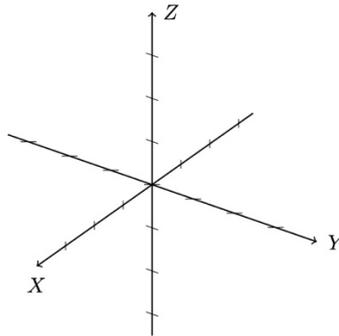


บทที่ 2 ปริภูมิเวกเตอร์ 3 มิติ

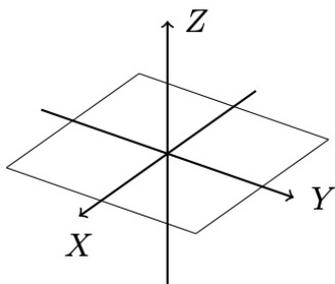
ในบทนี้จะประกอบไปด้วยระบบพิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ พื้นผิวกำลังสอง การเขียนกราฟของพื้นผิวกำลังสอง และการแปลงระบบพิกัด

1. ระบบพิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ

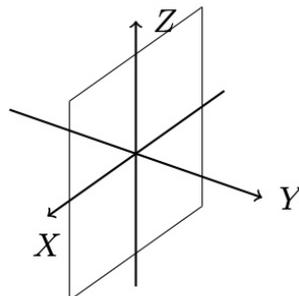
ระบบพิกัดฉากในปริภูมิสามมิติจะประกอบไปด้วยแกนพิกัด 3 แกนที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน เรียกแกน x, y และ z ตามลำดับ โดยแกนทั้ง 3 นี้ตัดกันที่จุดหนึ่งเรียกว่าจุดกำเนิด (Origin) แทนด้วยสัญลักษณ์ O แต่ละแกนพิกัดจะกำหนดทิศทางบวก โดยวัดจากจุดกำเนิดไปตามแกนในทิศใดทิศหนึ่งโดยใช้ลูกศรแสดงทิศทางบวก ด้านตรงข้ามมีทิศทางลบ ดังรูป



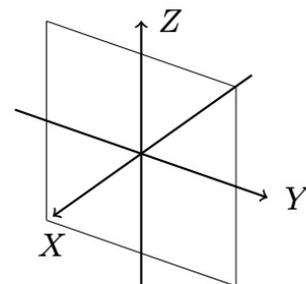
แกนทั้ง 3 ตัดกันทำให้เกิดระนาบสามระนาบที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน เรียก **ระนาบพิกัดฉาก** ซึ่งประกอบไปด้วย ระนาบ xy คือระนาบที่มีแกน x และแกน y อยู่บนระนาบ ระนาบ xz คือระนาบที่มีแกน x และแกน z อยู่บนระนาบ ระนาบ yz คือระนาบที่มีแกน y และแกน z อยู่บนระนาบ รูปแสดง ระนาบพิกัดฉากดังกล่าว



ระนาบ XY

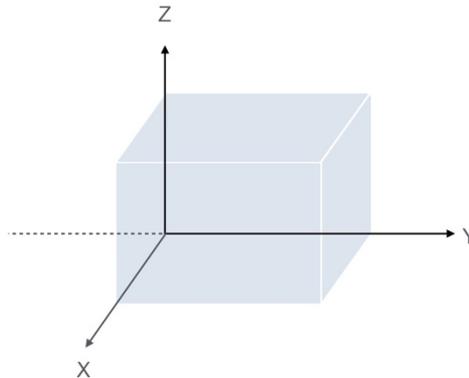


ระนาบ XZ

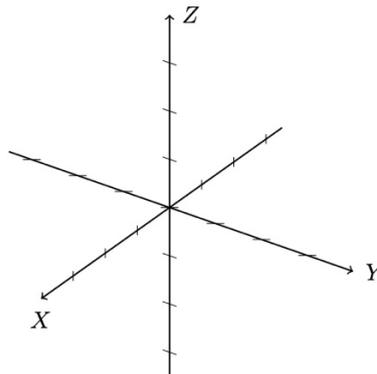


ระนาบ YZ

การกำหนดจุด P ในปริภูมิสามมิติจะแทนด้วยจำนวนจริง 3 จำนวนเรียงกันคือ (a, b, c) โดยจุด P ห่างจากระนาบ yz ระนาบ xz และระนาบ xy เป็นระยะทาง $|a|, |b|$ และ $|c|$ ตามลำดับ เรียกจุด (a, b, c) ว่าพิกัดจุด P แทนด้วยสัญลักษณ์ $P(a, b, c)$



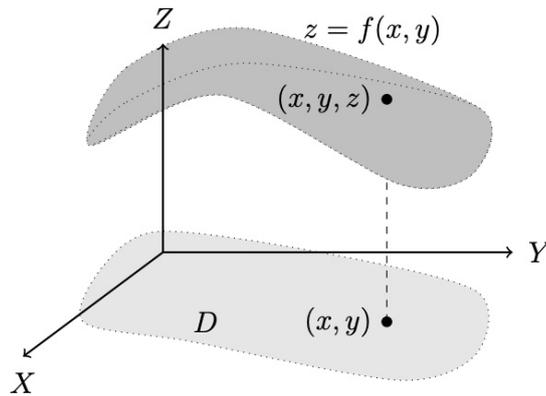
จากรูปจะเห็นว่าระนาบพิกัดฉากทั้ง 3 แบ่งปริภูมิ 3 มิติ ออกเป็น 8 ส่วน เรียกแต่ละส่วนว่า อัฐภาค (Octant) โดยอัฐภาคที่ประกอบด้วยจุด (a, b, c) ซึ่ง a, b และ c มีค่าเป็นบวก เรียกว่า อัฐภาคที่หนึ่ง ตัวอย่าง 2.1 จงแสดงตำแหน่งของจุด $A(3,2,1), B(-2,3,-1), C(0,-2,3)$ ในปริภูมิสามมิติ



2. พื้นผิวและสมการพื้นผิว

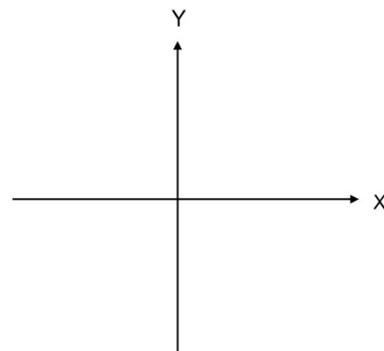
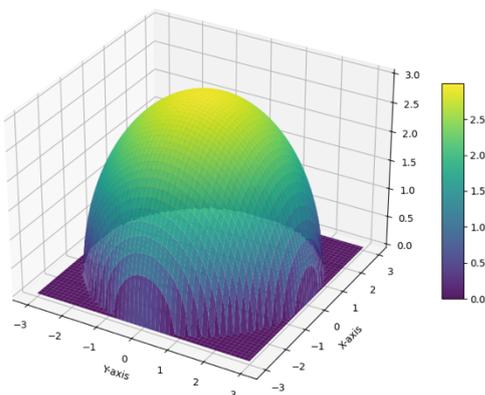
สมการที่แสดงความสัมพันธ์ของ 2 ตัวแปรอิสระ x และ y และ 1 ตัวแปรตามคือ z จะเขียนสมการอยู่ในรูป $z = f(x, y)$ หรือรูปแฝง $F(x, y, z) = 0$ เช่น $z = x^2 + y^2$ หรือ $2x + 3y + z - 6 = 0$ หรือ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

จากสมการ $z = f(x, y)$ เราสามารถหาจุดใดๆในปริภูมิ โดยกำหนดค่า x, y และหาค่า z จะได้จุดในปริภูมิคือ $(x, y, f(x, y))$ เรียกเซตของจุดในปริภูมิที่สอดคล้องกับสมการ $z = f(x, y)$ ว่าพื้นผิว และเรียก $z = f(x, y)$ ว่าสมการพื้นผิว นั่นคือ พื้นผิวของ $z = f(x, y)$ คือ $\{(x, y, z) \in R^3 : z = f(x, y) \text{ and } (x, y) \in D_f\}$ โดยที่ D_f คือเซตของโดเมนของฟังก์ชัน f นั่นคือ $D_f = \{(x, y) \in R^2 | z = f(x, y)\}$
ตัวอย่างสมการพื้นผิว



หมายเหตุ ในการนิยามฟังก์ชัน จะต้องบอกด้วยว่าโดเมนคือเซตอะไร แต่ถ้าไม่กำหนดว่าโดเมนคือเซตใดให้ถือว่าโดเมนเป็นสับเซตใหญ่ที่สุดของ R^2 ที่สามารถหาค่าของฟังก์ชันนั้นได้

ตัวอย่าง 2.2 กำหนดให้ $f: D \subset R^2 \rightarrow R$ โดยที่ $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ จงเขียนรูป D_f และกราฟของฟังก์ชัน
วิธีทำ



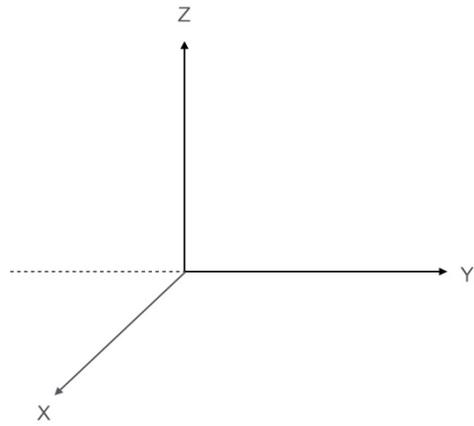
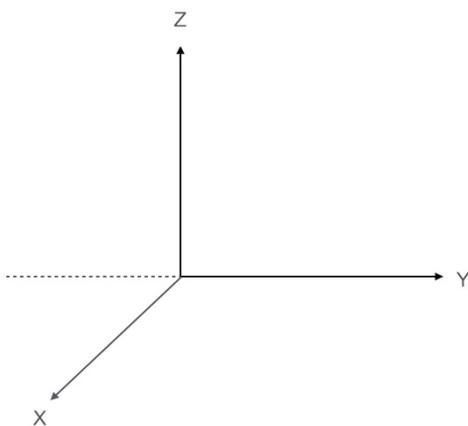
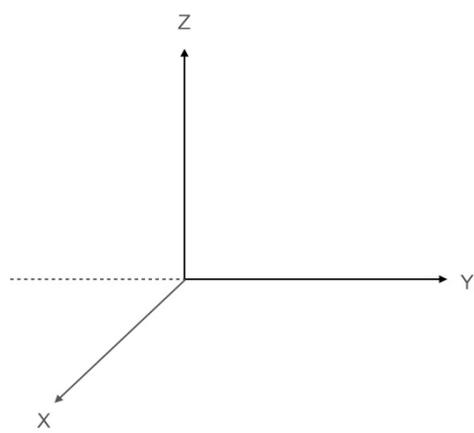
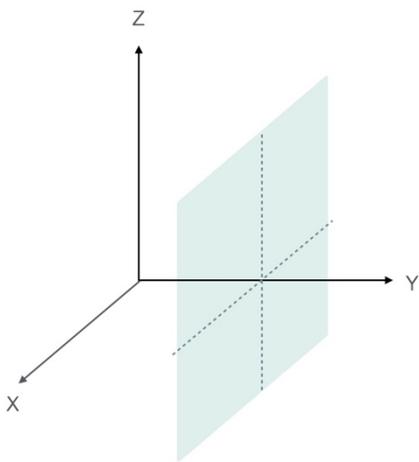
3. สมการระนาบ

รูปทั่วไปของสมการระนาบคือ

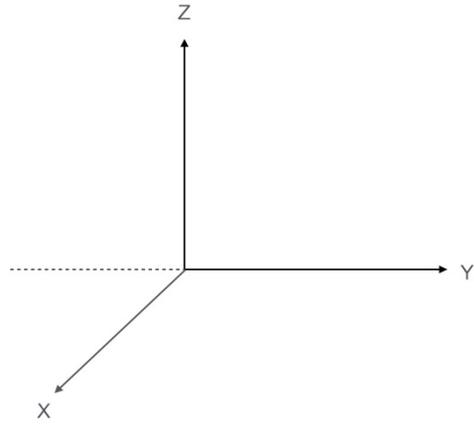
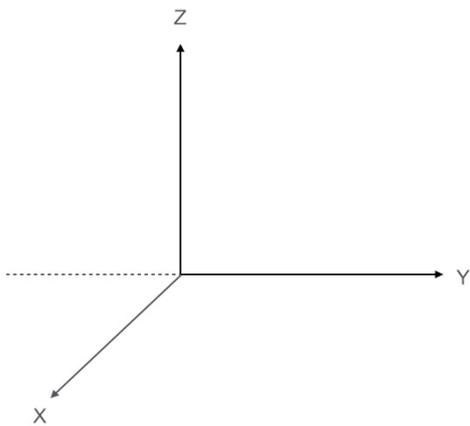
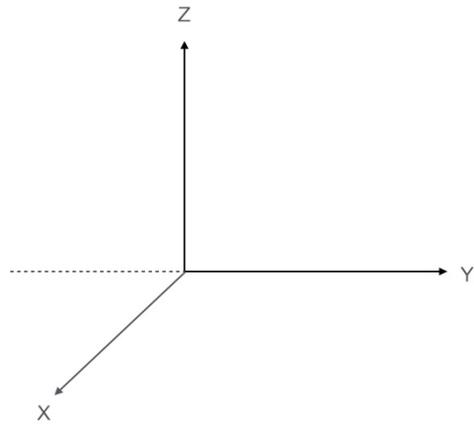
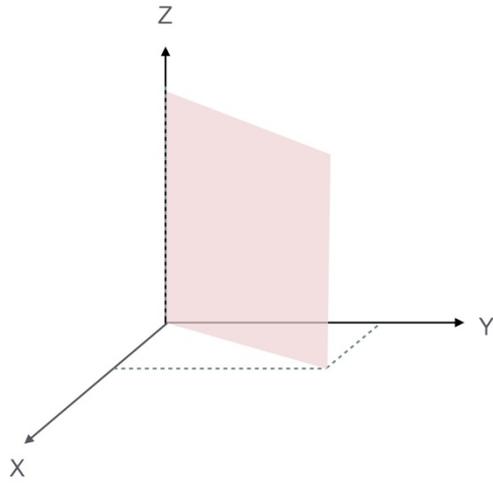
$Ax + By + Cz + D = 0$ โดยที่ A, B, C, D เป็นค่าคงที่ และ A, B, C ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

รูปกราฟของระนาบแบบต่างๆ จะแบ่งตามค่าต่างๆของ A, B, C, D ดังต่อไปนี้

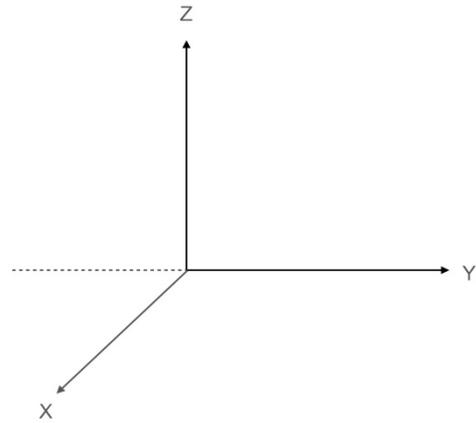
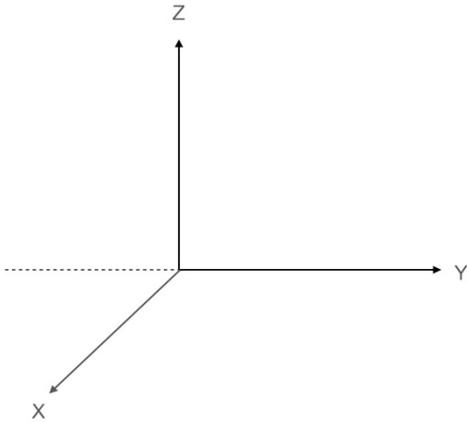
กรณีที่ 1 ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร 2 ตัวเท่ากับ 0 รูปกราฟจะเป็นระนาบที่ขนานกับระนาบที่ตัวแปรที่หายไป จากสมการ ตัวอย่าง



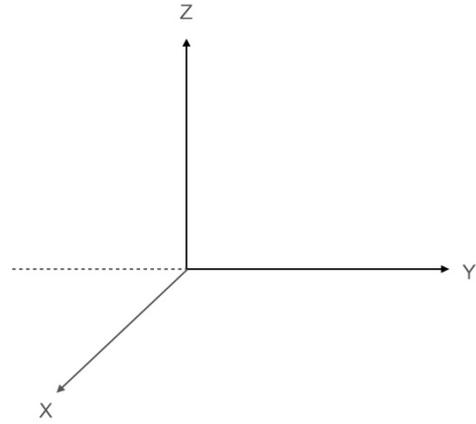
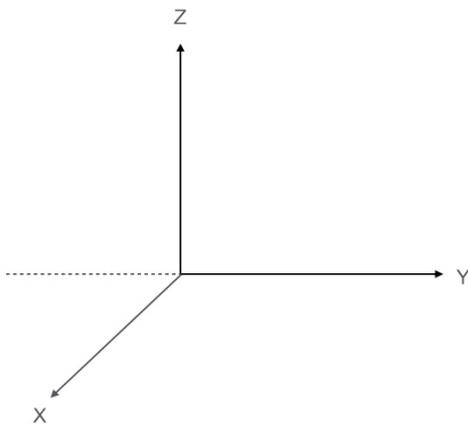
กรณีที่ 2 ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร 1 ตัวเท่ากับ 0 รูปกราฟจะเป็นระนาบที่สูงตั้งตามแกนตัวแปรที่หายไปจากสมการ เช่น



กรณีที่ 3 ถ้า $D = 0$ และ $A, B, C \neq 0 \rightarrow (Ax + By + Cz = 0)$ รูปกราฟจะเป็นระนาบที่ผ่านจุดกำเนิด เช่น



กรณีที่ 4 ถ้า $A, B, C, D \neq 0 \rightarrow (Ax + By + Cz + D = 0)$ จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูป



4. สมการพื้นผิวกำลังสอง

สมการพื้นผิวกำลังสองในตัวแปร x, y, z มีสมการรูปทั่วไปคือ $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$ เมื่อ A, B, C, D, E, \dots, F ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ในที่นี้เราจะศึกษากรณีที่ $D = E = F = 0$ ซึ่งมีสมการรูปทั่วไปคือ $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$

หลักการเขียนกราฟของพื้นผิว

1. หารอยตัด (Traces) บนระนาบพิกัดฉาก (ระนาบ xy , ระนาบ yz , ระนาบ xz)
2. หารอยตัดในแนวขนานกับระนาบโคออร์ดิเนต (Coordinate planes)
3. หาส่วนจุดตัดบนแกน x แกน y และแกน z
4. ทดสอบสมมาตรของพื้นผิว
5. พิจารณาขอบเขตของรูป

วิธีการเขียนกราฟของพื้นผิว

1. หารอยตัด (Traces) บนระนาบพิกัดฉาก

2. หารอยตัดในแนวขนานกับระนาบโคออร์ดิเนต

3. หาส่วนจุดตัดบนแกน x แกน y และแกน z

4. ทดสอบสมมาตรของพื้นผิว

การสมมาตรของพื้นผิวอาศัยบทนิยามของการสมมาตรของจุด 2 จุดโดยเทียบกับจุด เส้นตรง และระนาบต่อไปนี้

บทนิยาม

1. จุด A และจุด B จะสมมาตรกับจุด P ก็ต่อเมื่อ จุด P เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด A และจุด B
2. จุด A และจุด B จะสมมาตรกับเส้นตรง L ก็ต่อเมื่อ เส้นตรง L แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด A และจุด B
3. จุด A และจุด B จะสมมาตรกับระนาบ T ก็ต่อเมื่อ ระนาบ T แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด A และจุด B

- ❖ สมการพื้นผิว $F(x, y, z) = 0$ จะสมมาตรกับจุดกำเนิด ถ้าหากว่า $F(-x, -y, -z) = F(x, y, z)$
- ❖ สมการพื้นผิว $F(x, y, z) = 0$
 - สมมาตรกับแกน x ถ้าหากว่า $F(x, -y, -z) = F(x, y, z)$
 - สมมาตรกับแกน y ถ้าหากว่า $F(-x, y, -z) = F(x, y, z)$
 - สมมาตรกับแกน z ถ้าหากว่า $F(-x, -y, z) = F(x, y, z)$
- ❖ สมการพื้นผิว $F(x, y, z) = 0$ จะสมมาตรกับ
 - ระนาบ xy ถ้าหากว่า $F(x, y, -z) = F(x, y, z)$
 - ระนาบ xz ถ้าหากว่า $F(x, -y, z) = F(x, y, z)$
 - ระนาบ yz ถ้าหากว่า $F(-x, y, z) = F(x, y, z)$

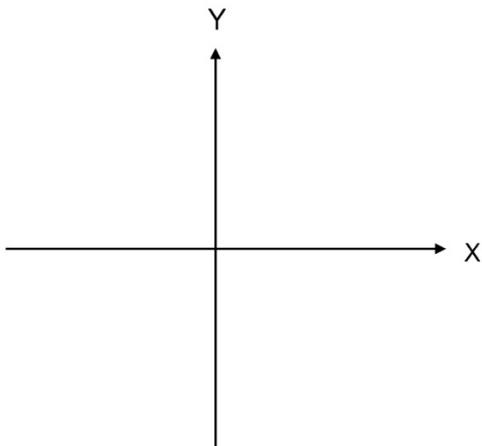
5. พิจารณาขอบเขตของรูป

พิจารณาจากโดเมนของฟังก์ชัน

วงรี (วงกลม) สมการมาตรฐาน คือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่ } a, b > 0$$

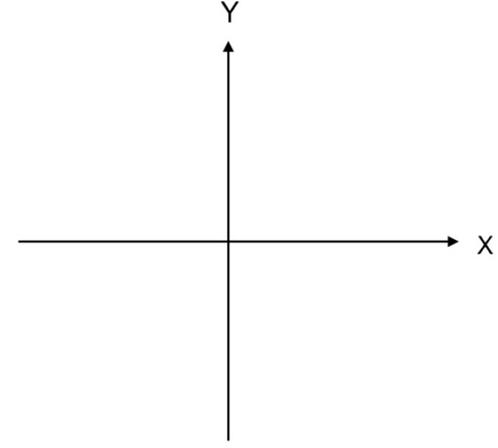
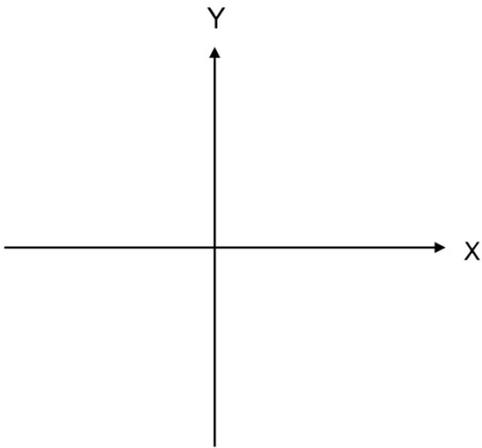
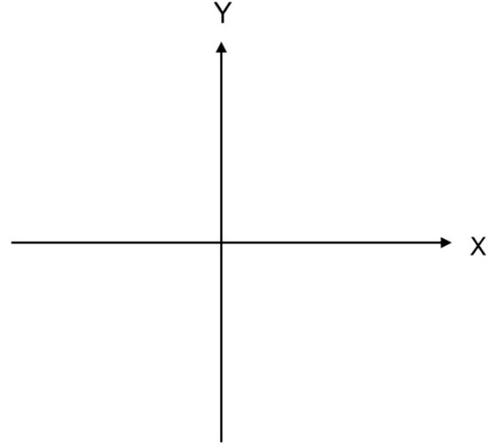
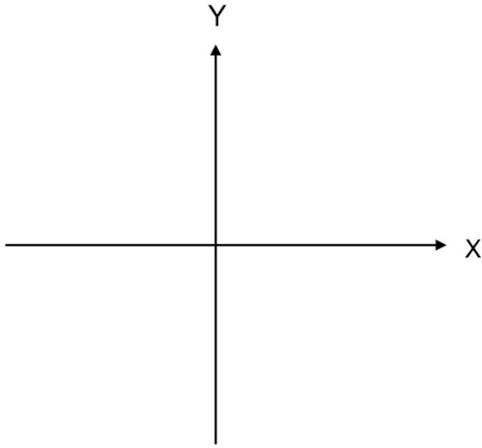
กราฟของวงรี (วงกลม)



หมายเหตุ ถ้า $a = b$ แล้ว
หรือ

พาราโบลา สมการมาตรฐาน คือ

$$y^2 = \pm 4px \text{ หรือ } x^2 = \pm 4py$$



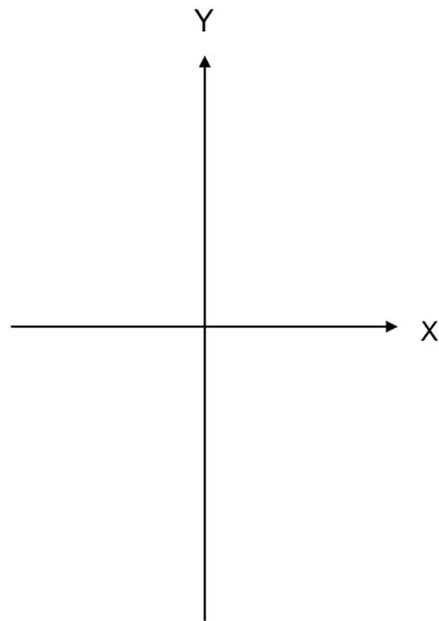
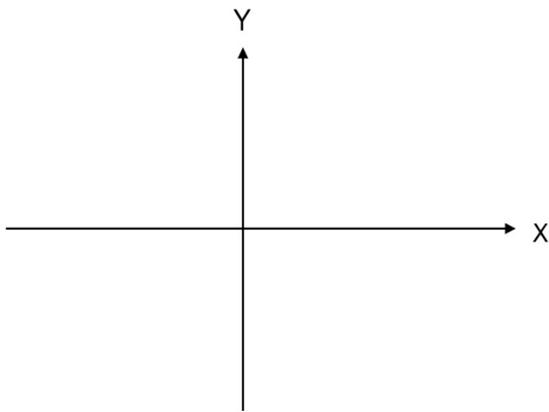
ไฮเพอร์โบลา สมการมาตรฐาน คือ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{หรือ} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

โดยที่ $a, b > 0$ กราฟของไฮเพอร์โบลา

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



ตัวอย่าง 2.3 จงวาดกราฟของพื้นที่ผิว $z = y^2 + 1$
วิธีทำ

5. สมการพื้นผิวกำลังสอง รูปมาตรฐาน

ทรงรี(Ellipsoid)

รูปสมการทั่วไปคือ $Ax^2 + By^2 + cZ^2 = D$ เมื่อ $A, B, C, D > 0$

หรือรูปมาตรฐานคือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ เมื่อ $a, b, c > 0$

พิจารณา $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

1. หารอยตัด (Traces) บนระนาบพิกัดฉาก (ระนาบ xy , ระนาบ yz , ระนาบ xz)

2. หารอยตัดในแนวขนานกับระนาบโคออร์ดิเนต (Coordinate planes)

3. หาส่วนจุดตัดบนแกน x แกน y และแกน z

4. ทดสอบสมมาตรของพื้นผิว

หมายเหตุ ถ้า $a = b = c$ แล้ว

ไฮเพอร์โบลอยด์หนึ่งชั้น (Hyperboloid of one sheet)

รูปสมการทั่วไปคือ $Ax^2 + By^2 - cZ^2 = D$

หรือ $Ax^2 - By^2 + cZ^2 = D$

หรือ $-Ax^2 + By^2 + cZ^2 = D$

เมื่อ $A, B, C, D > 0$

หรือรูปมาตรฐานคือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

หรือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

หรือ $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

เมื่อ $a, b, c > 0$

พิจารณา $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

1. หารอยตัด (Traces) บนระนาบพิกัดฉาก (ระนาบ xy , ระนาบ yz , ระนาบ xz)

2. หารอยตัดในแนวขนานกับระนาบโคออร์ดิเนต (Coordinate planes)

3. หาส่วนจุดตัดบนแกน x แกน y และแกน z

4. ทดสอบสมมาตรของพื้นผิว

ข้อสังเกต กราฟไฮเพอร์โบลอยด์หนึ่งชิ้นจะสูงตามแกนที่มีเครื่องหมายข้างหน้าเป็นลบ

ไฮเพอร์โบลอยด์สองชีน (Hyperboloid of two sheets)

$$\text{รูปสมการทั่วไปคือ } Ax^2 - By^2 - cZ^2 = D$$

$$\text{หรือ } -Ax^2 - By^2 + cZ^2 = D$$

$$\text{หรือ } -Ax^2 + By^2 - cZ^2 = D$$

$$\text{เมื่อ } A, B, C, D > 0$$

$$\text{หรือรูปมาตรฐานคือ } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{หรือ } -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{หรือ } -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{เมื่อ } a, b, c > 0$$

$$\text{พิจารณา } -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

1. หารอยตัด (Traces) บนระนาบพิกัดฉาก (ระนาบ xy , ระนาบ yz , ระนาบ xz)

2. หารอยตัดในแนวขนานกับระนาบโคออร์ดิเนต (Coordinate planes)

3.หาส่วนจุดตัดบนแกน x แกน y และแกน z

4.ทดสอบสมมาตรของพื้นผิว

ข้อสังเกต กราฟไฮเพอร์โบลอยด์สองชั้น จะมีจุดเกาะตามแกนที่มีเครื่องหมายข้างหน้าเป็นบวก

กรวยเชิงวงรี (Elliptic Cone)รูปสมการทั่วไปคือ $Ax^2 + By^2 - cZ^2 = 0$ หรือ $Ax^2 - By^2 + cZ^2 = 0$ หรือ $-Ax^2 + By^2 + cZ^2 = 0$ เมื่อ $A, B, C > 0$ หรือรูปมาตรฐานคือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ หรือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2}$ หรือ $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2}$ เมื่อ $a, b, c, d > 0$ พิจารณา $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 1. หารอยตัด (Traces) บนระนาบพิกัดฉาก (ระนาบ xy , ระนาบ yz , ระนาบ xz)

2. หารอยตัดในแนวขนานกับระนาบโคออร์ดิเนต (Coordinate planes)

3. หาส่วนจุดตัดบนแกน x แกน y และแกน z

4. ทดสอบสมมาตรของพื้นผิว

พาราโบลอยด์เชิงวงรี (Elliptic Paraboloid)

รูปสมการทั่วไปคือ $Ax^2 + By^2 - cZ = 0$ เมื่อ $A, B > 0, C \neq 0$

หรือ $Ax^2 - By + cZ^2 = 0$ เมื่อ $A, C > 0, B \neq 0$

หรือ $-Ax + By^2 + cZ^2 = 0$ เมื่อ $B, C > 0, A \neq 0$

หรือรูปมาตรฐานคือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$; $a, b > 0, c \neq 0$

หรือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by$; $a, c > 0, b \neq 0$

หรือ $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax$; $b, c > 0, a \neq 0$

พิจารณา $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

1. หารอยตัด (Traces) บนระนาบพิกัดฉาก (ระนาบ xy , ระนาบ yz , ระนาบ xz)

2. หารอยตัดในแนวขนานกับระนาบโคออร์ดิเนต (Coordinate planes)

3. หาส่วนจุดตัดบนแกน x แกน y และแกน z

4. ทดสอบสมมาตรของพื้นผิว

ไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์ (Hyperbolic Paraboloid) หรือรูปอานม้า

รูปสมการทั่วไปคือ $Ax^2 - By^2 - Cz = 0$ เมื่อ $A, B > 0, C \neq 0$

หรือ $Ax^2 - By - cZ^2 = 0$ เมื่อ $A, C > 0, B \neq 0$

หรือ $-Ax + By^2 - cZ^2 = 0$ เมื่อ $B, C > 0, A \neq 0$

หรือรูปมาตรฐานคือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$; $a, b > 0, c \neq 0$

หรือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = by$; $a, c > 0, b \neq 0$

หรือ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = ax$; $b, c > 0, a \neq 0$

พิจารณา $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

1. หารอยตัด (Traces) บนระนาบพิกัดฉาก (ระนาบ xy , ระนาบ yz , ระนาบ xz)

2. หารอยตัดในแนวขนานกับระนาบโคออร์ดิเนต (Coordinate planes)

3. หาส่วนจุดตัดบนแกน x แกน y และแกน z

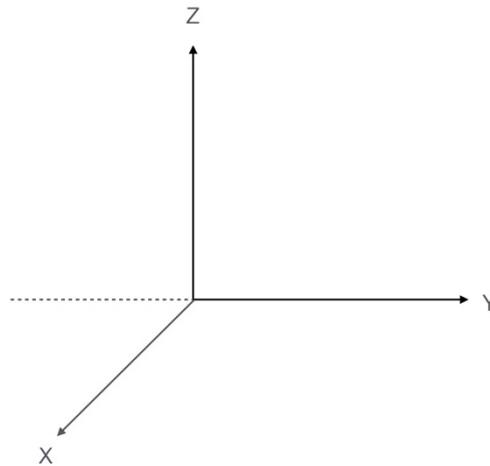
4. ทดสอบสมมาตรของพื้นผิว

ทรงกระบอก (Cylinders)

ถ้าสมการพื้นผิว คือ $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$ มีตัวแปรตัวหนึ่งหายไป เรียกพื้นผิวนี้ว่า ทรงกระบอก ซึ่งหน้าตัดขวางเป็นรูปเส้นโค้งตามสมการที่ปรากฏและขนานกับแกนของตัวแปรที่หายไป เช่น

$$x^2 + y^2 = a^2 ; a > 0$$

ภาคตัดขวางบนระนาบ xy คือวงกลมรัศมี a หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและในสมการตัวแปร z หายไป ดังนั้นพื้นผิวเป็นทรงกระบอกกลมขนานกับแกน z ดังรูป



ทรงกระบอกต่างๆที่พบบ่อย คือ
ทรงกระบอกกลม มีสมการเป็น

ทรงกระบอกกรวย มีสมการเป็น

ทรงกระบอกพาราโบลา มีสมการเป็น

ทรงกระบอกไฮเพอร์โบลา มีสมการเป็น

จงวาดกราฟพื้นผิวสามมิติ และบอกชื่อพื้นผิว

1) $3x + 2y + 10z = 30$

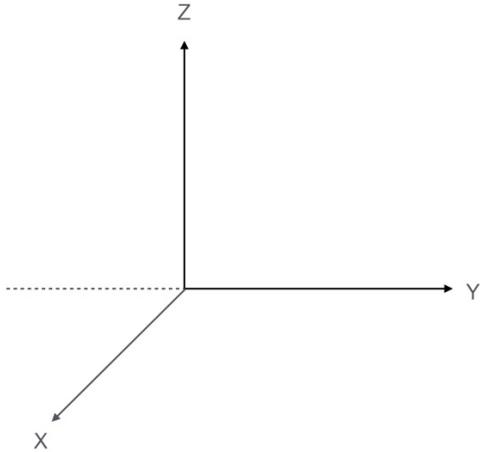
วิธีทำ

2) $y^2 - 9x^2 - 4z^2 + 36 = 0$

วิธีทำ

5. การเลื่อนแกนทางขนานในปริภูมิสามมิติ

การเลื่อนแกนทางขนานหรือการย้ายแกนจะหมายถึง การเลื่อนแกนในพิกัด xyz ไปเป็นระบบพิกัดใหม่ $x'y'z'$ โดยที่จุดกำเนิด O' ย้ายไปที่จุด $(x, y, z) = (h, k, l)$
 ดังรูป



ตัวอย่าง 2.4 จงวาดภาพพื้นผิวของ

1) $4x^2 - 4y^2 - 9z^2 + 8x - 54z = 113$

2) $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$

3) $x^2 + y^2 = 9$

4) $x = 1 + y^2 + z^2$

5) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

วิธีทำ

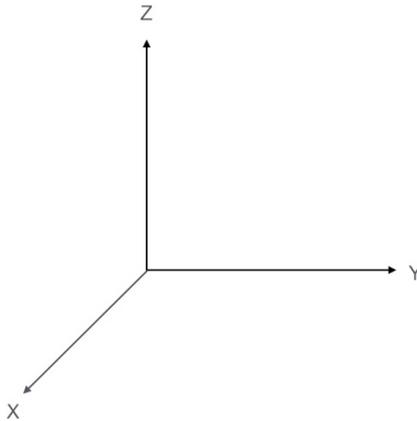
6. ระบบพิกัดทรงกระบอก

จากระบบพิกัดฉากเราแทนจุดในปริภูมิสามมิติด้วย $P(x, y, z)$ แต่ในระบบพิกัดทรงกระบอกเราจะแทนจุดด้วยสัญลักษณ์ $P(r, \theta, z)$

โดยที่ r เป็นระยะจากจุดกำเนิดถึงจุด P' ซึ่งเป็นภาพฉายของจุด P บนระนาบ xy

θ เป็นมุมวัดจากแกน Ox ไปยังเส้นตรง OP' บนระนาบ xy

$|z|$ เป็นระยะตั้งฉากจากจุด P ถึงระนาบ xy โดย $r \geq 0$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$



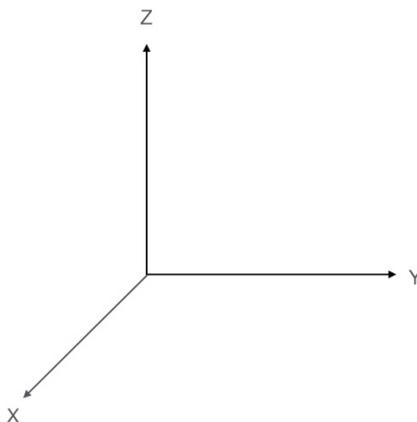
ดังนั้นเราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x, y, z ในระบบพิกัดฉาก และตัวแปร r, θ, z ในระบบพิกัดทรงกระบอกดังต่อไปนี้

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$$

หรือ

$$r^2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), z = z$$

ตัวอย่าง 2.5 จงแสดงตำแหน่งของจุด $\left(1, \frac{\pi}{4}, 5\right)$



ตัวอย่าง 2.6 จงเปลี่ยนสมการ $z = 3x^2 + 3y^2$ ให้เป็นสมการในระบบพิกัดทรงกระบอก
วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.7 จงเปลี่ยนสมการ $x^2 + y^2 = 8y$ ให้เป็นสมการในระบบพิกัดทรงกระบอก
วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.8 จงเปลี่ยนสมการ $r = 4\sin\theta$ ให้เป็นสมการในระบบพิกัดฉาก
วิธีทำ

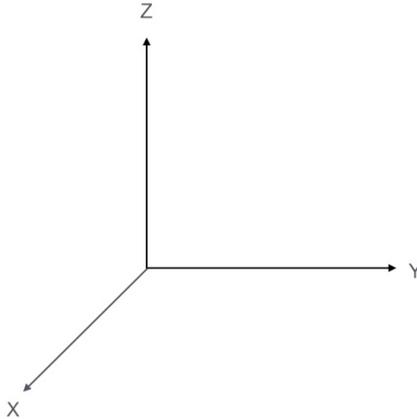
7. ระบบพิกัดทรงกลม

จากระบบพิกัดฉากเราแทนจุดในปริภูมิสามมิติด้วย $P(x, y, z)$ แต่ในระบบพิกัดทรงกลมเราจะแทนจุดด้วยสัญลักษณ์ $P(\rho, \theta, \phi)$ แทน

โดยที่ ρ เป็นระยะจากจุดกำเนิดถึงจุด P

θ เป็นมุมวัดจากแกน x ไปยังเส้นตรง OP' ซึ่งเป็นภาพฉายของเส้นตรง OP บนระนาบ xy

ϕ เป็นมุมวัดจากแกน z ไปยังเส้นตรง OP โดย $\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ และ $0 \leq \phi \leq \pi$



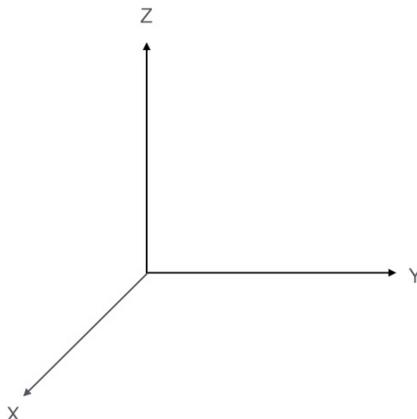
ตัวแปร x, y, z ในระบบพิกัดฉาก มีความสัมพันธ์กับตัวแปร ρ, θ, ϕ ในระบบพิกัดทรงกลมดังต่อไปนี้

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, y = \rho \sin \phi \sin \theta, z = \rho \cos \phi$$

หรือ

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

ตัวอย่าง 2.9 จงแสดงตำแหน่งของจุด $(3, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$



ตัวอย่าง 2.10 จงเปลี่ยนสมการ $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ ให้เป็นสมการในระบบพิกัดทรงกลม
วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.11 จงเปลี่ยนสมการ $\rho = 2\cos\phi$ ให้เป็นสมการในระบบพิกัดฉาก
วิธีทำ