



เอกสารประกอบการสอน
รายวิชาหลักการคณิตศาสตร์
(Principle of Mathematics)

ชื่อเอื้อง อุทิศสาร

คณะครุศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา



เอกสารประกอบการสอน
รายวิชาหลักการคณิตศาสตร์
(Principle of Mathematics)

ชื่อเรื่อง อุทิศสาร

ค.บ. (มัธยมศึกษา วิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ เกียรตินิยมอันดับสอง) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วท.ม. การสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

ปร.ด. การวิจัยและพัฒนาหลักสูตร มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

คณะครุศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

คำนำ

เอกสารประกอบการเรียนรายวิชาหลักการคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematics) เล่มนี้ เป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ (4 ปี) หลักสูตรปรับปรุง พ.ศ. 2566 โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อเป็นแหล่งเรียนรู้เกี่ยวกับหลักการคณิตศาสตร์ ประกอบไปด้วยธรรมชาติและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์ และระเบียบวิธีพิสูจน์และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับจำนวน เซต ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน เพื่อประยุกต์ใช้ในการพิสูจน์ในการศึกษาทางคณิตศาสตร์ขั้นต่อไป ผู้เขียนได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 7 บท ประกอบไปด้วย

บทที่ 1 ธรรมชาติและโครงสร้างของคณิตศาสตร์

บทที่ 2 ตรรกศาสตร์

บทที่ 3 ระเบียบวิธีพิสูจน์

บทที่ 4 หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์

บทที่ 5 เซตเบื้องต้น

บทที่ 6 ความสัมพันธ์

บทที่ 7 ฟังก์ชัน

บทที่ 8 จำนวนจริง

ผู้เขียนหวังว่าเอกสารประกอบการสอนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์กับผู้อ่านที่จะนำไปใช้ประกอบการเรียนในการเรียนรายวิชาหลักการคณิตศาสตร์ได้

ผู้จัดทำ

ช่อเอื้อง อุทิศะสาร

2566

สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
คำอธิบายรายวิชา	ง
กำหนดการสอน	จ
บทที่ 1 ธรรมชาติและโครงสร้างของคณิตศาสตร์	
ธรรมชาติของคณิตศาสตร์	1
โครงสร้างของคณิตศาสตร์	2
ระบบคณิตศาสตร์	3
ปฏิกิริทัศน์ (Paradox)	4
บทที่ 2 ตรรกศาสตร์	
ประพจน์	8
การหาค่าความจริงที่มีประพจน์เป็นตัวเชื่อม	11
สัจนิรันดร์	14
สมมูลเชิงตรรกศาสตร์	15
กฎตรรกศาสตร์	16
การอ้างเหตุผล	18
ตัวบ่งปริมาณ	26
บทที่ 3 การพิสูจน์	
การพิสูจน์ตรง	28
การพิสูจน์แย้งสลับที่	29
การพิสูจน์ประพจน์ที่มีเงื่อนไขสองทาง	31
การพิสูจน์ประพจน์ $p \rightarrow (q \vee r)$	32
การพิสูจน์ประพจน์ $p \rightarrow (q \wedge r)$	33
การพิสูจน์โดยแจกแจงกรณี	35
การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง (วิธีทางอ้อม)	36
การพิสูจน์ประพจน์ซึ่งเป็นไปได้เพียงอย่างเดียว	38
การพิสูจน์ว่าไม่มี	38

สารบัญ (ต่อ)	หน้า
บทที่ 4 หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์	
การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	40
บทที่ 5 เซตเบื้องต้น	
สัญลักษณ์และการเขียนเซต	44
การเท่ากันของเซต	46
เซตจำกัดและเซตอนันต์	48
เซตย่อย	50
เซตกำลัง	52
การดำเนินการของเซต	55
แผนภาพของเวนน์และออยเลอร์	57
จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด	62
บทที่ 6 ความสัมพันธ์	
คู่อันดับ	66
คาร์ทีเซียนหรือผลคูณไขว้	67
ความสัมพันธ์	71
โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์	72
กราฟของความสัมพันธ์	75
ความสัมพันธ์ผกผัน	79
บทที่ 7 ฟังก์ชัน	
บทนิยามฟังก์ชัน	85
ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง	86
ฟังก์ชันผกผัน	89
ฟังก์ชันประกอบ	91
พีชคณิตของฟังก์ชัน	93
ฟังก์ชันที่ควรทราบเพิ่มเติม	95

	สารบัญ (ต่อ)	หน้า
บทที่ 8 จำนวนจริง		
	สัจพจน์สนาม	101
	ทฤษฎีบทพื้นฐานสำหรับจำนวนจริง	101
	ช่วง	103
	สัจพจน์ความสมบูรณ์	104
	สมการและการแก้สมการ	106
	สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์	109

คำอธิบายรายวิชา

(ภาษาไทย)	ธรรมชาติและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์ ระเบียบวิธีพิสูจน์ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับจำนวน เซต ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน และ ประยุกต์ใช้การพิสูจน์ในการศึกษาทางคณิตศาสตร์
(ภาษาอังกฤษ)	Nature and structure of mathematics; logic; methods of proof; mathematical reasoning on numbers, set, relations and functions; applying in mathematics education.

จุดมุ่งหมายของรายวิชา

1. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับธรรมชาติและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์ ระเบียบวิธีพิสูจน์ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับจำนวน เซต ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน
2. เพื่อให้นักศึกษาจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยประยุกต์ใช้การพิสูจน์ในการศึกษาทางคณิตศาสตร์
3. เพื่อให้นักศึกษาตระหนักถึงความสำคัญของธรรมชาติและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์ ระเบียบวิธีพิสูจน์ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

กำหนดการสอน

หลักการคณิตศาสตร์ Principle of Mathematics (MAI1301)

สอนโดย อ.ดร.ช่อเอื้อง อุทิศสาร

สัปดาห์ที่	หัวข้อ/รายละเอียด	จำนวน(ชม.)		กิจกรรมการเรียนรู้ การสอน/สื่อที่ใช้	การ ประเมินผล
		บรรยาย	ปฏิบัติ		
1	ปฐมนิเทศการเรียนรู้ -แนะนำรายวิชา -วิธีวัดและประเมินผล -ภาระงาน	2	2	รูปแบบการสอน; ออนไลน์ ผ่าน Zoom ร่วมกับโปรแกรมและ แอปพลิเคชันเพื่อการจัดการเรียนรู้ ต่างๆ ได้แก่ Google form , Padlet, Kahoot , Quizizz, Polleverywhere, Google Jambord, Line เป็นต้น - มคอ.3 - แบบทดสอบความรู้พื้นฐาน - แบบวิเคราะห์รูปแบบการเรียนรู้ - เอกสารประกอบการสอน	การทดสอบ ก่อนเรียน ประเมินโดย ครูผู้สอน
2	ตรรกศาสตร์ -การเชื่อมประพจน์ การหา ค่าความจริงของประพจน์ สมมูลตรรกศาสตร์ สัจนิ รันดร์	2	2	1. รูปแบบการสอน; On-site/ Online/ On Demand 2. แหล่งเรียนรู้; คลิปการสอน เว็บไซต์ประจำรายวิชา เอกสาร ประกอบการสอน 3. กิจกรรม; แบบฝึกหัดสมมูล ตรรกศาสตร์ สัจนิรันดร์	1.การ ทดสอบหลัง เรียน 2.การ สังเกตโดย ใช้แบบ สังเกต
3	ตรรกศาสตร์ -การอ้างเหตุผล	2	2	1. รูปแบบการสอน; On-site/ Online/ On Demand 2. แหล่งเรียนรู้; คลิปการสอน เว็บไซต์ประจำรายวิชา เอกสาร ประกอบการสอน 3. กิจกรรม; แบบฝึกหัดการอ้างเหตุผล	3.การ ประเมินผล งาน/ชิ้นงาน โดยใช้แบบ ประเมิน แบบรูบริค

สัปดาห์ที่	หัวข้อ/รายละเอียด	จำนวน(ชม.)		กิจกรรมการเรียนรู้ การสอน/สื่อที่ใช้	การ ประเมินผล
		บรรยาย	ปฏิบัติ		
					ประเมินโดย ครูผู้สอน
4	ทบทวนบทเรียนด้วยตนเอง	-	4	1. รูปแบบการสอน; On Demand 2. แหล่งเรียนรู้; คลิปการสอน เว็บไซต์ประจำรายวิชา เอกสาร ประกอบการสอน 3. กิจกรรม; ทบทวนความรู้ก่อนสอบ	-การสะท้อน คิด ผลที่ได้ จากการ เรียนรู้ -ประเมิน ด้วยตนเอง
5	การพิสูจน์ -การพิสูจน์ทางตรง -การพิสูจน์ประพจน์เลือก -การพิสูจน์แย้งสลับที่ -การพิสูจน์ประพจน์ที่มี เงื่อนไขสองทาง	2	2	1. รูปแบบการสอน; On-site/ Online/ On Demand 2. แหล่ง เรียนรู้; คลิปการสอน เว็บไซต์ ประจำรายวิชา เอกสาร ประกอบการสอน 3. กิจกรรม; แบบฝึกหัดการพิสูจน์ทางตรง	
6	การพิสูจน์ -การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง (วิธีทางอ้อม) (Contradiction Proof) -การพิสูจน์ประพจน์ซึ่ง เป็นไปได้อย่างเดียว (Uniqueness Proofs) -การพิสูจน์ข้อความที่เป็น เท็จ	2	2	1. รูปแบบการสอน; On-site/ Online/ On Demand 2. แหล่ง เรียนรู้; คลิปการสอน เว็บไซต์ ประจำรายวิชา เอกสาร ประกอบการสอน 3. กิจกรรม; แบบฝึกหัดการพิสูจน์ทางอ้อม	1.การ ทดสอบหลัง เรียน 2.การ สังเกตโดย ใช้แบบ สังเกต 3.การ ประเมินผล งานชิ้นงาน โดยใช้แบบ ประเมิน แบบrubric
7	หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์	2	2	1. รูปแบบการสอน; On-site/ Online/ On Demand 2. แหล่ง เรียนรู้; คลิปการสอน เว็บไซต์ ประจำรายวิชา เอกสาร	

สัปดาห์ที่	หัวข้อ/รายละเอียด	จำนวน(ชม.)		กิจกรรมการเรียนรู้ การสอน/สื่อที่ใช้	การ ประเมินผล
		บรรยาย	ปฏิบัติ		
				ประกอบการสอน 3. กิจกรรม; แบบฝึกหัดอุปนัยทางคณิตศาสตร์	ประเมินโดย ครูผู้สอน
8	สอบระหว่างภาค	3	-	การทดสอบแบบออนไลน์ที่ มหาวิทยาลัย	การทดสอบ ประเมินโดย ครูผู้สอน
9-10	เขต	2	2	1. รูปแบบการสอน; On-site/ Online/ On Demand 2. แหล่ง เรียนรู้; คลิปการสอน เว็บไซต์ ประจำรายวิชา เอกสาร ประกอบการสอน 3. กิจกรรม; แบบฝึกหัดเขต	
11-12	ความสัมพันธ์	2	2	1. รูปแบบการสอน; On-site/ Online/ On Demand 2. แหล่ง เรียนรู้; คลิปการสอน เว็บไซต์ ประจำรายวิชา เอกสาร ประกอบการสอน 3. กิจกรรม; แบบฝึกหัดความสัมพันธ์	1.การ ทดสอบหลัง เรียน 2.การ สังเกตโดย ใช้แบบ
13-15	ฟังก์ชัน	2	2	1. รูปแบบการสอน; On-site/ Online/ On Demand	สังเกต
		2	2	2. แหล่งเรียนรู้; คลิปการสอน เว็บไซต์ประจำรายวิชา เอกสาร ประกอบการสอน 3. กิจกรรม; แบบฝึกหัดฟังก์ชัน	3.การ ประเมินผล งาน/ชิ้นงาน โดยใช้แบบ ประเมิน
15	การนำเสนอผลงาน	2	2	1. รูปแบบการสอน; On-site 2. แหล่งเรียนรู้; เว็บไซต์ประจำ รายวิชา เอกสารประกอบการสอน ผลงาน/ชิ้นงาน 3. กิจกรรม; การนำเสนอผลงาน	แบบรูปรีด ประเมินโดย ครูผู้สอน

สัปดาห์ที่	หัวข้อ/รายละเอียด	จำนวน(ชม.)		กิจกรรมการเรียนรู้ การสอน/สื่อที่ใช้	การ ประเมินผล
		บรรยาย	ปฏิบัติ		
				ชิ้นงาน	
16	ทบทวนบทเรียนด้วยตนเอง			1. รูปแบบการสอน; On Demand 2. แหล่งเรียนรู้; คลิปการสอน เว็บไซต์ประจำรายวิชา เอกสาร ประกอบการสอน 3. กิจกรรม; ทบทวนความรู้ก่อนสอบ	-การสะท้อน คิด ผลที่ได้ จากการ เรียนรู้ -ประเมิน ด้วยตนเอง
17	สอบปลายภาค	3	-	การทดสอบแบบออนไลน์ที่ มหาวิทยาลัย	การทดสอบ ประเมินโดย ครูผู้สอน

การให้คะแนน

Test1-4	Midterm	Project	Attendance	Final	Total
20	30	10	10	30	100

บทที่ 1

ธรรมชาติและโครงสร้างของคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญต่อชีวิตของมนุษย์เป็นอันมาก มนุษย์เริ่มเรียนรู้แนวคิดทางคณิตศาสตร์จากสภาพแวดล้อมหรือธรรมชาติแล้วนำไปสู่การสรุปเป็นกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ซึ่งสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวันได้ คนส่วนใหญ่ที่ไม่ได้เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์โดยตรงมักจะเข้าใจว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องของตัวเลขและการคิดคำนวณเท่านั้น ซึ่งแท้ที่จริงแล้วคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่หมายรวมไปถึงการแก้ปัญหาและการใช้เหตุผลด้วย คณิตศาสตร์นับเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการศึกษาค้นคว้าสร้างองค์ความรู้ในศาสตร์อื่น ๆ และคิดค้นสิ่งประดิษฐ์ต่าง ๆ ดังนั้นในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องรู้และเข้าใจเกี่ยวกับธรรมชาติของคณิตศาสตร์เพื่อประโยชน์ในการเลือกวิธีที่จะศึกษาให้เหมาะสมและสอดคล้องกับธรรมชาติของคณิตศาสตร์

1. ธรรมชาติของคณิตศาสตร์

นักการศึกษาทางคณิตศาสตร์ได้สรุปประเด็นธรรมชาติของคณิตศาสตร์ที่สำคัญๆ ไว้ดังนี้

1.1 คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอด

ในวิชาคณิตศาสตร์มีการสร้างความคิดต่าง ๆ ขึ้นซึ่งความคิดเหล่านี้ได้มาจากการสรุปความคิดเห็นที่เหมือนๆ กัน ซึ่งอาจจะได้จากประสบการณ์หรือปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นเรียกว่า ความคิดรวบยอด เช่น ความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเรื่องการเท่ากันของจำนวน รูปสี่เหลี่ยม จัตุรัส การเท่ากันทุกประการ เป็นต้น ซึ่งในแต่ละเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์เมื่อผู้เรียนได้ศึกษาแล้วจะต้องเกิดความคิดรวบยอดขึ้นในเนื้อหา นั้น ๆ จึงจะเกิดประโยชน์

1.2 คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่แสดงความเป็นเหตุเป็นผล

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีการแสดงแนวคิดอย่างเป็นระบบ เป็นขั้นตอน การสรุปในแต่ละขั้นตอนจะต้องมีการอ้างอิงเหตุผลอย่างสมเหตุสมผล ทุกขั้นตอนในแต่ละเนื้อหาจะเป็นเหตุเป็นผลต่อกัน มนุษย์จึงสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาค้นคว้าองค์ความรู้ใหม่ ๆ และคิดค้นสิ่งประดิษฐ์ต่าง ๆ ได้

1.3 คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นภาษาสากล

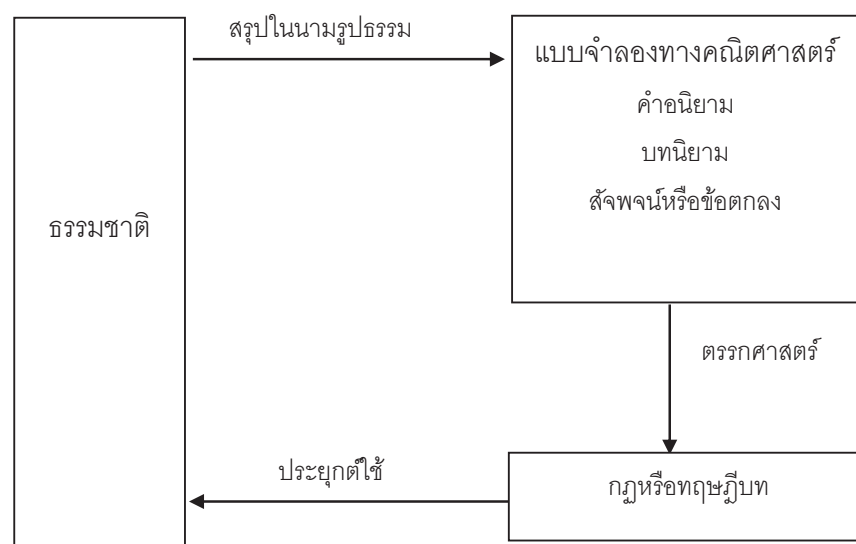
ในวิชาคณิตศาสตร์จะมีการกำหนดสัญลักษณ์ขึ้นใช้เพื่อสื่อความความหมาย ซึ่งทำให้สามารถเขียนข้อความทางคณิตศาสตร์ได้รัดกุม ชัดเจน สื่อความหมายได้ถูกต้อง เกิดความเข้าใจตรงกัน จึงนับได้ว่าคณิตศาสตร์มีภาษาเฉพาะของตัวเอง เป็นภาษาที่ทุกคนที่เรียนคณิตศาสตร์เข้าใจตรงกัน

1.4 คณิตศาสตร์เป็นศิลปะอย่างหนึ่ง

ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์นั้น นักคณิตศาสตร์นอกจากจะเป็นนักคิดแล้ว จำเป็นต้องเป็นผู้ที่มีจินตนาการ ช่างสังเกต มีความละเอียดรอบคอบ รู้จักเลือกคำอธิบาย บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทมาใช้ได้อย่างถูกต้อง ตามลำดับก่อนหลัง พร้อมทั้งการให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผล รวมถึงการถ่ายทอดสิ่งที่พิสูจน์ได้แล้วออกมาอย่างมีระบบระเบียบ เป็นขั้นเป็นตอนอย่างชัดเจน พอจะสรุปได้ว่าความงามของคณิตศาสตร์อยู่ที่ความมีระเบียบ ความกลมกลืนของแนวความคิดตลอดจนความละเอียดถี่ถ้วนและรอบคอบ

1.5 คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีโครงสร้าง

โครงสร้างของคณิตศาสตร์ที่สมบูรณ์นั้นมีกำเนิดมาจากธรรมชาติ โดยมนุษย์ได้เฝ้าสังเกตความเป็นไปของธรรมชาติ ซึ่งอาจจะเป็นทางชีววิทยา ฟิสิกส์ จิตวิทยา เศรษฐศาสตร์ ฯลฯ โดยพิจารณาปัญหาต่าง ๆ ของเนื้อหาเหล่านั้น แล้วสรุปในรูปนามธรรม สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเนื้อหาเหล่านั้น ๆ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย คำนิยาม คำนิยาม และสัจพจน์ จากนั้นจึงใช้ตรรกศาสตร์สรุปออกมาเป็นกฎหรือทฤษฎีบท แล้วนำกฎหรือทฤษฎีบทเหล่านี้ไปประยุกต์ใช้ในธรรมชาติต่อไป ด้วยวิธีการดังกล่าวทำให้มนุษย์เข้าใจความเป็นไปของธรรมชาติได้ดียิ่งขึ้นและในขณะที่น่ากฎหรือทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้กับธรรมชาติ อาจจะได้ข้อมูลใหม่ ก่อให้เกิดการปรับปรุงแก้ไขแบบจำลอง จนกระทั่งอาจทำให้ได้กฎหรือทฤษฎีบทที่ดีกว่าเดิม แล้วนำไปประยุกต์ใช้กับธรรมชาติอีกครั้งหนึ่ง ดังแผนภูมิต่อไปนี้



รูปที่ 1 โครงสร้างของคณิตศาสตร์

2. โครงสร้างของคณิตศาสตร์

โครงสร้างของคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 4 ส่วนดังนี้

2.1 คำนิยาม

คำนิยาม (undefined term) หมายถึงคำที่ไม่สามารถให้คำจำกัดความได้ แต่สามารถเข้าใจความหมายได้ โดยอาศัยการรับรู้จากประสบการณ์ ความคุ้นเคยกับคุณสมบัติของมัน เช่น จุด เส้น ระนาบ เป็นต้น

2.2 คำนิยาม

คำนิยาม (defined term) หมายถึงคำที่สามารถให้คำจำกัดความได้ เช่น รูปสี่เหลี่ยม จัตุรัส วงกลม เส้นขนาน เป็นต้น

2.3 สัจพจน์

สัจพจน์ (postulate) หมายถึงข้อความที่ยอมรับหรือตกลงว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ เช่น “เส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น” “ลากเส้นตรงให้ผ่านจุดสองจุดที่แตกต่างกันได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น”

2.4 ทฤษฎีบท

ทฤษฎีบท (theorem) หมายถึงข้อความที่สามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริง ซึ่งในการพิสูจน์อาจใช้คำนิยาม คำนิยาม สัจพจน์ หรือทฤษฎีบทอื่น ๆ ที่ได้พิสูจน์มาแล้ว เช่น “มุมภายในรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา” “เส้นตรงสองเส้นตัดกันมุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน”

3. ระบบคณิตศาสตร์

ระบบคณิตศาสตร์มีองค์ประกอบที่สำคัญ 2 ส่วน คือ โครงสร้างของคณิตศาสตร์ และ กระบวนการให้เหตุผล สำหรับโครงสร้างของคณิตศาสตร์ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 2 ในหัวข้อ 3 จะกล่าวถึงเฉพาะกระบวนการให้เหตุผล

กระบวนการให้เหตุผล (reasoning) เป็นเครื่องมือที่มนุษย์ใช้สำหรับแสวงหาความรู้ใหม่ ๆ โดยการนำเอาความจริงอย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายอย่างในระบบ ซึ่งเรียกว่า เหตุหรือข้อตั้ง (premise) มาวิเคราะห์แจกแจงแสดงความสัมพันธ์ เพื่อให้เกิดความจริงอันใหม่ขึ้น ซึ่งเรียกว่า ผลหรือ ผลสรุป หรือ ข้อยุติ (conclusion) กระบวนการให้เหตุผลแบ่งเป็น 2 ลักษณะ ดังนี้

1. การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (inductive reasoning) เป็นการสรุปความรู้ใหม่ หรือ สรุปผลการค้นหาความจริง โดยอาศัยข้อสังเกตหรือผลการทดลองจากหลาย ๆ ตัวอย่างจากกรณีย่อย ๆ แล้วสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป ซึ่งผลสรุปที่ได้จากการให้เหตุผลแบบนี้ไม่ได้ถูกบังคับจากเหตุที่กำหนดให้ เนื่องจากเหตุแต่ละเหตุที่กำหนดให้หรือนำมาอ้างอิงเป็นอิสระต่อกัน ตัวอย่างการให้เหตุผลเชิงอุปนัย

ตัวอย่าง จงหาพจน์ที่ n ของ $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ พิจารณาแต่ละพจน์ของลำดับต่อไปนี้

พจน์ที่ 1 คือ 1

พจน์ที่ 2 คือ 3 เขียนได้เป็น $1+2$

พจน์ที่ 3 คือ 5 เขียนได้เป็น $1+2+2$

พจน์ที่ 4 คือ 7 เขียนได้เป็น $1+2+2+2$

พจน์ที่ 5 คือ 9 เขียนได้เป็น $1+2+2+2+2$

จากการสังเกตจะเห็นว่า จำนวนของ 2 ที่บวกกับ 1 น้อยกว่าจำนวนที่แสดงลำดับที่ของพจน์อยู่ 1

ดังนั้น พจน์ที่ 100 คือ 1 บวกด้วย 2 อีก 99 ตัว

นั่นคือ พจน์ที่ 100 คือ $1+(99 \times 2) = 199$

ดังนั้น พจน์ที่ n หรือรูปแบบทั่วไปของลำดับ จึงหาได้จาก $1+(n-1)2 = 2n-1$

ดังนั้นลำดับ $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ จึงเขียนเป็น $1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n-1$

โดยทั่ว ๆ ไป การให้เหตุผลแบบอุปนัย นิยมใช้ในการศึกษาค้นคว้าคุณสมบัติต่าง ๆ ทางวิทยาศาสตร์ เช่น ข้อสรุปที่ว่า สารสกัดที่ได้จากสะเดาสามารถใช้เป็นยากำจัดศัตรูพืชได้ เป็นข้อสรุปที่ได้จากการทดลองซ้ำกันหลาย ๆ ครั้ง แล้วได้ผลการทดลองตรงกัน หรือในทางคณิตศาสตร์จะใช้ในเรื่องการสร้างสัจพจน์ เช่น เมื่อทดลองลากเส้นตรงสองเส้นให้ตัดกัน จะพบว่าเส้นตรงสองเส้นจะตัดกันเพียงจุดเดียวเท่านั้น ไม่ว่าจะทดลองลากกี่ครั้งก็ตาม จึงสรุปได้ว่าเส้นตรงสองเส้นตัดกันเพียงจุดเดียวเท่านั้น

2. การให้เหตุผลเชิงนิรนัย (deductive reasoning) เป็นการสรุปความรู้ใหม่ หรือข้อความจริงใหม่ซึ่งเรียกว่า ผลสรุปที่เป็นผลมาจากการนำข้อความที่กำหนดให้ซึ่งยอมรับว่าเป็นจริงซึ่งเรียกว่า เหตุ ถ้าเหตุที่กำหนดให้บังคับให้เกิดผลสรุป แสดงว่า การให้เหตุผลดังกล่าว **สมเหตุสมผล (valid)** แต่ถ้าเหตุที่กำหนดให้ไม่สามารถจะบังคับให้เกิดผลสรุปได้ แสดงว่า การให้เหตุผลดังกล่าว **ไม่สมเหตุสมผล (invalid)**

ตัวอย่างการให้เหตุผลเชิงนิรนัย

- เหตุ**
1. นกทุกชนิดบินได้
 2. เพนกวิน เป็นนกชนิดหนึ่ง

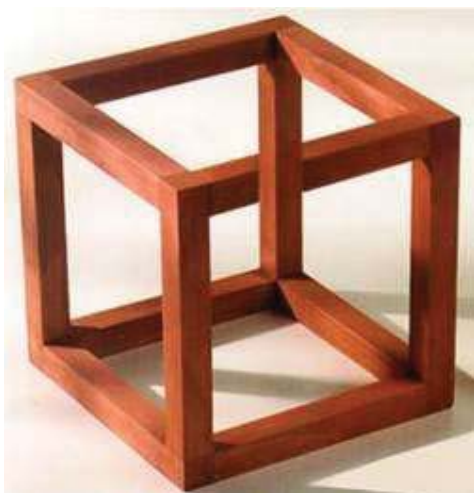
ผลสรุป นกเพนกวินบินได้

4. ปฏิทรรศน์ (Paradox)

ปฏิทรรศน์ หรือ พาราด็อกซ์ (Paradox) คือ ประโยคหรือกลุ่มของประโยคที่เป็นจริงอย่างชัดเจน แต่นำไปสู่ความขัดแย้งในตัวเอง หรือสถานการณ์ที่อยู่นอกความคิดทั่วไป โดยทั่วไปแล้ว อาจเป็นไปได้ว่า ประโยคดังกล่าวนี้แท้จริงแล้วอาจไม่ได้นำไปสู่สภาวะขัดแย้ง ผลลัพธ์ที่ได้ อาจไม่ใช่ข้อขัดแย้งจริง ๆ หรือข้อกำหนดในตอนต้นอาจไม่จริงหรือไม่สามารถเป็นจริงพร้อม ๆ กันได้

คำว่าปฏิทรรศน์ หรือ พาราด็อกซ์ มักถูกใช้แทนที่ไปมากับคำว่าข้อขัดแย้ง อย่างไรก็ตาม แนวคิดทั้งสองนั้นไม่เหมือนกันเสียทีเดียว ในขณะที่ข้อขัดแย้งประกาศสิ่งที่ตรงกันข้ามกับตัวเอง หลาย ๆ ปฏิทรรศน์ กลับมีทางออกหรือคำอธิบาย

ตัวอย่างรูปภาพที่เกิดปฏิทรรศน์



รูปที่ 1.2 รูปภาพที่เกิดปฏิทรรศน์

ที่มา <http://mathminton.blogspot.com/2010/11/paradox-incpetion.html>

สืบค้นเมื่อวันที่ 1 สิงหาคม 2565

ตัวอย่างประโยคที่เป็นปฏิทรรศน์

1. ปัญหาว่า เราไม่สามารถวิ่งแข่งแข่งเราได้ โดยต่อให้เต่าอยู่ตำแหน่งข้างหน้า พิจารณาเมื่อเราเดินทางไปอยู่ที่ตำแหน่งเดิมของเต่า เต่าก็เปลี่ยนตำแหน่งไปข้างหน้าเสียแล้ว กระจายจะมีโอกาสวิ่งแข่งเต่าหรือเปล่า ?

2. ถ้าเราเติมน้ำทีละหยดๆ ลงในถังใบหนึ่งที่บรรจุไวน์แดงไว้ ในขณะที่เติมน้ำทีละหยดก็ จะมีการกวนของเหลวในถังนั้นไปด้วย พร้อมกับมีก๊อกเปิดของเหลวที่อยู่ในถังนั้นออกมาให้ซึมได้

ปัญหาคือเราสามารถหาน้ำหยดสุดท้ายที่ทำให้ของเหลวที่เราชิมเปลี่ยนรสชาติจากไวน์แดงมาเป็นน้ำได้หรือเปล่า???

3. “A จริง และ A เป็นเท็จ”

4. “ประโยคนี้เป็นเท็จ” – ถ้าคนเป็นนักวิ่ง กำลังวิ่งแข่งขัน ถ้าผู้วิ่งแข่งคนสุดท้ายคุณจะเป็นคนที่เท่าใด

5. มีโปรแกรมที่ใช้ตรวจสอบการหยุดของโปรแกรมรีเพล่า

6. “เราไม่สามารถดื่มเหล้าในแก้วที่ละครึ่งได้” หรือ “กัดกล้วยกินทีละครึ่งไม่สามารถหมดทั้งลูกได้”

7. “I have found the paradox that if I love until it hurts, then there is no hurt, but only more love.” (แม่ชีเทเรซา)

8. “you cannot step twice into the same river.” (เฮราคลิตุส)

9. ข้ออ้าง 1: จำนวน 1 เป็นจำนวนน้อย

ข้ออ้าง 2: ถ้าจำนวน 1 เป็นจำนวนน้อย จำนวน 2 ก็เป็นจำนวนน้อย

ข้ออ้าง 3: ถ้าจำนวน 2 เป็นจำนวนน้อย จำนวน 3 ก็เป็นจำนวนน้อย

.

ข้ออ้าง 100,000: ถ้าจำนวน 99,999 เป็นจำนวนน้อย จำนวน 100,000

ก็เป็นจำนวนน้อย

ข้อสรุป: จำนวน 100,000 เป็นจำนวนน้อย

10. ถ้าไม่มีทรายเลยแม้แต่หนึ่งเม็ด เราก็ยกมือยกกองทรายไม่ได้ หากเรามีทรายเพิ่มขึ้นมาอีกเพียงหนึ่งเม็ด เราก็ไม่สามารถยกกองทรายขึ้นมาได้จากอะไรที่ไม่ใช่กองทรายอยู่แล้ว ดังนั้นจึงไม่อาจมีใครยกกองทรายขึ้นมาได้

11. สมมติว่ามีฝาแฝด 2 คน คือ ชาว และเชียว โดยทั้งสองคนนี้สนใจเรื่องราวเกี่ยวกับอวกาศ และเมื่อโตขึ้นก็ได้ทำงานในองค์การอวกาศทั้งคู่ โดยชาวเฝ้าประจำอยู่ที่สถานีอวกาศบนโลก (ง่ายๆ แบบเกือบคลั่งจ้องว่า ‘ชาวเฝ้าบ้าน’) ส่วนเชยวนั้นโชคดีมีโอกาสเดินทางไปในอวกาศด้วยยานอวกาศความเร็วสูง เพื่อสำรวจดาวฤกษ์ที่อยู่ห่างออกไปหลายปีแสง (ง่ายๆ แบบคลั่งจ้องว่า ‘เชยวท่องเที่ยวไป’) จากนั้นก็กลับมายังโลก (ดร.บัญชา ธนบุญสมบัติ) เป็นต้น

ตัวอย่างสถานการณ์ที่เกี่ยวกับปริศนา

1. ปัญหาของจระเข้ แม่ลูกอ่อนคนหนึ่งอุ้มลูกน้อยไปเดินเล่นในสวนสัตว์ ด้วยความเผอเรอปล่อยให้จระเข้ตัวหนึ่งคาบลูกน้อยไปได้ ด้วยความรักลูก แม่จึงไหว้วอนขอให้จระเข้ส่งลูกของตนคืนมา จระเข้ตั้งเงื่อนไขว่าถ้าแม่เดาใจมันถูกสักเรื่องหนึ่งมันจะคืนให้ มิฉะนั้นมันจะกินเสีย ต่อหน้าต่อตา แม่จึงกล่าวว่า “ เ็งจะไม่คืนลูกให้ข้า “ จระเข้จึงมาคิดว่า ถ้ามันกินเด็กน้อยเสียก็จะตรงกับคำเดาของแม่ มันจะเอาลูกที่ไหนมาคืนให้แม่ แต่ถ้ามันคืนเด็กน้อยให้แม่ไปเสีย ก็หมายความว่าแม่เดาใจมันผิดก็มีสิทธิจะกินเด็กเพื่อมิให้เสียสัตย์ต่อวาจาที่ลั่นออกไป จระเข้จะทำอย่างไรดี ช่วยแนะนำให้หน่อยเถิด มันคาบเด็กรอคำตอบอยู่จนเมื่อยปากแล้ว

2. ปัญหาของคนป่า คนป่าเผ่าหนึ่งเป็นมนุษย์กินคน ครึ่งหนึ่งจับเชลยมาได้คนหนึ่ง จึงชุมนุมกันทำพิธีสังเวยแล้วก็จะฉลองด้วยอาหารอันโอชะ หัวหน้าเผ่านี้สนุกสนานขึ้นมาจึงลั่นวาจาไปกับเชลยว่า “ไหนเจ้าเชลยตัวดี จงพูดอะไรมาให้ข้าเสี่ยงทายหน่อยซิ ถ้าเจ้าพูดความจริงข้าจะจัดการต้มเจ้า ถ้าเจ้าพูดความเท็จข้าก็จะจัดการย่างเจ้า ถ้าข้าไม่ทำตามคำพูดขอให้เจ้าหักคอข้าเสีย” เชลยคนนั้นดีใจพูดไปว่า “ข้าจะถูกลง” หัวหน้าเผ่าจึงสั่งให้ย่าง แต่แม่มดที่อยู่ ณ ที่นั้นค้านว่า ถ้าอย่างเขาเจ้าพ่อจะหักคอหัวหน้าเผ่าเพราะเขาพูดความจริงต้องต้ม พ่อมดจึงค้านว่า “ข้าก่อนต้มไม่ได้เพราะถ้าเอาเขาไปต้มก็หมายความว่าเชลยพูดเท็จ ตามคำสาบานของหัวหน้าเผ่าต้องจัดการย่าง มิฉะนั้น เจ้าพ่อจะหักคอ” คนป่าเผ่านั้นยังปรึกษากันอยู่ตราบเท่าทุกวันนี้ว่าจะกินเชลยคนนั้นได้อย่างไร โดยไม่ให้เจ้าพ่อหักคอหัวหน้าเผ่า

3. ปัญหาของนักสืบ นักสืบคนหนึ่งไปถามนายตำรวจว่านายขาเป็นคนอย่างไร นายตำรวจบอกว่า “นายขาโกหกเสมอ” ครั้นมาถามนายขาว่านายขาเป็นคนอย่างไร นายขาบอกว่า “นายขาพูดจริงเสมอ” นักสืบจะสรุปอย่างไรเกี่ยวกับคนทั้งสอง

4. ปัญหาของช่างตัดผม ในหมู่บ้านแห่งหนึ่งเป็นโรคเหากันจนปราบไม่ไหว เจ้าหน้าที่เห็นทางออกทางเดียวคือ สั่งให้ทุกคนในหมู่บ้านโกนผมให้หมด เพื่อให้แน่ใจ เจ้าหน้าที่คนนั้นเรียกช่างตัดผมซึ่งมีอยู่คนเดียวในหมู่บ้านนั้นกำชับว่า “ให้แกออกสำรวจคนในหมู่บ้านทุกคน ถ้าพบผู้ใดไม่โกนผมของตนเองก็ต้องโกนให้ แต่ถ้าคนไหนโกนผมของตนเองก็อย่าไปโกนให้คนอื่นเป็นอันขาด ถ้าแกขัดคำสั่งนี้แม้แต่ครั้งเดียวแกจะถูกลงโทษ” ช่างตัดผมขณะนั้นยังไม่ได้โกนผม ถ้าเขาจะไม่โกนก็就会被ลงโทษ ถ้าเขาหลงมือโกนเมื่อใดเขาก็ต้องระงับตามคำสั่ง เพราะจะโกนให้ผู้ที่โกนผมของตนเองไม่ได้ เขาจะอย่างไรดีกับผมของตนเองจึงจะไม่ขัดคำสั่งของเจ้าหน้าที่

5. ปัญหาของคนโกหก นักศึกษาคนหนึ่งพูดขึ้นเปรย ๆ ว่า “นักศึกษาย่อมพูดโกหกเสมอ” คำพูดของเขาเช่นนี้เชื่อได้หรือไม่

6. ปัญหาของพระราชา พระราชาองค์หนึ่งทรงนึกสนุกขึ้นมาจึงประกาศว่า ถ้าใครสามารถเล่าเรื่องโกหกให้พระองค์เห็นว่าโกหกจริง ๆ ได้ พระองค์จะประทานทองคำให้เป็นรางวัล 1 ไห ได้มีคนมาเล่าเรื่องต่าง ๆ มากมาย พระองค์ก็ตัดสินใจว่าอาจจะจริงได้ทั้งสิ้น ยังไม่มีใครได้รางวัลไปเลย จนอยู่มาวันหนึ่ง มีชายชราคนหนึ่งมาเล่าว่า “ขอเดชะฯ พระอาญาไม่พินเกล้าฯ พระองค์จะเชื่อหรือไม่ก็แล้วแต่จะทรงวินิจฉัย แต่ความเป็นจริงมีอยู่ว่า ครั้งหนึ่งพระราชบิดาของพระองค์ได้ทรงยืมทองคำไปจากข้าพระพุทธเจ้า 1 ไห โดยตรัสให้มาขอคืนจากพระองค์ บัดนี้ข้าพระพุทธเจ้ามาขอคืนตามพระดำรัส ควรสมควรแล้วแต่จะโปรด พระราชาจึงหาวิธีหลีกเลียงอย่างไรจึงจะไม่เสียทองคำ 1 ไห

บทที่ 2

ตรรกศาสตร์

ตรรกศาสตร์เป็นการศึกษาถึงหลักการและวิธีการที่ใช้ในการให้เหตุผล การศึกษาระบบคณิตศาสตร์ซึ่งมีลักษณะเป็นนามธรรมจึงต้องอาศัยการพิสูจน์หาความจริง โดยใช้หลักการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ ในที่นี้จะกล่าวถึงตรรกศาสตร์พื้นฐานที่จะนำไปใช้ในการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 ประพจน์ (Proposition หรือ Statement)

บทนิยาม 2.1 : ประพจน์ (Proposition หรือ Statement) คือ ประโยคที่เป็นจริงหรือเท็จเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น นิยมเขียนแทนตัวอักษรตัวพิมพ์เล็กในภาษาอังกฤษ เช่น p, q, r เป็นต้น

บทนิยาม 2.2 : เรียกประพจน์ที่เป็นจริงว่า ประพจน์ที่มีค่าความจริง (true value) เป็นจริงแทนด้วยสัญลักษณ์ T และเรียกประพจน์ที่เป็นเท็จว่า ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ แทนด้วยสัญลักษณ์ F

บทนิยาม 2.3 : ให้ p และ q เป็นประพจน์ใดๆ **นิเสธ** (Negation) ของ p เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sim p$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับ p

*** ถ้ามีประพจน์ตั้งแต่สองประพจน์ขึ้นไปเชื่อมกัน เราเรียกประพจน์นั้นว่า **ประพจน์เชิง**

ประกอบ (Compound Statement)

ตัวอย่างประโยคที่เป็นประพจน์

กรุงเทพมหานครเป็นเมืองหลวงของประเทศไทย

สุนัขเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม

แสงเคลื่อนที่ได้โดยใช้อากาศเป็นตัวกลางในการเคลื่อนที่

$\sqrt{9}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

$2+3 = 6$

สำหรับประโยคที่ไม่สามารถหาค่าความจริงของประโยคได้เช่น ประโยคคำถาม

ประโยคคำสั่ง คำอุทาน หรือวลี ไม่ใช่ประพจน์เช่น

จงแสดงวิธีทำอย่างละเอียด

ประเทศไทยอยู่ในกลุ่มประชาคมอาเซียนบ้าง

นกอินทรีมีสีขาวขนาดใหญ่

2.2 ประโยคเปิด (Open Sentence)

บทนิยาม 2.4 : ประโยคเปิด (Open Sentence) คือประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่มีตัวแปรอยู่ในประโยค ยังไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ

ตัวอย่างประโยคเปิด

เขาได้รับเหรียญรางวัลในการแข่งขันกีฬาโอลิมปิกรวมทั้งหมด 22 เหรียญ

เธอเป็นนักบินหญิงไทยคนแรกที่จะได้ไปท่องอวกาศ

$x^2 + x \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$ เมื่อ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

$2y - 1 \neq 5$, $y \in \mathbb{R}$ เมื่อ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

ในประโยคข้างต้นมีค่าที่ไม่ได้ระบุชัดเจนเช่น เขา เธอ จำนวนจริง x จำนวนจริง y ซึ่งไม่ได้ระบุชัดเจนว่า คือใคร เป็นจำนวนใด จึงยังไม่สามารถหาค่าความจริงได้ แต่เมื่อแทนที่ตัวแปรและเติมวลีบอกปริมาณของตัวแปรลงไปในประโยคแล้วจะสามารถทำให้บอกค่าความจริงของประโยคนั้นได้ ประโยคนั้นจะเป็นประพจน์

เช่น

นิวตันได้รับเหรียญรางวัลในการแข่งขันกีฬาโอลิมปิกรวมทั้งหมด 22 เหรียญ

ชื่อเธอเป็นนักบินหญิงไทยคนแรกที่จะได้ไปท่องอวกาศ

ทุกจำนวนจริง x จะได้ว่า $x^2 + x \leq 0$

มีจำนวนจริง y บางจำนวน $2y - 1 \neq 5$

หมายเหตุ บางประโยคถึงแม้จะมีตัวแปรในประโยค แต่ถ้าสามารถบอกค่าความจริงได้ประโยคนั้น

จัดว่าเป็นประพจน์ เช่น $x^2 + 1 \leq 0$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

การเขียนประโยคเปิด

การเขียนประโยคเปิดเราจะเขียนแทนประโยคเปิดด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่ และเขียนวงเล็บแสดงตัวแปรของประโยค เช่น

ให้ $P(x)$ แทน $x^2 - x + 2 \leq 0$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$

$Q(y)$ แทน $2y - 3 \leq 0$ เมื่อ $y \in \mathbb{R}$

$R(x,y)$ แทน $x^2 + y^2 \geq 1$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ และ $y \in \mathbb{R}$

2.3 การเชื่อมประพจน์

ถ้ามีประพจน์ตั้งแต่ 2 ประพจน์ขึ้นไปสามารถนำประพจน์นั้นมาสร้างประพจน์ใหม่ โดยใช้การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม ซึ่งมี 4 แบบ ดังนี้

1) การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “และ” (Conjunction)

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ เขียนแทน “ p และ q ” ด้วยสัญลักษณ์ “ $p \wedge q$ ” ซึ่งประพจน์ p และ q จะมีค่าความจริงเป็นจริงได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้น

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

2) การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “หรือ” (Disjunction)

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ เขียนแทน “ p หรือ q ” ด้วยสัญลักษณ์ “ $p \vee q$ ” ซึ่งประพจน์ p หรือ q จะมีค่าความจริงเป็นเท็จได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้น

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

3) การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...” (Conditional)

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ เขียนแทน “ถ้า p แล้ว q ” ด้วยสัญลักษณ์ “ $p \rightarrow q$ ” ซึ่งประพจน์ถ้า p แล้ว q จะมีค่าความจริงเป็นเท็จได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้น

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

4) การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “...ก็ต่อเมื่อ...” (Bi-conditional)

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ เขียนแทน “ p ก็ต่อเมื่อ q ” ด้วยสัญลักษณ์ “ $p \leftrightarrow q$ ”
ซึ่งประพจน์ p ก็ต่อเมื่อ q จะมีค่าความจริง ดังตาราง

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ข้อตกลง : เนื่องจากในประพจน์หนึ่งๆ อาจจะสามารถประกอบด้วยประพจน์ย่อยหลายๆ ประพจน์เชื่อมกัน ดังนั้นเพื่อความสะดวกเรานิยมกำหนดลำดับของตัวเชื่อมข้อความจากมากไปหาน้อย ดังนี้

1. $\leftrightarrow$ 2. $\rightarrow$ 3. $\wedge, \vee$ 4. $\sim$

2.4 การหาค่าความจริงที่มีประพจน์เป็นตัวเชื่อม

จากตารางข้างต้นที่กล่าวมาจะเห็นว่าประพจน์ p, q มีค่าความจริงอยู่ 4 กรณี หรือเขียนอีกแบบหนึ่งคือ $2^2 = 4$ ดังนั้นถ้ามีประพจน์ 3 ประพจน์ ค่าความจริงก็จะมี $2^3 = 8$ กรณี

ในการหาค่าความจริงของประพจน์นั้นเราสามารถหาค่าความจริงของประพจน์ได้ 2 วิธี

1. โดยการสร้างตารางหาค่าความจริง (เหมาะกับกรณีที่ไม่นิยามค่าประพจน์ใดเลย)
2. การใช้แผนภาพต้นไม้ (กรณีที่บอกค่าความจริงของประพจน์ย่อยหรือบอกค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบ)

ตัวอย่าง 2.1 จงหาค่าความจริงของ $p \rightarrow (p \vee q)$

วิเคราะห์ : จะเห็นว่าตัวอย่างนี้เราไม่นิยามค่าความจริงของประพจน์ย่อยใด ๆ เลย ดังนั้นเราควรเลือกหาค่าความจริงด้วยการสร้างตาราง

วิธีทำ

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

ตัวอย่างที่ 2.2 จงเขียนตารางแสดงค่าความจริงประพจน์ $(p \wedge q) \rightarrow r$

p	q	r		

ตัวอย่างที่ 2.3 จงเขียนตารางแสดงค่าความจริงประพจน์ $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

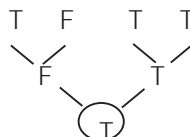
p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

ตัวอย่าง 2.4 จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ เมื่อ p, q และ r มีค่าความจริงเป็น T, F และ T ตามลำดับ

วิเคราะห์: ในตัวอย่างนี้เราสามารถใช้ตารางหาค่าความจริงได้แต่จะเสียเวลาเพราะเราต้องสร้างถึง 8 กรณี ถ้าสังเกตดีๆ จะเห็นว่าโจทย์ให้ค่าความจริงของประพจน์ย่อยมาแล้ว ดังนั้นวิธีที่เหมาะสมเราจะเลือกใช้วิธีการสร้างแผนภาพต้นไม้

วิธีทำ

$$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$$



ตัวอย่าง 2.5 ถ้า p , q และ r เป็นประพจน์ ซึ่ง $p \wedge [(p \rightarrow \sim r) \wedge (q \rightarrow r)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
จงหาค่าความจริงของ p , q และ r

แบบฝึกหัดที่ 2.1

1. จงพิจารณาว่าข้อใดเป็นประพจน์ และมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จ

1.1) $10+2 = 7$

1.2) ถ้า $7-5=10$ แล้ว $(7-5) + 2 = 10+2$

1.3) จงเขียนเซตคำตอบของสมการ $x^3 - 1 = 0$

1.4) เอ๊ะ! นั้นอาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์นี่

1.5) จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดคือ 0

1.6) 4 เป็นจำนวนเฉพาะก็ต่อเมื่อ -1 คือจำนวนจริงลบที่มากที่สุด

1.7) ประเทศไทยอยู่ในเขตภูมิอากาศอบอุ่น

1.8) เมื่อเรียนจบในชั่วโมงนี้แล้ว ขอให้ทุกคนกลับบ้านได้

1.9) ให้ $2 > 1$

1.10) $\sqrt{a} \geq 0$

2. กำหนดให้ p มีค่าความจริงเป็นจริง q มีค่าความจริงเป็นจริง r มีค่าความจริงเป็นเท็จ s มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ในแต่ละข้อ

2.1) $p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$

2.2) $(p \wedge q) \leftrightarrow (r \vee s)$

2.3) $(q \rightarrow p) \wedge (r \leftrightarrow s)$

2.4) $[r \rightarrow (p \vee q)] \vee [p \rightarrow (r \vee s)]$

2.5) $[(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)] \leftrightarrow (q \rightarrow s)$

3. กำหนดให้ p, q, r, s เป็นประพจน์ จงสร้างตารางค่าความจริง

3.1) $p \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

3.2) $p \rightarrow (q \vee r)$

3.3) $(p \wedge q) \leftrightarrow (r \vee s)$

3.4) $(q \rightarrow p) \wedge (r \leftrightarrow s)$

3.5) $[(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)] \leftrightarrow (q \rightarrow s)$

4. กำหนดให้ $(r \rightarrow t) \wedge [(s \vee t)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์ p, q, r

2.5 สัจนิรันดร์ (Tautology)

บทนิยาม 2.5 : สัจนิรันดร์ (Tautology) คือประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ ส่วนประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จเสมอเรียกว่า ข้อความขัดแย้ง (Contradiction)

การพิจารณาว่าประพจน์ใดเป็นสัจนิรันดร์สามารถพิจารณาได้จากตารางค่าความจริงหรือใช้วิธีการสมมติให้ประพจน์นั้นมีค่าความจริงเป็นเท็จ จากนั้นก็หาข้อขัดแย้ง

ตัวอย่าง 2.6 จงแสดงว่า $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

วิธีทำ

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

← เป็นจริงทุกกรณี

จากตารางค่าความจริง ไม่ว่า p และ q จะมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จจะได้

$p \rightarrow (p \vee q)$ มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี ดังนั้นเป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่าง 2.7 จงแสดงว่า $[(s \rightarrow t) \wedge s] \rightarrow t$ เป็นสัจนิรันดร์

s	t			
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

ตัวอย่าง 2.8 จงแสดงว่า $(p \wedge q) \rightarrow p$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

p	q		
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

2.6 สมมูลเชิงตรรกศาสตร์ (Logically Equivalent)

จากตัวอย่างการหาค่าความจริงของประพจน์ที่เราได้กล่าวมาแล้วในข้างต้น เราจะพบว่า มีบางประพจน์ที่มีค่าความจริงเหมือนกัน ซึ่งประพจน์ที่มีค่าความจริงเหมือนกันเราเรียกว่า “การสมมูลกัน”

บทนิยาม 2.6 : ให้ p และ q เป็นประพจน์ เรากล่าวว่า p และ q สมมูลกันเชิงตรรกศาสตร์

ก็ต่อเมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \equiv q$

ข้อสังเกต เนื่องจาก p และ q มีค่าความจริงของประพจน์เหมือนกัน ถ้าเรานำประพจน์ทั้ง 2 ประพจน์นี้มาเชื่อมด้วย “...ก็ต่อเมื่อ...” จะพบว่าค่าความจริงของประพจน์จะเป็นจริงทุกกรณี ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. ในกรณีที่ $p \equiv q$ เราจะได้ว่าประพจน์ $p \leftrightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์ และในทางกลับกันถ้าข้อความ $p \leftrightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์แล้วจะได้ว่า $p \equiv q$
2. ถ้า $p \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์เราจะกล่าวว่า q เป็น logical consequence ของ p
3. ถ้าประพจน์ใดมีค่าความจริงเป็นจริงตรงข้ามกัน เราจะเรียกประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกันว่าเป็นนิเสธกัน

ตัวอย่าง 2.9 จงแสดงว่า $(p \rightarrow q)$ สมมูลกับ $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

ตัวอย่าง 2.10 จงแสดงว่า $(p \rightarrow (q \wedge r))$ สมมูลกับ $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$

p	q	r	$q \wedge r$	$(p \rightarrow (q \wedge r))$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$

2.7 กฎตรรกศาสตร์

สำหรับตัวอย่างประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์ต่อไปนี้เรามักจะนำไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์อยู่บ่อยๆ ครั้งได้แก่

1. $p \vee \sim p$ หรือ $\sim(\sim p \wedge p)$
2. $p \rightarrow p$
3. a) $p \leftrightarrow p \vee p$
b) $p \leftrightarrow p \wedge p$
กฎนิเสธ
4. $\sim \sim p \leftrightarrow p$
กฎทวิคูณนิเสธ (double negation)
5. a) $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
กฎการสลับที่ (commutative laws)
b) $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$
c) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$
6. a) $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
กฎการเปลี่ยนกลุ่ม
b) $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
(associative laws)
7. a) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
กฎการแจกแจง (distributive laws)
b) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8. a) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's laws)
b) $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
9. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
กฎการแย้งสลับที่ (law of contraposition)
10. $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$
กฎรูปแบบสมมูลของการแจกแจงเหตุสู่ผล
11. $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$
กฎนิเสธของการแจกแจงเหตุสู่ผล
12. $p \rightarrow p \vee q$
กฎของการเติม (law of addition)
13. $p \wedge q \rightarrow p$ หรือ $p \wedge q \rightarrow q$
กฎการทำให้ง่าย (law of simplification)
14. $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
กฎการแจกแจงตามเหตุ (modus ponens)
15. $\sim q \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow \sim p$
กฎการแจกแจงค้านเหตุ (modus tollens)
16. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
กฎของตรรกบท (law of syllogism)
17. a) $\sim p \wedge (p \vee q) \rightarrow q$
กฎตรรกบทแบบตัดออก
b) $\sim q \wedge (p \vee q) \rightarrow p$
(disjunctive syllogism)
18. a) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$
b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$
19. a) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r)$
กฎการอนุมานโดยกรณี (inference by cases)
b) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$

20. $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

21. กำหนดให้ c และ t แทนข้อความขัดแย้งและข้อความสัจนิรันดร์ จะได้

a) $p \vee c \leftrightarrow p$

b) $p \wedge c \leftrightarrow c$

c) $p \vee t \leftrightarrow t$

d) $p \wedge t \leftrightarrow t$

22. $(p \rightarrow c) \rightarrow \sim p$ เมื่อ c คือข้อความขัดแย้ง กฎของการเป็นไปไม่ได้ (law of absurdity)

23. $\sim p \wedge c \rightarrow p$ เมื่อ c คือข้อความขัดแย้ง

24. $(\sim p \rightarrow c) \leftrightarrow p$

แบบฝึกหัดที่ 2.2

1. กำหนดให้ p, q, r, s เป็นประพจน์ จงสร้างตรวจสอบว่าประพจน์ในข้อใดเป็นสัจนิรันดร์ และ ประพจน์ใดเป็นข้อความขัดแย้ง

1.1) $p \vee p$

1.2) $p \wedge p$

1.3) $p \wedge (r \wedge r)$

1.4) $p \wedge (r \vee r)$

1.5) $p \vee (q \wedge q) \leftrightarrow p$

1.6) $(p \wedge q) \vee (s \rightarrow r)$

1.7) $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$

1.8) $p \wedge q \rightarrow p$

1.9) $[(p \vee q) \wedge p] \rightarrow q$

1.10) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$

1.11) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee q)$

1.12) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \vee p)$

1.13) $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

1.14) $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$

2. จงตรวจสอบประพจน์ต่อไปนี้ ว่าเป็นประพจน์ที่สมมูลกันหรือไม่

2.1) $p \rightarrow q$ กับ $p \rightarrow q$

2.2) $p \rightarrow q$ กับ $q \rightarrow p$

2.3) $p \rightarrow q$ กับ $(p \vee q)$

2.4) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ กับ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

2.5) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ กับ $p \rightarrow (q \wedge r)$

2.6) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ กับ $(p \vee q) \rightarrow r$

3. จงแสดงว่า

3.1) $[(p \vee q) \wedge (p \wedge (p \wedge q))] \leftrightarrow (p \wedge q)$

3.2) $[(p \wedge q) \vee (p \wedge q)] \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

2.8 การอ้างเหตุผล (Argument)

กระบวนการให้เหตุผลแบ่งออกได้ 2 วิธี คือ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)
2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning)

การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการค้นพบความสัมพันธ์ทั่วไปจากตัวอย่างหรือประสบการณ์หรือจากการทดลอง เหตุย่อยหลายๆ เหตุ เหตุย่อยแต่ละเหตุเป็นอิสระจากกัน มีความสำคัญเท่าๆ กัน และเหตุทั้งหลายเหล่านี้ไม่มีเหตุใดเหตุหนึ่งแสดงให้เห็นถึงความ เป็นสมมติฐานกรณีทั่วไป หรือกล่าวได้ว่า การให้เหตุผลแบบอุปนัยคือการนำเหตุย่อยๆ แต่ละเหตุ มารวมกัน เพื่อนำไปสู่ผลสรุปเป็นกรณีทั่วไป

การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นการนำความรู้พื้นฐานซึ่งอาจเป็นความเชื่อ ข้อตกลง กฎ หรือบทนิยาม ซึ่งเป็นสิ่งที่รู้มาก่อน และยอมรับว่าเป็นความจริงเพื่อหาเหตุผลนำไปสู่ ข้อสรุป เป็นการอ้างเหตุผลที่มีข้อสรุปตามเนื้อหาสาระที่อยู่ภายในขอบเขตของข้ออ้างที่กำหนด

ในกระบวนการการให้เหตุผลจะประกอบด้วยประพจน์ 2 ส่วน คือส่วนที่เป็นเหตุหรือ สมมติฐาน (premise or assumption) และส่วนที่เป็นข้อสรุปหรือผล (conclusion) ซึ่งวิธีการที่จะ ยอมรับว่าข้อสรุปเป็นผลมาจากเหตุหรือสมมติฐานนั้นๆ ถ้าเหตุเป็นเงื่อนไขที่จะทำให้เกิดข้อสรุปหรือผล จะเรียกว่าเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล (valid argument) เขียนแทนด้วย $p_1, p_2, \dots, p_n \mid \rightarrow q$ หรือ

$$p_1$$

$$p_2$$

$$\vdots$$

$$p_n$$

$$\text{---}$$

$$q$$

บทนิยาม 2.7: การให้เหตุผลที่ประกอบด้วยเหตุ $p_1, p_2, \dots, p_n$ และข้อสรุป q จะสมเหตุสมผล (valid) ก็ต่อเมื่อ $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

ในการตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลใดมีความสมเหตุสมผลหรือไม่สามารถทำได้โดยการตรวจสอบว่าประพจน์ $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยใช้วิธีการดังนี้

1. การสร้างตารางหาค่าความจริง
2. สมมติให้ประพจน์นั้นมีค่าความจริงเป็นเท็จ จากนั้นก็หาข้อขัดแย้ง
3. ใช้กฎของตรรกศาสตร์

ในการตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลใดมีความสมเหตุสมผลกันหรือไม่นั้น ถ้าทดสอบโดยการสร้างตารางจะทำให้เสียเวลามาก จึงอาศัยการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลมาประกอบการพิสูจน์กฎเกณฑ์ที่สมเหตุสมผล ได้แก่

1. Modus Ponens

เหตุ 1. $p \rightarrow q$
 2. p

 ผล q

ตัวอย่าง ถ้าแอมขยันแล้วจะสอบผ่าน
 แอมเป็นคนขยัน
 ดังนั้น แอมสอบผ่าน

2. Modus Tollens

เหตุ 1. $p \rightarrow q$
 2. $\sim q$

 ผล $\sim p$

3. Hypothetical Syllogism

เหตุ 1. $p \rightarrow q$
 2. $q \rightarrow r$

 ผล $p \rightarrow r$

4. Disjunctive Syllogism

เหตุ 1. $p \vee q$
 2. $\sim p$

 ผล q

เหตุ 1. $p \vee q$
 2. $\sim q$

 ผล p

5. Simplification

เหตุ 1. $p \wedge q$

.....

ผล p เหตุ 1. $p \wedge q$

.....

ผล q

6. Conjunction

เหตุ 1. p 2. q

.....

ผล $p \wedge q$

7. Addition

เหตุ p

.....

ผล $p \vee q$

8. Constructive Dilemma

เหตุ 1. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$ 2. $p \vee r$

.....

ผล $q \vee s$

9. Destructive Dilemma

เหตุ 1. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$ 2. $\sim q \vee \sim s$

.....

ผล $\sim p \vee \sim r$

ในที่นี้จะขอนำเสนอตัวอย่างการตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้เป็นสมเหตุสมผลหรือไม่
 ด้วยการใช้กฎที่อ้างอิงในการพิสูจน์ตามที่กล่าวมาในข้างต้น
 ที่มา; โสพร เสนีตันติกุล, 2554, ตรรกศาสตร์ การพิสูจน์ เซต, โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
 กรุงเทพฯ, หน้า 28-33.

ตัวอย่างที่ 2.11 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. $p \rightarrow q$	พิสูจน์	
2. $q \rightarrow r$	1. $p \rightarrow q$	1. premise 1
3. $\sim r$	2. $q \rightarrow r$	2. premise 2
-----	3. $p \rightarrow r$	3. จาก (1) และ (2) hypothetical
ผล $\sim p$	4. $\sim r$	4. syllogism
	5. $\sim p$	5. จาก (3) และ (4) modus tollens
	สรุปได้ว่า การอ้างเหตุผลนี้ “สมเหตุสมผล”	

ตัวอย่างที่ 2.12 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. $(p \vee q) \rightarrow r$	พิสูจน์
2. $r \rightarrow s$	
3. $\sim s$	

ผล $\sim p$	

ตัวอย่างที่ 2.13 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge s)$	พิสูจน์
2. $r \rightarrow t$	
3. $\sim t$	

ผล p	

ตัวอย่างที่ 2.14 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ	1. $p \leftrightarrow q$	พิสูจน์
	2. $r \rightarrow s$	
	3. $p \vee r$	

ผล	$s \rightarrow \sim q$	

ตัวอย่างที่ 2.15 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

นักศึกษาตั้งใจเรียน ก็ต่อเมื่อ นักศึกษาขยัน

ถ้านักศึกษาตั้งใจเรียนและขยัน แล้วจะได้คะแนนสอบสูง

นักศึกษาไม่ได้คะแนนสอบสูง หรือ ไม่ได้ทำแบบฝึกหัด

ดังนั้น ไม่จริงที่ว่า นักศึกษาตั้งใจเรียนและทำแบบฝึกหัด

พิสูจน์ p แทน นักศึกษาตั้งใจเรียน

q แทน นักศึกษาขยัน

r แทน นักศึกษาสอบได้คะแนนสูง

s แทน นักศึกษาทำแบบฝึกหัด

จากข้อมูลสามารถนำเขียนเป็นเหตุและผลได้ดังนี้

เหตุ

1. $p \leftrightarrow q$
2. $(p \wedge q) \rightarrow r$
3. $\sim r \vee \sim s$

ผล $\sim (p \wedge s)$

จากนั้นทำการตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่ ด้วยการตรวจสอบว่า

.....เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

ตัวอย่างที่ 2.16 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

ถ้าผู้บริโภคต้องการเครื่องดื่มเพื่อให้ได้รับสารอาหารครบถ้วนแล้วเขาจะดื่มนมถั่วเหลืองหรือ
ดื่มนมเปรี้ยว

ผู้บริโภคต้องการเครื่องดื่มเพื่อให้ได้สารอาหารครบถ้วน แต่เขาไม่ดื่มนมถั่วเหลือง

ดังนั้น เขาดื่มนมเปรี้ยว

พิสูจน์ p แทน ผู้บริโภคต้องการเครื่องดื่มเพื่อให้ได้สารอาหารครบถ้วน

q แทน ผู้บริโภคดื่มนมถั่วเหลือง

r แทน ผู้บริโภคดื่มนมเปรี้ยว

ตัวอย่างที่ 2.17 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่ (ให้นักศึกษาทำเอง)

ถ้าฉันไปพักผ่อนหน้าร้อนนี้ที่เกาะหลีเป๊ะ แล้วฉัน(จะ)ไปดำน้ำดูปะการัง

หรือนั่งเรือไปไโดหมึก

(แต่)ฉันไม่ได้ไปดำน้ำดูปะการังและไม่ได้นั่งเรือไปไโดหมึก

ดังนั้น ฉันไม่ได้ไปพักผ่อนหน้าร้อนนี้ที่เกาะหลีเป๊ะ

พิสูจน์ p แทน ฉันไปพักผ่อนหน้าร้อนนี้ที่เกาะหลีเป๊ะ

q แทน ฉันไปดำน้ำดูปะการัง

r แทน ฉันนั่งเรือไปไโดหมึก

แบบฝึกหัดที่ 2.3

1. จงตรวจสอบประพจน์เงื่อนไขต่อไปนี้ว่าเป็นประพจน์เงื่อนไขที่สมเหตุสมผลหรือไม่

$$1.1 \ (p \wedge q) \rightarrow p$$

$$1.2 \ p \rightarrow (p \vee q)$$

$$1.3 \ [(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

$$1.4 \ [(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$$

$$1.5 \ [(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$$

$$1.6 \ [(p \rightarrow q) \wedge \sim p] \rightarrow \sim q$$

$$1.7 \ [p \rightarrow (p \wedge \sim q)] \rightarrow \sim p$$

$$1.8 \ [(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

$$1.9 \ [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$1.10 \ [(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

2. จงพิสูจน์

$$2.1 \ \text{เหตุ} \quad 1. \ p \rightarrow \sim q$$

$$2. \ q \vee r$$

$$3. \ p$$

$$\text{ผล} \quad r$$

$$2.3 \ \text{เหตุ} \quad 1. \ p \rightarrow q$$

$$2. \ r \rightarrow q$$

$$3. \ s \rightarrow r$$

$$4. \ \sim p$$

$$\text{ผล} \quad \sim s$$

$$2.5 \ \text{เหตุ} \quad 1. \ p \rightarrow q$$

$$2. \ q \rightarrow r$$

$$3. \ r \rightarrow s$$

$$4. \ q$$

$$\text{ผล} \quad s$$

$$2.2 \ \text{เหตุ} \quad 1. \ p \rightarrow \sim q$$

$$2. \ q \rightarrow s$$

$$3. \ \sim s$$

$$\text{ผล} \quad \sim p \vee s$$

$$2.4 \ \text{เหตุ} \quad 1. \ \sim q \rightarrow \sim p$$

$$2. \ \sim r$$

$$3. \ q \rightarrow r$$

$$4. \ \sim p \vee s$$

$$\text{ผล} \quad s$$

3. จงแสดงว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

3.1 ถ้าฝนตกแล้วน้ำจะท่วมกรุงเทพ

ตอนนี้ฝนตก

ดังนั้น น้ำท่วมกรุงเทพ

3.2 ถ้าเอสอบเข้าคณะครุศาสตร์ได้และขยันเรียน แล้วเอจะเรียนจบได้รับใบประกอบวิชาชีพครู

ถ้าเอได้ใบประกอบวิชาชีพครู แล้วเอจะสามารถนำวุฒิไปสอบบรรจุครูได้

เอไม่ได้สอบบรรจุครู

ดังนั้น เอสอบเข้าคณะครุศาสตร์ไม่ได้ หรือเอขี้เกียจเรียน

3.3 ถ้าฉันใช้สื่อออนไลน์เพื่อหาข้อมูลสินค้า แล้วฉันจะได้ประสบการณ์เกี่ยวกับสินค้า ก่อนตัดสินใจซื้อ

ถ้าฉันได้ประสบการณ์เกี่ยวกับสินค้าก่อนตัดสินใจซื้อ แล้วฉันจะได้สินค้าที่มี

คุณภาพดีและราคาถูก

แต่ฉันไม่ได้สินค้าที่มีคุณภาพดีหรือราคาแพง(ไม่ถูก)

ดังนั้น ฉันไม่ได้ใช้สื่อออนไลน์เพื่อหาข้อมูลสินค้า

3.4 ถ้าบีเป็นคนเส้นรอบวงใหญ่ แล้วเธอจะมีความเสี่ยงต่อโรคหลอดเลือดหัวใจ

ถ้าบีเป็นคนเส้นรอบวงใหญ่ และ มีความเสี่ยงต่อโรคหลอดเลือดหัวใจ แล้ว

แสดงว่าบีมีภาวะโภชนาการเกิน

แต่ไม่จริงที่ว่า บีเป็นคนเส้นรอบวงใหญ่และมีภาวะโภชนาการเกิน

ดังนั้น บีเป็นคนเส้นรอบวงเล็ก(ไม่ใหญ่)

2.9 ตัวบ่งปริมาณ (Quantifier)

ประโยคเปิดจะกลายเป็นประพจน์เมื่อแทนที่ทุกตำแหน่งของตัวแปรที่เป็นอิสระในประโยคนั้นด้วยค่าคงตัว ประโยคเปิดยังกลายเป็นประพจน์ได้ด้วยการใช้ “ตัวบ่งปริมาณ”

ตัวอย่างเช่น $x + 3 = 5$ เป็นประโยคเปิด แต่ “มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x + 3 = 5$ ” และ “ $x + 3 = 5$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม x ” เป็นประพจน์

เราจะใช้สัญลักษณ์ $\forall$ แทน “สำหรับทุก” และใช้ $\exists$ แทน “มี”

เรียก $\forall$ ว่าตัวบ่งปริมาณสำหรับทุกตัว (Universal Quantifier) และ

เรียก $\exists$ ว่า ตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่งตัว (Existential Quantifier)

บทนิยามที่ 2.8 ให้ U แทนเอกภพสัมพัทธ์ของฟังก์ชันข้อความ $p(x)$ เราเขียน

$\forall x \in U, p(x)$ แทน $p(x)$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน U

$\exists x \in U, p(x)$ แทน มีสมาชิก x ใน U ซึ่ง $p(x)$

หมายเหตุ

1. เราเขียน $\forall x \in U, p(x)$ ด้วย $\forall x \in U [p(x)]$ หรือ $\forall x [p(x)]$ มีความหมายเดียวกัน

2. เราเขียน $\exists x \in U, p(x)$ หรือ $\exists x \in U [p(x)]$ หรือ $\exists x [p(x)]$ มีความหมายเดียวกัน

3. ข้อความ “สำหรับทุกสมาชิก x ของ U ” มีความหมายเดียวกับ

“สำหรับแต่ละสมาชิก x ใน U ”

หรือ “ไม่ว่า x จะเป็นอะไรก็ตามใน U ”

4. ข้อความ “มีสมาชิก x ใน U ซึ่ง...” มีความหมายเดียวกับ

“สำหรับบางสมาชิก x ใน U ซึ่ง...”

2.9.1 ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

สำหรับประโยคเปิด $p(x)$ และเซต U ใดๆ

$\forall x \in U, p(x)$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $p(x)$ เป็นจริง สำหรับทุกสมาชิก x ใน U

$\exists x \in U, p(x)$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิก x ใน U ซึ่ง $p(x)$ เป็นจริง

และจะได้ว่า

$\forall x \in U, p(x)$ เป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิก x ใน U ซึ่ง $p(x)$ เป็นเท็จ

$\exists x \in U, p(x)$ เป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ $p(x)$ เป็นเท็จ สำหรับทุกสมาชิก x ใน U

กำหนดให้	C	แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน
	R	แทนเซตของจำนวนจริง
	Q	แทนเซตของจำนวนตรรกยะ
	Q'	แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ
	Z	แทนเซตของจำนวนเต็ม
	N	แทนเซตของจำนวนนับ

ตัวอย่าง 2.18 ให้ $U = \{1, 2, 3, 4\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1) $\forall x[x > 0]$

2) $\exists x[x > 3]$

พิจารณาค่าความจริงของ $\forall x[x > 0]$

x	ข้อความ $x > 0$	ค่าความจริง
1	$1 > 0$	T
2	$2 > 0$	T
3	$3 > 0$	T
4	$4 > 0$	T

ดังนั้นข้อความ $\forall x[x > 0]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

พิจารณาค่าความจริงของ $\exists x[x > 3]$

x	ข้อความ $x > 3$	ค่าความจริง
1	$1 > 3$	F
2	$2 > 3$	F
3	$3 > 3$	F
4	$4 > 3$	T

ดังนั้นข้อความ $\exists x[x > 3]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวอย่าง 2.19 ให้ $U = \{-1, 0, 1, 2\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1) $\forall x[x > 0]$

พิจารณาค่าความจริงของ $\forall x[x > 0]$

x	ข้อความ $x > 0$	ค่าความจริง
-1	$-1 > 0$	F
0	$0 > 0$	F
1	$1 > 0$	T
2	$2 > 0$	T

ดังนั้นข้อความ $\forall x[x > 0]$ มีค่าความจริงเป็น.....

2) $\exists x[x > 3]$

พิจารณาค่าความจริงของ $\exists x[x > 3]$

x	ข้อความ $x > 3$	ค่าความจริง
-1	$-1 > 3$	F
0	$0 > 3$	F
1	$1 > 3$	F
2	$2 > 3$	F

ดังนั้นข้อความ $\exists x[x > 3]$ มีค่าความจริงเป็น.....

ตัวอย่าง 2.20 ให้ $U = \{-2, -1, 1, 2\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1) $\exists x [x^2 - 1 = 0]$

x	ข้อความ $x^2 - 1 = 0$	ค่าความจริง
-2		
-1		
1		
2		

ดังนั้นข้อความ $\exists x [x^2 - 1 = 0]$ มีค่าความจริงเป็น.....

3) $\forall x [|x| > x]$

x	ข้อความ $ x > x$	ค่าความจริง
-2		
-1		
1		
2		

ดังนั้นข้อความ $\forall x [|x| > x]$ มีค่าความจริงเป็น.....

2) $\exists x [x^2 = x]$

x	ข้อความ $x^2 = x$	ค่าความจริง
-2		
-1		
1		
2		

ดังนั้นข้อความ $\exists x [x^2 = x]$ มีค่าความจริงเป็น.....

4) $\forall x [x^2 \geq 1]$

x	ข้อความ $x^2 \geq 1$	ค่าความจริง
-2		
-1		
1		
2		

ดังนั้นข้อความ $\forall x [x^2 \geq 1]$ มีค่าความจริงเป็น.....

ตัวอย่าง 2.21 ให้ $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และให้

$p(x)$ แทนข้อความ $x^2 = x$ และ $q(x)$ แทนข้อความ $x > 0$

จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1) $\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$

x	ข้อความ $(x^2 = x) \rightarrow (x > 0)$	ค่าความจริง
-2		
-1		
0		
1		
2		

ดังนั้นข้อความ $\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$ มีค่าความจริงเป็น

$$2) \forall x[p(x)] \rightarrow \forall x[q(x)]$$

x	ข้อความ ($x^2 = x$)	ค่าความจริง		ข้อความ $x > 0$	ค่าความจริง
-2					
-1					
0					
1					
2					

ดังนั้นข้อความ $\forall x[p(x)] \rightarrow \forall x[q(x)]$ มีค่าความจริงเป็น

ตัวอย่าง 2.22 ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนนับ จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

$$1) \forall n[n \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ} \wedge n \text{ เป็นจำนวนคี่}]$$

$$2) \exists n[2 \text{ หาร } n \text{ ลงตัว} \wedge 4 \text{ หาร } n \text{ ลงตัว}]$$

ตัวอย่าง 2.23 ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนเต็ม จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

$$1) \forall n[(n^2 = 9) \rightarrow (n = 3)]$$

$$2) \exists n[n \text{ หาร } (n+1) \text{ ลงตัว}]$$

ตัวอย่าง 2.24 ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

$$1) \exists x[x^2 > x]$$

$$2) \forall x[x = x + 0]$$

$$3) \exists x[(x \in Q) \wedge (x \in Q')]$$

$$4) \forall x[(x \neq 0) \leftrightarrow (x^2 > 0)]$$

$$5) \forall x[(x \in Q) \vee (x \in Q')]$$

$$6) \forall x[(x \neq 0) \rightarrow (x^2 > 0)]$$

2.9.2 ตัวบ่งปริมาณหลายตัวแปร

สำหรับประพจน์ที่มีบ่งปริมาณมากกว่าหนึ่งตัว เราจะพิจารณาตัวบ่งปริมาณทีละตัว โดยใช้หลักการตามที่กล่าวไปแล้ว

บทนิยาม 2.9 ให้ U แทนเอกภพสัมพัทธ์ของฟังก์ชันข้อความ $p(x, y)$ ตัวบ่งปริมาณสองตัวแปรคือ

- 1) $\forall x \in U \forall y \in U [p(x, y)]$ หรือ $\forall x \forall y [p(x, y)]$ หรือ $\forall x, y \in U [p(x, y)]$
- 2) $\forall x \in U \exists y \in U [p(x, y)]$ หรือ $\forall x \exists y [p(x, y)]$
- 3) $\exists x \in U \forall y \in U [p(x, y)]$ หรือ $\exists x \forall y [p(x, y)]$
- 4) $\exists x \in U \exists y \in U [p(x, y)]$ หรือ $\exists x \exists y [p(x, y)]$

ตัวอย่างที่ 2.25 จงแปลงข้อความต่อไปนี้พร้อมทั้งบอกเอกภพสัมพัทธ์ในแต่ละข้อ

1) ทุกจำนวนจริง x มีจำนวนจริง y ซึ่ง $x + y = 0$

2) สำหรับจำนวนนับ n และ m จะได้ว่า $n + m > 1$

3) มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x = y + 1$ ทุกๆจำนวนเต็ม y

4) มีจำนวนจริง x และ y ถ้า $x > 0$ และ $y > 0$ แล้ว $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

ตัวอย่างที่ 2.26 จงแปลงข้อความต่อไปนี้ในรูปข้อความ

1) $\forall x, y \in \mathbb{R} [xy \geq 0]$

2) $\exists x, y \in \mathbb{N} [x + y = 3]$

3) $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} [x + y = 0]$

ตัวอย่าง 2.27 ให้ $U = \{0,1,2,3\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1) $\forall x \forall y [xy \geq 0]$

2) $\forall x \exists y [(x + y = 3)]$

1) พิจารณาค่าความจริงของ $\forall x \forall y [xy \geq 0]$

x	y	$xy \geq 0$	ค่าความจริง
0	0		
	1		
	2		
	3		
1	0		
	1		
	2		
	3		
2	0		
	1		
	2		
	3		
3	0		
	1		
	2		
	3		

ดังนั้น.....

2) พิจารณาค่าความจริงของ $\forall x \exists y [(x + y = 3)]$

x	y	$x + y = 3$	ค่าความจริง
0			
1			
2			
3			

ดังนั้น.....

2.9.3 สมมูลของตัวบ่งปริมาณ

บทนิยาม 2.10 ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ของฟังก์ชันข้อความ $p(x)$ และ $q(x)$ สมมูลของตัวบ่งปริมาณนิยามโดย

$$\forall x[p(x)] \equiv \forall x[q(x)] \text{ ก็ต่อเมื่อ } p(x) \equiv q(x) \text{ ทุกๆ } x \in U$$

$$\exists x[p(x)] \equiv \exists x[q(x)] \text{ ก็ต่อเมื่อ } p(x) \equiv q(x) \text{ ทุกๆ } x \in U$$

2.9.4 นิเสธของตัวบ่งปริมาณ

บทนิยาม 2.11 ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ของฟังก์ชันข้อความ $p(x)$ นิเสธของตัวบ่งปริมาณนิยามโดย

$$\text{นิเสธของ } \forall x[p(x)] \text{ คือ } \sim \forall x[p(x)] \equiv \exists x[\sim p(x)]$$

$$\text{นิเสธของ } \exists x[p(x)] \text{ คือ } \sim \exists x[p(x)] \equiv \forall x[\sim p(x)]$$

แบบฝึกหัดที่ 2.4

1. จงหาสมมูลของประพจน์ต่อไปนี้ในรูปแบบอื่น

1) $\exists x[p(x) \rightarrow q(x)]$

2) $\forall x[p(x) \vee q(x)]$

3) $\exists x[p(x)] \rightarrow \forall x[q(x)]$

4) $\forall x \forall y[p(x, y) \leftrightarrow q(x, y)]$

5) $\exists x \forall y[\sim p(x, y) \rightarrow q(x, y)]$

6) $\forall x[p(x)] \vee \exists x[\sim q(x)]$

2. จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1) $\exists x[p(x) \rightarrow q(x)]$

2) $\forall x[\sim p(x) \wedge q(x)]$

3) $\forall x[p(x) \vee q(x)]$

4) $\exists x \forall y[\sim p(x, y) \rightarrow q(x, y)]$

5) $\exists x[p(x) \rightarrow (q(x) \vee r(x))]$

6) $\forall x \forall y[p(x, y) \leftrightarrow q(x, y)]$

บทที่ 3

การพิสูจน์

ระบบคณิตศาสตร์ (Mathematical System) ประกอบด้วย สัจพจน์ (Axiom) บทนิยาม (Definitions) คำนิยาม (Undefined term) สัจพจน์เป็นข้อความที่สมมติให้เป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ บทนิยามเป็นการกำหนดข้อความเพื่อให้คำจำกัดความของสิ่งเหล่านั้น คำบางคำหรือบางข้อความที่ไม่สามารถนิยามได้อย่างชัดเจน ทฤษฎีบท (Theorems) คือประพจน์ที่ได้มีการพิสูจน์แล้วว่าเป็นจริง ทฤษฎีบทบางบทอาจอยู่ในลักษณะของบทตั้ง (Lemmas) หรือบทแทรก (Corollaries) บทตั้งคือทฤษฎีที่นำไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทอื่น บทแทรกคือทฤษฎีบทที่เป็นผลต่อเนื่องมาจากทฤษฎีบทอื่น ๆ วิธีอ้างเหตุผล (Argument) ที่สร้างความเป็นจริงของทฤษฎีบทเรียกว่า การพิสูจน์ (Proof) โดยกฎเกณฑ์การพิสูจน์เหล่านั้นได้มาจากตรรกศาสตร์ (Logic) การเขียนบทพิสูจน์ ทุกประพจน์ที่เขียนจะต้องมีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ พร้อมทั้งบอกเหตุผลของความเป็นจริงนั้นกำกับด้วยเสมอ โดยถือหลักต่อไปนี้

1. ให้ถือว่าข้อความที่โจทย์กำหนดให้ มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ
2. ใช้ข้อความที่กำหนดให้ กฎตรรกศาสตร์ ตรรกศาสตร์ที่ใช้ในการพิสูจน์ และข้อความที่ได้พิสูจน์ก่อนหน้านั้นมาแล้วมาใช้เพื่อหาข้อสรุปที่โจทย์ต้องการว่ามีค่าความจริงเป็นจริง

3.1 การพิสูจน์ตรง (Direct Proofs)

เนื่องจากประพจน์ $p \rightarrow q$ เป็นเท็จกรณีเดียวคือ เมื่อ p เป็นจริงแต่ q เป็นเท็จ ดังนั้น การพิสูจน์ตรง (Direct Proof) สำหรับประพจน์ $p \rightarrow q$ จึงทำได้โดย สมมติว่า p แล้วแสดงว่า q

การพิสูจน์ประพจน์ $p \rightarrow q$

สมมติ p เป็นจริง

$\vdots$ (ส่วนของการพิสูจน์)

ดังนั้น q

บทนิยาม 3.1 สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง

a หาร b ลงตัว เขียนแทนด้วย $a|b$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $b = am$

บทนิยาม 3.2 สำหรับจำนวนเต็ม a

a เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $a = 2m$

a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $a = 2m + 1$

บทนิยาม 3.3 ให้ x เป็นจำนวนจริง เราเรียก x ว่าเป็นจำนวนตรรกยะ (Rational Number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b โดยที่ $b \neq 0$ ซึ่ง $x = \frac{a}{b}$

*** เราเรียกจำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะว่า จำนวนอตรรกยะ (Irrational Number)

ตัวอย่าง 1 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a|b$ แล้ว $a|bc$

พิสูจน์ สมมติ $a|b$ นั่นคือ มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $b = am$

เราจะได้ว่า $bc = (am)c = a(mc)$ โดยที่ mc เป็นจำนวนเต็ม

โดยสมบัติปิดภายใต้การคูณของจำนวนเต็ม

ดังนั้น $a|bc$

ตัวอย่าง 2 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่ และ b เป็นจำนวนคี่แล้ว $a+b$ เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ สมมติ a เป็นจำนวนคู่ และ b เป็นจำนวนคี่

นั่นคือ มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $a = 2m$ และมีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $b = 2n+1$

$a+b = 2m + (2n+1) = 2(m+n)+1$ โดยที่ $m+n$ เป็นจำนวนเต็ม

โดยสมบัติปิดภายใต้การบวกของจำนวนเต็ม

ดังนั้น $a+b$ เป็นจำนวนคี่

ตัวอย่าง 3 ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า ถ้า x และ xy เป็นจำนวนตรรกยะ

โดยที่ $x \neq 0$ แล้ว y เป็นจำนวนตรรกยะ

พิสูจน์ สมมติ x และ xy เป็นจำนวนตรรกยะโดยที่ $x \neq 0$

ดังนั้นมีจำนวนเต็ม a, b, c และ d ซึ่ง $x = \frac{a}{b}$ และ $xy = \frac{c}{d}$ โดยที่ a, b และ d ไม่ใช่ 0

เราจึงได้ว่า $ad \neq 0$ และ $\frac{xy}{x} = \left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$

$y = \frac{cb}{da}$ โดยที่ cb และ da เป็นจำนวนเต็ม

โดยสมบัติปิดภายใต้การคูณกันของจำนวนเต็ม

สรุปได้ว่า y เป็นจำนวนตรรกยะ

3.2 การพิสูจน์ประพจน์เลือก

เนื่องจากประพจน์ $p \vee q$ สมมูลกับ $\sim p \rightarrow q$ ดังนั้นในการพิสูจน์ประพจน์ $p \vee q$ เราจึงสามารถพิสูจน์ประพจน์ $\sim p \rightarrow q$ แทนได้

การพิสูจน์ประพจน์ $p \vee q$

สมมติ $\sim p$ เป็นจริง

$\therefore$ (ส่วนของการพิสูจน์)

ดังนั้น q

ตัวอย่าง 4 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่า a หรือ $a+1$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์

ตัวอย่าง 5 ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = 0$ หรือ $y = 0$

พิสูจน์

3.3 การพิสูจน์แย้งสลับที่ (Contrapositive Proof)

ในบางครั้งการพิสูจน์ประพจน์ $p \rightarrow q$ โดยการพิสูจน์ตรงทำได้ยาก แต่เนื่องจาก
ประพจน์ $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim q \rightarrow \sim p$ เราจึงสามารถพิสูจน์ประพจน์ $\sim q \rightarrow \sim p$ แทนได้

การพิสูจน์ประพจน์ $p \rightarrow q$ โดยอาศัยประพจน์แย้งสลับที่

สมมติ $\sim q$ เป็นจริง

$\therefore$ (ส่วนของการพิสูจน์)

ดังนั้น $\sim p$

ตัวอย่าง 6 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า a^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่
พิสูจน์

ตัวอย่าง 7 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า $4 \nmid a^2 - 1$ แล้ว a เป็นจำนวนคู่
พิสูจน์

3.4 การพิสูจน์ประพจน์ที่มีเงื่อนไขสองทาง

เนื่องจากประพจน์ $p \leftrightarrow q$ สมมูลกับ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริงเมื่อ $p \rightarrow q$ และ $q \rightarrow p$ เป็นจริงทั้งคู่ ดังนั้นในการพิสูจน์ $p \leftrightarrow q$ เราจึงควรแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสองส่วนดังนี้

การพิสูจน์ $p \leftrightarrow q$

1) พิสูจน์ $p \rightarrow q$

2) พิสูจน์ $q \rightarrow p$

โดยเลือกใช้วิธีการพิสูจน์สำหรับประพจน์ที่มีเงื่อนไขตามความเหมาะสม

ตัวอย่าง 8 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า a เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ a^2 เป็นจำนวนคู่
แนวคิด ให้ p แทนข้อความ a เป็นจำนวนคู่ และ q แทนข้อความ a^2 เป็นจำนวนคู่
เราต้องแบ่งกรณีเพื่อพิสูจน์เป็น 2 กรณีคือ

1) พิสูจน์ $p \rightarrow q$ (ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่)

2) พิสูจน์ $q \rightarrow p$ (ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่)

กรณีที่ 1) ต้องการพิสูจน์ $p \rightarrow q$ นั่นคือ ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ สมมติให้ a เป็นจำนวนคู่ นั่นคือ มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $a = 2m$

เราจึงได้ว่า $a^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$

โดยที่ $2m^2$ เป็นจำนวนเต็ม

โดยสมบัติปิดการคูณของจำนวนเต็ม

ดังนั้น a^2 เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 2) ต้องการพิสูจน์ $q \rightarrow p$ นั่นคือ ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่

เนื่องจากเราไม่สามารถแสดงโดยตรงว่า a เป็นจำนวนคู่จากการสมมติว่า a^2 เป็นจำนวนคู่ เราจึงจะพิสูจน์ประพจน์แย้งสลับที่ $\neg p \rightarrow \neg q$ แทน กล่าวคือ ถ้า a เป็นจำนวนคี่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ สมมติให้ a เป็นจำนวนคี่ นั่นคือ มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $a = 2m + 1$

เราจึงได้ว่า $a^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$

โดยที่ $2m^2 + 2m$ เป็นจำนวนเต็ม โดยสมบัติปิดการคูณของจำนวนเต็ม

ดังนั้น a^2 เป็นจำนวนคี่

สรุปได้ว่า a เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ a^2 เป็นจำนวนคู่ จากการพิสูจน์กรณี 1 และ 2

ตัวอย่าง 9 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม
จงพิสูจน์ว่า a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ $a+1$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์

3.5 การพิสูจน์ประพจน์ $p \rightarrow (q \vee r)$

เนื่องจากประพจน์ $p \rightarrow (q \vee r) \equiv p \rightarrow (\sim q \rightarrow r)$ ดังนั้นในการพิสูจน์ประพจน์นี้จะสมมติให้ p และ $\sim q$ เป็นจริงแล้วพิสูจน์ให้ได้ว่า r เป็นจริงเสมอ

ตัวอย่าง 10 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $m+n$ เป็นจำนวนคี่แล้ว m เป็นจำนวนคี่ หรือ n เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ ให้ p แทนข้อความ $m+n$ เป็นจำนวนคี่

q แทนข้อความ m เป็นจำนวนคี่

r แทนข้อความ n เป็นจำนวนคี่

ตัวอย่าง 11 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่า ถ้า mn เป็นจำนวนคู่แล้ว m เป็นจำนวนคู่ หรือ n เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ให้ p แทนข้อความ mn เป็นจำนวนคู่

q แทนข้อความ m เป็นจำนวนคู่

r แทนข้อความ n เป็นจำนวนคู่

3.6 การพิสูจน์ประพจน์ $p \rightarrow (q \wedge r)$

บทนิยาม 3.4 ให้ x เป็นจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$

$$\text{นิยามโดย } |x| = \begin{cases} x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

เนื่องจากประพจน์ $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ ดังนั้นในการพิสูจน์ประพจน์นี้ จะต้องพิสูจน์ว่า ทั้ง $p \rightarrow q$ และ $p \rightarrow r$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 12 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว $4|a^2$ และ $a^2 + 1$ เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ ให้ p แทนข้อความ a เป็นจำนวนคู่
 q แทนข้อความ $4|a^2$ เป็นจำนวนคี่
 r แทนข้อความ $a^2 + 1$ เป็นจำนวนคี่

ตัวอย่าง 13 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคี่แล้ว $4|(a^2 + 3)$ และ $4|(a^2 - 1)$

พิสูจน์ ให้ p แทนข้อความ a เป็นจำนวนคี่
 q แทนข้อความ $4|(a^2 + 3)$
 r แทนข้อความ $4|(a^2 - 1)$

ตัวอย่าง 14 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์
ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

- 1) ผลบวกของจำนวนเต็มคู่กับจำนวนเต็มคี่ เป็นจำนวนเต็มคู่

- 2) ผลบวกของจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะเป็นจำนวนอตรรกยะ

- 3) ผลคูณของจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะเป็นจำนวนอตรรกยะ

แบบฝึกหัด 3.1

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มและ x และ y เป็นจำนวนจริง

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยเลือกวิธีพิสูจน์ที่เหมาะสม

- 1) ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$
- 2) ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|b+c$
- 3) ถ้า a และ b เป็นจำนวนคี่แล้ว $a+b$ เป็นจำนวนคู่แต่ ab เป็นจำนวนคี่
- 4) ถ้า a เป็นจำนวนคี่แล้ว a^2+2b เป็นจำนวนคี่
- 5) ถ้า a และ b เป็นจำนวนคู่แล้ว $3a-b$ เป็นจำนวนคู่
- 6) ถ้า $a-1$ เป็นจำนวนคู่แล้ว a^2-2a+1 เป็นจำนวนคู่
- 7) ถ้า x และ y เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว xy และ $x+y$ เป็นจำนวนตรรกยะ
- 8) ถ้า $x > 0$ แล้ว $\frac{x}{3} + \frac{3}{x} \geq 2$
- 9) ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะและ y เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว $x+y$ เป็นจำนวนตรรกยะ
- 10) a เป็นจำนวนคี่ก็ต่อเมื่อ $a+1$ เป็นจำนวนคู่
- 11) a เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ a^2-1 เป็นจำนวนคี่
- 12) a เป็นจำนวนคี่ก็ต่อเมื่อ a^3 เป็นจำนวนคี่
- 13) $3a+1$ เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ $5a-2$ เป็นจำนวนคี่
- 14) a เป็นจำนวนคี่ก็ต่อเมื่อ $4|a^2$
- 15) $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $a+1 < b+\frac{1}{2}$

2. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

- 4) ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว a^3 เป็นจำนวนคู่
- 5) ถ้า a และ b เป็นจำนวนคู่แล้ว $a-b$ เป็นจำนวนคู่
- 6) ถ้า a เป็นจำนวนเต็มและ $4a$ เป็นจำนวนคู่แล้ว $3a$ เป็นจำนวนคู่
- 7) ถ้า b เป็นจำนวนเต็มและ b^5-b เป็นจำนวนคู่แล้ว b เป็นจำนวนคู่
- 8) ผลบวกของจำนวนตรรกยะเป็นจำนวนตรรกยะ
- 9) ผลคูณของจำนวนตรรกยะเป็นจำนวนตรรกยะ
- 10) ผลบวกของจำนวนอตรรกยะเป็นจำนวนอตรรกยะ

3.7 การพิสูจน์โดยแจกแจงกรณี (Proof by Cases)

เนื่องจาก $(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ ดังนั้น ต้องพิสูจน์ว่าทั้ง 2 กรณีเป็นจริง

กรณีที่ 1 พิสูจน์ $p \rightarrow r$

กรณีที่ 2 พิสูจน์ $q \rightarrow r$

ตัวอย่าง 15 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม

จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่หรือ a เป็นจำนวนคี่ แล้ว $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ให้ p แทนข้อความ a เป็นจำนวนคู่

q แทนข้อความ a เป็นจำนวนคี่

r แทนข้อความ $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น จะต้องพิสูจน์ประพจน์ $(p \vee q) \rightarrow r$ เป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 พิสูจน์ $p \rightarrow r$ (ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่)

สมมติให้ a เป็นจำนวน นั่นคือ มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $a = 2m$

$$a^2 = (2m)^2 = 4m^2$$

จะได้ $a^2 + a = 4m^2 + 2m = 2(2m^2 + m)$ โดยที่ $2m^2 + 2m$ เป็นจำนวนเต็ม

โดยสมบัติปิดของจำนวนเต็ม

ดังนั้น $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 2 พิสูจน์ $q \rightarrow r$ (ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่)

ตัวอย่าง 16 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a = 0$ หรือ $b = 0$ แล้ว $ab = 0$

พิสูจน์ ให้

- p แทนข้อความ $a = 0$
- q แทนข้อความ $b = 0$
- r แทนข้อความ $ab = 0$

3.8 การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง (วิธีทางอ้อม) (Contradiction Proof)

เนื่องจากประพจน์ $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ ในการพิสูจน์ประพจน์ $p \rightarrow q$ โดยข้อขัดแย้ง เราจะสมมติ p และ $\sim q$ แล้วแสดงว่ามีข้อขัดแย้งเกิดขึ้น ต่างจากการพิสูจน์ประพจน์แย้งสลับที่

การพิสูจน์ประพจน์ $p \rightarrow q$ ทางอ้อม

สมมติ p และ $\sim q$ เป็นจริง

$\vdots$ (ส่วนของการพิสูจน์)

ดังนั้น เกิดข้อความขัดแย้ง

ตัวอย่าง 17 จงพิสูจน์ว่า $2 + 3 \neq a$ แล้ว $(2 + 3)(7) \neq 7a$

ตัวอย่าง 18 สำหรับทุกจำนวนจริงบวก x และ y ใดๆ จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

ตัวอย่าง 19 จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ตัวอย่าง 20 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง
 จงพิสูจน์ว่าถ้า $A \cap B = \emptyset$ แล้ว $A \not\subset B$

ตัวอย่าง 21 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม
 จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่ และ b เป็นจำนวนคี่แล้ว $a + b$ เป็นจำนวนคี่ โดยวิธีขัดแย้ง

3.9 การพิสูจน์ประพจน์ซึ่งเป็นไปได้เพียงอย่างเดียว (Uniqueness Proofs)

ให้ $p(x)$ เป็นประโยคเปิด และ A เป็นเซตใดๆ ประพจน์ $\exists! x \in A, p(x)$ มีความหมายว่า x มีใน A เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่มีสมบัติ ดังนั้นในการพิสูจน์ประพจน์ $\exists! x \in A, p(x)$ จะต้องแสดง 2 ขั้นตอนคือ

- 1) $\exists x \in A, p(x)$ นั่นคือแสดงว่า มี x อย่างน้อยที่สุดตัวหนึ่งใน A ซึ่งมีสมบัติ $p(x)$
- 2) $\forall x \in A, \forall y \in A, p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y$ นั่นคือแสดงว่า มี x อย่างมากที่สุดเพียงตัวเดียวใน A ซึ่งมีสมบัติ $p(x)$

ตัวอย่าง 22 จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนจริง x เพียงจำนวนจริงเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $x^3 + 1 = 0$

พิสูจน์ ข้อความนี้เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น $\exists! x \in R, x^3 + 1 = 0$

จะต้องแสดง 2 ขั้นตอนคือ

- 1) จะแสดงว่า $\exists x \in R, x^3 + 1 = 0$
- 2) จะแสดงว่า $\forall x \in R, \forall y \in R, (x^3 + 1 = 0 \wedge y^3 + 1 = 0) \rightarrow (x = y)$

ตัวอย่าง 23 จงพิสูจน์ว่าไม่ว่า x จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม

จะมีจำนวนเต็ม y เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $x - y = 3$

พิสูจน์ ข้อความนี้เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น $\forall x \in Z, \exists! y \in Z, (x - y = 3)$

จะต้องแสดง 2 ขั้นตอนคือ

- 1) จะแสดงว่า $\exists y \in Z, (x - y = 3)$
- 2) จะแสดงว่า $\forall y \in Z, \forall w \in Z, (x - y = 3 \wedge x - w = 3) \rightarrow (y = w)$

3.10 การพิสูจน์ข้อความที่เป็นเท็จ

ถ้าต้องการแสดงว่าประพจน์ p เป็นเท็จ เราอาจจะพิสูจน์ประพจน์ $\sim p$ เป็นจริงแทนก็ได้ ในกรณีข้อความแบบ $\exists x \in U, p(x)$ เป็นเท็จ สอดคล้องกับ $\forall x \in U, \sim p(x)$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.24 จงพิสูจน์ว่า $\exists x \in R, x^2 + 1 = 0$ เป็นเท็จ

ตัวอย่าง 3.25 จงพิสูจน์ว่า $\exists x \in Z, 0 < x < 1$ เป็นเท็จ

แบบฝึกหัดที่ 3.2

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

- 1) ไม่ว่า a และ b จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม ถ้า $a+b$ เป็นจำนวนคี่แล้ว a เป็นจำนวนคี่ หรือ b เป็นจำนวนคี่
- 2) ไม่ว่า a และ b จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม ถ้า $a+b$ เป็นจำนวนคู่แล้ว a และ b เป็นจำนวนคู่ หรือ a และ b เป็นจำนวนคี่
- 3) ไม่ว่า a จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม จะได้ว่า $a^2 - a + 3$ เป็นจำนวนคี่
- 4) สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ จะได้ว่า $-x \leq |x|$
- 5) สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ จะได้ว่า $|x|^2 = |x^2|$

2. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยวิธีขัดแย้ง

- 1) ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม จะได้ว่า ถ้า $x < 0$ แล้ว $x^{-1} < 0$
- 2) ไม่ว่า n จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม จะได้ว่า ถ้าไม่มีจำนวนเต็มอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 แล้ว จะไม่มีจำนวนเต็มอยู่ระหว่าง n กับ $n+1$
- 3) ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงบวกใดก็ตาม จะได้ว่า $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$

3. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นเท็จ โดยการยกตัวอย่างค้าน

- 1) $\forall x \in R, \forall y \in R, x < y \rightarrow x^2 < y^2$
- 2) $\forall x \in R, \forall y \in R, x < y \rightarrow |x| < |y|$
- 3) $\forall x \in R, \forall y \in R, (x \neq 0 \wedge y \neq 0) \rightarrow x + y \neq 0$

4) จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ มากกว่า 1 วิธี

“ถ้า a และ b จะเป็นจำนวนคู่แล้ว $a-b$ เป็นจำนวนคู่”

บทที่ 4

หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

การพิสูจน์ข้อความในแบบ โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราจะต้องแสดง 2 ขั้นตอน คือ

- 1) ขั้นตอนฐานหลัก-basis step แสดงว่า $p(1)$ เป็นจริง
- และ 2) ขั้นตอนอุปนัย-induction step แสดงว่า $\forall k \in N, p(k) \rightarrow p(k+1)$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 1 จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in N, 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

พิสูจน์ ให้ $p(n): 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ เมื่อ $n \in N$

ขั้นที่ 1 เพราะว่า $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ ดังนั้น

$$p(1) \text{ คือ } 1 = \frac{1(1+1)}{2} \text{ จึงเป็นจริง}$$

ขั้นที่ 2 ให้ k เป็นจำนวนนับใดๆ ซึ่ง $p(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2} \dots\dots\dots(*)$$

จะต้องแสดงว่า $p(k+1)$ เป็นจริง

$$\text{คือต้องแสดงว่า } 1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

จาก (*) บวกด้วย $(k+1)$ ทั้งสองข้างจะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $p(k+1)$ เป็นจริง

สรุป จากขั้นที่ (1) และ (2) และหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$\forall n \in N, 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ เป็นจริง } \#$$

ตัวอย่าง 2 จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in \mathbb{N}, 3 \mid (n^3 - n)$

ตัวอย่าง 3 จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n < 2^{n+1}$

ตัวอย่าง 4 ให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $x \geq 0$ จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in N, (1+x)^n \geq 1+x^n$

ตัวอย่าง 5 จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in N, n \geq 13, n^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^n$

3.2 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่เริ่มขั้นฐานด้วย n_0

การพิสูจน์ข้อความในแบบ โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราจะต้องแสดง 2 ขั้นตอน คือ

- 1) ขั้นตอนฐานหลัก-basis step แสดงว่า $p(n_0)$ เป็นจริง
- และ 2) ขั้นตอนอุปนัย-induction step แสดงว่า $\forall k \in N, n \geq 0, p(k) \rightarrow p(k+1)$ เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 6 จงหาจำนวนนับเริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริงพร้อมทั้งพิสูจน์ $2^n \geq n^2$

พิจารณา	$2 = 2^1 \geq 1^2 = 1$	,
	$4 = 2^2 \geq 2^2 = 4$	,
	$8 = 2^3 \geq 3^2 = 9$	,
	$16 = 2^4 \geq 4^2 = 16$	,
	$32 = 2^5 \geq 5^2 = 25$	,
	$64 = 2^6 \geq 6^2 = 36$	,

เราจะพิสูจน์ข้อความ $\forall k \in N, n \geq 4, 2^n \leq n^2$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาจำนวนนับเริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริงพร้อมทั้งพิสูจน์ $2^n \leq n!$

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เมื่อกำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$

$$1) \forall n \in \mathbb{N}, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$2) \forall n \in \mathbb{N}, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$3) \forall n \in \mathbb{N}, 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$4) \forall n \in \mathbb{N}, 2 + 4 + 6 + \dots + (2n) = n^2 + n$$

$$5) \forall n \in \mathbb{N}, 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

$$6) \forall n \in \mathbb{N}, 12 \mid (n^4 - n^2)$$

$$7) \forall n \in \mathbb{N}, 5 \mid (n^5 - n)$$

$$8) \forall n \in \mathbb{N}, 3 \mid (5^n - 2^n)$$

$$9) \forall n \in \mathbb{N}, 5 \mid (3^{3n+1} - 2^{n+1})$$

$$10) \forall n \in \mathbb{N}, 8 \mid (5^{2n} + 7)$$

$$11) \forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$$

$$12) \forall n \in \mathbb{N}, 2^n \leq 2^{n+1} - 2^{n-1} - 1$$

$$13) \forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-n} \leq 2$$

$$14) \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5, 4^n > n^4$$

$$15) \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10, 2^{n-10}(100) \leq 2^n - 2^{n-6}$$

2. จงหาจำนวนนับเริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริงพร้อมทั้งพิสูจน์

$$1) 2^n \leq n!$$

$$2) 4^n > n^4$$

$$3) (2n)! < 2^{2n} (n!)^2$$

$$4) n^2 < \left(\frac{3}{2} \right)^n$$

3. จงเดากฎต่อไปนี้ในกรณีทั่วไป และจงพิสูจน์คำตอบด้วย

$$1) \quad 1 = 1$$

$$1+3 = 4$$

$$1+3+5 = 9$$

$$1+3+5+7 = 16$$

$$1+3+5+7+9 = 25$$

$$2) \quad 1 = 1$$

$$1-4 = -(1+2)$$

$$1-4+9 = 1+2+3$$

$$1-4+9-16 = -(1+2+3+4)$$

บทที่ 5

หลักมูลของเซต (Fundamental of Set)

ในทางคณิตศาสตร์จะถือว่าเซต (Set) เป็นคำนิยาม (Undefined Term) เป็นคำที่แทนลักษณะนามที่เราใช้เรียกกลุ่มของสิ่งต่าง ๆ เช่น กลุ่มของคน สัตว์ และกลุ่มของสิ่งของ เป็นต้น

ตัวอย่างของเซต เซตของจังหวัดในภาคตะวันออก
 เซตของสัตว์ที่เลี้ยงลูกด้วยนม
 เซตของตัวเชื่อมในตรรกศาสตร์
 เซตของจำนวนนับ เป็นต้น

การพิจารณาว่าเป็นเซตหรือไม่คือต้องสามารถบอกได้แน่นอนว่ามีหรือไม่มีสิ่งใดอยู่ในกลุ่มนั้นๆ

ตัวอย่าง 1 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่า ข้อความใดใช้คำว่าเซตได้ถูกต้องตามความหมาย เพราะเหตุใด

- 1) เซตของสระในภาษาอังกฤษ
- 2) เซตของพยัญชนะในคำว่า “ตรรกศาสตร์”
- 3) เซตของดาราเกาหลีที่หน้าตาดี 10 อันดับแรก
- 4) เซตของประเทศในกลุ่มอาเซียน
- 5) เซตของจำนวนนับที่น้อยกว่า 5

5.1 สัญลักษณ์และการเขียนเซต

โดยทั่วไปการเขียนเซตหรือการเรียกชื่อของเซตจะใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่แทนเซต และอักษรในภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็กแทนสมาชิกของเซต

การเป็นสมาชิก (Element or Member) ของเซตเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\in$ (Epsilon)

และ $\notin$ แทนการไม่เป็นสมาชิก

เช่น กำหนด $A = \{a, b, c, d\}$ จะพบว่า $a \in A$ แต่ $f \notin A$

สัญลักษณ์

ใช้อักษร	A, B, C, ...	แทนเซต
ใช้อักษร	a, b, c, ...	แทนสมาชิกในเซต

$$d \in A$$

หมายถึง d เป็นสมาชิกของเซต A

$$f \notin A$$

หมายถึง f ไม่เป็นสมาชิกของเซต A

แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน

แทนเซตของจำนวนจริง

แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ

แทนเซตของจำนวนเต็ม

แทนเซตของจำนวนนับ

รูปแบบการเขียนเซต

ในการเขียนเซตนั้นจะเขียนได้ 2 วิธี คือแบบแจกแจงสมาชิกและแบบมีเงื่อนไข โดยการเขียนแสดงเซตใด จะเขียนสมาชิกของเซตไว้ในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา “ $\{ \}$ ” และสมาชิกในเซตเขียนได้ 2 วิธีดังนี้

1. การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก (Listing Method) เป็นวิธีการเขียนเซตโดยเขียนเซตแต่ละตัวของเซตในวงเล็บปีกกา “ $\{ \}$ ” และจะไม่ใช้เครื่องหมายวงเล็บแบบอื่นแทน และต้องใช้เครื่องหมายจุลภาค “,” เขียนคั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัวของเซตนั้น ซึ่งยังแบ่งย่อยได้ 3 วิธีดังนี้

1.1 สมาชิกมีจำนวนน้อย ให้เขียนสมาชิกลงไปทุกตัว เช่น

A คือเซตของวันใน 1 สัปดาห์ เขียนได้ดังนี้

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

1.2 สมาชิกมีจำนวนจำกัด (อาจจะมากจนเขียนสมาชิกทั้งหมดไม่สะดวก)

ให้เขียนสมาชิก 3 ตัวแรก แล้วต่อด้วยจุด 3 จุด แล้วเขียนสมาชิกตัวสุดท้าย เช่น

B คือเซตของจำนวนนับที่ไม่เกิน 100 เขียนได้ดังนี้

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

1.3 สมาชิกมีจำนวนมากไม่สิ้นสุด ให้เขียนสมาชิก 3 ตัวแรก แล้วต่อด้วยจุด 3 จุด

เช่น

N คือเซตของจำนวนนับ เขียนได้ดังนี้

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนเซตต่อไปนี้ให้อยู่ในแบบแจกแจงสมาชิก

1) เซตของเดือนใน 1 ปี

2) เซตของจำนวนนับ

- 3) เซตของจำนวนเฉพาะบวกที่น้อยกว่า 10
- 4) เซตของจำนวนคู่บวก
- 5) เซตของพยัญชนะในคำว่า “กรรมกร”

2. การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก (descriptive method) เป็นการเขียนโดยบอกเงื่อนไขหรือกำหนดสมบัติของสมาชิกในเซตนั้น ใช้สัญลักษณ์ x หรือ ตัวอักษรอื่นแทนสมาชิกของเซต และตามด้วยเครื่องหมาย “|” (vertical bar) แล้วจึงกำหนดสมบัติของสมาชิกของเซตนั้น เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น $\{x \in A | p(x)\}$ เมื่อ $p(x)$ แทนเงื่อนไขหรือสมบัติของสมาชิก x ตัวใดๆที่อยู่ในเซต A ซึ่ง $p(x)$ ต้องเขียนประพจน์ ซึ่ง “|” เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนคำว่า “โดยที่” เพื่อคั่นระหว่างตัวแปรกับเงื่อนไข เช่น

ให้ A คือเซตของวันใน 1 สัปดาห์

$$A = \{x | x \text{ เป็นวันใน 1 สัปดาห์}\}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนเซตต่อไปนี้ให้อยู่ในแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

- 1) เซตของเดือนใน 1 ปี
- 2) เซตของจำนวนคู่
- 3) เซตของจำนวนนับที่น้อยกว่า 10
- 4) เซตของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง -10 กับ 10
- 5) เซตของจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 - 9 = 0$

5.2 การเท่ากันของเซต

เซตที่เท่ากันก็คือเซตที่มีสมาชิกเหมือนกัน เมื่อเซต A และเซต B เป็นเซตที่มีสมาชิกเหมือนกัน เราเรียกว่า เซต A เท่ากับเซต B และเขียนแทนด้วย $A=B$ มีสัจพจน์ (Axiom) แสดงการเท่ากันของเซต ดังต่อไปนี้

สัจพจน์ของการขยาย (Axiom of Extensionality)

กำหนดให้ A และ B เป็นเซต $A=B$ (A is equal to B) ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และสมาชิกทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ A

เขียนแทนสัญลักษณ์

$$A=B \leftrightarrow \forall x [x \in A \leftrightarrow x \in B]$$

$$\leftrightarrow \forall x [(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)]$$

ตัวอย่าง 4 กำหนดให้ $A = \{1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7\}$
 $B = \{7,6,5,4,3,2,1\}$

จงหาความสัมพันธ์ระหว่างเซต

วิธีทำ

เพราะว่า $1 \in A \leftrightarrow 1 \in B$

และ $2 \in A \leftrightarrow 2 \in B$

$3 \in A \leftrightarrow 3 \in B$

$4 \in A \leftrightarrow 4 \in B$

$5 \in A \leftrightarrow 5 \in B$

$6 \in A \leftrightarrow 6 \in B$

$7 \in A \leftrightarrow 7 \in B$

จะเห็นว่า $\forall x [x \in A \leftrightarrow x \in B]$

นั่นคือ $A=B$

เซตที่ไม่เท่ากัน เซตสองเซตใดๆไม่เท่ากัน ถ้าหากทั้งสองเซตมีสมาชิกที่ไม่เหมือนกัน

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \neq B$ หมายถึง เซต A ไม่เท่ากับเซต B

พิจารณาได้ดังนี้

เพราะว่าจาก Axiom of Extensionality

$$A=B \leftrightarrow \forall x [x \in A \leftrightarrow x \in B]$$

ดังนั้น

$$\sqcup (A=B) \leftrightarrow \sqcup \{ \forall x [x \in A \leftrightarrow x \in B] \}$$

นั่นคือ $A \neq B$ ก็ต่อเมื่อ.....

ตัวอย่าง 5 กำหนดให้ $A = \{x, x^2, y, z\}$

$$B = \{x^2, y, z^2\}$$

จงหาความสัมพันธ์ระหว่างเซต

วิธีทำ

จะเห็นว่า $A \neq B$ เพราะว่า $\exists x [x \in A \wedge x \notin B]$

หรือ $\exists z^2 [z^2 \in B \wedge z^2 \notin A]$ เป็นต้น

ตัวอย่าง 6 กำหนดให้ $A = \{5, 2, 3\}$

$$B = \{5, 2, 3, 5\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$$

จงหาความสัมพันธ์ระหว่างเซต

5.3 เซตว่าง (Empty Set or Null Set)

บทนิยาม 5.1 เซตที่ไม่มีสมาชิก เรียกว่า เซตว่าง (Empty Set or Null Set)

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\emptyset$ หรือ $\{ \}$

ตัวอย่างของเซตว่าง เช่น

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + 1 = 0\}$$

แล้ว

ทำให้สมการเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 7 จงพิจารณาเซตต่อไปนี้ เป็นเซตว่างหรือไม่ พร้อมทั้งให้เหตุผล

$$1) A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid 3x + x = 1\} \quad 2) B = \{x \in 2\mathbb{Q} \mid x^2 = 25\}$$

5.4 เซตจำกัด (Finite Set) และเซตอนันต์ (Infinite Set)

บทนิยาม 5.2 เซตจำกัดคือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนเต็มบวกใดๆ หรือศูนย์

กล่าวคือสามารถบอกจำนวนสมาชิกในเซตนั้นๆได้

ตัวอย่างเช่น

$$A = \{5, 2, 3\} \text{ เป็นเซตจำกัดเพราะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 3 หรือ } n(A) = 3$$

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\} \text{ เป็นเซตจำกัดเพราะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 100}$$

$$\text{หรือ } n(B) = 100$$

ได $C = \{x \mid (x \in \mathbb{Q}^+) \wedge (x + 2 = x)\}$ เป็นเซตจำกัดเนื่องจากไม่มีจำนวนเต็มบวก
ที่สอดคล้องกับสมการนี้ เซตนี้จึงมีสมาชิกเลย นั่นคือมีสมาชิกเท่ากับศูนย์

แบบฝึกหัดที่ 5.1

1. จงเขียนเซตต่อไปนี้ แบบแจกแจงสมาชิก

- 1) เซตของจำนวนคี่บวกที่น้อยกว่า 100
- 2) เซตของเต็มบวกที่น้อยกว่า 100 และหารด้วย 5 ลงตัว
- 3) เซตของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 + 6x - 7$
- 4) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x = x + 1\}$
- 5) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x = 5m\}$ เมื่อ $m \in \mathbb{Q}$
- 6) $\{x \in \mathbb{Q} \mid (x = 2m) \wedge (3x < 35)\}$ เมื่อ $m \in \mathbb{Q}$

2. จงเขียนเซตต่อไปนี้ แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต

- 1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- 2) $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$
- 3) $C = \{10, 20, 30, \dots\}$
- 4) $D = \{a, e, i, o, u\}$
- 5) $E = \{\}$
- 6) $F = \{1, -1\}$

3. จงเติม $\in$ หรือ $\notin$ ลงใน ช่องว่างแต่ละช่องให้ถูกต้อง

- 1) 2 ☐ $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x < 4\}$
- 2) 3 ☐ $\{2, \{3\}\}$
- 3) $\emptyset$ ☐ $\{\}$
- 4) 0 ☐ $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < -1\}$
- 5) $\frac{1}{2}$ ☐ $\{x \in \mathbb{Q} \mid x + 2 < 3\}$
- 6) 4 ☐ $\{\{4\}\}$

4. เซตต่อไปนี้ เซตใดเป็นเซตจำกัด เซตใดเป็นเซตอนันต์

- 1) $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$
- 2) เซตของเดือนใน 1 ปี
- 3) เซตของประชากรไทย ในปี 2559
- 4) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 30\}$
- 5) $\{\{1, 2, 3, \dots\}\}$
- 6) $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$
- 7) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$
- 8) $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 = x\}$
- 9) $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 5 = 5 + x\}$
- 10) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 0\}$

5.5 เซตย่อย (Subset)

เซตที่ไม่เหมือนกันจัดเป็นเซตที่ไม่เท่ากัน เซตที่มีสมาชิกเหมือนกันเกือบทั้งหมดก็เป็นเซตที่ไม่เท่ากัน ดังนี้

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{และ } D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

เซต C ไม่เท่ากับเซต D แต่เรียกเซต C ว่าเป็นเซตย่อยของเซต D

บทนิยาม 5.3 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ จะกล่าวว่า A เป็นเซตย่อย (Subset) ของ

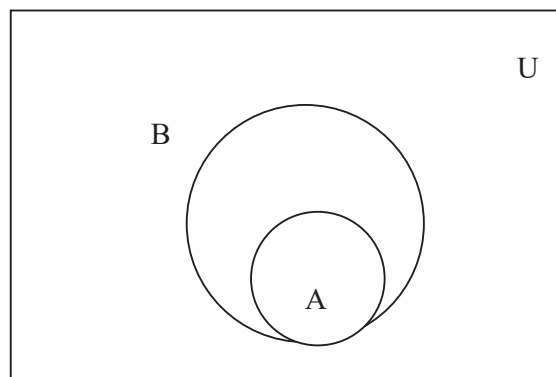
เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$ หรือ $B \supseteq A$ ถ้าสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$

หรือเรียกว่า A is contained in B

บทนิยาม 5.4 ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว เซต B เรียกว่า a superset ของเซต A



รูปที่ 5.1 แผนภาพแสดง $A \subseteq B$

ไม่เป็นเซตย่อย

เซต A ไม่เป็นเซตย่อยของเซต B ถ้ามีสมาชิกบางตัวในเซต A ไม่เป็นสมาชิกของเซต B
อธิบายได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{จากบทนิยามเซตย่อย (Subset)} \quad A \subseteq B &\leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B] \\ \neg (A \subseteq B) &\leftrightarrow \neg \forall x [x \in A \rightarrow x \in B] \\ A \not\subseteq B &\leftrightarrow \exists x [\neg (x \in A \rightarrow x \in B)] \\ \text{จะได้ว่า} \quad A \not\subseteq B &\leftrightarrow \exists x [x \in A \wedge x \notin B] \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 8 ถ้า $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2|x| - 5 \leq 0\}$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 15 \leq 0\}$$

จงหาความสัมพันธ์ระหว่างเซต (ให้นักศึกษาทำเอง)

ตัวอย่าง 9 ถ้า $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 1)(x + 2)(x - 3)(x - 4) = 0\}$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$$

จงหาความสัมพันธ์ระหว่างเซต (ให้นักศึกษาทำเอง)

เซตย่อยแท้ (Proper Subset)

บทนิยาม 5.5 เซต A เป็นเซตย่อยแท้ (proper subset) ของเซต B ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และมีสมาชิกบางตัวในเซต B ที่ไม่เป็นสมาชิกในเซต A

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \subset B$

$$\begin{aligned} A \subset B &\leftrightarrow A \subseteq B \wedge \exists x [x \in B \wedge x \notin A] \\ \text{หรือ} \quad A \subset B &\leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \not\subseteq A \end{aligned}$$

บทนิยาม 5.6 เซต A เป็นเซตย่อยไม่แท้ (improper subset) ของเซต B ก็ต่อเมื่อ $A=B$

จะเห็นว่า เซต A เป็นเซตย่อยแท้ของ B ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B \wedge B \not\subseteq A$

เซต A เป็นเซตย่อยไม่แท้ของ B ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

ข้อตกลงเบื้องต้นและข้อสรุปเกี่ยวกับเซต

1) เซตว่าง เป็นสับเซตของทุกเซต

- 2) เซตทุกเซตเป็นสับเซตของตัวเอง
- 3) ถ้า A มีสมาชิก n ตัวแล้ว A จะมีเซตย่อยทั้งหมด 2^n เซต

5.6 เซตกำลัง (Power Sets)

เซตเซตของย่อยทั้งหมดของเซตใด เราจะเรียกว่า เป็นเซตกำลังของเซตนั้น

บทนิยาม 5.7 เซตกำลังของเซต A (The Power Set of Set A) หมายถึง เซตเซตของย่อยทั้งหมดของเซต A เขียนแทนด้วย $P(A)$

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\} \text{ นั่นคือ } P(A) \text{ เป็นเซตของเซต } B \text{ ทั้งหมดที่ } B \subseteq A$$

จากบทนิยามจะได้ว่า $B \in P(A) \leftrightarrow B \subseteq A$

ตัวอย่าง 3.10 จงหาเซตกำลังของเซตต่อไปนี้

1. $A = \{a\}$
2. $B = \{a, b\}$
3. $C = \{a, b, c\}$
4. $D = \{a, \{b\}\}$
5. $E = \{\}$
6. $F = \{\emptyset\}$
7. $G = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}$

ข้อสังเกต

จากการหาเซตกำลังของเซตข้างต้น จะเห็นว่า สำหรับเซตใด ๆ นั้น จะมีเซตนั้น และ $\emptyset$ เป็นสมาชิกในเซตกำลังของเซตใด ๆ นั้นเสมอ

นั่นคือ $A \in P(A)$ และ $\emptyset \in P(A)$

$B \in P(B)$ และ $\emptyset \in P(B)$

ตัวอย่าง 11 กำหนด $A = \{2, \{3, 4\}, 5\}$ ต่อไปนี้ ข้อใดถูก ข้อใดผิด

- 1) $2 \in P(A)$
- 2) $\{2\} \in P(A)$
- 3) $3 \in P(A)$
- 4) $\{4\} \in P(A)$
- 5) $\emptyset \in P(A)$
- 6) $A \in P(A)$
- 7) $\{2\} \subseteq P(A)$
- 8) $\{A\} \subseteq P(A)$
- 9) $\{3, 4\} \subseteq P(A)$
- 10) $\{\{3, 4\}\} \in P(A)$

แบบฝึกหัดที่ 5.2

1. กำหนด $A = \{2, 3, 4\}$ ต่อไปนี้ ข้อใดถูก ข้อใดผิด

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| 1) $2 \in A$ | 2) $\{2, 3\} \in A$ |
| 3) $\{2, 3\} \subseteq A$ | 4) $\{3\} \in A$ |
| 5) $\{3\} \subseteq A$ | 6) $\{4, 3\} \subseteq A$ |
| 7) $3 \subseteq A$ | 8) $\{2, 3, 4\} \subseteq A$ |
| 9) $\{4, 2\} \subseteq A$ | 10) $\emptyset \subseteq A$ |

2. กำหนด $A = \{2, \{3, 4\}, 4\}$ ต่อไปนี้ ข้อใดถูก ข้อใดผิด

- | | |
|--------------------------------|----------------------------|
| 1) $\{4, 3\} \in A$ | 2) $\{4, 3\} \subseteq A$ |
| 3) $\{\{4, 3\}\} \subseteq A$ | 4) $3 \in A$ |
| 5) $4 \in A$ | 6) $\{4\} \in A$ |
| 7) $\{4\} \subseteq A$ | 8) $\{2, 4\} \subseteq A$ |
| 9) เซต A มีสมาชิกจำนวน 3 ตัว | 10) $\{2, 3\} \subseteq A$ |

3. ข้อใดต่อไปนี้ถูก หรือผิด

- | | |
|--|--|
| 1) $\{a\} \in \{\{a\}\}$ | 2) $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$ |
| 3) $\{0\} = \{ \}$ | 4) $\{ \} \subseteq \emptyset$ |
| 5) $0 \in \emptyset$ | 6) $\emptyset \in \emptyset$ |
| 7) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ | 8) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ |
| 9) $\emptyset \subset \{\{\emptyset\}\}$ | 10) $\{\emptyset\} = \emptyset$ |

4. จงหาสับเซตตามที่กำหนด

- กำหนด $A = \{2, 3, 4\}$ จงหาสับเซตของ A ที่มีสมาชิก 2 ตัว
- กำหนด $B = \{a, b, c, d\}$ จงหาสับเซตของ B ที่มีสมาชิก 3 ตัว
- กำหนด $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ จงหาสับเซตของ C ที่มีสมาชิก 5 ตัว
- กำหนด $D = \{2, 3, 4\}$ จงหาสับเซตของ D
- กำหนด $E = \{\{a\}, b, c\}$ จงหาสับเซตแท้ของ E
- กำหนด $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ จงหาสับเซตของ F ที่มีสมาชิก 5 ตัว
- กำหนด $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ จงหาสับเซตของ G ที่มีสมาชิก 3 ตัว

8) กำหนด $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ จงหาสับเซตของ H ที่มีสมาชิก 5 ตัว

5. กำหนด $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ และถ้า $a \in A, b \in B, c \in C, d \notin A, e \notin B, f \notin C$
ต่อไปนี้อยู่ในข้อใดถูกหรือผิด

1) $a \in C$

2) $b \in A$

3) $c \in A$

4) $d \notin B$

5) $e \notin A$

6) $f \notin A$

6. กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{2, 4, 6\}$$

$$D = \{4, 6, 7\}$$

$$F = \{7, 8, 9\}$$

จงหาเซต X เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

1) $B \subseteq X \subseteq A$

2) $X \subseteq D$ และ X มีสมาชิกบางตัวร่วมกับ A

3) $X \subseteq D \wedge X \subseteq F$

4) $X \subseteq C \wedge X \subseteq D$

5) $X \subseteq B \wedge X \subseteq C$

6) X มีสมาชิกร่วมกับ D และ F

5.7 การดำเนินการของเซต (Operation on Set)

การดำเนินการของเซตในที่นี้หมายถึง การรวมเซตเข้าด้วยกัน การหาส่วนร่วมกันของเซต ผลต่างระหว่างเซต ส่วนเติมเต็มของเซต เป็นต้น

1) ส่วนรวมของเซต (Union on Set)

บทนิยาม ให้ A และ B เป็นเซต ส่วนรวมหรือยูเนียนของเซต A และ B คือ เซตของสมาชิกทั้งหมดที่เป็นสมาชิกของเซต A หรือเป็นสมาชิกของเซต B

เขียนแทนด้วย $A \cup B$

$$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

จากบทนิยาม เขียนได้ว่า

$$x \in (A \cup B) \text{ ก็ต่อเมื่อ } (x \in A) \vee (x \in B)$$

$$x \in (A \cup B) \leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$

2) ส่วนร่วมของเซต (Intersection on Set)

บทนิยาม ให้ A และ B เป็นเซต ส่วนร่วมหรืออินเตอร์เซกชันของเซต A และ B คือ เซตของสมาชิกทั้งหมดที่เป็นสมาชิกของเซต A และเซต B

เขียนแทนด้วย $A \cap B$

$$A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

จากบทนิยาม เขียนได้ว่า

$$x \in (A \cap B) \text{ ก็ต่อเมื่อ } (x \in A) \wedge (x \in B)$$

$$x \in (A \cap B) \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$

3) ผลต่างของเซต

บทนิยาม ผลต่างของเซต A กับเซต B หมายถึง เซตของสมาชิกทั้งหมดในเซต A ที่ไม่เป็นสมาชิกในเซต B

เขียนแทนด้วย $A - B$

$$A - B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

จากบทนิยาม เขียนได้ว่า

$$x \in (A - B) \leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin B)]$$

4) ส่วนเติมเต็มของเซต (Complement)

บทนิยาม ส่วนเติมเต็มของเซต A คือ เซตของสมาชิกทั้งหมดที่เป็นสมาชิกของ U แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต A

เขียนแทนด้วย A' นั่นคือ $A' = \{x | (x \in U) \wedge (x \notin A)\}$

หรือ $A' = \{x | x \notin A\}$

จากบทนิยาม เขียนได้ว่า

$$x \in A' \leftrightarrow x \notin A$$

5.8 สมบัติบางประการเกี่ยวกับการกระทำทางเซต

กฎนิพจน์ (idempotent laws)

ถ้า A เป็นเซตแล้ว

$$1) A \cup A = A$$

$$2) A \cap A = A$$

กฎการสลับที่ (commutative laws)

ถ้า A และ B เป็นเซตแล้ว

$$3) A \cup B = B \cup A$$

$$4) A \cap B = B \cap A$$

กฎการจัดกลุ่ม (associative laws)

ถ้า A, B และ C เป็นเซตแล้ว

$$5) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$6) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

กฎการกระจาย (distributive laws)

ถ้า A, B และ C เป็นเซตแล้ว

$$7) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$8) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

กฎเกี่ยวกับสับเซต

ถ้า A และ B เป็นเซตแล้ว

$$9) A \subseteq (A \cup B) \text{ และ } B \subseteq (A \cup B)$$

$$10) (A \cap B) \subseteq A \text{ และ } (A \cap B) \subseteq B$$

$$11) A \subseteq B \leftrightarrow (A \cup B = B)$$

$$12) A \subseteq B \leftrightarrow (A \cap B = A)$$

$$13) A \subseteq B \leftrightarrow (B' \subseteq A')$$

(absorption laws)

ถ้า A และ B เป็นเซตแล้ว

$$14) A \cup (A \cap B) = A$$

$$15) A \cap (A \cup B) = A$$

กฎเอกลักษณ์ (identity laws)

$$16) A \cup \emptyset = A$$

$$17) A \cup U = U$$

$$18) A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$19) A \cap U = A$$

กฎของคอมพลีเมนต์ (complement laws)

$$20) A \cup A' = U$$

$$21) A \cap A' = \emptyset$$

$$22) \emptyset' = U$$

$$23) U' = \emptyset$$

$$24) (A')' = A$$

$$25) A - B = A \cap B'$$

กฎของเดอ มอร์กอน (De Morgan's laws)

$$26) (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$27) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

สมบัติอื่นๆ

$$28) A \cup B = \emptyset \text{ ก็ต่อเมื่อ } A = \emptyset \text{ และ } B = \emptyset$$

$$29) A \cap B = \emptyset \text{ ก็ต่อเมื่อ } A \subseteq B' \text{ หรือ } B \subseteq A'$$

$$30) A - B = \emptyset \text{ ก็ต่อเมื่อ } A \subseteq B$$

$$31) P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

$$32) P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$$

5.9 แผนภาพของเวนน์และออยเลอร์ (Venn and Euler Diagrams)

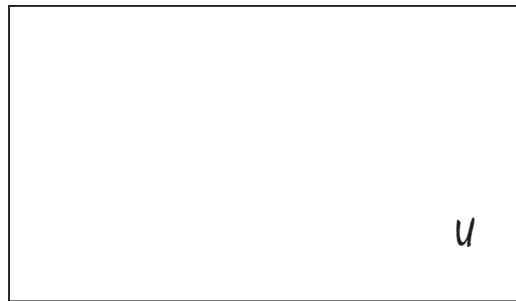
เราใช้แผนภาพเพื่อแสดงเซต โดยการใช้รูปวงกลม หรือวงรี หรือรูปเหลี่ยม และแสดงการดำเนินการของเซตโดยการแรเงาแสดงบริเวณที่ต้องการ แผนภาพของเวนน์และออยเลอร์ นำมาจากนักคณิตศาสตร์สองท่านคือ จอห์น เวนน์ (John Venn) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ และอีกคนหนึ่งคือ เลโอนาร์โด ออยเลอร์ (Leonard Euler) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวสวิส

การเขียนแผนภาพแสดงเกี่ยวกับเซต แสดงดังรูปต่อไปนี้ เช่น

1. ถ้าเซต A และ B เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน



2. ถ้าเซต A และ B มีสมาชิบบางตัวร่วมกัน แต่ $A \not\subset B$ และ $B \not\subset A$



3. ถ้า $A \subset B$ และ $A \neq B$



ตัวอย่างที่ 12

- 1) กำหนด $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}, \quad C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

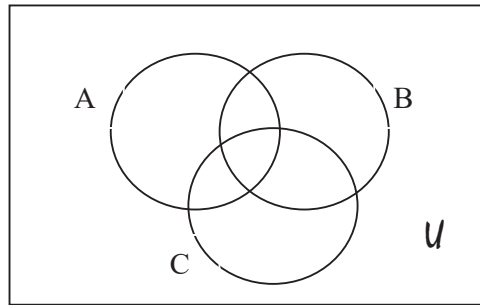
1.1) $A \cap B = \dots\dots\dots$

- 1.2) $B \cap C$ =
- 1.3) $A \cup B$ =
- 1.4) $B \cup C$ =
- 1.5) $A - B$ =
- 1.6) $B - C$ =
- 1.7) A' =
- 1.8) B' =
- 1.9) $A \cap (B \cup C)$ =
- 1.10) $A \cup (B \cap C)$ =
- 1.11) $A - (B \cap C)$ =
- 1.12) $A \cup (B - C)$ =
- 1.13) $A \cap B \cap C$ =
- 1.14) $A \cup B \cup C$ =

2) กำหนด $U = \{x | x \in \mathcal{R}\}$, $A = \{x | -5 < x \leq 4\}$,
 $B = \{x | -2 \leq x < 6\}$, $C = \{-3 < x < 3\}$

- 2.1) $A \cap B$ =
- 2.2) $A \cup B$ =
- 2.3) $A \cap C$ =
- 2.4) $B \cup C$ =
- 2.5) $A - B$ =
- 2.6) $B - C$ =
- 2.7) A' =
- 2.8) B' =
- 2.9) C' =
- 2.10) $(B \cap C)'$ =
- 2.11) $(A \cup C)'$ =
- 2.12) $(A - C)'$ =

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดแผนภาพเวนน์และออยเลอร์ ดังรูปข้างล่าง



จงแรเงาแผนภาพแสดงผลการกระทำของเซตต่อไปนี้

1) $(A \cap B) \cap C$	2) $A \cap (B \cup C)$	3) $A \cup (B \cap C)$
4) $A - (B \cap C)$	5) $A - (B \cup C)$	6) $A \cap (B - C)$

7) $A' \cap B' \cap C'$	8) $A' \cup B' \cup C'$	9) $A \cap B' \cap C'$
10) $(A \cap B) - (B - C)$	11) $(A' \cap B) - (C' \cap A)$	12) $(A \cup B \cup C)' \cup (A \cap B \cap C)$

แบบฝึกหัดที่ 5.3

1. กำหนด A, B และ C เป็นเซตใดๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง

$$M = (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$$

$$N = (A \cup B) \cap (A \cap B')$$

ข้อใดต่อไปนี้จริง

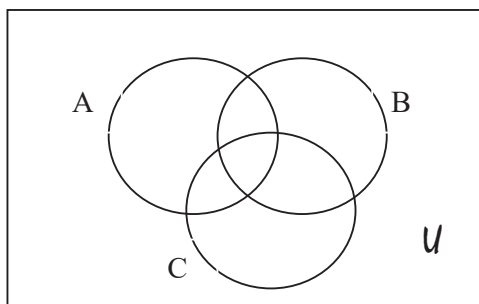
1) $N \not\subset M$

2) $M \cap N = M \cup N$

3) $M \cap N = \emptyset$

4) N เป็นสับเซตแท้ของ M

2. กำหนดเซตดังภาพ



ส่วนที่แรเงาคือเซตใด

1) $C - (A \cup B)$

2) $C - (B \cap A)$

3) $A' \cap C$

4) $B' \cap C$

3. กำหนด $A = \{\emptyset, 0, 2, \{2\}\}$ และ $B = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0, 2\}\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของ $P(A) - B$ เท่ากับข้อใด

1) 13

2) 14

3) 15

4) 16

5.10 จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

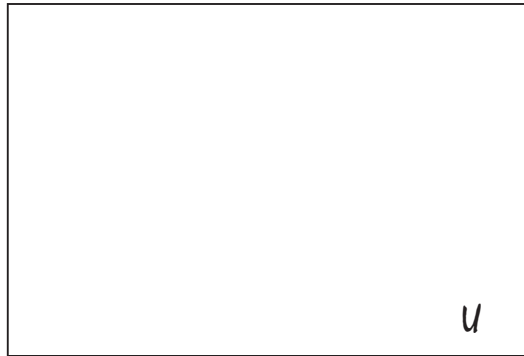
กำหนด $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต A , B , C ตามลำดับ เราสามารถหาจำนวนสมาชิกของเซตต่างๆ ที่นำมายูเนียน อินเตอร์เซกชัน ผลต่างหรือคอมพลีเมนต์ได้ เมื่อกำหนดจำนวนสมาชิกของเซตบางส่วนมาให้ การหาจำนวนสมาชิกทำได้โดยใช้แผนภาพ หรือใช้สูตร

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

ตัวอย่างที่ 15 (ข้อสอบคัดเลือกเข้ามหาวิทยาลัย)

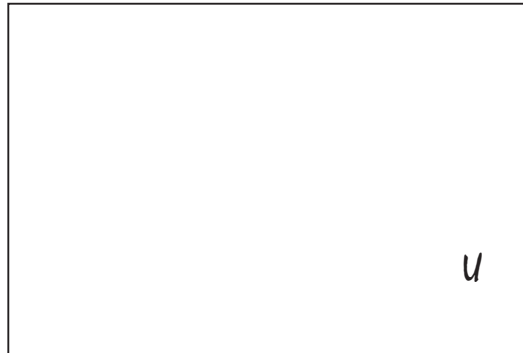
จากการสำรวจนักเรียนห้องหนึ่งพบว่า มี 20 คน ที่เลือกเรียนฝรั่งเศสหรือคณิตศาสตร์ ถ้าเลือกเรียนฝรั่งเศสแล้วจะไม่เรียนคณิตศาสตร์ มีอยู่ 17 คนที่ไม่เรียนคณิตศาสตร์ มีอยู่ 15 คนที่ไม่เรียนฝรั่งเศส นักเรียนที่ไม่เรียนทั้งสองวิชามีกี่คน



ตัวอย่างที่ 16 (ข้อสอบคัดเลือกเข้ามหาวิทยาลัย)

หมู่บ้านแห่งหนึ่งมีทั้งหมด 800 ครอบครัวยุคหนึ่งประกอบอาชีพค้าขายอย่างเดียว 10 ครอบครัวยุคหนึ่ง
ทำสวนเงาะ มังคุด ทุเรียน

จากการสำรวจเฉพาะชาวสวน พบว่ามีครอบครัวยุคหนึ่งปลูกผลไม้ตั้งแต่ 2 ชนิดขึ้นไป 110
ครอบครัวยุคหนึ่งปลูกเงาะและมังคุด 70 ครอบครัวยุคหนึ่งปลูกเงาะและทุเรียน 60 ครอบครัวยุคหนึ่งปลูกมังคุดและ
ทุเรียน 50 ครอบครัวยุคหนึ่งไม่ปลูกมังคุดเลย 290 ครอบครัวยุคหนึ่ง จงหาว่ามีกี่ครอบครัวยุคหนึ่งปลูกแต่มังคุดเพียง
อย่างเดียว



แบบฝึกหัดที่ 5.4

1. (ข้อสอบแข่งขันสมาคมคณิตศาสตร์)

ณ สถานสงเคราะห์เด็กกำพร้าแห่งหนึ่ง จากการสำรวจสนิมทางอาหาร ปรากฏว่าผลดังนี้ เด็กไม่รับประทานพริก 7 คน ไม่รับประทานมะระ 6 คน ไม่รับประทานขิง 5 คน ไม่รับประทานทั้งพริกและมะระ 4 คน เด็ก 3 คนไม่รับประทานทั้งพริกและขิง มีเด็กอยู่ 2 คน ไม่รับประทานทั้ง 3 อย่าง ถ้าไม่มีเด็กที่รับประทานทั้ง 3 อย่าง จงหาว่าในสถานสงเคราะห์แห่งนี้มีเด็กกี่คน

2. ในการคัดเลือกนักกีฬา 3 ประเภท คือฟุตบอล ตะกร้อ และรักบี้ มีผู้คัดเลือกรวมทั้งสิ้น 35 คน ซึ่งสามารถเล่นฟุตบอลหรือตะกร้อได้มี 24 คน เล่นตะกร้อหรือรักบี้ได้ 26 คน เล่นฟุตบอลหรือรักบี้ได้ 32 คน เล่นได้ทั้งฟุตบอลและตะกร้อมี 8 คน เล่นได้ทั้งตะกร้อและรักบี้มี 7 คน เล่นได้ทั้งฟุตบอลและรักบี้มี 9 คน อยากทราบว่า มีผู้เล่นกีฬาทั้ง 3 ประเภทได้มีกี่คน

3. นักกีฬากลุ่มหนึ่งมี 55 คน เป็นหญิง 30 คน มีนักศึกษาลงทะเบียนเรียนวิชาฟิสิกส์ 20 คน เรียนวิชาคณิตศาสตร์ 38 คน เรียนเคมี 40 คน มีนักศึกษาชายเรียนฟิสิกส์ 12 คน นักศึกษาชายเรียนเคมี 17 คน นักศึกษาที่เรียนเคมีและคณิตศาสตร์มี 26 คน ซึ่งในจำนวนนี้เป็นชาย 13 คน นักศึกษาที่เรียนทั้ง 3 วิชา มี 12 คน และในจำนวนนี้เป็นหญิง 5 คน มีนักศึกษหญิง 2 คนไม่เรียนวิชาเหล่านี้ ถ้ากำหนดว่านักศึกษาทุกคนที่เรียนฟิสิกส์ต้องเรียนคณิตศาสตร์ด้วย อยากทราบว่า นักศึกษหญิงที่เรียนคณิตศาสตร์อย่างเดียวมีกี่คน

แบบฝึกหัดที่ 5.5

1. กำหนดให้ $n(A)$ แทนจำนวนสมาชิกในเซต A ถ้า $n(A)=9$ และ $n(B)=12$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- i) $9 \leq n(A \cup B) \leq 21$
- ii) $0 \leq n(A \cap B) \leq 9$
- iii) $3 \leq n(A - B) \leq 9$

ข้อสรุปใดถูกต้อง

- 1. ข้อ ii) ถูกข้อเดียว
- 2. ข้อ iii) ถูกข้อเดียว
- 3. ถูกทั้ง 3 ข้อ
- 4. ผิดทั้ง 3 ข้อ

2. เอไปเที่ยวเกาะสมุย ปรากฏว่ามีฝนตกทั้งสิ้น 9 วัน โดยฝนจะตกในช่วงเช้าหรือช่วงบ่ายเพียงช่วงเดียวเท่านั้นในแต่ละวันเมื่อนับดูแล้วพบว่า อากาศแจ่มใสในช่วงเช้า 10 วัน และอากาศแจ่มใสในช่วงบ่าย 11 วัน เอไปเที่ยวเกาะสมุยกี่วัน

- 1. 15 วัน
- 2. 14 วัน
- 3. 13 วัน
- 4. 12 วัน

3. จากการสอบถามนักศึกษา 150 คน พบว่ามี 35 คนเรียนฟิสิกส์ มี 50 คนเรียนเคมี มี 26 คนเรียนฟิสิกส์และคณิตศาสตร์ มี 10 คนที่เรียนทั้ง 3 วิชา มี 49 คนที่เรียน 2 วิชาใน 3 วิชา และมี 71 คนที่ไม่เรียนวิชาใดใน 3 วิชาเลย ผู้ที่เรียนทั้งฟิสิกส์และเคมีต้องเรียนคณิตศาสตร์ มีนักศึกษาที่เรียนคณิตศาสตร์กี่คน

- 1. 55 คน
- 2. 59 คน
- 3. 63 คน
- 4. 67 คน

4. ในการสำรวจผู้ที่ไปเที่ยวสวนสัตว์ 100 คน พบว่าชอบช้าง 50 คน ชอบลิง 35 คน ชอบหมี 25 คน ชอบช้างอย่างเดียว 32 คน ชอบหมีแต่ไม่ชอบลิง 20 คน ชอบช้างและลิงแต่ไม่ชอบหมี 10 คน จงหาว่าจำนวนคนที่ไม่ชอบสัตว์ทั้งสามชนิดมีกี่คน

- 1. 10 คน
- 2. 11 คน
- 3. 12 คน
- 4. 13 คน

5. นักศึกษากลุ่มหนึ่งต้องเรียนภาษาฝรั่งเศส จีน หรือญี่ปุ่น อย่างน้อย 1 ภาษา มีนักศึกษาที่เรียนภาษาฝรั่งเศส 10 คน ภาษาจีน 18 คน ภาษาญี่ปุ่น 16 คน ซึ่งในจำนวนนี้มีนักศึกษาที่เรียนฝรั่งเศสอย่างเดียว 4 คน ภาษาจีนอย่างเดียว 8 คน ภาษาญี่ปุ่นอย่างเดียว 7 คน นักศึกษาที่เรียนทั้ง 3 ภาษา มี 3 คน

ข้อสรุปได้ถูกต้อง

1. นักศึกษากลุ่มนี้มี 38 คน
2. นักศึกษาที่เรียนเพียง 2 ภาษามี 8 คน
3. นักศึกษาที่เรียนภาษาจีนและญี่ปุ่นมี 5 คน
4. นักศึกษาที่เรียนภาษาฝรั่งเศสแต่ไม่เรียนภาษาญี่ปุ่นมี 5 คน

บทที่ 6

ความสัมพันธ์

กำหนดเซต $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ โดย axiom of extent จะได้ว่าเซต $\{5, 4, 6, 7, 3\}$ เป็นเซตเดียวกันหรือเป็นเซตที่เท่ากันกับเซต A จะเห็นว่าอันดับของสมาชิกไม่ใช่สาระสำคัญของการเขียนเซต

6.1 เซตเดียวหรือเซตคู่

เราสร้างเซตที่มีสมาชิกตัวเดียว โดยใช้ axiom of specification

กำหนด เซต A และ $P(x)$ แทน $x = a$ ดังนี้

$$\text{จะมี } B = \{x | x \in A \wedge (x = a)\}$$

$$\text{นั่นคือ } B = \{a\}$$

$$\text{หรือจะเขียนได้ว่า } \{a\} = \{x | x \in A \wedge (x = a)\}$$

เราเรียกเซต B ที่มีสมาชิกตัวเดียวนี้ว่า เซตเดียวหรือโทน (a singleton)

ในทำนองเดียวกัน กำหนดเซต A และ $Q(x)$ แทน $(x = b) \vee (x = c)$ ดังนี้

$$\text{จะมี } C = \{x | x \in A \wedge ((x = b) \vee (x = c))\}$$

$$\text{จะได้ } C = \{b, c\}$$

$$\text{หรือจะเขียนได้ว่า } \{b, c\} = \{x | x \in A \wedge ((x = b) \vee (x = c))\}$$

เราเรียกเซต C ที่มีสมาชิกสองตัวนี้ว่า เซตคู่ (a doubleton)

6.2 เซตคู่ไม่มีอันดับ (an unordered pair set)

$$\text{พิจารณา เซต } a \in \{a, b\} \leftrightarrow a \in \{b, a\}$$

$$b \in \{a, b\} \leftrightarrow b \in \{b, a\}$$

โดย axiom of extent

$$\text{ดังนั้น } \{a, b\} = \{b, a\}$$

จะเรียกเซตคู่ลักษณะนี้ว่า คู่ไม่มีอันดับ (an unordered pair) เพราะสามารถเขียนสมาชิกตัวใดก่อนหน้าหลังก็ได้

ดังนั้นเราจะเขียนเซต $\{a, b\}$ นี้ว่าเซตคู่ (a doubleton) หรือเซตคู่มีอันดับ

(an unordered pair set)

เมื่อต้องการเซตที่มีสมาชิกเพิ่มขึ้น เราก็สามารถทำได้โดยใช้การดำเนินการของเซต ดังนี้

$$B \cup C = \{a\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$$

การพิจารณาสมาชิกของเซต

$$\text{จาก } \{a, b\} = \{x \in A \mid (x = a) \vee (x = b)\}$$

$$\text{ดังนั้น } x \in \{a, b\} = (x = a) \vee (x = b)$$

$$\text{นั่นคือ ถ้า } m \in \{1, 7\} \text{ จะได้ว่า } (m = 1) \vee (m = 7)$$

นอกจากนี้ยังเขียนอีกได้ว่า $a \in \{a, b\}$ หรือ $b \in \{a, b\}$

และสำหรับเซตเดียว $\{c\} = \{x \mid x = c\}$

$$\text{ดังนั้น } x \in \{c\} \leftrightarrow x = c$$

$$\text{หรือเขียนได้ว่า } c \in \{c\}$$

การเท่ากันของเซตคู่มิมีอันดับ

บทนิยาม 1 กำหนดเซตคู่ $\{a, b\}$ และ $\{r, s\}$

$$\{a, b\} = \{r, s\} \text{ แล้ว } (a = r \wedge b = s) \vee (a = s \wedge b = r)$$

กำหนดเซตคู่ $\{a, b\} = \{5, 6\}$ อาจเห็นว่า $a = 5$ และ $b = 6$

แต่เนื่องจากเป็นเซตคู่มิมีอันดับ ซึ่ง $\{a, b\} = \{b, a\}$

ดังนั้นจึงเขียนได้ว่า $\{b, a\} = \{6, 5\}$ จะได้ $b = 6$ และ $a = 5$

6.3 คู่อันดับ (an ordered pair) หรือเซตคู่มีอันดับ

ในชีวิตประจำวัน มีการจับคู่กันระหว่างสิ่งต่างๆ หลายอย่างเช่น การจับคู่ระหว่างของที่ซื้อกับราคา เป็นต้น การแสดงการจับคู่จะแสดงได้ด้วยคู่อันดับ (a,b)

บทนิยาม 2 ให้ a และ b เป็นสมาชิกของเซต คู่อันดับ a,b (an ordered pair a,b)

เขียนแทนด้วย (a,b) ดังนี้

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

โดยที่ เรียก a ว่าสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ

เรียก b ว่าสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ

บทนิยาม 3 การเท่ากันของคู่อันดับ

$$(a, b) = (c, d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d$$

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ $(a,3)=(4,b)$ จงหา $a+b$

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ $(a+1,4)=(3,b-2)$ จงหา (a,b)

6.4 ผลคูณคาร์ทีเซียนหรือผลคูณไขว้ (cartesian product or cross product)

เป็นการดำเนินการอย่างหนึ่งบนเซต สมาชิกของเซตที่เกิดจากผลคูณคาร์ทีเซียนจะเป็นสิ่งที่แตกต่างออกไปจากเซตที่กล่าวมาในบทก่อนหน้านี้ ถ้ากำหนดเอกภพสัมพัทธ์ U สำหรับทุกเซต A และ B บน U แล้ว เซต $A \cup B, A \cap B$ และ $A - B$ เหล่านี้จะเป็นเซตบน U แต่ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และ B คือ $A \times B$ ไม่เป็นเช่นนั้น จะมีเซตอยู่ (exists) บนมิติที่สูงกว่า (higher dimension) ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต จะมีโครงสร้างที่ประยุกต์ความรู้บนเส้นจำนวนบนปริภูมิ 2 มิติและปริภูมิ 3 มิติ ผู้คิดค้นการดำเนินการนี้ คือ Rene Descartes (1596-1650) เป็นนักคณิตศาสตร์และนักปรัชญาชาวฝรั่งเศส

บทนิยาม 4 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และ B คือเซตของคู่อันดับทั้งหมดที่สมาชิกตัวแรกเป็นสมาชิกเซตของเซต A และสมาชิกตัวที่สองเป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \times B$

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

จากบทนิยามจะได้ว่า

$$(a,b) \in A \times B \leftrightarrow a \in A \wedge b \in B$$

นั่นคือ เมื่อกำหนดเซตสองเซต เซต A และ B การดำเนินการแบบผลคูณคาร์ทีเซียนจะทำให้เกิดเซตที่สาม ซึ่งเป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นคู่อันดับ (หรือเป็นเซตของคู่อันดับ)

สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน

กำหนด A, B และ C เป็นเซต

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
3. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
4. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
5. $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$

6. ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตจำนวนจริง

เซตของจำนวนจริง สามารถแสดงได้บนเส้นจำนวน ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตจำนวนจริง ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) จะแสดงได้บนระนาบที่เกิดจากเส้นจำนวนสองเส้นตัดกันซึ่งกันและกัน โดยแกนนอนเรียกว่า แกน x และแกนตั้ง เรียกว่า แกน y

ดังนั้น $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ คู่อันดับ (x, y) เป็นพิกัดของจุดบนระนาบที่มีระยะพิกัดที่หนึ่ง (abscissa) เป็น x และพิกัดที่สอง (ordinate) เป็น y การเขียนพิกัดของจุดโดยใช้จำนวนในลักษณะนี้บนระนาบ เรียกขานระบบนี้ว่า ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (the coordinate system)

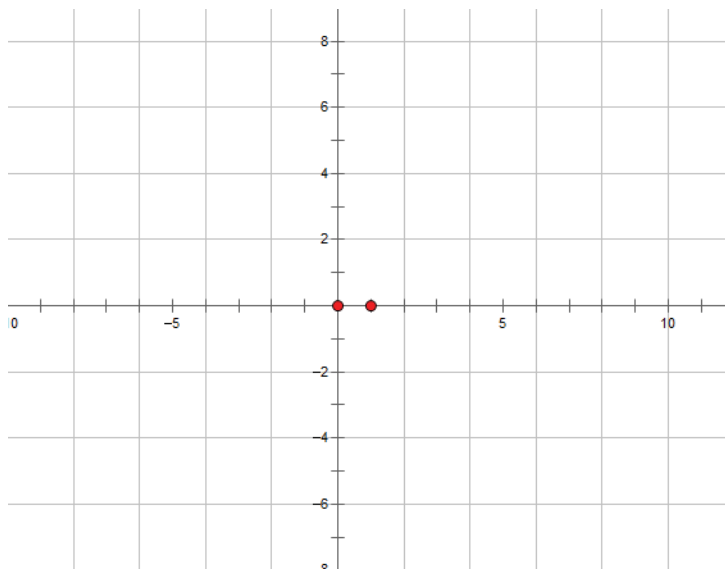
กราฟ $A \times B$

เมื่อ A และ B เป็นเซตของจำนวนจริง เราจะเห็นว่า $A \times B$ เป็นเซตย่อยของระนาบ

ถ้าให้ $A=[1,3]$ และ $B=[2,5]$

จะได้ $A \times B = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 3 \wedge 2 \leq y \leq 5\}$

เซตของจุดใน $A \times B$ จะประกอบเป็นบริเวณสี่เหลี่ยมบนระนาบ ที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(1,2), (1,5), (3,2), (3,5)$



ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตสามเซต

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตสามเซตจะมีสมาชิกของเซตเป็นสามสิ่งอันดับ (ordered triples) เขียนแทนด้วย (a,b,c)

บทนิยาม 5 ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A, B และ C คือเซตของสามสิ่งอันดับทั้งหมดที่มีสมาชิกตัวแรกเป็นสมาชิกจากเซต A สมาชิกตัวที่สองเป็นสมาชิกจากเซต B และ สมาชิกตัวที่สองเป็นสมาชิกจากเซต C เขียนแทนด้วย $A \times B \times C$

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) | (a \in A) \wedge (b \in B) \wedge (c \in C)\}$$

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตจำนวนจริงสามเซต

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตจำนวนจริงสามเซต $(R \times R \times R)$ จะแสดงได้บนปริภูมิที่เรียกว่าปริภูมิ 3 มิติที่เกิดจากเส้นจำนวนสามเส้นตัดตั้งฉากซึ่งกันและกัน บนระนาบ xy (แกน x และแกน y ตัดตั้งฉากซึ่งกันและกัน) แกนที่มาตั้งฉากกับระนาบ xy และผ่านจุดกำเนิด (origin) จะเรียกว่าแกน z สามารถเขียน $(R \times R \times R)$ แทนด้วย R^3 เมื่อ

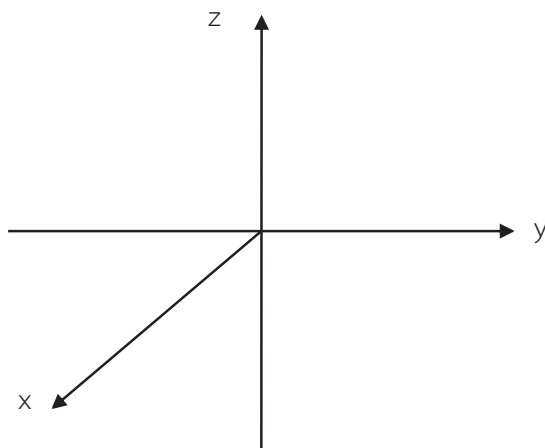
$$R^3 = \{(x,y,z) | (x \in R) \wedge (y \in R) \wedge (z \in R)\}$$

โดยที่สามสิ่งอันดับ (x,y,z) เป็นพิกัดของจุดในปริภูมิ 3 มิติที่มีพิกัดที่หนึ่งเป็น x พิกัดที่สองเป็น y และพิกัดที่สามเป็น z

เช่น กำหนด $A=[1,2]$, $B=[1,3]$ และ $C=[2,3]$

$$\text{และ } A \times B \times C = \{(x,y,z) | 1 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq y \leq 3 \wedge 2 \leq z \leq 3\}$$

เซตของจุดใน $A \times B \times C$ จะประกอบเป็นทรงสี่เหลี่ยมในปริภูมิสามมิติ



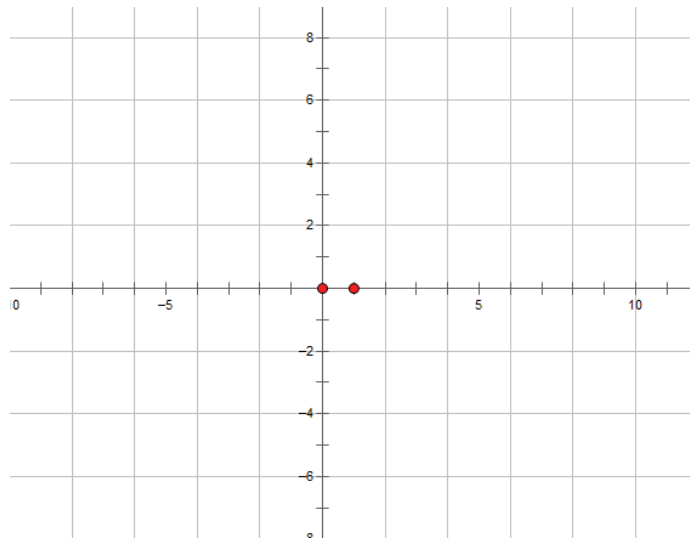
ตัวอย่าง 3 กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{a,b\}$ จงหา

$$3.1 \ A \times B$$

3.2 $B \times A$

3.3 $A \times A$

3.4 $B \times B$

3.5 จงเขียนกราฟของ $A \times B$ ตัวอย่าง 4 กำหนดให้ $A = \{m, n\}$ และ $B = \{\emptyset, A\}$ จงหา

4.1 $A \times B$

4.2 $B \times A$

4.3 $A \times A$

4.4 $B \times B$

ตัวอย่าง 5 กำหนดให้ $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$ และ $C = \{c, e\}$ จงหา

5.1 $A \times (B \cup C)$

5.2 $(A \times B) \cup (A \times C)$

5.3 $(A \times B) \cap (A \times C)$

5.4 $(A \times B) - (A \times C)$

ตัวอย่าง 6 ถ้า $n(A)=10$, $n(B)=20$, $n(C)=5$ และ $n(B \cap C) = 2$ จงหา

6.1 $n(A \times B)$

6.2 $n(B \times C)$

6.3 $n(C \times A)$

6.4 $n(A \times (B \cap C))$

6.5 $n(A \times (B \cup C))$

$$6.6 \ n(A \times (B - C))$$

$$6.7 \ n((A \times B) \cap (A \times C))$$

$$6.8 \ n((A \times B) \cup (A \times C))$$

$$6.9 \ n((A \times B) - (A \times C))$$

ตัวอย่าง 7 ต่อไปนี้ข้อใดเป็นจริง หรือเป็นเท็จ

$$7.1 \ (A \times B) = \emptyset \text{ ก็ต่อเมื่อ } A = \emptyset \text{ หรือ } B = \emptyset$$

$$7.2 \ \text{ถ้า } A \subseteq B \text{ แล้ว } (A \times C) \subseteq (B \times C)$$

$$7.3 \ \text{ถ้า } (A \times C) \subseteq (B \times C) \text{ แล้ว } A \subseteq B$$

$$7.4 \ \text{ถ้า } A \times B = B \times A \text{ แล้ว } A = B$$

$$7.5 \ A \times B = B \times A \text{ ก็ต่อเมื่อ } n(A \times B) = n(B \times A)$$

$$7.6 \ \text{ถ้า } A \times B = A \times C \text{ แล้ว } B = C$$

$$7.7 \ (A \times B) \cap (C \times D) \text{ แล้ว } (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$7.8 \ (A \times B) \cup (C \times D) \text{ แล้ว } (A \cup C) \times (B \cup D)$$

$$7.9 \ \text{ถ้า } A = B \cap C \text{ แล้ว } A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$$

$$7.10 \ \text{ถ้า } A = B \cap C \text{ แล้ว } A \times A = (B \times C) \cap (C \times B)$$

$$7.11 \ \text{ถ้า } A \cup B = A \cap B \text{ แล้ว } A \times A = B \times B$$

$$7.12 \ \text{ถ้า } A \times \{2\} = \{2\} \times B \text{ แล้ว } A = B$$

$$7.13 \ A \times B = B \times A$$

$$7.14 \ A \times B \neq B \times A$$

$$7.15 \ \text{ถ้า } A \text{ เป็นเซตอนันต์ และ } B \text{ เป็นเซตจำกัดแล้ว } A \times B \text{ เป็นเซตอนันต์}$$

6.5 ความสัมพันธ์ (Relation)

เมื่อกำหนดสิ่ง 2 สิ่งมาให้ เช่น จำนวนสองจำนวนคือ 9 กับ 3 จะพบว่าจำนวนทั้งสองมีความสัมพันธ์หลายแบบเช่น

$$9 \text{ มากกว่า } 3$$

$$9 \text{ เท่ากับ } 3 \times 3$$

$$3 \text{ เป็นรากที่สองของ } 9$$

คำว่า “มากกว่า” “เท่ากับ” “เป็นรากที่สอง” เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสองจำนวนนี้ จะแสดงได้ด้วย (x, y) นั่นคือ

$$x \text{ มีความสัมพันธ์ } r \text{ กับ } y \text{ ก็ต่อเมื่อ } (x, y) \in r$$

บทนิยาม 6 ความสัมพันธ์ r จาก A ไปเซต B คือเซตย่อยของผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปเซต B ก็ต่อเมื่อ $r \subseteq A \times B$

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปเซต A ก็ต่อเมื่อ $r \subseteq A \times A$

หรือเรียก ความสัมพันธ์บนเซต A (relation on A)

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์และ $(x, y) \in r$ เราอาจเขียนแทนด้วย $x (r) y$

อ่านว่า x มีความสัมพันธ์ (r) กับ y

เช่น ให้ r เป็นความสัมพันธ์ “มากกว่า” โดยที่ $r \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

ความสัมพันธ์ r จะเขียนได้ดังนี้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > y\}$

จะเห็นว่า $(2, 1) \in r$ เพราะ $2 > 1$

ตัวอย่าง 8 กำหนด $A = \{2, 3, 4\}$ และ $B = \{6, 8, 9, 16\}$ จงหาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

8.1 r_1 แทนความสัมพันธ์ “น้อยกว่า” จากเซต A ไปเซต B

8.2 r_2 แทนความสัมพันธ์ “มากกว่า” จากเซต B ไปเซต A

8.3 r_3 แทนความสัมพันธ์ “เป็นสองเท่า” ใน A

8.4 r_4 แทนความสัมพันธ์ “ $x+y$ เป็นจำนวนเฉพาะ” จากเซต A ไปเซต B

8.5 r_5 แทนความสัมพันธ์ “หารลงตัว” จากเซต A ไปเซต B

8.6 r_6 แทนความสัมพันธ์ “เป็นรากที่สอง” จากเซต A ไปเซต B

8.7 r_7 แทนความสัมพันธ์ “เป็นกำลังที่สาม” จากเซต B ไปเซต A

ตัวอย่าง 9 กำหนด $A = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้

แบบแจกแจงสมาชิก

9.1 $r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$

$$5.9.2 \ r_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$$

$$5.9.3 \ r_3 = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2x\}$$

$$5.9.4 \ r_4 = \{(x, y) \in B \times B \mid y = x^2\}$$

$$5.9.5 \ r_5 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^3\}$$

$$5.9.6 \ r_6 = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2 - 1\}$$

$$5.9.7 \ r_7 = \{(x, y) \in B \times B \mid x - y = 1\}$$

$$5.9.8 \ r_8 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \sqrt[3]{x}\}$$

6.6 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

กำหนด $r = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

เซตของสมาชิกตัวหน้าในคู่อันดับของ r คือ $\{1, 2, 3\}$ และเรียกเซตนี้ว่า โดเมนของ r

เซตของสมาชิกตัวหลังในคู่อันดับของ r คือ $\{a, b, c\}$ และเรียกเซตนี้ว่า เรนจ์ของ r

บทนิยาม 5.7 ให้ r เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปเซต B

โดเมน (Domain) ของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย $D(r)$

คือ เซตของสมาชิกตัวแรกของคู่อันดับในความสัมพันธ์ r

$$D(r) = \{x \mid x \in A \wedge \exists y \in B \wedge (x, y) \in r\}$$

เรนจ์ (Range) ของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย $R(r)$

คือ เซตของสมาชิกตัวที่สองของคู่อันดับในความสัมพันธ์ r

$$R(r) = \{y \mid y \in B \wedge \exists x \in A \wedge (x, y) \in r\}$$

การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r แบบบอกเงื่อนไข ทำได้โดย

-เมื่อต้องการหาโดเมน ให้จัดรูป y ในรูปของ x ทั้งหมด ที่ทำให้หาค่า x ได้ และ $(x, y) \in r$

-เมื่อต้องการหาเรนจ์ ให้จัดรูป x ในรูปของ y ทั้งหมด ที่ทำให้หาค่า y ได้ และ $(x, y) \in r$

ตัวอย่าง 10 จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

$$10.1 \ r = \{(1,1), (2,4), (3,9)\}$$

$$10.2 \ r = \{(-1,1), (-2,4), (-3,9)\}$$

$$10.3 \ r = \{(2,4), (3,5), (4,6)\}$$

$$10.4 \ r = \{(-1,-2), (-3,-4), (-5,-6)\}$$

ตัวอย่าง 5.11 จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

$$11.1 \ r = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y = 5\}$$

$$11.2 \ r = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = 2y \wedge x < 8\}$$

$$11.3 \ r = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 4 \wedge x < 5\}$$

$$11.4 \ r = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x - y = 3 \wedge x \leq 6\}$$

$$11.5 \ r = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x^2 + y^2 = 25\}$$

ตัวอย่าง 12 จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$12.1 \ r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 3\}$$

$$12.2 \ r = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{2x-3}{5x+4} \right\}$$

$$12.3 \ r = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2 - 9} \right\}$$

$$12.4 \ r = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4 - x^2} \right\}$$

$$12.5 \ r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2 + 4} \right\}$$

$$12.6 \ r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 6x - 4 \right\}$$

$$12.7 \ r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |2x + 1| + 3 \right\}$$

$$12.8 \ r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 - 4x = 0 \right\}$$

$$12.9 \ r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x - 2| + |y - 3| = 4 \right\}$$

$$12.10 \ r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x - 3| - |y + 2| = 5 \right\}$$

$$12.11 \ r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 9}} \right\}$$

$$12.12 \ r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 y - x^2 + 4y = 0 \right\}$$

$$12.13 \ r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4 - \sqrt{x}} \right\}$$

$$12.14 \ r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{4}{3 - |x - 2|} \right\}$$

$$12.15 \ r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy - y - x - 2 = 0 \right\}$$

6.7 กราฟของความสัมพันธ์

ในระบบแกนพิกัดฉาก เราสามารถจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างคู่อันดับของจำนวนจริง (x,y) กับจุดในระนาบ โดยให้ x เป็นพิกัดแรก และ y เป็นพิกัดหลัง และจะให้นิยามของกราฟของความสัมพันธ์ ดังนี้

บทนิยาม 8 ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง ความสัมพันธ์ r เป็นสับเซตของ $R \times R$ แล้วกราฟของความสัมพันธ์ r คือเซตของจุดบนระนาบ โดยที่แต่ละจุดแทนสมาชิกของความสัมพันธ์ r

กราฟของความสัมพันธ์ อาจมีลักษณะดังนี้

- 1) กราฟของความสัมพันธ์เป็นจุด
- 2) กราฟของความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง
- 3) กราฟของความสัมพันธ์เป็นเส้นโค้ง
- 4) กราฟของความสัมพันธ์เป็นส่วนหนึ่งของระนาบ

ตัวอย่างที่ 13 จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์

$$13.1 \ r_1 = \{(0,0), (1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4), (3,9), (-3,9)\}$$

13.2 $r_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = 2x - 1 \wedge -2 \leq x \leq 2\}$	13.3 $r_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x - 1\}$
13.4 $r_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + 1 \}$	13.5 $r_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y = 4\}$

13.6 $r_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x - 2 - 4\}$	13.7 $r_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y = 4\}$
13.8 $r_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - 2 = 3\}$	13.9 $r_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y = 3\}$
13.10 $r_{10} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 4 \}$	13.11 $r_{11} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 9\}$

13.12 $r_{12} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{3-x}\}$	13.13 $r_{13} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4-x^2}\}$
13.14 $r_{14} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \leq x+3\}$	13.15 $r_{15} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y < x-2\}$
13.16 $r_{16} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2 \wedge -1 \leq y \leq 2\}$	13.17 $r_{17} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq 2 \wedge y \geq 3\}$
13.18 $r_{18} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$	13.19 $r_{19} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 > 9\}$
13.20 $r_{20} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq x^2 \wedge x+y \leq 6\}$	13.21 $r_{21} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x+y < 2 \wedge x^2 + y^2 \leq 25\}$

6.8 ความสัมพันธ์ผกผัน (Inverse Relation)

บทนิยาม 9 ให้ r เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปเซต B ผกผันของความสัมพันธ์ r คือความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ระหว่างสมาชิกในแต่ละคู่อันดับของ

ความสัมพันธ์ r

ความสัมพันธ์ผกผันของ r จึงเป็นความสัมพันธ์จากเซต B ไปเซต A

เขียนแทนด้วย r^{-1}

$$r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in r\} \text{ ดังนั้น } (x, y) \in r^{-1} \leftrightarrow (y, x) \in r$$

ตัวอย่าง 14 จงหาความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$14.1 \quad r_1 = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$$

$$14.2 \quad r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - y + 2 = 0\}$$

วิธีทำ จากบทนิยามความสัมพันธ์ผกผันจะได้

$$14.1 \quad r_1^{-1} = \{(1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4)\}$$

$$14.2 \quad r_2^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - y + 2 = 0\}$$

$$\text{หรือ } r_2^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 - x + 2 = 0\}$$

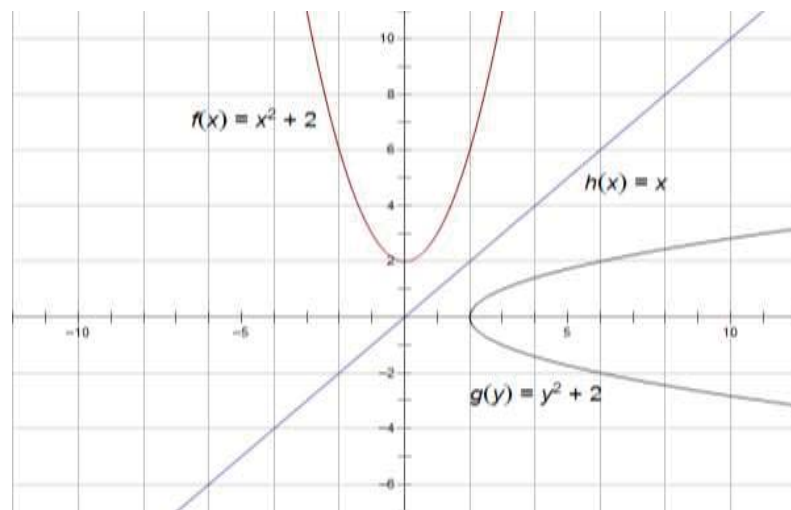
$$\text{หรือ } r_2^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \pm\sqrt{x-2}\}$$

เมื่อความสัมพันธ์ผกผัน เกิดจากการสลับที่สมาชิกตัวแรกกับตัวที่สองในแต่ละคู่อันดับ การจับคู่ถูกสลับ ดังนั้นโดเมนกับเรนจ์ก็จะถูกสลับไปด้วย

$$\text{นั่นคือ } D(r^{-1}) = R(r) \text{ และ } R(r^{-1}) = D(r)$$

6.9 กราฟของความสัมพันธ์ผกผัน

กราฟของความสัมพันธ์ผกผันใด จะสมมาตรกับกราฟของความสัมพันธ์นั้น โดยที่มีเส้นตรง $y=x$ เป็นแกนสมมาตร



ตัวอย่าง 15 จงหาความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์ เมื่อกำหนด

$$A = \{x | x \in \mathbb{Z}\} \text{ และ } B = \{x | x \in \mathbb{N}\}$$

$$15.1 \ r_1 = \{(x, y) \in A \times B | y = 2x + 3\}$$

$$15.2 \ r_2 = \{(x, y) \in A \times B | y = x^2\}$$

$$15.3 \ r_3 = \{(x, y) \in A \times B | y = \sqrt{x-3}\}$$

ตัวอย่าง 16 จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1}

$$16.1 \ r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = 2x - 5\}$$

$$16.2 \ r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = \sqrt{x-3}\}$$

$$16.3 \ r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y < x - 1\}$$

แบบฝึกหัดที่ 6

1. กำหนดความสัมพันธ์ $\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$1) \left\{ (x, y) \left| y = \frac{2x+3}{3x-4} \right. \right\}$$

$$2) \left\{ (x, y) \left| y = \frac{3x}{5x-1} + 4 \right. \right\}$$

$$3) \left\{ (x, y) \left| y = \sqrt{x-9} \right. \right\}$$

$$4) \left\{ (x, y) \left| y = \sqrt{x-9} \right. \right\}$$

$$5) \left\{ (x, y) \left| y = \sqrt{x+9} \right. \right\}$$

$$6) \left\{ (x, y) \left| y = -\sqrt{x-9} \right. \right\}$$

$$7) \left\{ (x, y) \left| y = -\sqrt{x-9} \right. \right\}$$

$$8) \left\{ (x, y) \left| y = \sqrt{9-x} \right. \right\}$$

$$9) \left\{ (x, y) \left| y = -\sqrt{9-x} \right. \right\}$$

$$10) \left\{ (x, y) \left| y = \sqrt{x^2-25} \right. \right\}$$

$$11) \left\{ (x, y) \left| y = -\sqrt{x^2-25} \right. \right\}$$

$$12) \left\{ (x, y) \left| y = \sqrt{25-x^2} \right. \right\}$$

$$13) \left\{ (x, y) \left| y = -\sqrt{25-x^2} \right. \right\}$$

$$14) \left\{ (x, y) \left| y = \sqrt{x^2+25} \right. \right\}$$

$$15) \left\{ (x, y) \left| y = -\sqrt{x^2+25} \right. \right\}$$

$$16) \left\{ (x, y) \left| y = \sqrt{x^2+2x-3} \right. \right\}$$

$$17) \left\{ (x, y) \left| y = \sqrt{9x^2-16x+5} \right. \right\}$$

$$18) \left\{ (x, y) \left| y = x^2-2x \right. \right\}$$

$$19) \left\{ (x, y) \left| y = -x^2+3 \right. \right\}$$

$$20) \left\{ (x, y) \left| y = x^2+6x-2 \right. \right\}$$

$$21) \{(x, y) | y = -x^2 - 4x + 5\} \quad 22) \{(x, y) | x = y^2 + 4y - 8\}$$

$$23) \{(x, y) | x = -y^2 - 12y + 1\} \quad 24) \{(x, y) | y = |x - 2|\}$$

$$25) \{(x, y) | y = -|x + 1| + 2\} \quad 26) \{(x, y) | y = 3|x - 4| - 5\}$$

$$27) \{(x, y) | x = |y - 3|\} \quad 28) \{(x, y) | x = -|y - 1| + 3\}$$

$$29) \{(x, y) | y = \|x - 3\| - 5\} \quad 30) \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$$

$$31) \{(x, y) | x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2\} \quad 32) \{(x, y) | x^2 - y^2 = 9\}$$

$$33) \{(x, y) | x^2 - y^2 - 4x + 6y = 1\} \quad 34) \{(x, y) | |x| + |y| = 4\}$$

$$35) \{(x, y) | |x - 1| + |y - 2| = 3\} \quad 36) \{(x, y) | |x| - |y| = 2\}$$

$$37) \{(x, y) | |x + 2| - |y - 2| = 1\} \quad 38) \left\{ (x, y) \left| y = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 4}} \right. \right\}$$

$$39) \left\{ (x, y) \left| y = \frac{-5}{\sqrt{x^2 - 9}} \right. \right\} \quad 40) \left\{ (x, y) \left| y = \frac{2}{\sqrt{5 - x^2}} \right. \right\}$$

$$41) \left\{ (x, y) \left| y = \frac{-3}{\sqrt{7 - x^2}} \right. \right\} \quad 42) \left\{ (x, y) \left| y = \frac{6}{\sqrt{x^2 + 4}} \right. \right\}$$

$$43) \left\{ (x, y) \left| y = \frac{-7}{\sqrt{x^2 + 7}} \right. \right\} \quad 44) \left\{ (x, y) \left| y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3} \right. \right\}$$

$$45) \left\{ (x, y) \left| y = \frac{-2}{x^2 - 4x + 3} \right. \right\} \quad 46) \left\{ (x, y) \left| y = \frac{2}{|x - 2|} \right. \right\}$$

$$47) \left\{ (x, y) \left| y = \frac{-3}{|x| - 1} \right. \right\} \quad 48) \{(x, y) | xy + x - y = 1\}$$

$$49) \{(x, y) | xy - 2x + y = 2\} \quad 50) \{(x, y) | y = \sqrt{4 - \sqrt{x - 3}}\}$$

$$51) \left\{ (x, y) \left| y = \frac{|x + 1|}{x + 1} \right. \right\} \quad 52) \{(x, y) | y = x^3\}$$

$$53) \{(x, y) | y = \sqrt{3}\} \quad 54) \{(x, y) | x = 3\}$$

$$55) \{(x, y) | |x + y| = 4\} \quad 56) \{(x, y) | y \leq -x^2\}$$

$$57) \{(x, y) | y \geq -x^2\}$$

$$58) \{(x, y) | xy = 6\}$$

$$59) \{(x, y) | x|y = 18\}$$

$$60) \{(x, y) | x|y| = 18\}$$

$$61) \{(x, y) | x^2y - x^2 - 4y = 0\}$$

2. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ แล้วหาโดเมนและเรนจ์

2.1) $r_1 = \{(x, y) y = 2x - 4\}$ $r_2 = \{(x, y) y \leq 2x - 4\}$ $r_3 = \{(x, y) y \geq 2x - 4\}$	2.2) $r_1 = \{(x, y) y = x - 2 + 1\}$ $r_2 = \{(x, y) y \leq x - 2 + 1\}$ $r_3 = \{(x, y) y \geq x - 2 + 1\}$
2.3) $r_1 = \{(x, y) x + y = 5\}$ $r_2 = \{(x, y) x + y \leq 5\}$ $r_3 = \{(x, y) x + y \geq 5\}$	2.4) $r_1 = \{(x, y) x - y = 2\}$ $r_2 = \{(x, y) x - y \leq 2\}$ $r_3 = \{(x, y) x - y > 2\}$
2.5) $r_1 = \{(x, y) x + 2 = 4\}$ $r_2 = \{(x, y) x + 2 < 4\}$ $r_3 = \{(x, y) x + 2 \geq 4\}$	2.6) $r_1 = \{(x, y) x - y = 4\}$ $r_2 = \{(x, y) x - y \leq 4\}$ $r_3 = \{(x, y) x - y > 4\}$
2.7) $r_1 = \{(x, y) y = x^2 + 3\}$ $r_2 = \{(x, y) y < -x^2 + 3\}$ $r_3 = \{(x, y) x \geq y^2 - 2\}$	2.8) $r_1 = \{(x, y) x^2 + y^2 = 4\}$ $r_2 = \{(x, y) x^2 + y^2 \leq 4\}$ $r_3 = \{(x, y) x^2 + y^2 \geq 4\}$
2.9) $r_1 = \{(x, y) 4x^2 + 9y^2 = 36\}$ $r_2 = \{(x, y) 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$ $r_3 = \{(x, y) 4x^2 + 9y^2 \geq 36\}$	2.10) $r_1 = \{(x, y) 9x^2 - 4y^2 = 36\}$ $r_2 = \{(x, y) 9x^2 - 4y^2 \leq 36\}$ $r_3 = \{(x, y) 9x^2 - 4y^2 \geq 36\}$
2.11) $r_1 = \{(x, y) y = -\sqrt{4 - x^2}\}$ $r_2 = \{(x, y) y < -\sqrt{4 - x^2}\}$ $r_3 = \{(x, y) x \geq -\sqrt{4 - y^2}\}$	2.12) $r_1 = \{(x, y) y = \sqrt{x - 2}\}$ $r_2 = \{(x, y) y \leq \sqrt{x - 2}\}$ $r_3 = \{(x, y) y \geq \sqrt{x - 2}\}$

2.13) $r = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq x \}$
2.14) $r = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3 \wedge y < x\}$
2.15) $r = \{(x, y) \mid x + y \leq 5 \wedge x - y \geq 1\}$

3. จงหาผกผันของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$3.1) r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = 2x\} \quad 3.2) r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid y = -3x\}$$

$$3.3) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 1\} \quad 3.4) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2 - 3}\}$$

$$3.5) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{5 - x^2}\} \quad 3.6) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| + |y| = 1\}$$

$$3.7) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| - |y| = 1\} \quad 3.8) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{4}{x-1}\}$$

$$3.9) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x-2}{x+3}\} \quad 3.10) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > 2x - 5\}$$

4. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ผกผันต่อไปนี้

$$4.1) r = \{(2, 0), (3, 1), (4, 2)\} \quad 4.2) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x}{x-1}\}$$

$$4.3) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2 - 1}\} \quad 4.4) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4 - x^2}\}$$

$$4.5) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x+3}\} \quad 4.6) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{5-x}\}$$

$$4.7) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = -x^2\} \quad 4.8) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x-2|\}$$

$$4.9) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}\}$$

$$4.10) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}\}$$

5. จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1}

$$5.1) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 5\}$$

$$5.2) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 16\}$$

$$5.3) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| \leq 2 \wedge |y| \leq 4\}$$

$$5.4) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 2\}$$

$$5.5) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x| + 2\}$$

$$5.6) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4 - x^2} \wedge x < 0\}$$

$$5.7) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \leq \sqrt{x - 4}\}$$

$$5.8) r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x|y| = 18\}$$

บทที่ 7

ฟังก์ชัน (Function)

7.1 ฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ชนิดหนึ่ง โดยที่คู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์นี้ ต้องมีสมาชิกตัวหน้าไม่ซ้ำกัน กล่าวคือ

ถ้า (x_1, y_1) เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน จะต้องไม่มี (x_1, y_2) โดยที่ $y_1 \neq y_2$ เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ด้วย

บทนิยาม 1 กำหนดให้ f เป็นความสัมพันธ์ใดๆ จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชัน

ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$

จากบทนิยาม 1 จะได้ว่า

1) ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ

$$\forall x, y, z [(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z]$$

2) ความสัมพันธ์ f ไม่เป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ

$$\exists x, y, z [(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \wedge y \neq z]$$

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1) $r_1 = \{(1, 2), (3, 1), (4, 4)\}$

2) $r_2 = \{(1, 2), (1, 1), (4, 4)\}$

3) $r_3 = \{(x, y) \in R \times R | y = 2x + 1\}$

4) $r_4 = \{(x, y) \in R \times R | y^2 = x\}$

5) $r_5 = \{(x, y) \in R \times R | y = x^2\}$

6) $r_6 = \{(x, y) \in R \times R | y = |2x - 3|\}$

บทนิยาม 2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันใดๆ จะเรียก $\{x|(x,y) \in f\}$ ว่าโดเมนของ f (Domain of f) เขียนแทนด้วย D_f และเรียก $\{y|(x,y) \in f\}$ ว่าเรนจ์ของ f (Range of f) เขียนแทนด้วย R_f

บทนิยาม 3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันใดๆ สำหรับแต่ละ $(x,y) \in f$ ซึ่ง f เป็นฟังก์ชัน จะเรียก y ว่า **ภาพ** (Image) ของ x หรือเรียก x ว่า **อินเวอร์สอิมเมจ** (Inverse Image) หรือ

บุพภาพ (Pre-image) ของ y ภายใต้ฟังก์ชัน f และแทนสัญลักษณ์ $(x,y) \in f$ ด้วย $y = f(x)$

บทนิยาม 4 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันใดๆ จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นความสัมพันธ์ซึ่งสำหรับทุกๆ $x \in A$ จะมี $y \in B$ เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง $(x,y) \in f$ จะเขียน $f : A \rightarrow B$ แทน f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จากบทนิยาม 4 จะได้ว่า $f : A \rightarrow B$ ก็ต่อเมื่อ

- 1) f เป็นฟังก์ชัน
- 2) $\forall x \in A \exists y \in B [(x,y) \in f]$

หรือ 1) f เป็นฟังก์ชัน

- 2) $D_f = A$

7.2 ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง (Bijective Function)

บทนิยาม 5 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (Injective Function) ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1, x_2 \in A$ และ $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

จะเขียนสัญลักษณ์ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปยัง B ด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$

จากบทนิยาม 5 จะได้ว่า $f : A \xrightarrow{1-1} B$ ก็ต่อเมื่อ

- 1) $f : A \rightarrow B$
- 2) $\forall x_1, x_2 \in A [f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2]$
- 3) $\forall x_1, x_2 \in A [x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$
- 4) f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปยัง B ก็ต่อเมื่อ $\exists x_1, x_2 \in A [f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2]$

บทนิยาม 6 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง (Onto Function) B ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกๆ $y \in B$ จะมี $x \in A$ ซึ่ง $y = f(x)$

จะเขียนสัญลักษณ์ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ด้วย $f : A \xrightarrow{\text{onto}} B$

จากบทนิยาม 6 จะได้ว่า $f : A \xrightarrow{\text{onto}} B$ ก็ต่อเมื่อ

- 1) $f : A \rightarrow B$
- 2) $\forall y \in B \exists x \in A [f(x) = y]$
- 3) f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ $\exists y \in B \forall x \in A [f(x) \neq y]$

บทนิยาม 7 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันหลายตัวต่อหนึ่ง (Many-to-one Function) ก็ต่อเมื่อ f มีสมาชิก $(x_1, y), (x_2, y) \in f$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$

บทนิยาม 8 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง (Bijective Function) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันทั้งแบบหนึ่งต่อหนึ่งและแบบทั่วถึง

จะเขียนสัญลักษณ์ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจาก A ไปทั่วถึง B ด้วย $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$

หมายเหตุ ตำราบางเล่มเรียกฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงว่า ฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-one Correspondence)

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{a, b, c, d\}$

1) จงสร้างฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก A ไปยัง B

2) จงหาฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

ตัวอย่างที่ 3 จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

- 1) $r_1 = \{(x, y) \in R \times R | xy = 1\}$
- 2) $r_2 = \{(x, y) \in R \times R | |x| - |y| = 1\}$
- 3) $r_3 = \{(x, y) \in R \times R | y = \sqrt{2x-1}\}$

$$4) r_4 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 25\}$$

$$5) r_5 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{25 - x^2}\}$$

$$6) r_6 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = |x| + 2\}$$

$$7) r_7 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 = 4\}$$

$$8) r_8 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 - y^2 = 4\}$$

$$9) r_9 = \{(x, y) \in R \times R \mid 4x^2 - 9y^2 = 0\}$$

$$10) r_{10} = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^3\}$$

$$11) r_{11} = \{(x, y) \in R \times R \mid x = y^2 - 6y + 10\}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงยกตัวอย่างฟังก์ชันที่เป็นหนึ่งต่อหนึ่งแต่ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ตัวอย่างที่ 5 จงยกตัวอย่างชันทั่วถึงแต่ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $f(x) = 1 - x^2$ จงหา A และ B ซึ่ง $f : A \xrightarrow{1-1}_{\text{onto}} B$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x-1 & , \quad x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & , \quad x < 1 \end{cases}$ จงหา A และ B ซึ่ง $f : A \xrightarrow{1-1}_{\text{onto}} B$

7.3 ฟังก์ชันผกผัน (Inverse Function)

บทนิยาม 9 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันใดๆ ถ้า $f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$ เป็นฟังก์ชัน เรียก f^{-1} ว่า ฟังก์ชันผกผันของ f (Inverse Function of f)

บทนิยาม 10 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันใดๆ จะได้ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 8 กำหนด $f = \{(x, y) \in R \times R | y = (x - 2)^3\}$

- 1) จงหา f^{-1}
- 2) f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

ตัวอย่างที่ 9 กำหนด $f = \{(x, y) \in R \times R | y = x^2 + 6x + 10\}$

- 1) จงหา f^{-1}
- 2) f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

ตัวอย่างที่ 10 กำหนด $f = \{(x, y) \in R \times R | y = \sqrt{5x + 4}\}$ เมื่อ $x \in [0, 10]$ จงหา $f^{-1}(x)$

ตัวอย่างที่ 11 กำหนด $f(3x - 4) = 4x + 3$ จงหา $f^{-1}(x)$

ตัวอย่างที่ 12 กำหนด $f(x) = \frac{x-1}{3}$

- จงหา 1) $f^{-1}(3)$ 2) $f^{-1}(4)$

ตัวอย่างที่ 13 กำหนด $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & , x \geq 0 \\ -x^2-1 & , x < 0 \end{cases}$

- จงหา 1) $f^{-1}(x)$ 2) $f^{-1}(1)$
 3) $f^{-1}(2)$ 4) $f^{-1}(-5)$

7.4 ฟังก์ชันประกอบ (Composite Function)

บทนิยาม 11 กำหนดให้ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ แล้ว

$$h = \{(x, z) | (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g, y = f(x), z = g(y) = g(f(x))\}$$

เรียก h ว่า ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนฟังก์ชันประกอบของ f และ g ด้วย $g \circ f$ (อ่านว่า จีโอเอฟ)

ดังนั้น $g \circ f = \{(x, z) | x \in A \wedge z \in C \wedge y \in B, y = f(x), z = g(y) = g(f(x))\}$

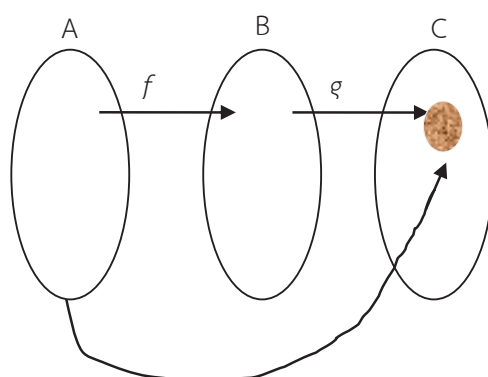
หรือ $(x, z) \in g \circ f \Leftrightarrow \exists y \in B, y = f(x) \wedge z = g(y) = g(f(x))$

ดังนั้น $z = g \circ f(x) = g(f(x))$

บทนิยาม 12 กำหนดให้ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ แล้ว $g \circ f: A \rightarrow C$

ในการสร้างฟังก์ชัน $g \circ f$ เรนจ์ของ f จะต้องเป็นเซตย่อยของโดเมน g

โดเมนของ $g \circ f$ คือ เซตย่อยของโดเมนของ f และเรนจ์ของ $g \circ f$ จะเป็นเซตย่อยของเรนจ์ของ g



ตัวอย่าง 14 กำหนดให้ $f = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$ และ

$$g = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$$

จงหา $g \circ f$ และ $f \circ g$

ตัวอย่าง 15 กำหนดให้ $f = \{(1,a), (2,a), (3,b), (4,c), (5,d)\}$ และ

$$g = \{(a,2), (b,4), (c,6), (e,8)\}$$

จงหา $g \circ f$ และ $f \circ g$

ตัวอย่าง 16 กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = \frac{1}{x-1}$

จงหา 1) $g \circ f(x)$ และ $D_{g \circ f}$

2) $f \circ g(x)$ และ $D_{f \circ g}$

ตัวอย่าง 17 กำหนดให้ $f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$

โดยที่ $f(x) = 2x - 3$ และ $g(x) = x^2 + 5$

จงหา 1) $(g \circ f)(x-1)$

2) $(f \circ g)(x+1)$

3) $(f \circ f)(2x)$

4) $(g \circ g)(x^2)$

ตัวอย่าง 18 กำหนดให้ $f: R \rightarrow R$, $g: R \rightarrow R$ และ $h: R \rightarrow R$

$$\text{โดยที่ } f(x) = 3x \text{ และ } g(x) = x^2 + 1 \text{ และ } h(x) = \begin{cases} 2x-2 & , x < 0 \\ 2x-3 & , x \geq 0 \end{cases}$$

จงหา 1) $(f \circ g \circ h)(2)$

2) $(g \circ f \circ h)(0)$

3) $(g \circ h \circ f)(-1)$

4) $((f \circ g) \circ (f \circ h))(1)$

ตัวอย่าง 19 กำหนดให้ $f(x) = x^3 + 1$ และ $g(x) = x^2 + 1$

จงหา 1) $(g \circ f^{-1})(x)$

2) $(f \circ g^{-1})(x)$

ตัวอย่าง 20 กำหนดให้ $f(x+3) = 4x-5$ และ $g(x-3) = 2-3x$

จงหา 1) $(g \circ f^{-1})(-1)$

2) $(f \circ g^{-1})(5)$

3) $(f^{-1} \circ g^{-1})(-4)$

4) $(g^{-1} \circ f^{-1})(3)$

7.5 พีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of Function)

บทนิยาม 13 กำหนดให้ $A \subset R, B \subset R, A \cap B \neq \emptyset$

และ $f : A \rightarrow R, g : B \rightarrow R$

นิยามฟังก์ชัน $f+g, f-g, f \square g$ และ $\frac{f}{g}$ ดังนี้

1) $f+g : A \cap B \rightarrow R$ ซึ่งนิยามว่า

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ สำหรับทุก } x \in A \cap B$$

2) $f-g : A \cap B \rightarrow R$ ซึ่งนิยามว่า

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \text{ สำหรับทุก } x \in A \cap B$$

3) $f \square g : A \cap B \rightarrow R$ ซึ่งนิยามว่า

$$(f \square g)(x) = f(x) \square g(x) \text{ สำหรับทุก } x \in A \cap B$$

4) $\frac{f}{g} : (A \cap B) - C \rightarrow R$ ซึ่งนิยามว่า

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ สำหรับทุก } x \in (A \cap B) - C \text{ เมื่อ } C = \{x \in B \mid g(x) = 0\}$$

หมายเหตุ

$$1) D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \square g} = A \cap B = D_f \cap D_g$$

$$2) D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

จากบทนิยามเราจะเขียนฟังก์ชัน $f+g, f-g, f \square g$ และ $\frac{f}{g}$ ในรูปของเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$f+g = \{(x, y) \in R \times R \mid y = (f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in D_f \cap D_g\}$$

$$f-g = \{(x, y) \in R \times R \mid y = (f-g)(x) = f(x) - g(x), x \in D_f \cap D_g\}$$

$$f \square g = \{(x, y) \in R \times R \mid y = (f \square g)(x) = f(x) \square g(x), x \in D_f \cap D_g\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{(x, y) \in R \times R \mid y = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D_f \cap D_g \wedge g(x) \neq 0\right\}$$

ตัวอย่างที่ 21 กำหนดฟังก์ชัน $f = \{(0,0), (1,1), (2,-1), (3,2), (4,-2), (5,3), (6,-3)\}$

$$g = \{(0,1), (2,3), (4,5), (6,6), (8,9), (10,10)\}$$

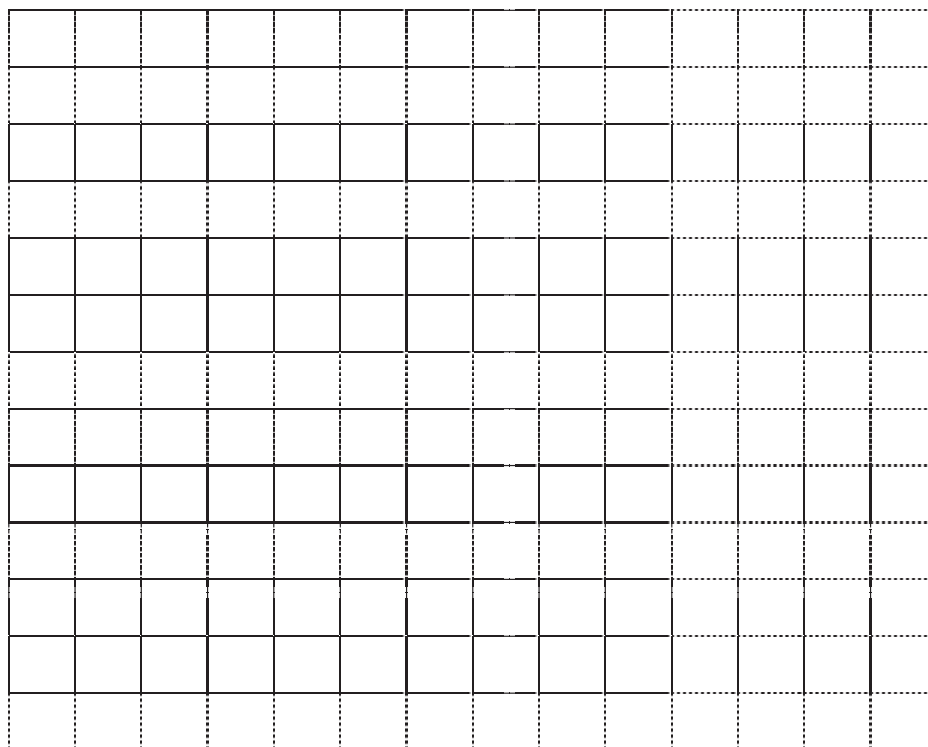
จงหา $f+g, f-g, f \square g, \frac{f}{g}$ และ $\frac{g}{f}$

ตัวอย่างที่ 22 กำหนดฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 + 1 \wedge x \in [-2, 2]\}$

$$g = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x - 2 \wedge x \in [-1, 3]\}$$

จงหา $f - g$ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของ $f - g$ และเขียนกราฟของ f, g และ $f - g$

บนระนาบเดียวกัน



ตัวอย่างที่ 23 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 4x$ เมื่อ $x \in R$

$$g(x) = x^2 + 1 \text{ เมื่อ } x \in R$$

$$h(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \geq 0 \\ x-1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

จงหา 1) $(f^{-1} + g + h^{-1})(-2)$

2) $((g \circ f^{-1}) \square h)(2)$

7.6 ฟังก์ชันที่ควรทราบ

1. ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด (Increasing Function and Decreasing Function)
2. ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function)
3. ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function)
4. ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function)
5. ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational Function)
6. ฟังก์ชันขั้นบันได (Step Function)
7. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value Function)
8. ฟังก์ชันที่เป็นคาบ (Periodic Function)
9. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Function)
10. ฟังก์ชันเอกซโพเนนเชียล (Exponential Function)
11. ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm Function)

7.6.1 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด (Increasing Function and Decreasing Function)

บทนิยาม 14 ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก $D_f \subset \mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ และ $A \subset D_f$

- 1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (Increasing Function) ใน A ก็ต่อเมื่อ

$$\text{ถ้า } x_1 \in A, x_2 \in A \text{ และ } x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- 2) f เป็นฟังก์ชันลด (Decreasing Function) ใน A ก็ต่อเมื่อ

$$\text{ถ้า } x_1 \in A, x_2 \in A \text{ และ } x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- 3) เรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันไม่ลด (Nondecreasing Function) ใน A ก็ต่อเมื่อ

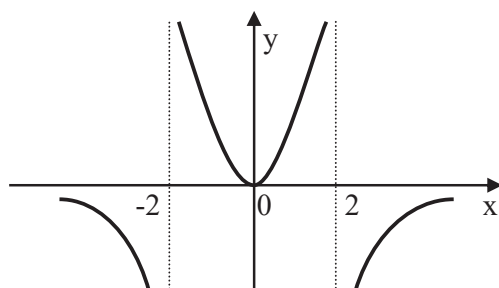
$$\text{ถ้า } x_1 \in A, x_2 \in A \text{ และ } x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- 4) เรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม (Nonincreasing Function) ใน A ก็ต่อเมื่อ

$$\text{ถ้า } x_1 \in A, x_2 \in A \text{ และ } x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

ตัวอย่าง 24 กำหนดฟังก์ชัน f ซึ่งมีกราฟดังรูปต่อไปนี้ จงหาว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

และฟังก์ชันลดในช่วงใดบ้าง



ตัวอย่างที่ 25 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 5x - 2$ เมื่อ $x \in R$ จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน R
(ให้นักศึกษาทำเอง)

ตัวอย่างที่ 26 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = (x-2)^3 + 1$ เมื่อ $x \in R$ จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดใน R
(ให้นักศึกษาทำเอง)

ตัวอย่างที่ 27 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = |2x+3|$

- 1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือฟังก์ชันลดใน $A = [-1, 2]$
- 2) f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือฟังก์ชันลดใน $B = [-2, 1]$

(ให้นักศึกษาทำเอง)

แบบฝึกหัด 7.1

จงตรวจสอบดูว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันลดในเซต A ที่กำหนดให้

- 1) $f(x) = \frac{x+3}{2}$; $A = R$
- 2) $f(x) = \frac{5-3x}{4}$; $A = R$
- 3) $f(x) = x^2 + 6x + 9$; $A = (-\infty, -4]$
- 4) $f(x) = 5 + 4x - x^2$; $A = [2, \infty)$
- 5) $f(x) = x^2 + 9$; $A = [-1, 1]$
- 6) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; $A = [-1, 1]$
- 7) $f(x) = \sqrt{4-x}$; $A = R^-$
- 8) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$; $A = R$
- 9) $f(x) = |x+1|$; $A = R^+$
- 10) $f(x) = -|x-2|$; $A = R^-$

7.6.2 ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function)

ฟังก์ชันกำลังสอง หมายถึง ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a, b, c \in R$ และ $a \neq 0$

กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง จะเป็นรูปพาราโบลา ซึ่งเป็นพาราโบลาหงาย หรือ พาราโบลาคว่ำเท่านั้น ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนจริง a ว่าเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ

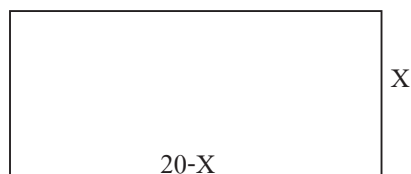
- 1) เมื่อ $a > 0$ จะได้พาราโบลาหงาย
- 2) เมื่อ $a < 0$ จะได้พาราโบลาคว่ำ

$$\text{จุดยอดของพาราโบลาอยู่ที่ จุดที่ } x = -\frac{b}{2a}, y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ตัวอย่าง 28 สี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีความยาวของเส้นรอบรูปเท่ากับ 40 เซนติเมตร

- 1) จงสร้างฟังก์ชัน f ซึ่งแทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้
- 2) จงหาขนาดของรูปสี่เหลี่ยมที่ทำให้มีพื้นที่มากที่สุด

วิธีทำ 1)



สมมติให้ x แทนความยาวของด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยม

ดังนั้น ความยาวอีกด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยม เท่ากับ $20 - x$ เซนติเมตร

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ดังนั้น

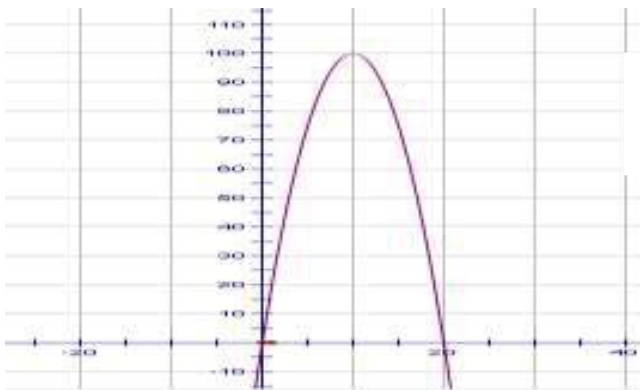
$$f(x) = x(20 - x)$$

$$f(x) = 20x - x^2 \text{ เมื่อ } 0 < x < 20$$

3) จะพบว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันกำลังสองที่มีโดเมนเท่ากับ $(0, 20)$

กราฟของ f เป็นส่วนหนึ่งของพาราโบลาคว่ำ ซึ่งมีจุดสูงสุดอยู่ที่

$$x = -\frac{20}{2(-1)} = 10 \text{ และ } y = f(10) = 20(10) - (10)^2 = 200 - 100 = 100$$



ดังนั้น สี่เหลี่ยมรูปนี้จะมีพื้นที่มากที่สุด เมื่อ $x = 10$
พื้นที่มากที่สุดเท่ากับ 100 ตารางเซนติเมตร

7.6.3 ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function)

ฟังก์ชันพหุนาม หมายถึงฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

เมื่อ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นค่าคงตัว และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

ถ้า $a_n \neq 0$ แล้วจะเรียกฟังก์ชันพหุนามดังกล่าวว่าเป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีระดับ (degree)

เท่ากับ n (เท่ากับเลขชี้กำลังของ x ที่มากที่สุดที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เท่ากับ 0)

ตัวอย่างเช่น

ฟังก์ชันพหุนาม	ระดับ (degree)
$f(x) = 2x + 5$	1
$f(x) = x^2 - 3x + 1$	2
$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$	3
$f(x) = x^4 - 2$	4
$f(x) = 10$	0
$f(x) = -3x^5 + 2x$	5

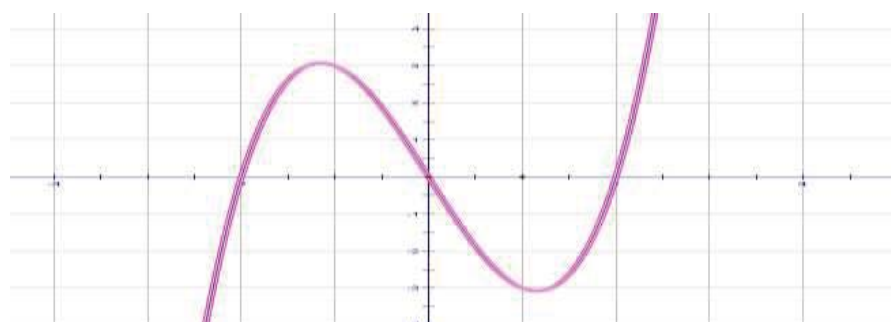
ตัวอย่าง 29 จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 4x$

วิธีทำ แยกตัวประกอบ จะได้ $f(x) = (x)(x+2)(x-2)$

หาระยะตัดแกน y ถ้า $x=0$ แล้ว $y=0$ หาระยะตัดแกน x ถ้า $y=0$ แล้ว $x=-2, 0, 2$

ระยะตัดแกน x จะแบ่งแกน x ออกเป็น 4 ส่วน ให้พิจารณาเครื่องหมาย $f(x)$ ในแต่ละส่วน ดังนี้

เครื่องหมายของ $f(x)$	-	+	-	+
เครื่องหมายของ $x+2$	- - - -	+ + + +	+ + + +	+ + + +
เครื่องหมายของ $x-2$	- - - -	- - - -	- - - -	+ + + +
เครื่องหมายของ x	- - - -	- - - -	+ + + +	+ + + +



7.6.4 ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational Function)

ฟังก์ชันตรรกยะ หมายถึง ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$

เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ $q(x) \neq 0$

ตัวอย่างของฟังก์ชันตรรกยะ ได้แก่

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{x-1} & , & \quad f(x) = \frac{2}{x+4} \\ f(x) &= \frac{2x}{x+2} & , & \quad f(x) = \frac{x+5}{x^2+x-1} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 30 จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x-2}$

วิธีทำ $D_f = \{x \in R | x \neq 2\}$

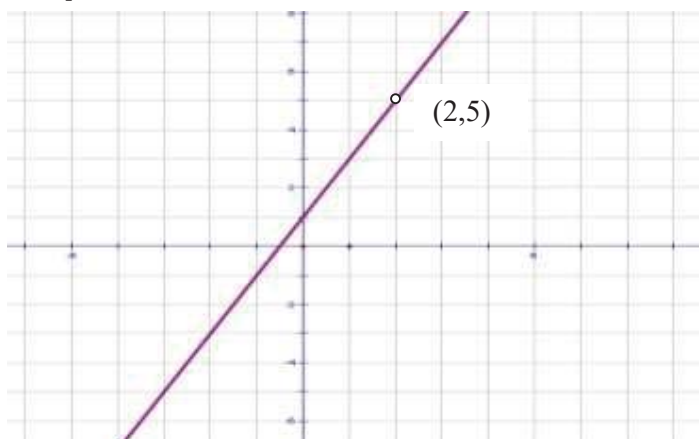
เขียนฟังก์ชัน f ใหม่ ได้ดังนี้

$$f(x) = \frac{(2x+1)(x-2)}{(x-2)} \text{ เนื่องจาก } x-2 \neq 0 \text{ ดังนั้น}$$

$$f(x) = 2x+1 \text{ เมื่อ } x \in R - \{2\}$$

ดังนั้นกราฟของ f จะเป็นรูปเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 2 และระยะตัดแกน y เท่ากับ 1

ยกเว้นจุด $(2,5)$ ดังรูป



แบบฝึกหัดที่ 7.2

จงวาดกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1) f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1}$$

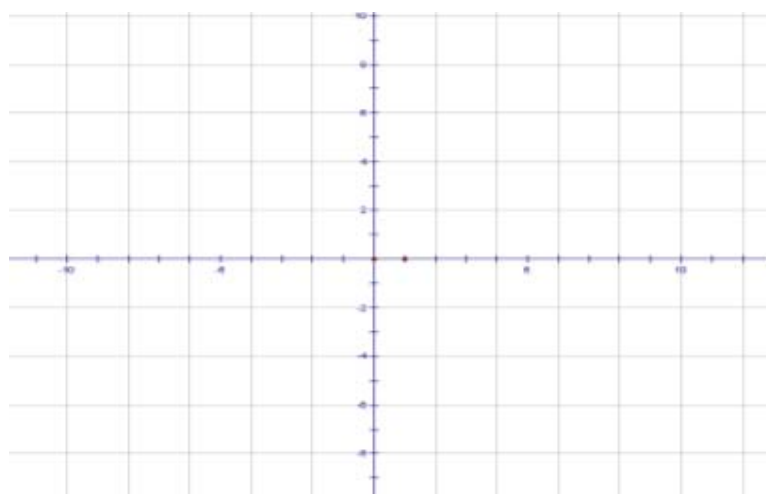
$$2) f(x) = \frac{1}{x - 1}$$

$$3) f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 5x + 6}$$

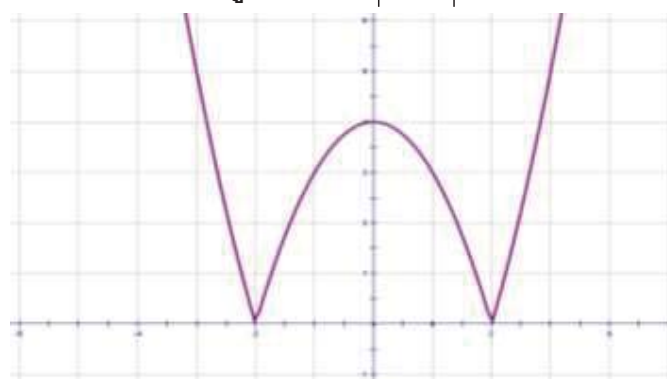
ตัวอย่าง ฟังก์ชันขั้นบันได

$$f(x) = \begin{cases} -5 & , \quad x \leq -4 \\ -3 & , \quad -4 < x \leq -2 \\ -2 & , \quad -2 < x \leq 1 \\ 2 & , \quad 1 < x \leq 3 \\ 4 & , \quad x > 3 \end{cases}$$

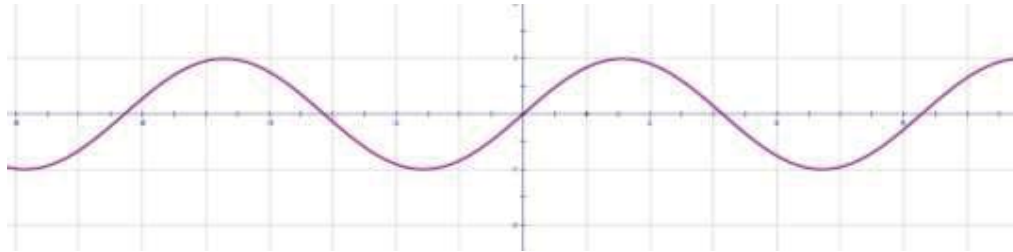
วาดกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง ฟังก์ชันที่เป็นค่าสัมบูรณ์ $f(x) = |x^2 - 4|$



ตัวอย่าง ฟังก์ชันที่เป็นคาบ $f(x) = \sin x$



บรรณานุกรม

กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). **หลักคณิตศาสตร์**, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

กรุงเทพมหานคร.

ฉันทยศ จำปาหวาย. (2559). **เอกสารประกอบการสอนรายวิชาหลักการคณิตศาสตร์**

สำหรับครู, คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา. กรุงเทพมหานคร.

พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2559). **หลักคณิตศาสตร์**, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

กรุงเทพมหานคร.

พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. (2560). **การพิสูจน์**, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

กรุงเทพมหานคร.

ไพโรจน์ เยียระยง. (2559). **ตรรกศาสตร์และทฤษฎีเซต**, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์

มหาวิทยาลัย. กรุงเทพมหานคร.