, y) = x + y \quad S \text{ คืออาณาบริเวณในจุดภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วย } x^2 + y^2 = 4, y = \sqrt{3}x \text{ และ } y = 0$$

$$3.4 \quad f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2} \quad S \text{ คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยครึ่งวงกลม } y = \sqrt{2x - x^2} \text{ และแกน } x$$

4. จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ และเส้นตรง $x = 3, y = x$ และ $y = 0$

5. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่อยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ เมื่อ $y \geq 3$

6. จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 4x$ และเส้นโค้ง $y = \sqrt{2x}$ กับแกน x

7. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY ซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = 1 - x^2 - y^2$ และล้อมรอบด้วยพื้นผิวด้านข้างด้วย $x^2 + y^2 = x$

8. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY ซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = 4 + x + 2y$ และล้อมรอบด้วยพื้นผิวด้านข้างด้วย $x^2 + y^2 =$

บทที่ 7

สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

7.1 สมการเชิงอนุพันธ์

สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ฟังก์ชันกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)** ตัวอย่างเช่น

1. สมการการเคลื่อนที่ (Equation of motion)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

2. สมการการเติบโตของจำนวนประชากร (Population growth equation)

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

3. สมการคลื่นในหนึ่งมิติ (One-dimensional wave equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

บทนิยาม 7.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation : ODE)** ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันมากกว่าหนึ่งตัวแปรเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation : PDE)**

ตัวอย่าง 7.1.2 จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้เป็น ODE หรือ PDE

สมการเชิงอนุพันธ์	ODE	PDE
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} = e^x$		
$\frac{d^3x}{dt^3} - 2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{d^2x}{dt^2}$		
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \sin x$		

บทนิยาม 7.1.3 อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คืออันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการนั้น **ดีกรี (degree)** ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือกำลังสูงสุดของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏที่ปรากฏในสมการนั้น เมื่อจัดทุก ๆ กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 7.1.4 จงบอกอันดับและดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์	อันดับ	ดีกรี
$\frac{dy}{dx} = x^3$		
$y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$		
$xu \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^3 = \cos t$		

บทนิยาม 7.1.5 เรียกสมการเชิงอนุพันธ์ว่า **สมการเชิงเส้น (linear equation)** ถ้า

1. ทุก ๆ ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็น 1
2. ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปรตาม และ/หรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ
3. ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิศัยของตัวแปรตามหรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

และเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้นว่า **สมการไม่เชิงเส้น (nonlinear equation)**

ตัวอย่าง 7.1.6 จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้เป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่

สมการเชิงอนุพันธ์	สมการเชิงเส้น	สมการไม่เชิงเส้น
$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 3x^2$		
$y \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = \tan x$		
$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^2 = \sin u$		
$xy^2 = y' + yy''$		
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$		
$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$		

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งใดก็หนึ่งจะเขียนได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{หรือ} \quad M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

บทนิยาม 7.1.7 เราจะเรียกฟังก์ชันซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันของอนุพันธ์ และสอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์ว่า **ผลเฉลย (solution)** ของสมการ

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อาจอยู่ในรูปของฟังก์ชันที่นิยามแบบแจ่มชัด (explicit function) หรือฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย (implicit function)

เราเรียกผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีค่าคงตัวไม่เจาะจงว่า **ผลเฉลยทั่วไป (general solution)** และผลเฉลยที่กำหนดค่าคงตัวแน่นอนว่า

ผลเฉลยเฉพาะ (particular solution)

ตัวอย่าง 7.1.8 จงแสดงว่า $y = Ae^{-3x} + Be^x$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 2y' = 3y$

ตัวอย่าง 7.1.9 จงแสดงว่า $y = \sin x \cos x - \cos x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y' + (\tan x)y = \cos^2 x$$

แบบฝึกหัด 7.1

1. จงบอกอันดับ ดีกรี รวมทั้งระบุว่าสมการใดเป็นสมการเชิงเส้น หรือเป็นสมการไม่เชิงเส้น

$$1.1 \quad \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$$

$$1.2 \quad y''' + 2y'' + 3y' + 4y = \cos x$$

$$1.3 \quad e^x \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y'}$$

$$1.4 \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + x \frac{d^2y}{dx^2} = \ln x$$

$$1.5 \quad (x^2 - 1)y' + xy^2 + 1 = 0$$

$$1.6 \quad u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

2. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2.1 \quad y = cx + \sqrt{1 - c^2} \text{ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ } xy' + \sqrt{1 - (y')^2} = y$$

$$2.2 \quad (x - c)^2 + y^2 = a^2 \text{ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ } y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a^2$$

$$2.3 \quad y^2 - x = 0 \text{ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ } y = 2x \frac{dy}{dx}$$

$$2.4 \quad y = 4 + \frac{4}{x} \text{ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ } x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = 0$$

7.2 สมการแยกตัวแปรได้

บทนิยาม 7.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถเขียนในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \text{หรือ} \quad M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$$

เรียกว่าเป็น **สมการแบบแยกตัวแปรได้** (variable separable equation)

วิธีหาผลเฉลย สมการแบบแยกตัวแปรได้สามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$$

การหาผลเฉลยของสมการแบบแยกตัวแปรได้คือการอินทิเกรตแต่ละส่วน

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

ตัวอย่าง 7.2.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $3(1 - y^2) dx - 2xy dy = 0$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy}{x^2 + 1}$

แบบฝึกหัด 7.2

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \quad \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$$

$$1.2 \quad (y^4 + y)y' = \sin x - \cos x$$

$$1.3 \quad x^3 \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - x^2 y^2} \quad \text{เมื่อ } x > 0$$

$$1.4 \quad 3(4y^2 + 1) dx = y(x - 1) dy$$

$$1.5 \quad \frac{1 + e^x}{1 - e^{-y}} dy + e^{x+y} dx = 0$$

$$1.6 \quad (x^2 y + x^2) dx = (xy^2 - y^2) dy$$

$$1.7 \quad (x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0$$

$$1.8 \quad (x^2 y^2 \sec x \tan x + xy^2 \sec x) dx + xy^3 dy = 0$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$2.1 \quad \cos^2 x \frac{dy}{dx} = \sin^2 y \quad \text{เมื่อ } y(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$2.2 \quad \sqrt{x^2 + 1} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \text{เมื่อ } y(\sqrt{3}) = 2$$

$$2.3 \quad dy = \frac{9e^x}{ey^2 + y^2 e^2} dx \quad \text{เมื่อ } y(1) = 3$$

$$2.4 \quad x dy = \frac{y}{x - x^3} dx \quad \text{เมื่อ } y(2) = -2$$

7.3 สมการเอกพันธ์

บทนิยาม 7.3.1 เรียกฟังก์ชัน $F(x, y)$ ว่าฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี n (homogeneous function of degree n) ถ้ามีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y) \quad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง } \lambda \neq 0$$

ตัวอย่าง 7.3.2 จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์หรือไม่ ถ้าเป็นดีกรีเท่าใด

$$1. f(x, y) = x^3 + 2xy^2 \qquad 2. f(x, y) = \frac{x^2 - 2y^2}{xy}$$

บทนิยาม 7.3.3 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์ (homogeneous differential equation) ถ้า $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ที่มีดีกรีเท่ากัน หรือพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์ก็ต่อเมื่อ $F(x, y)$ เป็นสมการเอกพันธ์ดีกรี 0

วิธีหาผลเฉลย เนื่องจาก $F(x, y)$ เป็นสมการเอกพันธ์ดีกรี 0 ดังนั้น $F(x, y) = F(\lambda x, \lambda y)$

ให้ $\lambda = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ จะได้ว่า

$$F(x, y) = F(\lambda x, \lambda y) = F\left(1, \frac{y}{x}\right) = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์จะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

ให้ $v = \frac{y}{x}$ แล้ว $y = vx$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ ทำให้ได้ว่า

$$v + x \frac{dv}{dx} = G(v)$$

$$\frac{1}{G(v) - v} dv = \frac{1}{x} dx$$

เห็นได้ชัดว่าเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ในพจน์ของ x และ v

ตัวอย่าง 7.3.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(y^2 - x^2) dx + xy dy = 0$

2. $x \frac{dy}{dx} - y = x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$

แบบฝึกหัด 7.3

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

$$1.2 \quad x dy - \left(x \tan\left(\frac{y}{x}\right) + y \right) dx = 0$$

$$1.3 \quad (x^2y + y^3) dx + x^3 dy = 0$$

$$1.4 \quad 2xy dx + (x^2 + y^2) dy = 0$$

$$1.5 \quad xy' = x + y$$

$$1.6 \quad x \left(1 + \ln\left(\frac{y}{x}\right) \right) y' = y$$

$$1.7 \quad 2x dy - 2y dx = \sqrt{x^2 + 4y^2} dx \quad \text{เมื่อ } x > 0$$

$$1.8 \quad 2ye^{\frac{x}{y}} dx = (2xe^{\frac{x}{y}} - y) dy$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$2.1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y} \quad \text{เมื่อ } y(-1) = 0$$

$$2.2 \quad x^2y dx - (x^3 - y^3) dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(1) = 1$$

$$2.3 \quad 14xyy' = 6x^2 - 7y^2 \quad \text{เมื่อ } y(-2) = 1$$

$$2.4 \quad x^2y' = 3x^2 - 2xy + y^2 \quad \text{เมื่อ } y(1) = \frac{3}{2}$$

7.4 สมการแม่นตรง

บทนิยาม 7.4.1 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรง (exact differential equation) ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $F(x, y)$ ที่ทำให้

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$$

ทุก (x, y) ในอาณาบริเวณ R

วิธีหาผลเฉลย เนื่องจาก $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$ ดังนั้น $dF(x, y) = 0$ นั่นคือ

$$\text{ผลเฉลยทั่วไปของสมการแม่นตรงคือ} \quad F(x, y) = c$$

พิจารณา

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$$

จะได้ว่า $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ และ $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ถ้า $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}$ และ $\frac{\partial N}{\partial x}$ ต่อเนื่องในอาณาบริเวณ R จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้น

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + C(y)$$

หา $C(y)$ ได้จาก $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$

ในทำนองเดียวกัน

$$F(x, y) = \int N(x, y) dy + C(x)$$

หา $C(x)$ ได้จาก $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$

ตัวอย่าง 7.4.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2xy^3 - ye^{-x}) dx + (3x^2y^2 + e^{-x} - 4) dy = 0$$

ตัวอย่าง 7.4.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{x + y^2}{xy^2} dy - \frac{y - 4}{x^2} dx = 0 \quad \text{เมื่อ } y(-2) = 1$$

แบบฝึกหัด 7.4

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \quad 2x - y^3 - 3xy^2y' = 0$$

$$1.2 \quad (2x - 5y) dy = (6x - 2y) dx$$

$$1.3 \quad x(x \cos(x^2y) - 2y)y' + 2xy \cos(x^2y) = y^2$$

$$1.4 \quad (\sin xy + xy + \cos xy) \frac{dy}{dx} + y^2 \cos xy = 0$$

$$1.5 \quad \frac{3xy + 1}{y} dx + \frac{2y - x}{y^2} dy = 0$$

$$1.6 \quad \pi y + (\pi x + \arcsin y) \frac{dy}{dx} = \sin x$$

$$1.7 \quad \frac{\ln y}{x} dx + \left(\frac{\ln x}{y} + \sin y \right) dy = 0$$

$$1.8 \quad (2xye^{x^2} + \sin y) dx + (x^2e^{x^2y} + x \cos y - y) dy = 0$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$2.1 \quad (3x^2y + 2xy) dx + (x^3 + x^2 + 2y) dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(1) = 2$$

$$2.2 \quad (e^y + ye^x) dx - (e^x + xe^y) dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(1) = 0$$

$$2.3 \quad (\sin^2 x - 2y \cos x) y' - 2y \sin x \cos x + y^2 \sin x = 0 \quad \text{เมื่อ } y(0) = -2$$

$$2.4 \quad \ln(1 + y^2) = \left(\frac{1}{y} - \frac{2xy}{1 + y^2} \right) \frac{dy}{dx} \quad \text{เมื่อ } y(2) = \sqrt{e - 1}$$

7.5 ตัวประกอบอินทิกรัล

ในกรณีที่ $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ ไม่เป็นสมการแม่นตรงแต่มี $\mu(x, y)$ ที่ทำให้

$$\mu(x, y)(M(x, y) dx + N(x, y) dy) = 0$$

เป็นสมการแม่นตรง เราจะเรียกฟังก์ชัน $\mu(x, y)$ นี้ว่า **ตัวประกอบอินทิกรัล** (integrating factor) ของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ แล้ว

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} &= \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{\mu} \left(N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

กรณีที่ 1. μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงอย่างเดียว

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} N \frac{d\mu}{dx} &= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ N \frac{d}{dx} \ln|\mu| &= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{d}{dx} \ln|\mu| &= \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = f(x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int f(x) dx}$

กรณีที่ 2. μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงอย่างเดียว

$$\frac{d}{dy} \ln|\mu| = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = g(y)$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int g(y) dy}$

สรุปได้ว่า

- สำหรับ $f(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$ มีตัวประกอบอินทิกรัลเป็น $\mu = e^{\int f(x) dx}$
- สำหรับ $g(y) = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ มีตัวประกอบอินทิกรัลเป็น $\mu = e^{\int g(y) dy}$

ตัวอย่าง 7.5.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(3x + 2y^2) dx + 2xy dy = 0$

$$2. (x^2 + y^2 + 1) dx + x(x - 2y) dy = 0$$

แบบฝึกหัด 7.5

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \quad 2xy \, dx + (x^3 + 2xy) \, dy = 0$$

$$1.2 \quad (4xy - 3x - 3x^2) \, dy - (2xy - y^2 + y) \, dx = 0$$

$$1.3 \quad (xy + y - 1) \, dx + x^3 \, dy = 0$$

$$1.4 \quad y(x + y^3) \, dx + x(y^3 - x) \, dy = 0$$

$$1.5 \quad (xy - x^2)y' - xy + 1 = 0$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$2.1 \quad y(1 + x^2y) \, dx - x \, dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(1) = -1$$

$$2.2 \quad (x^2 + y) \, dx + (x^2 \cos y - x) \, dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(2) = 0$$

$$2.3 \quad 1 + (x \tan y - 2 \sec y)y' = 0 \quad \text{เมื่อ } y(-1) = \pi$$

7.6 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

บทนิยาม 7.6.1 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง คือสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

วิธีหาผลเฉลย สามารถจัดรูปได้เป็น $[P(x)y - Q(x)] dx + dy = 0$

ดังนั้น $M(x, y) = P(x)y - Q(x)$ และ $N(x, y) = 1$ จะได้ว่า

$$P(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int P(x) dx}$

$$\mu \frac{dy}{dx} + \mu P(x)y = \mu Q(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu Q(x)$$

$$\mu y = \int \mu Q(x) dx + C$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu Q(x) dx + C \right)$$

ตัวอย่าง 7.6.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$

ตัวอย่าง 7.6.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(xy + x + x^3) dx + (1 + x^2) dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(\sqrt{3}) = 1$$

แบบฝึกหัด 7.6

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x}$$

$$1.2 \quad x^2 y' + 3xy + 2x^5 = 0$$

$$1.3 \quad (2y - 4) dx + dy = 0$$

$$1.4 \quad x \frac{dy}{dx} + 3y = \frac{\sin x}{x^2}$$

$$1.5 \quad y' - y = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

$$1.6 \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x \ln x} = x^2$$

$$1.7 \quad (3xy - 4y - 3x) dx + (x^2 - 3x + 2) dy = 0$$

$$1.8 \quad 2(y - 3\sin x)\cos x dx + \sin x dy = 0$$

$$1.9 \quad (x^2 + y^2) dx - 2xy dy = 0$$

$$1.10 \quad (y + xy^2) dx - dy = 0$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$2.1 \quad (x - 1)^3 \frac{dy}{dx} + 4(x - 1)^2 y = x + 1 \quad \text{เมื่อ } y(3) = \frac{1}{2}$$

$$2.2 \quad (y - e^x \sin x) dx + dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(0) = -1$$

$$2.3 \quad (\cos x)y' + y = 1 \quad \text{เมื่อ } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

สรุปสูตรเกี่ยวกับแคลคูลัส

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

1. $\sin x \csc x = 1$
2. $\cos x \sec x = 1$
3. $\cot x \tan x = 1$
4. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
5. $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$
6. $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$
7. $\sin(-x) = -\sin x$
8. $\cos(-x) = \cos x$
9. $\tan(-x) = -\tan x$
10. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
11. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
12. $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
13. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$
14. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
15. $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
16. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
17. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
18. $\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$
19. $\tan x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$
20. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
21. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
22. $\sin^3 x = \frac{1}{4}[3\sin x - \sin 3x]$
23. $\cos^3 x = \frac{1}{4}[3\cos x + \cos 3x]$
24. $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$
25. $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
26. $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
27. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
28. $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
29. $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$
30. $\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$
31. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
32. $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$1. \frac{d}{dx}C = 0$$

$$2. \frac{d}{dx}x = 1$$

$$3. \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$4. (af)'(x) = af'(x)$$

$$5. (f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$6. (fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$7. \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$8. (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$9. \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$10. \frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

$$11. \frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$$

$$12. \frac{d}{dx} \log_a|x| = \frac{1}{x \ln a}$$

$$13. \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$14. \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$15. \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$16. \frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

$$17. \frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$$

$$18. \frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$$

$$19. \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$20. \frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$21. \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$22. \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$23. \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$24. \frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

ค่าเชิงอนุพันธ์

$$1. dC = 0$$

$$2. d(u+v) = du + dv$$

$$3. d(ku) = kdu$$

$$4. u'dx = du$$

$$5. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u'dv}{v^2}$$

$$6. d(uv) = vdu + u'dv$$

$$7. df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

$$1. \int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

$$2. \int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$3. \int kdx = kx + C$$

$$4. \int vdu = uv - \int vdu$$

$$5. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$6. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$7. \int e^x dx = e^x + C$$

$$8. \int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$9. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$10. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$11. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$12. \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$13. \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$14. \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$15. \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$16. \int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$$

$$17. \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$18. \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$19. \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$20. \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

$$21. \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$$

$$22. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$23. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$24. \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C$$

$$25. \int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$26. \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$27. \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$28. \int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$29. \int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$30. \int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$31. \int \operatorname{arccot} x dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$32. \int \operatorname{arcsec} x dx = x \operatorname{arcsec} x - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$$

$$33. \int \operatorname{arccsc} x dx = x \operatorname{arccsc} x + \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$$

บรรณานุกรม

ดำรง ทิพย์โยธา, ธีรยุทธนาถ ไตรภพ และสุรัชย์ สมบัติบริบูรณ์. (2559). แคลคูลัส ๒.
กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

James Stewart. (2012). *Calculus Early Transcendentals*. Canada. Nelson Education,
Ltd.