# ตัวแปรสุ่ม(Random Variables)

**ตัวแปรสุ่ม** คือค่าฟังก์ชั่นที่กำหนดค่าเป็นตัวเลขให้กับผลของการทดลองในแซมเปิลสเปซ S แทนด้วยตัวพิมพ์ใหญ่เช่น X ,Y เป็นต้น

เช่นในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก ให้ X แทนแต้มของลูกเต๋า

$$X = \{0,1\}$$

เมื่อ 0 ขึ้นแต้มคู่

1 ขึ้นแต้มคี่

**นิยาม** ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นแซมเปิลสเปซ และมีเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริงจะเรียกว่า ตัวแปรสุ่ม

**ตัวแปรสุ่มแบ่งเป็น 2 ชนิด**

1. ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง(discrete random variable)
2. ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง(continuous random variable)

# **ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง**(discrete random variable)

หมายถึงตัวแปรสุ่มที่มีเรนจ์สเปซเป็นเซตที่นับได้

**ตัวอย่าง** ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 2 ครั้ง

ให้ X แทนจำนวนก้อยที่ขึ้นในการโยน

$$X = \{0,1,2\}$$

X จึงเป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

ตัวอย่าง นายโดมมีบุตร 3 คน

จะได้ว่า S = {ชชช ,ชชญ ,ชญช ,ชญญ ,ญชช, ญชญ, ญญช, ญญญ}

ให้ Y แทนจำนวนลูกชาย

$$Y = \{0,1,2\}$$

ดังนั้น Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

**การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง**

(Discrete Probability Distribution)

นิยาม ฟังก์ชัน f(x)เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็น(probability function)

หรือการแจกแจงความน่าจะเป็น (probability distribution)ของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X สำหรับแต่ละค่าของ x มีคุณสมบัติดังนี้

1. $f(x) = P(X = x)$ , ทุกค่าของ x

2. $f(x) \geq 0$

3. $\sum f(x) = 1$

**ตัวอย่าง** ในการโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 2 ครั้งจงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนก้อยที่เกิดขึ้น

วิธีทำ ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนก้อยที่เกิดขึ้น

ดังนั้น $f(0) = P(X =, 0) = \frac{1}{4}$ $\quad f(1) = P(X = 1) = \frac{2}{4}$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

นั้นคือการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนก้อยที่เกิดขึ้นคือ

| x | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| f(x) | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

**ตัวอย่าง** ในการตรวจสอบหลอดไฟแบบตะเกียบ 10 หลอดพบว่ามีหลอดเสีย 4 หลอดสุ่มมาตรวจ 3 หลอดจงหา

1.การแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนหลอดเสียและวาดกราฟของการแจกแจง

2.ความน่าจะเป็นที่สุ่มได้หลอดเสียไม่เกิน 2 หลอด

**ตัวอย่าง** ในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 4 ลูก สีดำ 3 ลูก สีขาว 3 ลูกสุ่มหยิบมา 3 ลูก โดยหยิบที่ละลูกแล้วใส่คืนจงหา

1.การแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนลูกบอลสีดำและวาดกราฟของการแจกแจง

2.ความน่าจะเป็นที่สุ่มได้ลูกบอลสีดำไม่เกิน 1 ลูก

**<u>นิยาม</u>** ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสม (Cumulative Distribution function ) ของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X ที่มีการแจกแจงควมน่าจะเป็น f(x) คือ

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{i \le x} f(i)$$

**ตัวอย่าง** ในการโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 2 ครั้งจงหาฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของจำนวนก้อยที่เกิดขึ้น

วิธีทำ ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนก้อยที่เกิดขึ้น

$$F(0) = P(X \le 0) = f(0) = \frac{1}{4}$$

$$F(1) = P(X \le 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$F(2) = P(X \le 2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของจำนวนก้อยที่เกิดขึ้นคือ

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{เมื่อ } 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{เมื่อ } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{เมื่อ } x \ge 2 \end{cases}$$

**ตัวอย่าง** ในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 4 ลูก สีดำ 3 ลูก สีขาว 3 ลูก สุ่มหยิบมา 3 ลูก โดยหยิบที่ละลูกแล้วใส่คืนจงหา

1.ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของจำนวนลูกบอลสีดำและวาดกราฟของการฟังก์ชันการแจกแจง

2.ความน่าจะเป็นที่สุ่มได้ลูกบอลสีดำไม่เกิน 2 ลูก

## <u>การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่อง</u>(Continuous Probability Distribution)

ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องเช่น อายุการใช้งานของพัดลมยี่ห้อหนึ่ง

-จำนวนคนที่เข้ามาซื้อของตั้งแต่เวลา 8.30-12.00 น.

-จำนวนเชื้อราในขนมปังก้อนหนึ่ง เป็นต้น

นิยาม ฟังก์ชัน f(x)เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (probability density function)
ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X เมื่อมีคุณสมบัติดังนี้

1. $f(x) \geq 0$ , ทุกค่าของ x

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

3. $$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{x^2}{3} \qquad \text{เมื่อ } -1 < x < 2$$

$$= 0 \qquad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ}$$

จงแสดงว่า

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

2. จงหา $P(0 < x \leq 1.5)$

**ตัวอย่าง** ผู้ขับรถมีความต้องการใช้แก๊ส LPG ต่อวันเป็นตัวแปรสุ่ม X ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังนี้

$$g(x) = \begin{cases} kx & \text{เมื่อ } 0 \le x < 10 \\ k(20 - x) & \text{เมื่อ } 10 \le x < 20 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

จงหา

1. ค่า k

2. กราฟของ g(x)

3. $P(5 < x \le 15)$

**นิยาม** ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น f(x) คือ

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(i)di$$

และพบว่า $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$

ตัวอย่างกำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{x^2}{3} \qquad \text{เมื่อ } -1 < x < 2$$

$$= 0 \qquad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ}$$

จงหา

1.F(x)

2. $P(0 < x \leq 1)$

**การแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกัน** (Joint Probability Distribution)

กำหนดให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มสองตัวการแจกแจงความน่าจะเป็นของการเกิดร่วมกันของตัวแปรทั้งสองเขียนแทนด้วยฟังก์ชัน f(x,y) และเรียกว่า

การแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของ X และ Y (joint probability distribution of X and Y)

**นิยาม** ฟังก์ชัน f(x,y) จะเป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X และ Y เมื่อ

1. $f(x,y) = P(X = x, Y = y)$ สำหรับทุกค่าของ (x,y)
2. $f(x,y) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ (x,y)
3. $\sum_{\text{ทุกค่าของ}x} \sum_{\text{ทุกค่าของ}y} f(x,y) = 1$
4. $P[(X,Y) \in A] = \sum_{A} \sum f(x,y)$

**ตัวอย่าง** กระเบื้องกล่องหนึ่งมี 8 แผ่นพบว่าเป็นเกรด A 3 แผ่น เกรด B 2 แผ่น และเกรด C 2 แผ่น สุ่มตัวอย่างกระเบื้องมา 2 แผ่น กำหนดให้

X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนกระเบื้องเกรด A

Y เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนกระเบื้องเกรด B

จงหา

1.ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X และ Y

2. $P[(X,Y) \in A]$ เมื่อ $A = \{(x,y) | x + y \leq 1\}$

วิธีทำ 1. พบว่า $R_{(X,Y)} = \{(x,y) \mid x, y = 0,1,2 \;; x+y \le 2\}$

$$R_{(X,Y)} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(2,0)\}$$

ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของตัวแปรสุ่ม X และ Y

คือ

$$f(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}} \qquad x, y = 0,1,2 \;; x+y \le 2$$

$= 0$ เมื่อ x,y มีค่าอื่นๆ

นั้นคือ

$$f(0,0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$$

$$f(0,1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{6}{28}$$

นั้นคือ

| y \ x | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |

ข้อ 2.

$$P[(X,Y)\in A]=P(X+Y\leq 1)$$

$$=\sum_{x+y}\sum f(x,y)$$

$$=f(0,0)+f(0,1)+f(1,0)$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots$$

**นิยาม** ฟังก์ชัน $f(x,y)$ จะเป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X และ Y เมื่อ

1. $f(x, y) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ $(x,y)$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1$$

4. $$P[(X, Y) \in A] = \iint_{A} f(x, y)\,dx\,dy$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มี ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันคือ

$$f(x,y)=\begin{cases} a(x+2y) & ,0<x<1 \quad ,0<y<1 \\ 0 & ,x,y \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

จงหาค่า a

**วิธีทำ**

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

แทนค่า

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} a(x+2y)\,dx\,dy = 1$$

$$.......... \ .......... \ ..... = 1$$

$$.......... \ .......... \ ..... = 1$$

$$.......... \ .......... \ ..... = 1$$

$$a = \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ .$$

ดังนั้น ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของตัวแปรสุ่ม แบบต่อเนื่อง X และ Y คือ

$$f(x,y) = \begin{cases} \ldots.(x+2y) & ,0<x<1 \ \ ,0<y<1 \\ 0 & ,x,y \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$