มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2568

รหัสวิชา	**ชื่อวิชา**	**วันเวลาสอบ**	**คะแนนเต็ม**
MAI3307	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 13:00 - 16:00 วันพฤหัสบดี ที่ 6 พฤศจิกายน 2568	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**................................. **หมู่เรียน**................

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 13 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
   - **ตอนที่** 1 ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 3 ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ จำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								รวม
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_3, +)$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \overline{2x}$$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง** เมื่อ $x, y \in \mathbb{Z}$

ก. φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)

ข. $\varphi(3x) = \bar{0}$

ค. $\varphi(2x) = \bar{x}$

ง. Ker$(\varphi) = \{0\}$

จ. Ran$(\varphi) = \mathbb{Z}_3$

2. ให้ $\varphi : G \to G'$ เป็นฟังก์ชันสมสัณฐาน (isomorphism) ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. $G \cong G'$

ข. $G \subseteq G'$

ค. φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)

ง. φ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (injective function)

จ. φ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง (surjective function)

3. ถ้า u เป็นหน่วย (unit) ในริง R ที่มียูนิตี (unity) ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ถูกต้อง**

ก. มี $v \in R$ ซึ่ง $uv = 1$

ข. มี $v \in R$ ซึ่ง $u + v = 1$

ค. มี $v \in R$ ซึ่ง $uv = 0$

ง. มี $v \in R$ ซึ่ง $u + v = 0$

จ. $u = 1$

4. สมาชิกข้อใดต่อไปนี้เป็น **ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ของ $\mathbb{Z}_{24}$

ก. $\bar{5}$

ข. $\bar{7}$

ค. $\bar{9}$

ง. $\overline{11}$

จ. $\overline{19}$

5. สมาชิกในข้อใดต่อไปนี้ **ลดทอนไม่ได้ (irreducible)** ในริงพหุนาม $\mathbb{Z}[x]$

ก. $4x$

ข. $4x^2 - x$

ค. $2x^2 - x$

ง. $4x^2 - 1$

จ. $2x^2 - 1$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ______________________

กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_{10}, +)$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) ถ้า $\varphi(3) = \bar{5}$ จงหา $\varphi(12)$

7. ______________________

จงหาจำนวน **ริงย่อย (subring)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^4}$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน

8. ______________________

จงหาจำนวนไอดีล (ideal) ทั้งหมดที่**ไม่ใช่**ไอดีลเฉพาะ (prime ideal) ของ $\mathbb{Z}_{2025}$

9. ______________________

จงหาจำนวน **ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{25}$

10. ______________________

ให้ $p(x) = ax^3 + bx + c$ เป็นพหุนามที่มีระดับขั้น (degree) เป็น 3 ใน $\mathbb{Z}_4[x]$ แล้ว $p(x)$ เป็นไปได้ทั้งหมดกี่แบบ

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_{10}, +)$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \overline{5x^2}$$

11.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)** หรือไม่

11.2 **(3 คะแนน)** จงหา Ker(φ)

11.3 **(2 คะแนน)** จงใช้ทฤษฎีบทสมสัณฐานบทที่ 1 (first isomorphism theorem)

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}, \bar{5}\}$$

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป โดยที่ $\varphi : G_1 \to G_2$ เป็น**ฟังก์ชันสมสัณฐาน (isomorphism)** จงพิสูจน์ว่า

ถ้า G_1 เป็นกรุปอาบีเลียน แล้ว G_2 เป็นกรุปอาบีเลียน

12.2 **(5 คะแนน)** ให้ $\mathbb{R}$ มีการดำเนินการทวิภาคที่นิยามโดย

$$a \oplus b = a^2 + b^2$$
$$a \odot b = 2ab$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ **มีสมบัติการแจกแจง (distributive law)** หรือไม่

13. **(10 คะแนน)** พิจารณาริง $M_{33}(\mathbb{R})$ กำหนดให้

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

13.1 **(4 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า S เป็น **ริงย่อย (subring)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

13.2 **(3 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า S เป็น **ไอดีลขวา (right ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

13.3 **(3 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า S เป็น **ไอดีลซ้าย (left ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

14. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{R} \to M_{22}(\mathbb{R})$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

14.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง (ring homomorphism)** หรือไม่

14.2 **(5 คะแนน)** จงหา Ker(φ)

15. **(10 คะแนน)** จงหา **ไอดีลใหญ่สุด (maximal ideal)** ของ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$ พร้อมเขียนแสดงทิศ

16. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

16.1 **(5 คะแนน)** ให้ $\mathbb{Z}_n$ เป็นอินทิกรัลโดเมน โดยที่ $n < p$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า

$\mathbb{Z}_{np}$ มี ตัวหารศูนย์ (zero divisor) ทั้งหมด 6 ตัว

แล้วจำนวนสมาชิกในริง $\mathbb{Z}_{n+p}$ ที่เป็นตัวหารศูนย์มีกี่ตัว

16.2 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า $2+\sqrt{-3}$ เป็นสมาชิก **ลดทอนไม่ได้ (irreducible)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

17. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

17.1 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า 7 **ไม่เป็น สมาชิกเฉพาะ (prime element)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

17.2 **(5 คะแนน)** ให้ $p(x) = x^2 + a$ และ $q(x) = x^4 + x^3 + x^2$ เป็นพหุนาม $\mathbb{Z}_5[x]$
จงหา $a \in \mathbb{Z}_5$ ที่ทำให้

$$[p(x)]^2 + x^3 = q(x) + \bar{4}$$

18. **(10 คะแนน)** จงยกตัวอย่างฟิลด์ที่มีสมาชิก 49 ตัว

ข้อเสนอแนะ : ใช้ริงผลหารของพหุนามและสมาชิกลดทอนไม่ได้

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2568

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI3307	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 13:00 - 16:00 วันพฤหัสบดี ที่ 6 พฤศจิกายน 2568	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_3, +)$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \overline{2x}$$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง** เมื่อ $x, y \in \mathbb{Z}$

ก. φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)

ข. $\varphi(3x) = \bar{0}$

ค. $\varphi(2x) = \bar{x}$

ง. Ker$(\varphi) = \{0\}$ Answer

จ. Ran$(\varphi) = \mathbb{Z}_3$

ตอบข้อ ง.

ก. ถูกต้อง เนื่องจาก $\varphi(x+y) = \overline{2(x+y)} = \overline{2x+2y} = \overline{2x} + \overline{2y} = \varphi(x) + \varphi(y)$

ข. ถูกต้อง เนื่องจาก $\varphi(3x) = \overline{2(3x)} = \overline{6x} = \bar{6}\bar{x} = \bar{0}\bar{x} = \bar{0}$

ค. ถูกต้อง เนื่องจาก $\varphi(2x) = \overline{2(2x)} = \overline{4x} = \bar{4}\bar{x} = \bar{1}\bar{x} = \bar{x}$

ง. ไม่ถูกต้อง เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = \bar{0}\} = \{x \in \mathbb{Z} : \overline{2x} = \bar{0}\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid 2x\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x\} = 3\mathbb{Z}\end{aligned}$$

จ. ถูกต้อง เนื่องจาก $\varphi(0) = \bar{0}$, $\varphi(1) = \bar{2}$ และ $\varphi(2) = \bar{1}$ ดังนั้น Ran$(\varphi) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} = \mathbb{Z}_3$

2. ให้ $\varphi : G \to G'$ เป็นฟังก์ชันสมสัณฐาน (isomorphism) ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. $G \cong G'$

   ข. $G \subseteq G'$ Answer

   ค. φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)

   ง. φ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (injective function)

   จ. φ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง (surjective function)

   ตอบข้อ ข. ถ้า $\varphi : G \to G'$ เป็นฟังก์ชันสมสัณฐาน จะได้ว่า $G \cong G'$ และ φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานที่ 1-1 และทั่วถึง โดย ข. ไม่ถูกต้อง เนื่องจาก ไม่จำเป็นที่ $G \subseteq G'$

3. ถ้า u เป็นหน่วย (unit) ในริง R ที่มียูนิตี (unity) ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ถูกต้อง**

   ก. มี $v \in R$ ซึ่ง $uv = 1$ Answer

   ข. มี $v \in R$ ซึ่ง $u + v = 1$

   ค. มี $v \in R$ ซึ่ง $uv = 0$

   ง. มี $v \in R$ ซึ่ง $u + v = 0$

   จ. $u = 1$

   ตอบข้อ ก. เนื่องจาก ถ้า u เป็นหน่วย (unit) ในริง R หมายความว่า มี $v \in R$ ซึ่ง $uv = 1$ หรือกล่าวได้ว่า u มีตัวผกผันการคูณใน R

4. สมาชิกข้อใดต่อไปนี้เป็น **ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ของ $\mathbb{Z}_{24}$

   ก. $\bar{5}$

   ข. $\bar{7}$

   ค. $\bar{9}$ Answer

   ง. $\overline{11}$

   จ. $\overline{19}$

   ตอบข้อ ค. ตัวหารศูนย์ใน $\mathbb{Z}_{24}$ คือสมาชิก a ที่ $\gcd(a, 24) \neq 1$

5. สมาชิกในข้อใดต่อไปนี้ **ลดทอนไม่ได้ (irreducible)** ในริงพหุนาม $\mathbb{Z}[x]$

   ก. $4x$

   ข. $4x^2 - x$

   ค. $2x^2 - x$

   ง. $4x^2 - 1$

   จ. $2x^2 - 1$ Answer

   ตอบข้อ จ. เนื่องจาก $2x^2 - 1 = (\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$ แต่ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ตอบ $\bar{0}$

กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_{10}, +)$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) ถ้า $\varphi(3) = \bar{5}$ จงหา $\varphi(12)$

แนวคำตอบ

$$\varphi(12) = \varphi(3+3+3+3) = \varphi(3)+\varphi(3)+\varphi(3)+\varphi(3) = \bar{5}+\bar{5}+\bar{5}+\bar{5} = \overline{20} = \bar{0} \quad \#$$

7. ตอบ 15

จงหาจำนวน **ริงย่อย (subring)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^4}$ เมื่อ p และ q เป็็จำนนเฉพาะที่แตกต่างกัน

แนวคำตอบ เนื่องจาก p และ q เป็็จำนนเฉพาะที่แตกต่างกัน นั่นคือ $\gcd(p,q) = 1$ ทำให้ได้ว่า $\gcd(p^2, q^4) = 1$ ฉะนั้น $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^4} \cong \mathbb{Z}_{p^2q^4}$ จำนวนริงย่อยทั้งหมด (เท่ากับกรุปย่อย)

$$\tau(p^2 \cdot q^4) = (2+1)(4+1) = 15 \quad \#$$

8. ตอบ 13

จงหาจำนวนไอดีล (ideal) ทั้งหมดที่**ไม่ใช่**ไอดีลเฉพาะ (prime ideal) ของ $\mathbb{Z}_{2025}$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\tau(2025) = \tau(3^4 \cdot 5^2) = (4+1)(2+1) = 15$$

จะได้ว่ามีไอดีสทั้งหมด 15 ไอดีล โดยมี $\langle \bar{3} \rangle$ และ $\langle \bar{5} \rangle$ เป็นไอดีลเฉพาะ ดังนั้นไอดีลทั้งหมดที่**ไม่ใช่**ไอดีลเฉพาะของ $\mathbb{Z}_{2025}$ เท่ากับ $15 - 2 = 13$ ไอดีล $\quad \#$

9. ตอบ 239

จงหาจำนวน **ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{25}$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(16, 25) = 1$ จะได้ว่า $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{25} \cong \mathbb{Z}_{16\times 25}$ จำนวนตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{25}$ เท่ากับ

$$(16 \times 25 - 1) - \phi(16 \times 25) = (400-1) - \phi(2^4 \cdot 5^2) = 399 - (2^4 - 2^3)(5^2 - 5) = 399 - 8(20) = 239 \quad \#$$

10. ตอบ 48

ให้ $p(x) = ax^3 + bx + c$ เป็นพหุนามที่มีระดับขั้น (degree) เป็น 3 ใน $\mathbb{Z}_4[x]$ แล้ว $p(x)$ เป็นไปได้ทั้งหมดกี่แบบ

แนวคำตอบ พิจารณาพหุนาม $p(x) = ax^3 + bx + c$ โดยที่ $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ โดยที่ $a \neq \bar{0}$ ดังนั้นจำนวนรูปแบบที่ $p(x)$ เป็นไปได้ เท่ากับ

$$3 \times 4 \times 4 = 48 \quad \#$$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_{10}, +)$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \overline{5x^2}$$

11.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)** หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= \overline{5(x+y)^2} = \overline{5(x^2+2xy+y^2)} \\ &= \overline{5x^2+10xy+5y^2} = \overline{5x^2} + \overline{10xy} + \overline{5y^2} \\ &= \overline{5x^2} + \bar{0} + \overline{5y^2} = \varphi(x) + \varphi(y)\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

11.2 **(3 คะแนน)** จงหา Ker(φ)

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = \bar{0}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : \overline{5x^2} = \bar{0}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : 10 \mid 5x^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\} = 2\mathbb{Z}\end{aligned}$$

11.3 **(2 คะแนน)** จงใช้ทฤษฎีบทสมสัณฐานบทที่ 1 (first isomorphism theorem)

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}, \bar{5}\}$$

แนวคำตอบ พิจารณาจำนวนคู่ $x = 2k$ และจำนวนคี่ $x = 2k+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(2k) = \overline{5(2k)^2} = \overline{20k^2} = \bar{0} \\ \varphi(x) &= \varphi(2k+1) = \overline{5(2k+1)^2} = \overline{5(4k^2+4k+1)} = \overline{20k^2+20k+5} = \bar{5}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\text{Ran}(\varphi) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$$

โดยทฤษฎีบทสมสัณฐานบทที่ 1 จะได้ว่า $\mathbb{Z}/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Ran}(\varphi)$ นั่นคือ

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}, \bar{5}\}$$

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป โดยที่ $\varphi : G_1 \to G_2$ เป็น**ฟังก์ชันสมสัณฐาน (isomorphism)** จงพิสูจน์ว่า

ถ้า G_1 เป็นกรุปอาบีเลียน แล้ว G_2 เป็นกรุปอาบีเลียน

แนวคำตอบ สมมติว่า G_1 เป็นกรุปอาบีเลียน ให้ $s, t \in G_2$ จะได้ว่ามี $x, y \in G_1$ ซึ่ง $\varphi(x) = s, \varphi(y) = t$ จะได้ว่า $xy = yx$ และ

$$\begin{aligned} st &= \varphi(x)\varphi(y) \\ &= \varphi(xy) \\ &= \varphi(yx) \\ &= \varphi(y)\varphi(x) \\ &= ts \end{aligned}$$

ดังนั้น G_2 เป็นกรุปอาบีเลียน

12.2 **(5 คะแนน)** ให้ มีการดำเนินการทวิภาคที่นิยามโดย

$$\begin{aligned} a \oplus b &= a^2 + b^2 \\ a \odot b &= 2ab \end{aligned}$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ **มีสมบัติการแจกแจง (distributive law)** หรือไม่

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} 1 \odot (2 \oplus 3) &= 1 \odot (2^2 + 3^2) = 1 \odot 13 = 2(1)(13) = 26 \\ (1 \odot 2) \oplus (1 \odot 3) &= (2 \cdot 1 \cdot 2) \oplus (2 \cdot 1 \cdot 3) = 4 \oplus 6 = 4^2 + 6^2 = 52 \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า $1 \odot (2 \oplus 3) \neq (1 \odot 2) \oplus (1 \odot 3)$
ดังนั้น $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ ไม่มีสมบัติการแจกแจง

13. **(10 คะแนน)** พิจารณาริง $M_{33}(\mathbb{R})$ กำหนดให้

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

13.1 **(4 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า S เป็น **ริงย่อย (subring)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-x & 0 & 0 \\ 0 & b-y & 0 \\ 0 & 0 & c-z \end{bmatrix} \in S$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & 0 & 0 \\ 0 & by & 0 \\ 0 & 0 & cz \end{bmatrix} \in S$$

ดังนั้น S เป็นริงย่อยของ $M_{33}(\mathbb{R})$

13.2 **(3 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า S เป็น **ไอดีลขวา (right ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \notin S$$

ดังนั้น S ไม่เป็นไอดีลขวาของ $M_{33}(\mathbb{R})$

13.3 **(3 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า S เป็น **ไอดีลซ้าย (left ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \notin S$$

ดังนั้น S ไม่เป็นไอดีลซ้ายของ $M_{33}(\mathbb{R})$

14. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{R} \to M_{22}(\mathbb{R})$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

14.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง (ring homomorphism)** หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \\
&= \varphi(x) + \varphi(y) \\
\varphi(xy) &= \begin{bmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \\
&= \varphi(x)\varphi(y)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง

14.2 **(5 คะแนน)** จงหา Ker(φ)

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\varphi) &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \{0\} \quad \#
\end{aligned}$$

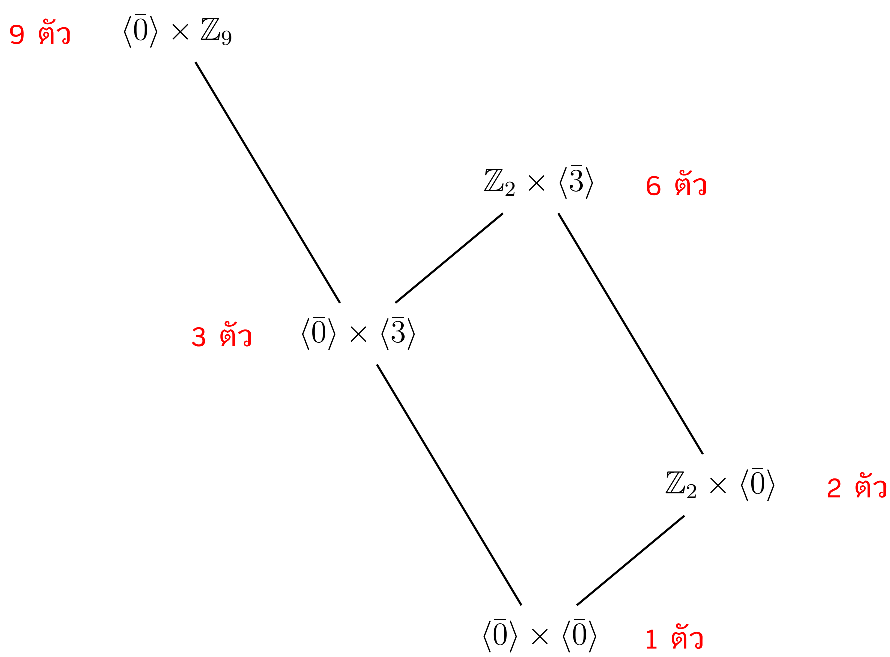
15. **(10 คะแนน)** จงหา **ไอดีลใหญ่สุด (maximal ideal)** ของ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$ พร้อมเขียนแลตทิซ

แนวคำตอบ ไอดีลของ $\mathbb{Z}_2$ คือ $\langle \bar{0} \rangle , \mathbb{Z}_2$ และ ไอดีลของ $\mathbb{Z}_9$ คือ $\langle \bar{0} \rangle , \langle \bar{3} \rangle , \mathbb{Z}_9$

ไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$ คือ

$$\begin{array}{ccc} \langle \bar{0} \rangle \times \langle \bar{0} \rangle & \langle \bar{0} \rangle \times \langle \bar{3} \rangle & \langle \bar{0} \rangle \times \mathbb{Z}_9 \\ \mathbb{Z}_2 \times \langle \bar{0} \rangle & \mathbb{Z}_2 \times \langle \bar{3} \rangle & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \end{array}$$

เขียนแลตทิซโดยไม่มีไอดีล $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$ ได้ดังรูป



จากแผนภาพจะได้ว่า $\mathbb{Z}_2 \times \langle \bar{3} \rangle$ และ $\langle \bar{0} \rangle \times \mathbb{Z}_9$ เป็นไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$

16. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

16.1 **(5 คะแนน)** ให้ $\mathbb{Z}_n$ เป็นอินทิกรัลโดเมน โดยที่ $n < p$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า

$\mathbb{Z}_{np}$ มี ตัวหารศูนย์ (zero divisor) ทั้งหมด 6 ตัว

แล้วจำนวนสมาชิกในริง $\mathbb{Z}_{n+p}$ ที่เป็นตัวหารศูนย์มีกี่ตัว

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\mathbb{Z}_n$ เป็นอินทิกรัลโดเมน ดังนั้น $\mathbb{Z}_n$ ไม่มีตัวหารศูนย์ หรือกล่าวได้ว่า n เป็นจำนวนเฉพาะ ทำให้ได้ว่า $\gcd(n,p) = 1$ จาก $\mathbb{Z}_{np}$ มีตัวหารศูนย์ทั้งหมด 6 ตัว จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(np-1) - \phi(np) &= 6\\ (np-1) - \phi(n)\phi(p) &= 6\\ (np-1) - (n-1)(p-1) &= 6\\ np - 1 - (np - n - p + 1) &= 6\\ n + p &= 8\end{aligned}$$

พิจารณา p เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $n < p$

p	n	$n+p$
2	6	8
3	5	8

ดังนั้น $p = 5$ และ $n = 3$ พิจารณา $\mathbb{Z}_{n+p} = \mathbb{Z}_{5+3} = \mathbb{Z}_8$

$$\begin{aligned}\text{จำนวนตัวหารศูนย์ของ } \mathbb{Z}_8 &= (8-1) - \phi(8)\\ &= 7 - \phi(2^3)\\ &= 7 - (2^3 - 2^2)\\ &= 7 - 4\\ &= 3 \quad \#\end{aligned}$$

16.2 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า $2 + \sqrt{-3}$ เป็นสมาชิก **ลดทอนไม่ได้ (irreducible)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

แนวคำตอบ ห้ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $2 + \sqrt{-3} = (a + b\sqrt{-3})(c + d\sqrt{-3})$ จะได้ว่า

$$(ac - 3bd) + (ad + bc)\sqrt{-3} = 2 + \sqrt{-3}$$

ดังนั้น $ac - 2bd = 2$ และ $ad + bc = 1$ แล้ว

$$(a - b\sqrt{-3})(c - d\sqrt{-3}) = (ac - 3bd) - (bc + ad)\sqrt{-3} = 2 - \sqrt{-3}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned}(a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2) &= (a + b\sqrt{-3})(c + d\sqrt{-3})(a - b\sqrt{-3})(c - d\sqrt{-3})\\ &= (2 + \sqrt{-3})(2 - \sqrt{-3})\\ &= 2^2 + 3 = 7 = 1 \cdot 7 \qquad \text{(เป็นจำนวนเฉพาะ)}\end{aligned}$$

นั่นคือ $a^2 + 3b^2 = 1$ และ $c^2 + 3d^2 = 7$ หรือ $a^2 + 3b^2 = 7$ และ $c^2 + 3d^2 = 1$
จะได้ว่า $a + b\sqrt{-3}$ หรือ $c + d\sqrt{-3}$ เป็นหน่วย สรุปได้ว่า $2 + \sqrt{-3}$ เป็นสมาชิกลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

17. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

17.1 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า 7 **ไม่เป็น สมาชิกเฉพาะ (prime element)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$7 \cdot 2 = 14 = 3^2 + 5 = (3 + \sqrt{-5})(3 - \sqrt{-5})$$

จะได้ว่า $7 \mid (3 + \sqrt{-5})(3 - \sqrt{-5})$
สมมติว่า $7 \mid (3 + \sqrt{-5})$ จะได้ว่ามี $x, y \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} 7(x + y\sqrt{-5}) &= 3 + \sqrt{-5} \\ 7x + 7y\sqrt{-5} &= 3 + \sqrt{-5} \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $7x = 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะว่า $x \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $7 \nmid (3 + \sqrt{-5})$
ในทำนองเดียวกัน $7 \nmid (3 - \sqrt{-5})$
สรุปได้ว่า 7 ไม่เป็นสมาชิกเฉพาะของ $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

17.2 **(5 คะแนน)** ให้ $p(x) = x^2 + a$ และ $q(x) = x^4 + x^3 + x^2$ เป็นพหุนาม $\mathbb{Z}_5[x]$
จงหา $a \in \mathbb{Z}_5$ ที่ทำให้

$$[p(x)]^2 + x^3 = q(x) + \bar{4}$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} (x^2 + a)^2 + x^3 &= x^4 + x^3 + x^2 + \bar{4} \\ x^4 + 2ax^2 + a^2 + x^3 &= x^4 + x^3 + x^2 + \bar{4} \\ x^4 + x^3 + 2ax^2 + a^2 &= x^4 + x^3 + x^2 + \bar{4} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^2 = \bar{4} &\quad \longrightarrow \quad a = \bar{2}, \bar{3} \\ 2a = \bar{1} &\quad \longrightarrow \quad a = \bar{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = \bar{3}$ #

18. **(10 คะแนน)** จงยกตัวอย่างฟิลด์ที่มีสมาชิก 49 ตัว
ข้อเสนอแนะ : ใช้ริงผลหารของพหุนามและสมาชิกลดทอนไม่ได้

แนวคำตอบ เลือกพหุนาม $p(x) = x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_7[x]$
สมมติว่ามี $a, b \in \mathbb{Z}_7$ ซึ่ง

$$x^2 + \bar{1} = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

ดังนั้น $a + b = \bar{0}$ และ $ab = \bar{1}$ จะได้ว่า

a	b	$a+b$	ab
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$

นั่นคือ $ab \neq \bar{1}$ เกิดข้อขัดแย้งกับ $ab = \bar{1}$ ดังนั้น $x^2 + \bar{1}$ ลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}_7[x]$
จะได้ว่า $\mathbb{Z}_7[x]/\left\langle x^2 + \bar{1} \right\rangle$ เป็นฟิลด์ที่มีสมาชิก $7^2 = 49$ ตัว