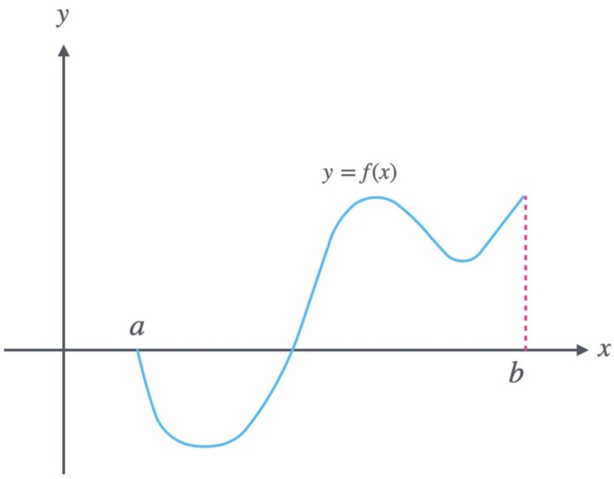
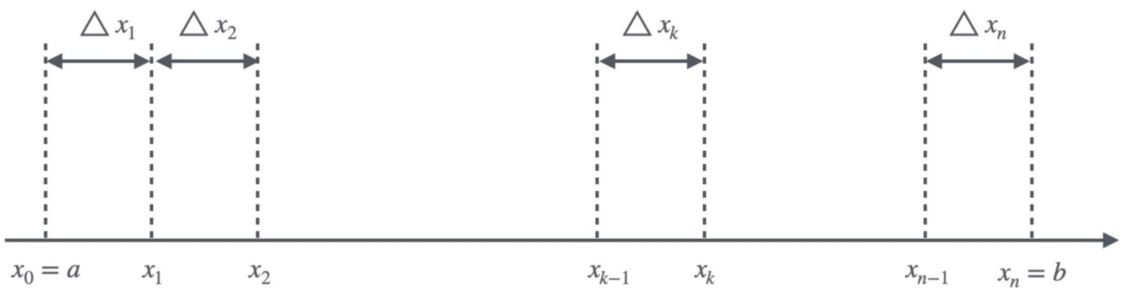
บทที่ 6 ปริพันธ์จำกัดเขตและการประยุกต์

6.1 ปริพันธ์จำกัดเขต

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งต่อเนื่องและนิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่งอาจมีค่าเป็นบวกหรือมีค่าเป็นลบก็ได้ ดังรูป

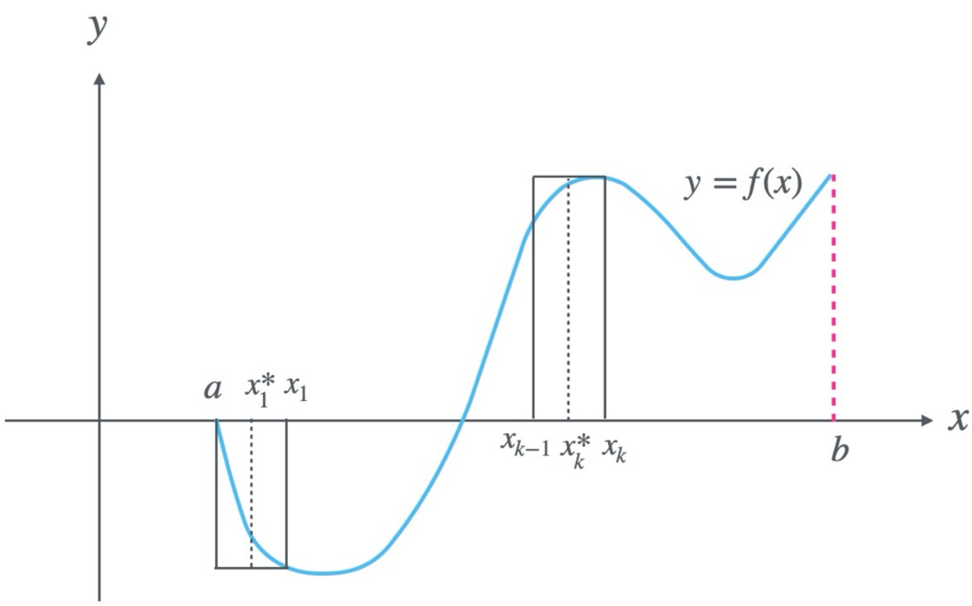


แบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น n ช่วงที่จุด $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} = b$
เรียกเซต $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ว่าส่วนแบ่งของ $[a,b]$ ซึ่งส่วนแบ่ง P นี้ ประกอบด้วยช่วงปิดย่อยๆ n ช่วง คือ $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$ จะเรียกช่วงย่อย $[x_{k-1},x_k]$ ว่า ช่วงปิดย่อยที่ k ของ P และให้ความยาวของช่วงย่อยที่ k เป็น $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ดังรูป



ในแต่ละช่วงย่อย เลือกจำนวนบางจำนวน โดยที่ให้ค่า x_k^* เป็นค่าที่อยู่ในช่วงย่อยที่ k จะได้จุด $(x_k^*, f(x_k^*))$ บนเส้นกราฟ

ดังนั้น ในแต่ละช่วงย่อย สามารถสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งกว้าง Δx_k และสูง $f(x_k^*)$ ซึ่งสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้อาจอยู่ใต้แกน x หรือเหนือแกน x ก็ได้ดังรูป



ในแต่ละช่วงย่อย เราสามารถหา $f(x_k^*) \cdot \Delta x_k$ ซึ่งอาจมีค่าเป็นบวกหรือลบ หรือศูนย์ก็ได้ ขึ้นอยู่กับค่า $f(x_k^*)$

พื้นที่ใต้เส้นโค้งโดยประมาณคือ

$$f(x_1^*) \cdot \Delta x_1 + f(x_2^*) \cdot \Delta x_2 + f(x_3^*) \cdot \Delta x_3 + \cdots + f(x_k^*) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \cdot \Delta x_k$$

ผลบวกนี้เรียกว่า **ผลบวกรีมันน์** (Riemann Sum) ดังบทนิยาม

> ให้ s_n เป็นผลบวกของค่า $f(x_k^*) \cdot \Delta x_k$ เมื่อ $k = 1,2, \ldots, n$ จะได้
>
> $$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \cdot \Delta x_k$$
>
> ซึ่งเรียกว่า **ผลบวกรีมันน์**ของ f บนช่วง $[a, b]$

ข้อสังเกต 1. ถ้า $\Delta x_k, k = 1, 2, \ldots, n$ เท่ากันหมดเท่ากับ Δx จะได้ $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

2. จะเห็นว่า **ผลบวกรีมันน์** นี้เป็นเพียงค่าประมาณของพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ กับแกน x แต่ต้องการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง เราจึงพิจารณาหาค่าของผลบวกรีมันน์

ในกรณี $n \to \infty$ (หรืออีกนัยหนึ่งแบ่งโดยให้ Δx_k เข้าใกล้ 0 นั่นเอง) กล่าวคือ ถ้า $\lim_{n\to\infty} f(x_k^*)\cdot\Delta x_k$ หาค่าได้ ค่าลิมิตนี้จะแทนพื้นที่ใต้โค้งที่ต้องการ ซึ่งจะนิยามปริพันธ์จำกัดเขตของ f บน $[a,b]$ คือ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\cdot\Delta x_k$ ดังนี้

บทนิยาม 6.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และค่า ปริพันธ์จำกัดเขตของ f บน $[a,b]$ คือ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\cdot\Delta x_k$ ถ้าลิมิตหาค่าได้ เขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)dx$

นั่นคือ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\cdot\Delta x_k$$

เรียก a ว่า ลิมิตล่าง และ b เป็นลิมิตบน

การหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขต

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าอินทิกรัลได้บนช่วงปิด $[a,b]$ หมายถึง $\int_a^b f(x)dx$ หาลิมิตของผลบวกรีมันน์หาค่าได้ ถ้าเราแบ่งช่วงย่อยออกเป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

ดังนั้น เราเลือกค่า x_k^* แล้วหาค่า $f\left(x_k^*\right)$ เราจะหาผลบวกรีมันน์ แล้วหาลิมิตได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า $\int_{-1}^{2} x^3 dx$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า $\int_1^3 (x+1)dx$

วิธีทำ

สมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต

ถ้า f, g เป็นฟังก์ชันซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b [f(x)dx \pm g(x)] = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \,;\ \ c \in [a,b]$
5. ถ้า $f(x) \geq g(x)$ แล้ว

   $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
6. ถ้า $f(x) \geq 0$ แล้ว

   $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

บทนิยาม 6.2 จะกล่าวว่า f มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ ถ้ามีจำนวนบวก M โดยที่ $-M \leq f(x) \leq M$ ทุกค่า x ในช่วง $[a,b]$ นั่นคือ กราฟของ f ในช่วง $[a,b]$ จะต้องอยู่ระหว่างเส้นตรง $y=-M$ และ $y=M$

ตัวอย่างที่ 3 ถ้า $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 0 \\ x+1 & ; x \geq 0 \end{cases}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ จงพิจารณาว่าในช่วง $[-1,1]$, $f(x)$ มีขอบเขตหรือไม่

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 6.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามทุกจุดในช่วง $[a,b]$

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ แล้ว f สามารถหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$
2. ถ้า f มีขอบเขตในช่วง $[a,b]$ และมีจุดที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องในช่วง $[a,b]$ จำนวนจำกัด แล้ว f หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$
3. ถ้า f ไม่มีขอบเขตในช่วง $[a,b]$ แล้ว $f(x)$ ไม่สามารถหาปริพันธ์บนช่วง $[a,b]$

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

การหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยการหาผลบวกรีมันน์ แล้วหาลิมิต $n \to \infty$ เป็นวิธีที่ซับซ้อนยุ่งยาก การหาค่าประมาณอาจทำได้ง่ายกว่า แต่การหาค่าที่ถูกต้องก็ทำได้เฉพาะฟังก์ชันง่าย ๆ อย่างไรก็ตาม ยังมีวิธีที่ง่ายกว่าวิธีผลบวกรีมันน์และหาค่าถูกต้องของปริพันธ์จำกัดเขตได้หลากหลายฟังก์ชัน โดยใช้ความพยายามหรือทำงานไม่มากนัก วิธีดังกล่าวนี้เป็นวิธีที่เกี่ยวข้องกับปริพันธ์จำกัดเขต และปฏิยานุพันธ์ ความสัมพันธ์นี้เรียกว่าทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ทฤษฎีบทนี้มีความสำคัญมาก บุคคลแรกที่ได้สังเกตความสัมพันธ์นี้ คือ *Isaac Barrow* ซึ่งเป็นครูของ *Newton* แต่อย่างไรก็ตาม *Newton* เป็นบุคคลแรกที่ได้พิสูจน์และนำทฤษฎีนี้มาประยุกต์ใช้

ทฤษฎีบท 6.2 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

* ค่าผลต่าง $F(b) - F(a)$ บางครั้ง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$F(x)]_a^b$ หรือ $[F(x)]_a^b$ หรือ $F(x)|_{x=a}^b$

ดังนั้น $\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

และ $[F(x)]_a^b$ มีสมบัติเช่นเดียวกันกับปริพันธ์จำกัดเขต คือ

$$[cF(x)]_a^b = c[F(x)]_a^b$$

$$[F(x) \pm G(x)]_a^b = [F(x)]_a^b \pm [G(x)]_a^b$$

จาก เมื่อ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง $[a,b]$ แล้วจะได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ f คือ $F(x) + c$

จะได้ $[F(x) + c]_a^b = [F(b) + c] - [F(a) + c]$

$$= F(b) - F(a)$$

$$= F(x)]_a^b = \int_a^b f(x)dx$$

ดังนั้น เมื่อ $\int f(x)dx = F(x) + c$ จะได้

$$[f(x)dx]_a^b = [F(x) + c\ ]_a^b = \int_a^b f(x)dx$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ

5.1 $\int_1^4 \left(2x - 3x^{1/2} + \frac{1}{x}\right) dx$

วิธีทำ

5.2 $\int_{-\sqrt{7}}^{0} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right) dx$

วิธีทำ

5.3 $\int_{-1}^{\frac{1}{3}} sin(\pi x)\,dx$

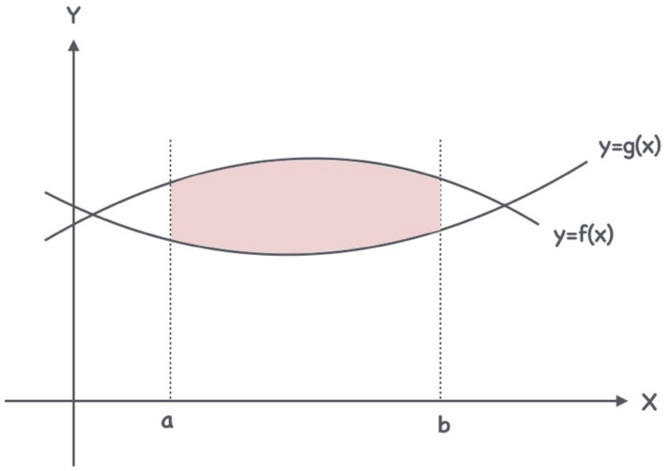
วิธีทำ

5.4 $\int_{0}^{ln2} xe^{x}\,dx$

วิธีทำ

6.2 **พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง**

ค่าอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x)dx$ ของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ไม่เป็นลบมีความหมายว่าเป็นพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x เส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ สำหรับกรณีที่บริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้งหลายเส้นอาจหาพื้นที่ได้ดังนี้ ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาค่าอินทิกรัลได้ทุก $x \in [a,b]$ และ $0 \le g(x) \le f(x)$ ทุก $x \in [a,b]$



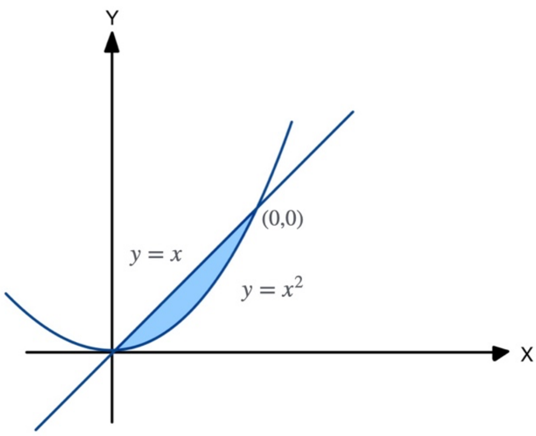
บริเวณที่เป็นเซตของจุด $\{(x,y)/a \le x \le b \wedge g(x) \le y \le f(x)\}$ เรียกว่า บริเวณระหว่าง f และ g บนช่วง $[a,b]$ พื้นที่ของบริเวณนี้ เรียกว่า พื้นที่ของบริเวณที่อยู่ระหว่าง f และ g บนช่วง $[a,b]$

เนื่องจากพื้นที่ของบริเวณที่อยู่ระหว่าง f และ g บนช่วง $[a,b]$ เท่ากับพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ บนช่วง $[a,b]$ ลบด้วยพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = g(x)$ บนช่วง $[a,b]$ ดังนั้น

$$R = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

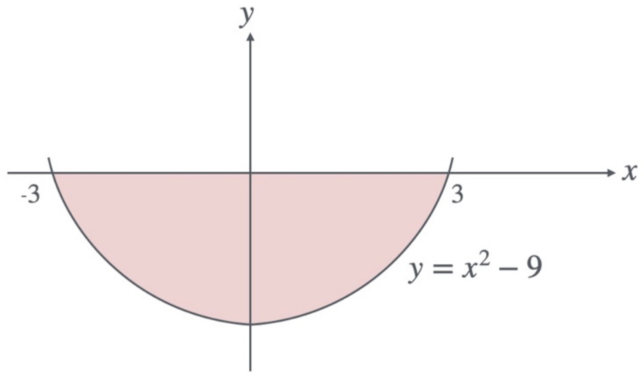
ตัวอย่างที่ 6 จงหาพื้นที่ระหว่าง $y = x$ และ $y = x^2$ ในช่วง $[0,1]$

วิธีทำ



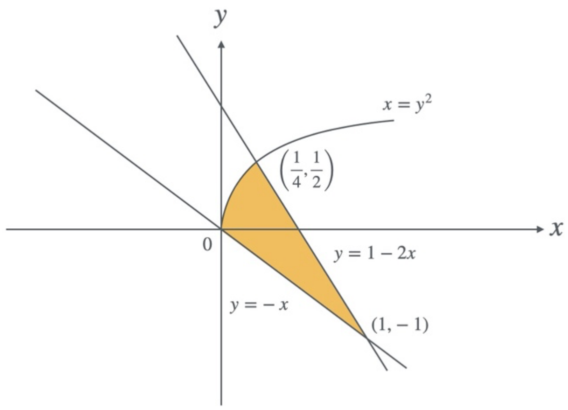
ตัวอย่างที่ 7จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 9$ และแกน x

วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 8 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = -x, y = \sqrt{x}$ และ $y = 1 - 2x$

วิธีทำ



6.3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

เมื่อปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x)dx$ มีค่า a และ b เป็นอนันต์ หรือในช่วง $[a,b]$ และ f ไม่ต่อเนื่องอย่างน้อย 1 จุด เราจะเรียกปริพันธ์จำกัดเขตในลักษณะนี้ว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ**

บทนิยาม 6.3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ เมื่อช่วงของการหาปริพันธ์เป็นอนันต์

1. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[a,\infty)$ แล้ว

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

2. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,b]$ แล้ว

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$$

3. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,\infty)$ แล้ว

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

เมื่อลิมิตในข้อ 1 และ 2 หาค่าได้ จะกล่าวว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่เข้า และลิมิตเป็นค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบนั้น แต่ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ จะกล่าวว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่ออก ในข้อที่ 3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบด้านซ้ายของสมการลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบด้านขวาของสมการลู่เข้าทั้งคู่

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ

9.1 $\int_1^{\infty} \frac{lnx}{x}dx$

วิธีทำ

9.2 $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$

วิธีทำ

9.3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

วิธีทำ

บทนิยาม 6.4 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ เมื่อฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องบางจุดในช่วงของการหาปริพันธ์

1.ในช่วง $[a,b]$ ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทุกค่า x ยกเว้นที่ $x=a$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

2.ในช่วง $[a,b]$ ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทุกค่า x ยกเว้นที่ $x=b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$$

3.ในช่วง $[a,b]$ ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทุกค่า x ยกเว้นที่ $x=c$ เมื่อ $c\in(a,b)$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)dx$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้
5.1 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$
วิธีทำ

5.2 $\int_1^2 \frac{1}{2-x}\,dx$

วิธีทำ

5.3 $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$

วิธีทำ