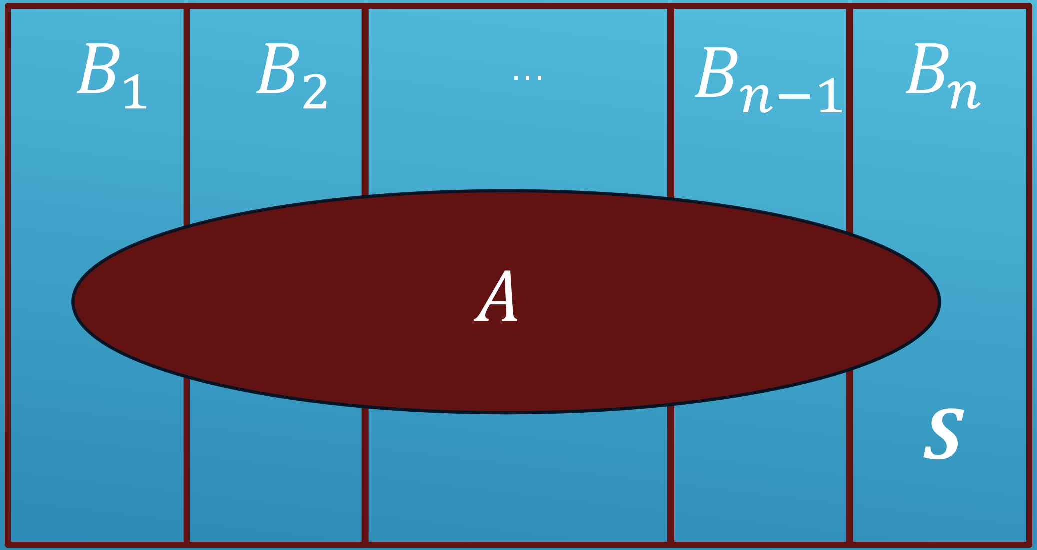
กฎของเบย์ (Baye’s Rule)



ผศ.ดร.ธนวัฒน์ ศรีศิริวัฒน์
สาขาวิชาคณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ตัวอย่าง กล่องใบที่หนึ่งมีลูกบอลสีฟ้า 4 ลูก สีเขียว 3 ลูก และกล่องใบที่สองมีลูกบอลสีฟ้า 3 ลูก สีเขียว 5 ลูก ถ้าหยิบลูกบอลจากกล่องใบที่หนึ่งอย่างสุ่มออกมา 1 ลูก โดยไม่ดูสี แล้วใส่ในกล่องใบที่สอง แล้วหยิบลูกบอลจากกล่องใบที่สอง 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่ได้ลูกบอลสีเขียว

วิธีทำ กำหนดให้

B_1 แทนเหตุการณ์ที่หยิบลูกบอลจากกล่องใบที่หนึ่งแล้วได้สีฟ้า

G_1 แทนเหตุการณ์ที่หยิบลูกบอลจากกล่องใบที่หนึ่งแล้วได้เขียว

G_2 แทนเหตุการณ์ที่หยิบลูกบอลจากกล่องใบที่สองแล้วได้เขียว

$$P(\mathrm{G}_2) = P[(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{G}_2) \cup (\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2)]$$

$$P(\mathrm{G}_2) = P(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{G}_2) + P(\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2)$$

$$P(\mathrm{G}_2) = P(\mathrm{B}_1)P(\mathrm{G}_2 | \mathrm{B}_1) + P(\mathrm{G}_1)P(\mathrm{G}_2 | \mathrm{G}_1)$$

$$P(\mathrm{G}_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{7} \cdot \frac{6}{9}$$

$$P(\mathrm{G}_2) = \frac{38}{63} = 0.6032$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่ได้ลูกบอลสีเขียวเท่ากับ 0.6032

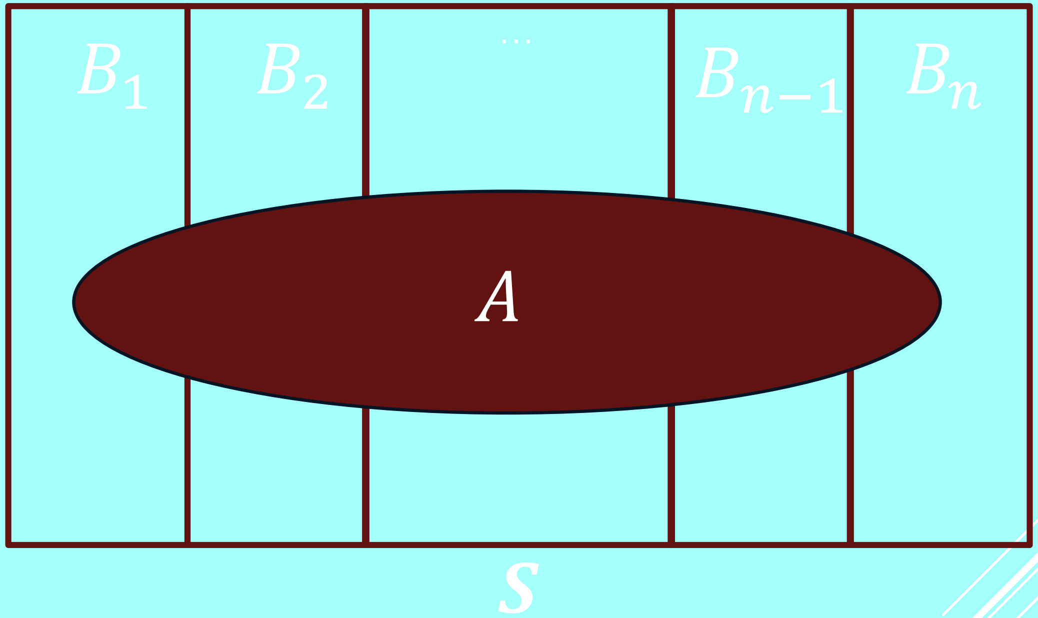
โรงงานผลิตหลอดไฟฟ้าแห่งหนึ่งมีเครื่องจักรที่ใช้ในการผลิต 3 เครื่องคือเครื่องจักร A, B และ C ซึ่งมีอัตราการผลิต 40%, 30% และ 30% ตามลำดับ หลอดไฟฟ้าที่ผลิตจากเครื่องจักร 3 เครื่อง ดังกล่าวนี้ พบว่ามีหลอดไฟฟ้าเสีย 3%, 5% และ 4% สำหรับเครื่องจักร A, B และ C ตามลำดับ ถ้าสุ่มหยิบหลอดไฟฟ้าจากโรงงานนี้มา 1 หลอด ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้านี้จะเป็นหลอดเสียมีค่าเท่าใด

วิธีทำ ให้ D เป็นเหตุการณ์ที่หลอดไฟฟ้าที่สุ่มหยิบมาเป็นหลอดเสีย จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) \\
&= (0.4)\,(0.03) + (0.3)\,(0.05) + (0.3)\,(0.04) \\
&= 0.012 + 0.015 + 0.012 = 0.039
\end{aligned}
$$

กฎของเบย์ (Baye’s Rule)

ให้ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในสเปซตัวอย่าง S นั่นคือ A = A ∩ S



จากรูป ถ้าเหตุการณ์ $B_1, B_2, \dots B_n$ เป็นการแบ่ง S ออกเป็นส่วน ๆ โดยที่ $B_i \cap B_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$

ให้ $\mathbf{A}$ เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในสเปซตัวอย่าง S นั่นคือ $A = A \cap S$

$$A = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \cdots \cup B_{n-1} \cup B_n)$$

$$= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup \cdots \cup (A \cap B_{n-1}) \cup (A \cap B_n)$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_{n-1}) + P(A \cap B_n)$$

$$= P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \cdots + P(A/B_{n-1})P(B_{n-1}) + P(A/B_n)\,P(B_n)$$

จากความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

$$P(A \cap B_k) = P(A|B_k) \cdot P(B_k)$$

ดังนั้น
$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$$

ตัวอย่าง โรงงานผลิตหลอดไฟฟ้าแห่งหนึ่งมีเครื่องจักรที่ใช้ในการผลิต 3 เครื่องคือเครื่องจักร A, B และ C ซึ่งมีอัตราการผลิต 40%, 30% และ 30% ตามลำดับ หลอดไฟฟ้าที่ผลิตจากเครื่องจักร 3 เครื่อง ดังกล่าวนี้ พบว่ามีหลอดไฟฟ้าเสีย 3%, 5% และ 4% สำหรับเครื่องจักร A, B และ C ตามลำดับ ถ้าสุ่มหยิบหลอดไฟฟ้าจากโรงงานนี้มา 1 หลอด ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้านี้จะเป็นหลอดเสียผลิตโดยเครื่องจักร A มีค่าเท่าใด

วิธีทำ ให้ D เป็นเหตุการณ์ที่หลอดไฟฟ้าที่สุ่มหยิบมาเป็นหลอดเสีย จะได้ว่า

$$P(A|\mathrm{D}) = \frac{\mathrm{P(D|A)\cdot P(A)}}{\mathrm{P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)}}$$

$$P(A|\mathrm{D}) = \frac{(0.4)(0.03)}{0.039}$$

$$P(A|\mathrm{D}) = 0.3077$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้านี้จะเป็นหลอดเสียผลิตโดยเครื่องจักร A เท่ากับ 0.3077

ตัวอย่าง โรงงานผลิตหลอดไฟฟ้าแห่งหนึ่งมีเครื่องจักรที่ใช้ในการผลิต 3 เครื่องคือเครื่องจักร A, B และ C ซึ่งมีอัตราการผลิต 40%, 30% และ 30% ตามลำดับ หลอดไฟฟ้าที่ผลิตจากเครื่องจักร 3 เครื่อง ดังกล่าวนี้ พบว่ามีหลอดไฟฟ้าเสีย 3%, 5% และ 4% สำหรับเครื่องจักร A, B และ C ตามลำดับ ถ้าสุ่มหยิบหลอดไฟฟ้าจากโรงงานนี้มา 1 หลอด ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้านี้จะเป็นหลอดเสียผลิตโดยเครื่องจักร A มีค่าเท่าใด

วิธีทำ ให้ D เป็นเหตุการณ์ที่หลอดไฟฟ้าที่สุ่มหยิบมาเป็นหลอดเสีย จะได้ว่า

$$P(A|\mathrm{D}) = \frac{\mathrm{P(D|A)\cdot P(A)}}{\mathrm{P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)}}$$

$$P(A|\mathrm{D}) = \frac{(0.4)(0.03)}{0.039}$$

$$P(A|\mathrm{D}) = 0.3077$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้านี้จะเป็นหลอดเสียผลิตโดยเครื่องจักร A เท่ากับ 0.3077

ความเป็นอิสระของเหตุการณ์

นิยาม เหตุการณ์ B เป็นอิสระกับเหตุการณ์ A ก็ต่อเมื่อ $P(B|\mathrm{A}) = P(\mathrm{B})$

ถ้าเหตุการณ์ B เป็นอิสระกับเหตุการณ์ A แล้ว เหตุการณ์ A ก็จะเป็นอิสระกับเหตุการณ์ B ดังนั้นจะกล่าวได้ว่า เหตุการณ์ A เป็นอิสระกับเหตุการณ์ B ก็ต่อเมื่อ

$P(B|\mathrm{A}) = P(\mathrm{B})$ หรือ $P(\mathrm{A}|B) = P(\mathrm{A})$

นิยาม เหตุการณ์ A เป็นอิสระกับเหตุการณ์ B ก็ต่อเมื่อ

$$P(\mathrm{A}\cap B) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B})$$

ตัวอย่าง ความน่าจะเป็นที่นาย A จะยิงจุดโทษเข้า เท่ากับ 0.4 และความน่าจะเป็นที่นาย B จะยิงจุดโทษเข้า เท่ากับ 0.3 จงหาความน่าจะเป็นที่ประตูจะถูกยิงเข้า ถ้านาย A และ นาย B ต่างยิงคนละลูก

วิธีทำ กำหนดให้ A แทนเหตุการณ์ที่นาย A ยิงจุดโทษเข้า

B แทนเหตุการณ์ที่นาย B ยิงจุดโทษเข้า

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})$$

$$= 0.4 + 0.3 - (0.4)\cdot(0.3)$$

$$= 0.7 - 0.12 = 0.58$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่ประตูจะถูกยิงเข้า ถ้านาย A และ นาย B ต่างยิงคนละลูกเท่ากับ 0.58