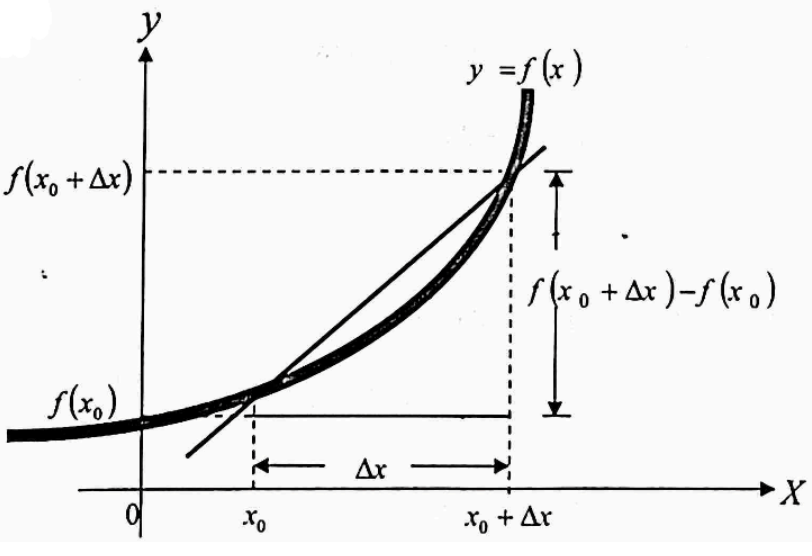
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Derivative of functions) เป็นส่วนหนึ่งของแคลคูลัส ซึ่งในการศึกษาเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ต้องอาศัยเรื่องลิมิตเป็นพื้นฐาน โดยเป็นการประยุกต์ของลิมิตที่สำคัญอย่างหนึ่ง ได้แก่ การนำความรู้เรื่องลิมิตของฟังก์ชันใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $y = f(x)$ ที่ค่าหนึ่ง ๆ ของ x ซึ่งความหมายในทางเรขาคณิต หมายถึง การหาความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด x นั่นเอง และปัญหาดังกล่าวนี้สามารถแก้ปัญหาได้โดยใช้ความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และเราสามารถนำเอาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปประยุกต์และแก้ปัญหาได้หลายสาขาวิชา นอกจากใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งแล้ว สามารถนำไปใช้หาความเร็ว ความเร่ง ค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน และใช้ในการเขียนกราฟของฟังก์ชัน เป็นต้น

ส่วนเปลี่ยนแปลงและอนุพันธ์ (Increments and derivative)

ให้ f เป็นฟังก์ชันของ x กำหนดโดย $y = f(x)$ ที่ x_0 อยู่ในโดเมน และเขียนสมาชิก x ตัวอื่น ๆ ในโดเมนได้ในรูปของ $x_0 + \Delta x$ โดยที่ Δx คือ ส่วนเปลี่ยนแปลงของ x (Δx อ่านว่า เดลตาเอกซ์ หรือบางครั้งใช้ตัวอักษร h แทน Δx ก็ได้)

ถ้า x_0 เปลี่ยนแปลงไป Δx แล้ว ค่าฟังก์ชันของ f จะเปลี่ยนแปลงไป $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ดังรูป



เช่น กำหนดให้ $y = f(x) = x^2$ และ $x_0 = 2$

จะได้ $f(x_0) = f(2) = 4$

ถ้า $\Delta x = 1$ แล้ว $x_0 + \Delta x = 2 + 1 = 3$ และ $f(x_0 + \Delta x) = f(3) = 9$

ดังนั้น $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 9 - 4 = 5$

ถ้า $\Delta x = -0.5$ แล้ว $x_0 + \Delta x = 2 - 0.5 = 1.5$ และ $f(x_0 + \Delta x) = f(1.5) = 2.25$

ดังนั้น $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2.25 - 4 = -1.75$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = x^2$ จงหา $f'(4)$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $y = f(x) = 2x^2 + 1$ จงหา $f'(x)$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $y = f(x) = \sqrt{x}$ จงหา $f'(x)$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ จงหา

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของ y เทียบกับ x ที่ $x = 5$

ข. ความชันของเส้นสัมผัสกราฟของสมการนี้ที่ $x = 9$

ค. สมการของเส้นสัมผัสกราฟของสมการนี้ที่ $x = 4$

ตัวอย่าง จงหาความชันของเส้นสัมผัสของกราฟที่มีสมการ $f(x)=\frac{x}{x-9}$ ที่ $x = 6$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic functions) คือ ฟังก์ชันของพหุนาม ฟังก์ชันตรรกยะ และรวมถึงฟังก์ชันที่ได้จากการ บวก ลบ คูณ หาร และการถอดรากของฟังก์ชันพหุนาม

จากหัวข้อที่ผ่านมาจะเห็นได้ว่า การหาอนุพันธ์จากนิยามโดยตรงนั้นมีความยุ่งยาก จึงได้มีการหาสูตรของอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่างๆ ไว้ ซึ่งสูตรที่ได้นั้นมาจากการใช้นิยามของอนุพันธ์

1. ถ้า $f(x)=c$ แล้ว $\frac{d}{dx}(c)=0$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
2. ถ้า $f(x)=x$ แล้ว $\frac{d}{dx}(x)=1$
3. ถ้า $g(x)=cf(x)$ แล้ว $\frac{d}{dx}(cf(x))= c\frac{d}{dx}(f(x))$
4. ก. ถ้า $f(x)=u(x)+v(x)$ แล้ว $\frac{d}{dx}[u(x)+v(x)]=\frac{du}{dx}u(x)+\frac{d}{dx}v(x)$

   ข. ถ้า $f(x)=u(x)-v(x)$ แล้ว $\frac{d}{dx}[u(x)-v(x)]=\frac{d}{dx}u(x)-\frac{d}{dx}v(x)$
5. ถ้า $f(x)=x^n$ แล้ว $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริง
6. ถ้า $f(x)=u(x)\cdot v(x)$ แล้ว
7. ถ้า $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ แล้ว $\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

9. ถ้า $g = u(v), h = v(x)$ และ $f = g \circ h$ (เป็นฟังก์ชันประกอบ)
โดยที่ $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = u(v(x))$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[u(v(x))] = \frac{d}{dv(x)}u(v(x)) \cdot \frac{d}{dx}v(x)$$

10. ถ้า $f(x) = [u(x)]^n$ และ n เป็นจำนวนจริงแล้ว

$$\frac{d}{dx}[u(x)]^n = n[u(x)]^{n-1} \cdot \frac{d}{dx}u(x)$$

11. ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $x = g(y)$ เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส
ของ f ที่หาอนุพันธ์ได้ที่ y แล้ว $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ หรือ $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \frac{1}{3}x^{12} + 3x^5 - 8x^2 + 5$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $y = 4\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $y = 5x\sqrt{x} + x(3x^2 + 4) - \frac{x}{\sqrt[4]{x}}$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \sqrt{x}\,(x^4 + 3)$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \frac{3-2x}{3+2x}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + 1}$

ก. จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

ข. ที่จุดใดกราฟของสมการมีเส้นสัมผัสในแนวนอน

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. $y = (x^5 + 1)(4x^2 + 7x - 9)$

ข. $y = \dfrac{x^3}{1 + \sqrt{x}}$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $y = \sqrt{x^2 + 6x + 3}$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $y = (t^3 + \sqrt{t^2+1})^{10}$

ตัวอย่าง ถ้า $y = u^3$ และ $u = x^2 - 3x + 1$ แล้ว จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

ตัวอย่าง ถ้า $y = x^2 - 2x$ และ $x = \sqrt{2t^2+1}$ จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ เมื่อ $t = \sqrt{2}$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x^2\sqrt{3x-1}$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $y = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $x=\sqrt{y}+4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit functions)

y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x และ y กำหนดอยู่ในรูปสมการที่ไม่ได้เขียนค่า y ไว้เด่นชัดหรือไม่สามารถเขียนอยู่ในรูปของ $y=f(x)$ ได้ เช่น สมการ $x^2-4y=0$ จะเห็นว่า y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x และอาจเรียกว่า x ก็เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ y ก็ได้ (เพราะรูปสมการไม่ได้ค่า x ไว้เด่นชัด) แต่ถ้ารูปสมการนี้เป็น $y=\frac{1}{4}x^2$ เรียก y ว่าเป็นฟังก์ชันเด่นชัด (Explicit function) ของ x แต่ในบางกรณี การหาค่า y ในรูปของ x อาจจะทำไม่ได้หรืออาจจะยุ่งยากเกินไป เช่น สมการ $x^2y^5+4xy^3-35y^2+37=0$ เป็นต้น

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย ทำได้โดยการหาอนุพันธ์ของแต่ละเทอม ในสมการที่กำหนดให้ โดยพิจารณา y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x แล้วหา $\frac{dy}{dx}$ ออกมา

ตัวอย่าง กำหนดให้ $3x^5-3x^4y^3+4y^2=0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด $(-1,1)$

ตัวอย่าง จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนด

ก. $x^3y + xy^3 = 2$

ข. $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 3x^5 + xy^6$ เมื่อ $x = 1$ และ $y = 1$

ตัวอย่าง จงหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$ ที่จุด $(1,-2)$

ตัวอย่าง จงหาสมการเส้นตั้งฉากกราฟของ $y^3 - x^2 = 5$ ที่จุด $(1,2)$

อนุพันธ์อันดับสูง (Higher derivatives)

ถ้า $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้ เรียก $f'(x)$ ว่า อนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First derivative) ถ้า $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จะแทนอนุพันธ์ของ $f'(x)$ ด้วย $f''(x)$ เรียก $f''(x)$ ว่า อนุพันธ์อันดับสอง (Second derivative) ถ้ายังคงหาอนุพันธ์ต่อไปได้อีก ก็จะได้อนุพันธ์อันดับสาม สี่ และอันดับสูงต่อ ๆ ไปของ $y=f(x)$ อนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ไปของ $y=f(x)$ จะแทนด้วยสัญลักษณ์ดังนี้

$f'(x)$ แทน อนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$f''(x)$ แทน อนุพันธ์อันดับสอง

$f'''(x)$ แทน อนุพันธ์อันดับสาม

$f^{(4)}(x)$ แทน อนุพันธ์อันดับสี่

$\vdots$

$f^{(n)}(x)$ แทน อนุพันธ์อันดับ n

ตัวอย่าง ถ้า $f(x)=3x^4-2x^3+3x^2-5x+6$ จงหา $f^{(5)}(x)$ และ $f^{(n)}(x)$ เมื่อ $n>5$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $y=\dfrac{3}{(4x+1)^2}$ จงหา $\dfrac{d^3y}{dx^3}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{2}{1-x}$ จงหา $f^{(n)}(x)$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $xy+x-2y-1=0$ จงหา y''

อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สรุปสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ดังนี้

1. $\dfrac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$
2. $\dfrac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$
3. $\dfrac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$
4. $\dfrac{d}{dx}(\cot x)=-\operatorname{cosec}^2 x$
5. $\dfrac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$
6. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)=-\operatorname{cosec} x\cot x$

ตัวอย่าง จงหา $f'(x)$ ถ้า $f(x) = x^4 \sin x$

ตัวอย่าง จงหา $\frac{dy}{dx}$ ถ้า $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

ตัวอย่าง จงหา $f'(x)$ ถ้า $f(x) = \sec x \tan x$

ตัวอย่าง จงหา $y''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ถ้า $y(x) = \sec x$

ตัวอย่าง จงหา $\frac{dy}{dx}$ ถ้า $y=\frac{\operatorname{cosec} x}{1+\cot x}$

ตัวอย่าง กำหนด $y=\cos^{20} x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ตัวอย่าง จงหา $\frac{dy}{dx}$ ถ้า $y=\sin\left(5x^3-x\right)$

จากผลของกฎลูกโซ่ สามารถเขียนสูตรทั่วไปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ได้ดังนี้

1. $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$

2. $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$

3. $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$

4. $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$

5. $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$

6. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. $y = \cos(3x^2 - 2x)$

ข. $y = \tan(x^3 + 1)$

ค. $y = \sqrt{\cot 5x}$

ง. $y = \sqrt{x^3 + \sec 2x}$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. $y = \sin\sqrt{1+\cos x}$

ข. $y = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x$

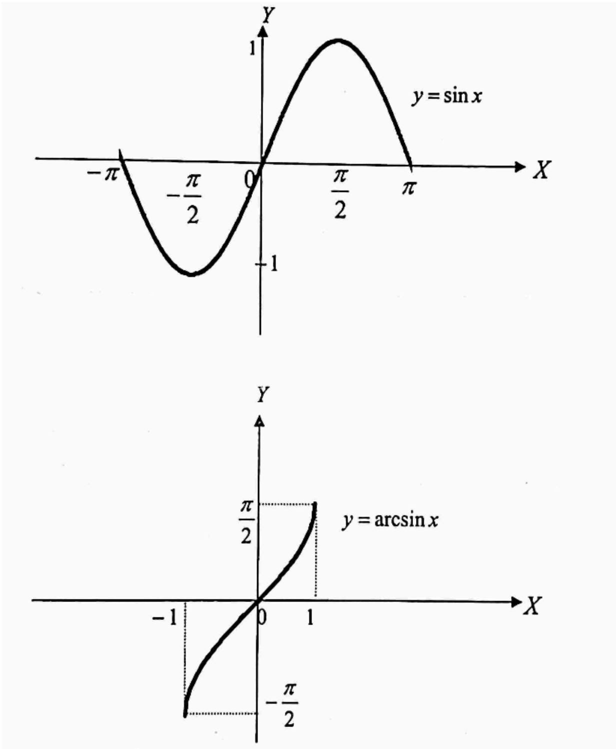
ค. $y = \cos^2 \pi x$

ง. $y = \tan 3x^\circ$ (หน่วยเป็นองศา)

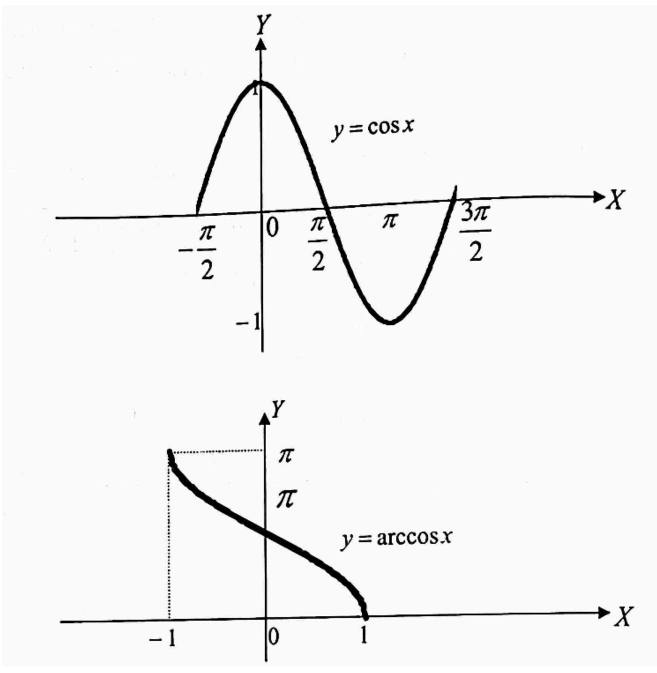
อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์สตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติพื้นฐาน มีลักษณะเป็นฟังก์ชันคาบ แต่ละฟังก์ชันมีค่าซ้ำกันเป็นจำนวนครั้งนับไม่ถ้วน ซึ่งมีผลทำให้ไม่มีฟังก์ชันใดเลยเป็นฟังก์ชัน $1-1$ และทำให้ฟังก์ชันตรีโกณมิติเหล่านี้มีอินเวอร์สแต่ไม่เป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส แต่ถ้าเราได้เพิ่มเงื่อนไขเข้าไปในโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติเหล่านี้แล้ว จะทำให้เกิดเป็นฟังก์ชัน $1-1$ ซึ่งเราเรียกว่า ฟังก์ชันอินเวอร์สตรีโกณ–มิติ ดังนิยามต่อไปนี้

1. ฟังก์ชันอินเวอร์สไซน์ (Inverse sine) เขียนแทนด้วย $y = \sin^{-1} x$ หรือ $y = \arcsin x$ สำหรับแต่ละค่า x ในช่วง $[-1,1]$ และจำนวน y ในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ โดยที่ $\sin y = x$ ($y = \arcsin x$ เทียบเท่ากับ $x = \sin y$) มีกราฟดังรูป



2. ฟังก์ชันอินเวอร์สโคไซน์ (Inverse cosine) เขียนแทนด้วย $y = \cos^{-1} x$ หรือ $y = \arccos x$ สำหรับแต่ละค่า x ในช่วง $[-1,1]$ และจำนวน y ในช่วง $[0,\pi]$ โดยที่ $\cos y = x$ ($y = \arccos x$ เทียบเท่ากับ $x = \cos y$) มีกราฟดังรูป



ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ของ x แล้ว และจากกฎลูกโซ่ สามารถเขียนสูตรทั่วไปของอนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์สตรีโกณมิติได้ดังนี้

1. $\dfrac{d}{dx}[\arcsin u] = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

2. $\dfrac{d}{dx}[\arccos u] = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}[\arctan u] = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

4. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = -\dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

5. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccosec} u] = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. $y=\arcsin(x^2+1)$

ข. $y=\arctan\dfrac{x}{2}$

ค. $y=\operatorname{arcsec}\dfrac{1}{x}$

ง. $y=\arccos x^2$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. $y = \operatorname{arccot}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

ข. $y = \operatorname{arccosec}\sqrt[3]{x}$

ค. $y = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}\tan x\right)$

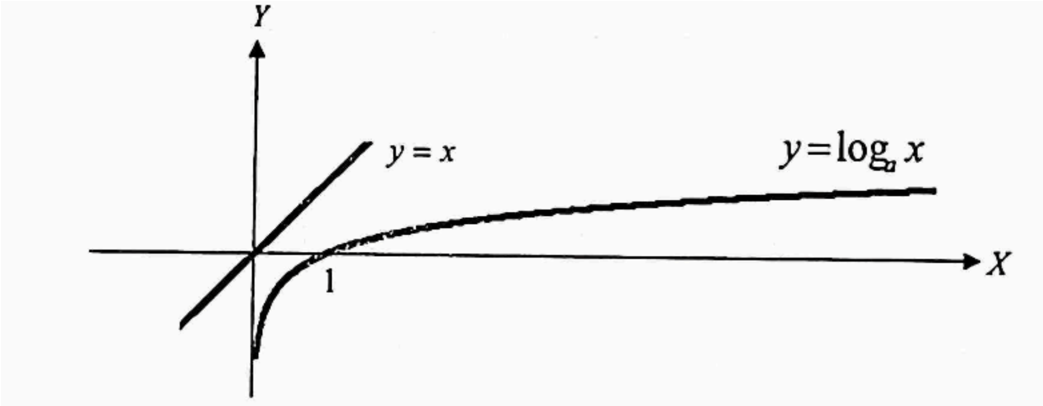
ง. $y = \sqrt{\arccos\sqrt{x}}$

ตัวอย่าง จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = (\operatorname{arccot} x)\sin 6x$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $f(x)=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$

ตัวอย่าง ถ้า $y=x^2\operatorname{arccosec}\sqrt{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด $x=2$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม



สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 0$
3. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
4. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
5. $\log_a M^P = p\log_a M$
6. $\log_{a^p} M = \frac{1}{p}\log_a M$
7. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$
8. $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$
9. $\log_a a^X = x$
10. $a^{\log_a X} = x$

ลอการิทึมสามัญ นิยมเขียนในรูป $\log x$ แทน $\log_{10} x$

ลอการิทึมธรรมชาติ นิยมเขียนในรูป $\ln x$ (อ่านว่า ell en ของ x) แทน $\log_e x$

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln e = 1$
3. $\ln \frac{1}{e} = -1$
4. $\ln e^x = x$
5. $e^{\ln x} = x$
6. $\ln ab = \ln a + \ln b$
7. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
8. $\ln a^c = c \ln a$

$$\frac{d}{dx}[\log_a x] = \frac{1}{x}\log_a e \quad \blacksquare$$

และถ้าให้ $y = f(x) = \log_e x = \ln x$

จะได้ $\frac{d}{dx}[\log_e x] = \frac{1}{x}\log_e e = \frac{1}{x}$

หรือ $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x} \quad \blacksquare$

จะเห็นว่าสูตรอนุพันธ์ของ $y = \log_a x$ เมื่อ $a = e$ นั้นจะมีความสะดวกและง่ายมาก ดังนั้นจึงเป็นเหตุผลสำคัญที่จะเห็นว่า ลอการิทึมธรรมชาติมีบทบาทที่สำคัญพิเศษอย่างมากในแคลคูลัส นั่นเอง และถ้า v เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ของ x แล้ว และอาศัยกฎลูกโซ่จะได้สูตรทั่วไปสำหรับอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx}[\log_a u] = \frac{1}{u}\log_a e\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. $y = \log_a(4x^2+3)$

ข. $y = \log\frac{3x}{1-x^2}$

ค. $y = \sqrt[3]{\log x^2}$

ง. $y = \ln(2x-1)^3$

จ. $y = \ln^3(2x-1)$

ฉ. $y = \ln(x^3-2)(3x^2+1)$

ช. $y = (x^2+1)\ln^2(x^2+1)$

ซ. $y = \ln\sin 4x$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

กำหนดให้ $y = f(x) = a^x$

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{d}{dx}[x \ln a]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln a \frac{d}{dx}[x]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln a$$

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a$$

$$= a^x \ln a$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln a$

แทน $a = e$ จะได้ $\ln a = \ln e = 1$ จึงได้สูตร ดังนี้

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

ถ้า v เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ของ x แล้ว อาศัยกฎลูกโซ่จะได้สูตรทั่วไป สำหรับอนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx}[a^u] = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[e^u] = e^u \frac{du}{dx}$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. $y = 3^{x^2-5}$ ข. $y = 2^{\sin x}$

ค. $y = e^{x^4}$ ง. $y = e^{8-x^2}$

จ. $y = e^{(x-e^{3x})}$ ฉ. $y = x^2 e^{-x}$

ผลต่างอนุพัทธ์ (Differential)

ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร y และ x เป็นฟังก์ชันในรูปของ $y = f(x)$ เราสามารถหาค่า y ได้ เมื่อทราบค่า x เช่น $x = a$ จะได้ $y = f(a)$ และถ้าต้องการทราบว่าค่า y เปลี่ยนแปลงไปเท่าใด เมื่อค่า x มีการเปลี่ยนแปลงไปเท่ากับ Δx สามารถหาได้จาก $f(x+\Delta x) - f(x)$ ซึ่งโดยทั่ว ๆ ไป ค่านี้เราแทนด้วย Δy กล่าวได้ว่า เป็นส่วนที่เปลี่ยนแปลงของ y เมื่อ x มีการเปลี่ยนแปลงไปเท่ากับ Δx แต่ในกรณีที่ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซับซ้อน การคำนวณหา $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยตรงอาจจะเสียเวลา จึงมีการประมาณค่า Δy นี้ด้วยค่าที่ใกล้เคียงกันโดยใช้อนุพันธ์มาช่วยในการหาค่าใหม่ ซึ่งเรียกว่า ผลต่างอนุพัทธ์

จากนิยาม ถ้า $y = x$ ก็จะได้

$$dy = \frac{dx}{dx}\Delta x = \Delta x$$

และจาก $y = x$ ก็จะได้ $dy = dx$

นั่นคือ $\Delta x \approx dx$

แสดงว่า ถ้า x เป็นตัวแปรอิสระแล้ว ผลต่างอนุพัทธ์ของ x หรือ dx มีค่าเท่ากับส่วนเปลี่ยนแปลงของ x หรือ Δx

ดังนั้น ถ้า $y = f(x)$ เมื่อ x เป็นตัวแปรอิสระแล้ว

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

นั่นคือ ถ้าให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ Δx เป็นส่วนเปลี่ยนแปลงของ x กล่าวได้ว่า

1. ผลต่างอนุพัทธ์ของ x เขียนแทนด้วย dx ซึ่งกำหนดโดย $dx = \Delta x$
2. ผลต่างอนุพัทธ์ของ y หรือ $f(x)$ เขียนแทนด้วย dy หรือ $df(x)$ ซึ่งกำหนดโดย
   $dy = df(x) = f'(x)dx$

ตัวอย่าง จงหาผลต่างอนุพัทธ์ของ y ที่กำหนดให้ดังนี้

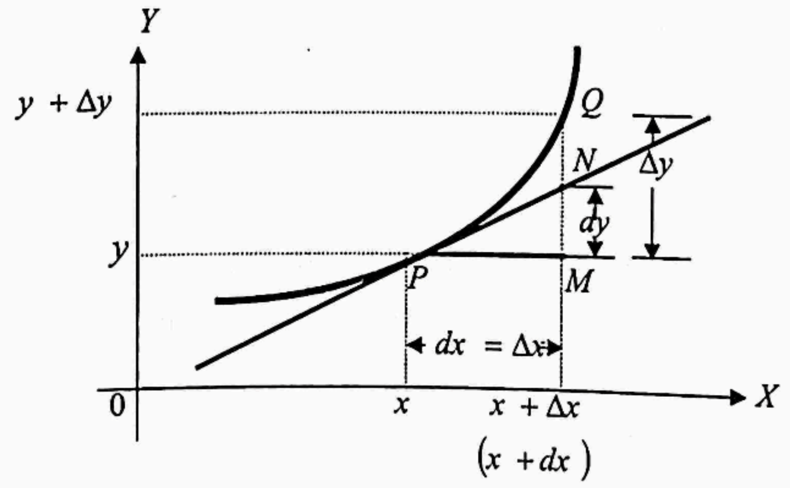
1. $y = x^2 + 2x - 4$

2. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

3. $y = \theta \cos\theta$

ความหมายของผลต่างอนุพันธ์ทางเรขาคณิต

ให้ $P(x, y)$ และ $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ เป็นจุดอยู่บนกราฟของ $y = f(x)$ ดังรูป



เนื่องจากความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ณ จุด $P(x, y)$ คือ $f'(x)$ จากรูปจะได้ว่า

ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ณ จุด $P(x, y)$ คือ $\frac{|MN|}{dx}$

เมื่อ $|MN|$ คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรง MN ดังนั้น

$$\frac{|MN|}{dx} = f'(x)$$

หรือ $$|MN| = f'(x)dx$$

จากนิยามของผลต่างอนุพัทธ์จะได้ว่า $dy = |MN|$

นอกจากนี้ยังได้ว่า $\Delta y \approx dy$ เมื่อ Δx มีค่าเข้าใกล้ 0

ตัวอย่าง กำหนดให้ $y = \sqrt{x}$ จงหา dy และ Δy ถ้า $x = 4$ และ $dx = \Delta x = 3$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของ $y = \sqrt{x}$ เพื่อแสดง dy และ Δy

ตัวอย่าง กำหนดให้ $y = x^{\frac{3}{2}}$ จงประมาณค่าที่เปลี่ยนแปลงของ y หรือ dy ถ้าค่าของ x เปลี่ยนจาก $x = 9$ เป็น $x = 9.01$

สูตรของผลต่างอนุพัทธ์

เราสามารถเขียนสูตรเบื้องต้นในการหาอนุพันธ์ในเทอมของผลต่างอนุพัทธ์ได้ ดังตารางต่อไปนี้

สูตรอนุพันธ์	สูตรผลต่างอนุพัทธ์
$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$d(c) = 0$
$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$	$d(cu) = cdu$
$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$	$d(u \pm v) = du \pm dv$
$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$	$d(uv) = udv + vdu$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$	$d(u^n) = nu^{n-1}du$

ตัวอย่าง จงหา dy ถ้า $y = x\sin x$