



มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร

คณิตศาสตร์

สำหรับการสอนวิทยาศาสตร์

SCZ1303



ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ช่อเอื้อง อุทิศสาร

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์

2569

คำนำ

ตำราเล่มนี้ จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการจัดการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์สำหรับการสอนวิทยาศาสตร์ รหัสวิชา SCZ1303 เพื่อให้นักศึกษาที่ลงทะเบียนเรียนวิชานี้และผู้ที่เกี่ยวข้องสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์ ประกอบไปด้วย

บทที่ 1 ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

บทที่ 2 เมทริกซ์

บทที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

บทที่ 4 ลำดับและอนุกรม

บทที่ 5 เวกเตอร์

บทที่ 6 สถิติเบื้องต้น

บทที่ 7 ลิ้มิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

บทที่ 8 แคลคูลัสเบื้องต้น (อนุพันธ์)

บทที่ 9 ปฏิยานุพันธ์

ผู้เขียนได้มุ่งมั่นตั้งใจในการจัดทำเอกสารเล่มนี้มาก ขอขอบพระคุณครูบาอาจารย์ และนักการศึกษาทุกท่านที่สร้างคุณประโยชน์ให้กับวงการศึกษามาก หากมีข้อบกพร่องผู้เขียนน้อมรับ และขออภัย ณ ที่นี้ด้วย

ช่อเอื้อง อุทิศะสาร

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

2569

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
บทที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	
1. ความสัมพันธ์	1
1.1 คู่อันดับ	1
1.2 ผลคูณคาร์ทีเซียน	1
1.3 ความสัมพันธ์	3
1.4 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์	4
1.5 กราฟของความสัมพันธ์	6
1.7 อินเวอร์สของความสัมพันธ์	8
2. ฟังก์ชัน	10
2.1 ความหมายฟังก์ชัน	10
2.2 ลักษณะของฟังก์ชัน	12
2.3 การกำหนดฟังก์ชัน	14
2.4 ชนิดของฟังก์ชัน	15
2.5 ฟังก์ชันเชิงประกอบ	18
1.6 อินเวอร์สของฟังก์ชันและฟังก์ชันอินเวอร์ส	20
2.6 พีชคณิตของฟังก์ชัน	21
2.7 แนวทางการนำความรู้เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์	22
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1	31

สารบัญ (ต่อ)

เรื่อง	หน้า
บทที่ 2 เมทริกซ์	36
2.1 มิติและสัญลักษณ์ของเมทริกซ์	36
2.2 การเท่ากันของเมทริกซ์	37
2.3 การบวกเมทริกซ์	38
2.4 การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง	39
2.5 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์	42
2.6 คุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์	45
2.7 ดีเทอร์มิแนนต์	46
2.8 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์	54
2.9 การประยุกต์เรื่องเมทริกซ์ไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์	59
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2	68
บทที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย	71
3.1 โพรเจกชัน	71
3.2 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด	75
3.3 จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด	77
3.4 จุดแบ่งเส้นตรงตามอัตราส่วนที่กำหนดให้	79
3.5 การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม	82

สารบัญ (ต่อ)

เรื่อง	หน้า
3.5 การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม	82
3.6 การหาค่าโคออร์ดิเนตของจุดตัดของเส้นมีนัยฐาน	84
3.7 ความชันของเส้นตรง	84
3.8 ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง	86
3.9 ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับจุด	89
3.10 ระยะห่างระหว่างเส้นขนาน	90
3.11 ภาคตัดกรวย	92
3.11.1 วงกลม	92
3.11.2 พาราโบลา	93
3.11.3 วงรี	94
3.11.4 ไฮเพอร์โบลา	96
การประยุกต์เรขาคณิตกับการสอนวิทยาศาสตร์	97
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3	102
บทที่ 4 ลำดับและอนุกรม	105
4.1 นิยาม	105
4.2 ลำดับเลขคณิต	107
4.3 ลำดับเรขาคณิต	109

สารบัญ (ต่อ)

เรื่อง	หน้า
4.4 ลิขิตของลำดับอนันต์	112
4.5 อนุกรม	115
4.6 อนุกรมเลขคณิต	117
4.7 อนุกรมเรขาคณิต	117
4.8 ผลบวกของอนุกรมอนันต์	118
4.9 การนำความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์	120
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4	128
บทที่ 5 เวกเตอร์	151
5.1 การบอกปริมาณ	151
5.2 เวกเตอร์ขนานกัน	152
5.3 เวกเตอร์เท่ากัน	152
5.4 นิเสธของเวกเตอร์	153
5.5 เวกเตอร์ศูนย์	153
5.6 การบวกเวกเตอร์	156
5.7 การลบเวกเตอร์	157
5.8 คุณสมบัติของการบวกเวกเตอร์	157
5.9 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	159

สารบัญ (ต่อ)

เรื่อง	หน้า
5.10 การใช้เวกเตอร์พิสูจน์ทฤษฎีบทในเรขาคณิต	162
5.11 เวกเตอร์ในระบบมุมฉาก	165
5.12 การบวกและการลบเวกเตอร์	167
5.13 ขนาดของเวกเตอร์	167
5.14 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย	167
5.15 เวกเตอร์อิสระ	169
5.16 สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์	169
5.17 เวกเตอร์สเปซ	172
5.18 ผลคูณเชิงเวกเตอร์	172
5.19 การนำความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์	175
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5	179
บทที่ 6 สถิติเบื้องต้น	181
6.1 ความหมายของสถิติ	181
6.2 ระเบียบวิธีวิจัยทางสถิติ	181
6.3 ค่ากลางของข้อมูล	182
6.4 การวัดตำแหน่งที่ของข้อมูล	195
6.5 การวัดการกระจายของข้อมูล	202

สารบัญ (ต่อ)

เรื่อง	หน้า
6.6 การแจกแจงปกติมาตรฐาน	206
6.7 การนำความรู้เรื่องสถิติเบื้องต้นไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์	210
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6	214
บทที่ 7 จำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	219
7.1 จำกัดของฟังก์ชัน	219
7.2 ลิมิตอนันต์และลิมิตที่อนันต์	225
7.3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	233
7.4 การนำความรู้เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์	210
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7	243
บทที่ 8 แคลคูลัสเบื้องต้น (อนุพันธ์)	247
8.1 อัตราการเปลี่ยนแปลง	247
8.2 บทนิยามของอนุพันธ์	248
8.3 ความชันของเส้นโค้ง	250
8.4 ความเร็ว	251
8.5 กฎลูกโซ่	252
8.6 ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้	252

สารบัญ (ต่อ)

เรื่อง	หน้า
8.7 ความสัมพันธ์ระหว่างการมีอนุพันธ์กับความต่อเนื่อง	253
8.8 อนุพันธ์อันดับสูง	253
8.9 ความเร่ง	254
8.10 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	254
8.11 การประยุกต์ของอนุพันธ์	255
8.12 การประยุกต์ความรู้เรื่องอนุพันธ์ในการสอนวิทยาศาสตร์	258
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8	262
บทที่ 9 ปฏิยานุพันธ์	265
9.1 ปฏิยานุพันธ์	265
9.2 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต	267
9.3 อินทิกรัลจำกัดเขต	270
9.4 ทฤษฎีหลักมูลของแคลคูลัส	274
9.5 ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน	278
9.6 การประยุกต์ความรู้เรื่องปฏิยานุพันธ์ในการสอนวิทยาศาสตร์	283
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9	286
บรรณานุกรม	289

บทที่ 1

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

1. ความสัมพันธ์

1.1 คู่อันดับ (Order Pairs)

ในคู่อันดับ (x, y) เรียก x ว่าเป็นสมาชิกตัวหน้า และเรียก y ว่าเป็นสมาชิกตัวหลังคู่อันดับ (x, y) และ (y, x) จะไม่เท่ากัน นอกจาก $x = y$ เท่านั้น คู่อันดับ 2 คู่ เท่ากันคือ $(x, y) = (a, b)$ ก็ต่อเมื่อ ตัวหน้าเท่ากันและตัวหลังเท่ากัน คือ $x = a$ และ $y = b$

1.2 ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

นิยาม ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และ เซต B คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมดโดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$

นั่นคือ $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

ตัวอย่างที่ 1.1 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{a, b\}$ จงหา $A \times B$ และ $B \times A$

แนวคิด $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

จะเห็นว่า $A \times B \neq B \times A$

ข้อสังเกตเกี่ยวกับผลคูณคาร์ทีเซียน

1. จำนวนสมาชิกของ $A \times B = n(A) \times n(B)$

จากตัวอย่าง 1.1 จะเห็นว่า A มีสมาชิก 3 ตัว ; B มีสมาชิก 2 ตัว

$\therefore$ จำนวนสมาชิกของ $A \times B = 3 \times 2 = 6$ คู่อันดับ

2. (a, b) ของความสัมพันธ์ หมายถึงคู่อันดับที่มี a เป็นสมาชิกตัวแรก และ b เป็นสมาชิกตัวหลัง

3. (a, b) หมายถึง เซตที่มีสมาชิก 2 ตัวคือ a กับ b

ตัวอย่างที่ 1.2 ให้ $A = (m, n)$ และ $B = (1, 2, 3)$ จงหา $A \times B, B \times A, A \times A, B \times B$

แนวคิด $A \times B = \{(m, 1), (m, 2), (m, 3), (n, 1), (n, 2), (n, 3)\}$

$B \times A = \{(1, m), (1, n), (2, m), (2, n), (3, m), (3, n)\}$

$A \times A = \{(m, m), (m, n), (n, m), (n, n)\}$

$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

ตัวอย่างที่ 1.3 กำหนดให้ $A \times C = \{(2,2), (2,3), (4,2), (4,3)\}$ จงหา เซต A และ C

แนวคิด สมาชิกของ เซต A ได้จากสมาชิกตัวแรกของคู่อันดับ $\therefore A = \{2,4\}$

สมาชิกของ เซต C ได้จากสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ $\therefore C = \{2,3\}$

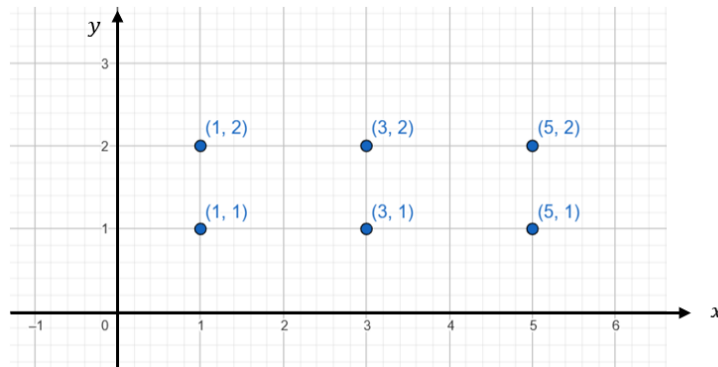
กราฟของผลคูณคาร์ทีเซียน

การเขียนกราฟของผลคูณคาร์ทีเซียนให้แทนเซตทั้งสองด้วยแกนนอน และ แกนตั้งตามลำดับแล้ว ลงจุดแทน สมาชิกบนแกนในช่วงเท่า ๆ กัน ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1.4 กำหนดให้ $A = (1,3,5)$; $B = (1,2)$ จงเขียน $A \times B$ ลงในกราฟ

แนวคิด $A \times B = \{(1,1), (1,2), (3,1), (3,2), (5,1), (5,2)\}$

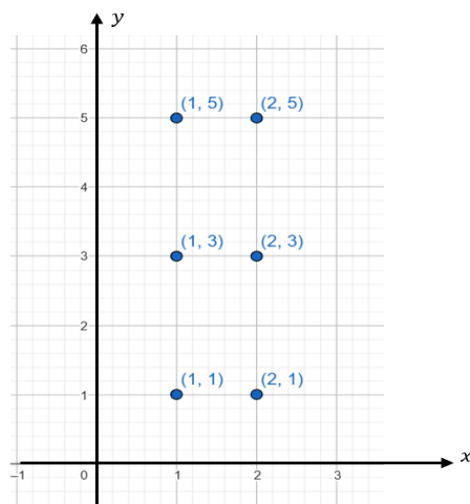
แสดงด้วยกราฟ ได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 1.5 กำหนดให้ $A = (1,3,5)$; $B = (1,2)$ จงหา $B \times A$ แล้วแสดงด้วยกราฟ

แนวคิด จากเซต A, B ในตัวอย่าง 1.3 $\therefore B \times A = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5)\}$

แสดงด้วยกราฟ ได้ดังนี้



**จากกราฟในตัวอย่าง 1.4 และ 1.5 แสดงได้ว่า $A \times B \neq B \times A$

1.3 ความสัมพันธ์ (Relations)

นิยาม r เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยัง เซต B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าความสัมพันธ์ก็เป็นเซตของคู่อันดับ เช่นเดียวกันกับผลคูณคาร์ทีเซียน การเขียนเซตของ ความสัมพันธ์อาจเขียนเป็นแบบแจกแจงสมาชิก หรือแบบบอกเงื่อนไขก็ได้ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1.6 กำหนดให้ $M = \{2,4,6\}$ และ $N = \{5,6,7\}$ และกำหนดความสัมพันธ์ ดังนี้

r_1 คือความสัมพันธ์ “น้อยกว่า” จากเซต M ไป N

r_2 คือความสัมพันธ์ “หารลงตัว” จากเซต M ไป N

r_3 คือความสัมพันธ์ “เป็นรากที่สองของ” จากเซต M ไป N

จงหา r_1, r_2, r_3

แนวคิด $r_1 = \{(2,5), (2,6), (2,7), (4,5), (4,6), (4,7), (6,7)\}$

ดังนั้นในความสัมพันธ์ r_1 ซึ่ง $(2,5) \in r_1$ หมายความว่า “2 น้อยกว่า 5” และ $(6,7) \in r_1$

หมายความว่า “6 น้อยกว่า 7” เหล่านี้เป็นต้น

$r_2 = \{(2,6)\}$ ในความสัมพันธ์ r_2 ซึ่งมี $(2,6) \in r_2$ หมายความว่า “2 หาร 6 ลงตัว”

$r_3 = \{ \}$ หรือ $\emptyset$ เพราะว่า ไม่มีสมาชิกตัวใด ใน M “เป็นรากที่สองของ” สมาชิกตัวใด

ใน N ดังนั้น ความสัมพันธ์ r_3 จึงเป็นเซตว่าง

เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ในรูปเงื่อนไขได้ เช่นกัน ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1.7 กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4, \dots\}$ และ $B = \{2,4,6,8,10, \dots\}$

ให้ r_1 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

แนวคิด $r_1 = \{(x,y) | x \in A, y \in B \text{ และ } y = 2x\}$ หรือเขียน r แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้

$$r_1 = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), \dots\}$$

ตัวอย่างที่ 1.8 กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$ จงหาความสัมพันธ์ r ที่กำหนดให้ ในรูปคู่อันดับ (x,y)

และ $(x,y) \in A \times A$

แนวคิด หาผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times A$ ก่อนดังนี้

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

1. ถ้าให้ r_1 แทนความสัมพันธ์ “ x น้อยกว่า y ”

$$\therefore r_1 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$$

2. ถ้าให้ r_2 แทนความสัมพันธ์ “ x เท่ากับ y ”

$$\therefore r_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

3. ถ้าให้ r_3 แทนความสัมพันธ์ “ x มากกว่าหรือเท่ากับ y ”

$$\therefore r_2 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

เราอาจเขียนความสัมพันธ์ r_1, r_2, r_3 ได้ในรูปของเงื่อนไข ดังนี้

$$r_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid x < y\}$$

$$r_2 = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$$

$$\text{และ } r_3 = \{(x, y) \in A \times A \mid x \geq y\}$$

ตัวอย่างที่ 1.9 กำหนดความสัมพันธ์ r จาก A ไป B เขียนแบบแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้

$$r = \{(2,4), (3,9), (4,16), (5,25)\}$$
 ข้อใดคือการเขียน r แบบบอกเงื่อนไข

ก. $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

ข. $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

ค. $r = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y^2\}$

ง. $r = \{(x, y) \in A \times B \mid x = \frac{y}{2}\}$

แนวคิด คำตอบข้อนี้คือ ข้อ ข. $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

เนื่องจาก จากการเขียน r แบบแจกแจงสมาชิก จะเห็นว่าสมาชิกตัวหลัง มีค่าเท่ากับกำลังสองของสมาชิกตัวแรก หรือ $y = x^2$ นั่นเอง

หมายเหตุ เราอาจเขียน $(x, y) \in r$ เป็น xry ก็ได้ ถ้า r แทนความสัมพันธ์ “น้อยกว่า”

$\therefore xry$ หมายถึง “ x น้อยกว่า y ” และ yrx หมายถึง “ y น้อยกว่า x ” นั่นเอง

1.4 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ (Domains and Ranges)

นิยาม ให้ r เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย D_r เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย R_r ดังนั้น $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$ และ $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$

ตัวอย่างที่ 1.10 กำหนดให้ $U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ และให้ความสัมพันธ์ r ใน U คือ $\{(x, y) \mid y = x^2\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์นี้

แนวคิด ความสัมพันธ์ r ใน U คือ $\{(x, y) \mid y = x^2\}$ เขียนแบบแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้

$$r = \{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), \}$$

$$\therefore D_r = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

เพราะว่า D_r คือ เซตของสมาชิกตัวแรกทั้งหมดจากความสัมพันธ์ r

และ $R_r = \{4, 1, 0\}$ เพราะ R_r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังทั้งหมดจากความสัมพันธ์ r

ตัวอย่างที่ 1.11 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in I \times I \mid y = 2x\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r
 แนวคิด เนื่องจาก $r = \{(x, y) \in I \times I \mid y = 2x\}$

$$\therefore r = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots\}$$

ดังนั้นโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มใด ๆ

ถ้าเขียนแบบแจกแจงจะได้ $D_r = \{1, 2, 3, \dots\}$ และ

เรนจ์เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่(จำนวนคู่) ถ้าเขียนแบบแจกแจงจะได้

$$R_r = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

ตัวอย่างที่ 1.12 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{2}{x}\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

แนวคิด เนื่องจากเราจะหาค่าของจำนวนจริงในรูป $\frac{2}{x}$ ได้เสมอ ยกเว้นเมื่อ $x = 0$

เพราะ $\frac{2}{0}$ ไม่มีความหมาย

$$\therefore D_r = \{x \mid x \in R \wedge x \neq 0\}$$

ส่วนการพิจารณาเรนจ์ของ r นั้น ต้องเขียน x ให้อยู่ในรูปของ y คือจาก $y = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{2}{y}$ จะเห็นว่าค่า $y = 0$ ไม่ได้เช่นเดียวกับ x

$$\therefore R_r = \{y \mid y \in R \wedge y \neq 0\}$$

เซตของโดเมนและเซตของเรนจ์ในข้อนี้จะเท่ากัน เพราะต่างก็เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 0
 นั่นเอง นั่นคือ $D_r = R_r$

ตัวอย่างที่ 1.13 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{16 - x^2}\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r
 แนวคิด เนื่องจากรากที่สองของของจำนวนลบไม่ใช่จำนวนจริง ดังนั้น $16 - x^2$ ไม่สามารถเป็นลบ
 ได้ ต้องเป็นบวกหรือ 0

$$16 - x^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -x^2 \geq -16$$

$$\rightarrow x^2 \leq 16$$

$$\rightarrow |x|^2 \leq 4^2$$

$$\rightarrow |x| \leq 4$$

$$\rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$\therefore D_r = \{x \mid -4 \leq x \leq 4\} \text{ หรือ } D_r = \{x \mid |x| \leq 4\}$$

พิจารณา R_r ได้จาก $16 - x^2 \geq 0$ ซึ่งค่านี้จะมีค่ามากที่สุด เมื่อ $x = 0$

$\therefore$ เมื่อ $x = 0, y = \sqrt{16} = 4$ และเมื่อ x มีค่ามากที่สุดคือ 4 หรือ น้อยที่สุด คือ -4

$$y = 16 - x^2 \quad \therefore y = 16 - 16 = 0$$

$$\therefore R_r = \{y \mid 0 \leq y \leq 4\}$$

ตัวอย่างที่ 1.14 กำหนดให้ $A = \{0,1,2,3, \dots\}$ และ $r = \{(x,y) \in A \times A | x = 15 - 3y\}$

1. จงเขียนความสัมพันธ์ใน A ทั้งหมด
2. จงหาโดเมนของ r
3. จงหาเรนจ์ของ r

แนวคิด 1. ความสัมพันธ์ใน A ซึ่ง $r = \{(x,y) \in w \times w | x = 15 - 3y\}$ คือเซต

$$r = \{(15,0), (12,1), (9,2), (6,3), (3,4), \dots\}$$

$$2. D_r = \{15,12,9,6,3, \dots\}$$

$$3. R_r = \{0,1,2,3,4, \dots\}$$

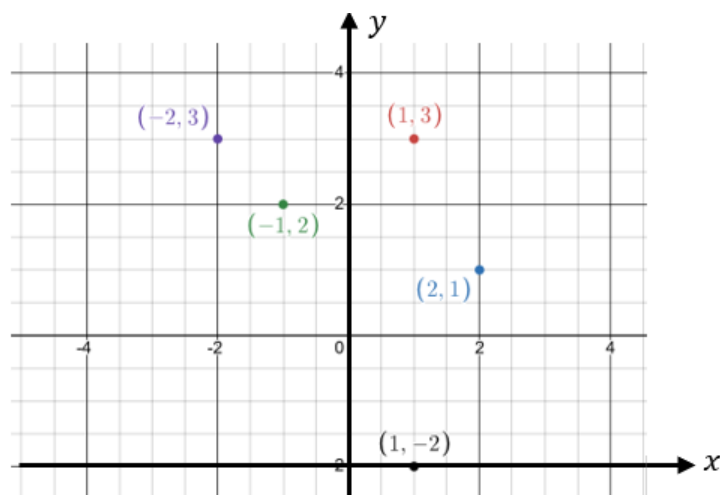
1.5 กราฟของความสัมพันธ์

นิยาม ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง r เป็นสับเซตของ $R \times R$ กราฟของความสัมพันธ์ r คือ เซตของจุดในระนาบโดยที่แต่ละจุดแทนแทนสมาชิกของความสัมพันธ์ r

กราฟของความสัมพันธ์ต่างๆอาจจะมีลักษณะเป็นจุดหลายๆจุดบนระนาบหรือเป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้งลักษณะต่างๆหรือเป็นพื้นที่บางส่วนของระนาบก็ได้ เช่น

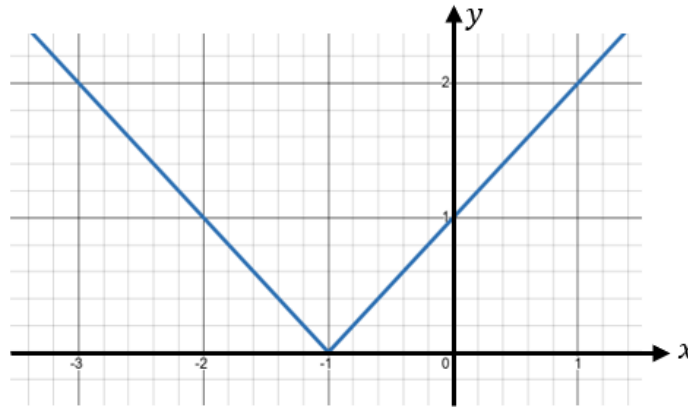
ตัวอย่างที่ 1.15 จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $\{(1,3), (2,1), (-1,2), (-2,3), (1,-2)\}$

แนวคิด เราเขียนกราฟของความสัมพันธ์ได้ดังนี้



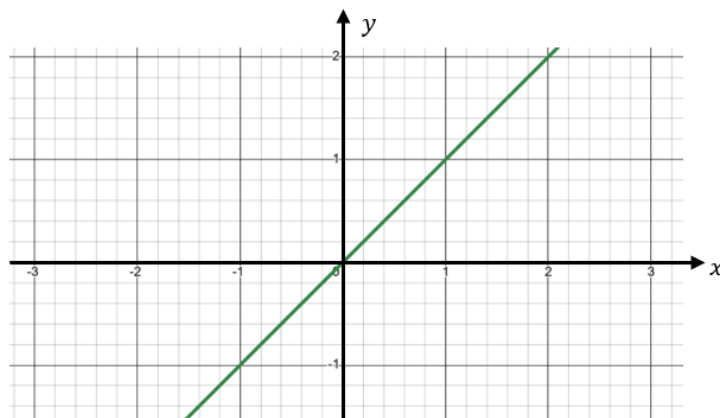
ตัวอย่างที่ 1.16 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = |x + 1|\}$ จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ r

แนวคิด เราเขียนกราฟของความสัมพันธ์ r ได้ดังนี้



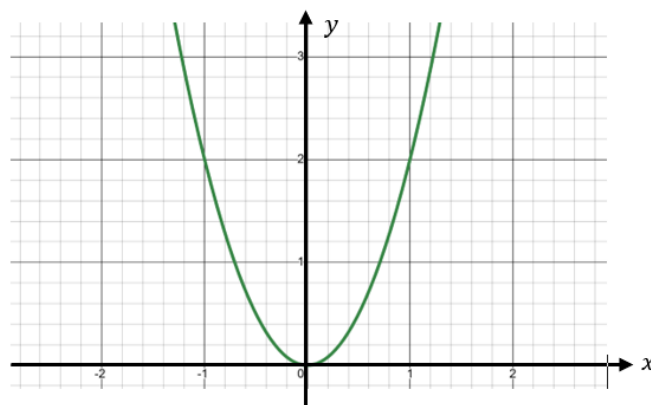
ตัวอย่างที่ 1.17 จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x\}$

แนวคิด เราเขียนกราฟของความสัมพันธ์ r ได้ดังนี้

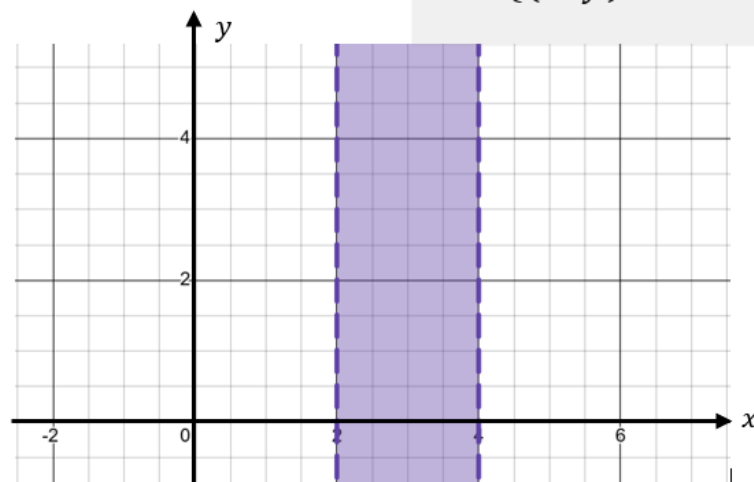


ตัวอย่างที่ 1.18 จงเขียนกราฟของ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x^2\}$

แนวคิด เราเขียนกราฟของความสัมพันธ์ r ได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 1.19 จงเขียนกราฟของ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid 2 < x < 4\}$



1.7 อินเวอร์สของความสัมพันธ์

นิยาม อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r คือความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r เขียนแทนด้วย r^{-1} นั่นคือ

$$r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$$

ตัวอย่างที่ 1.20 จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ของ r พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์ เมื่อกำหนด

$$r = \{(1, m), (2, a), (3, t), (4, h)\}$$

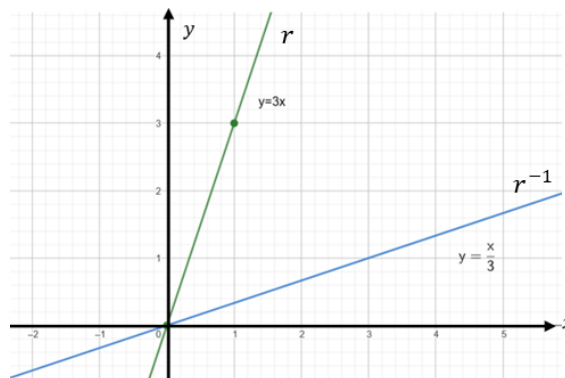
แนวคิด เราสามารถหาได้ดังนี้ $r^{-1} = \{(m, 1), (a, 2), (t, 3), (h, 4)\}$

$$\text{ดังนั้น } D_{r^{-1}} = \{m, a, t, h\} \text{ และ } R_{r^{-1}} = \{1, 2, 3, 4\}$$

ตัวอย่างที่ 1.21 จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1} ในแกนพิกัดฉากเดียวกัน เมื่อกำหนดให้

$$r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 3x\}$$

แนวคิด ถ้า $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 3x\}$ $\therefore r^{-1} = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{x}{3}\}$



ตัวอย่างที่ 1.22 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 8x + 4\}$ จงหาอินเวอร์สของ r

แนวคิด ให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 8x + 4\}$

ขั้นที่ 1 อินเวอร์สของ r ได้จากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลัง

$$\therefore r^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid y = 8x + 4\}$$

ขั้นที่ 2 เขียน x ให้อยู่ในรูปของตัวแปร y โดยคงรูปคู่อันดับ (y, x) ไว้

$$\therefore r^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid x = \frac{y-4}{8}\}$$

ขั้นที่ 3 เขียนคู่อันดับตามแบบมาตรฐาน (x, y) โดยแทนที่ x ด้วย y ในความสัมพันธ์

$$\therefore r^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid y = \frac{x-4}{8}\}$$

ตัวอย่างที่ 1.23 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x-8}\}$ จงหาอินเวอร์สของ r

แนวคิด ให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x-8}\}$

$$\text{ขั้นที่ 1 } \therefore r^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid y = \sqrt{x-8}\}$$

$$\text{ขั้นที่ 2 } r^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid x = y^2 + 8\}$$

$$\text{ขั้นที่ 3 } r^{-1} = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 + 8\}$$

ตัวอย่างที่ 1.24 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x}\}$ จงหาอินเวอร์สของ r

แนวคิด ให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x}\}$

$$\text{ขั้นที่ 1 } \therefore r^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid y = \sqrt{x}\}$$

$$\text{ขั้นที่ 2 } r^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid x = y^2\}$$

$$\text{ขั้นที่ 3 } r^{-1} = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$$

2. ฟังก์ชัน

2.1 ความหมายฟังก์ชัน

นิยาม ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ (Relation) ที่ทุกสมาชิกของโดเมน (Domain) ของคู่อันดับ จับคู่กับสมาชิกของเรนจ์ (Range) เพียงหนึ่งสมาชิกเท่านั้น

แปลความหมายนิยามของฟังก์ชันในเชิงสัญลักษณ์ได้ว่า “ ความสัมพันธ์ f ” เรียกว่าเป็น “ ฟังก์ชัน f ” ได้ก็ต่อเมื่อทุกๆ $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$

แปลความหมายนิยามของฟังก์ชันในเชิงเรขาคณิตได้ว่า “ ความสัมพันธ์ f ” เรียกว่าเป็น “ ฟังก์ชัน f ” ได้ก็ต่อเมื่อเส้นตรง $x = c$ (เมื่อ c เป็นค่าคงที่) ถ้าตัดกราฟของ f จะตัดเพียงจุดเดียว

ตัวอย่างที่ 1.25 กำหนดความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$r_1 = \{(x, y) \in R \times R | y = x^2\}$$

$$r_2 = \{(x, y) \in R \times R | x = y^2\}$$

$$r_3 = \{(x, y) \in R \times R | y = |3x - 2| - 1\}$$

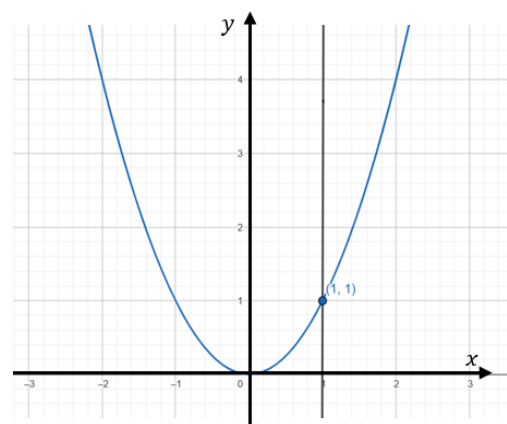
$$r_4 = \{(x, y) \in R \times R | xy = 5\}$$

$$r_5 = \left\{ (x, y) \in R \times R \left| \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1 \right. \right\}$$

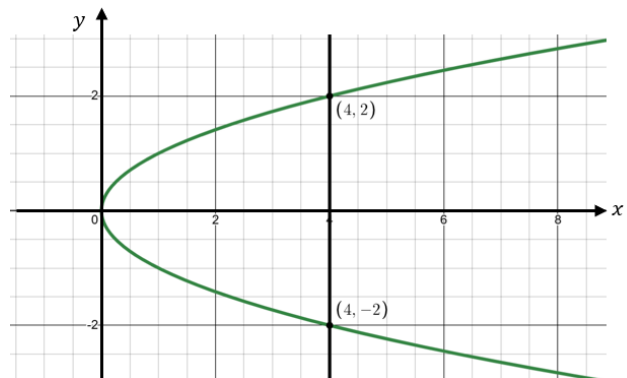
ความสัมพันธ์ใดบ้างที่เป็นฟังก์ชัน

แนวคิด

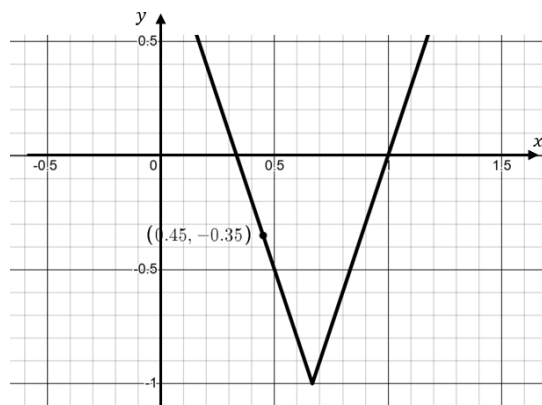
r_1 เป็นฟังก์ชัน เพราะ หนึ่งค่าของ $x \in R$ ได้ค่า $y \in R$ เพียง 1 ค่า เช่น $x = 1$ ได้ $y = 1$
แสดงกราฟของความสัมพันธ์ ได้ดังนี้



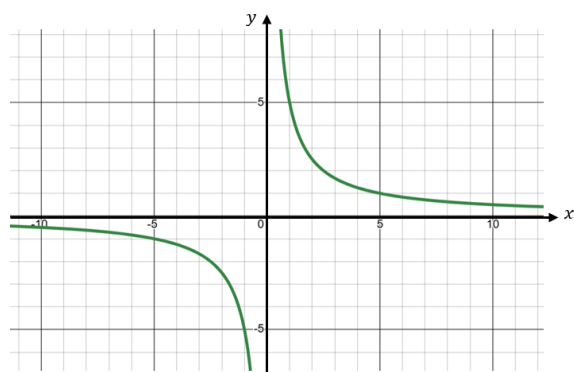
r_2 ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะ หนึ่งค่าของ $x \in R$ บางค่า ได้ค่า $y \in R$ สองค่า
เช่น $x = 4$ ได้ $y = 2, -2$
แสดงกราฟของความสัมพันธ์ได้ดังนี้



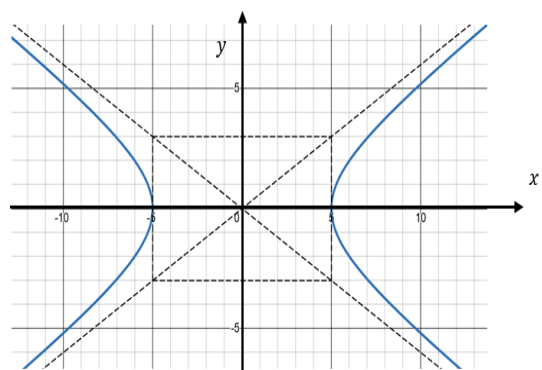
r_3 เป็นฟังก์ชัน เพราะ หนึ่งค่าของ $x \in R$ ได้ค่า $y \in R$ เพียง 1 ค่า
เช่น $x = 0.45$ ได้ $y = -0.35$
แสดงกราฟของความสัมพันธ์ได้ดังนี้



r_4 เป็นฟังก์ชัน เพราะ หนึ่งค่าของ $x \in R$ ได้ค่า $y \in R$ เพียง 1 ค่า
เช่น $x = 5$ ได้ $y = 1$
แสดงกราฟของความสัมพันธ์ได้ดังนี้



r_5 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะหนึ่งค่าของ $x \in R$ บางค่า ได้ค่า $y \in R$ สองค่า
เช่น $x = 9$ ได้ $y = 4.48999, -4.48999$
แสดงกราฟของความสัมพันธ์ได้ดังนี้



หมายเหตุ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันโดย $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$

-โดเมนของ f เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ D_f นิยามว่า $D_f = \{x \mid (x, y) \in f\}$ คือ D_f

หมายถึงเซตของสมาชิกตัวแรกของคู่อันดับของ f

-เรนจ์ของ f เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ R_f นิยามว่า $R_f = \{y \mid (x, y) \in f\}$ คือ R_f

หมายถึงเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับของ f

ตัวอย่างที่ 1.26 จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \in I \times I \mid y = \sqrt{x+1}\}$

แนวคิด $f = \{(0,1), (3,2), (8,3), (15,4), (24,5), \dots\}$

นั่นคือ $D_f = \{0, 3, 8, 15, 24\}$

$R_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2.2 ลักษณะของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันจาก A ไป B (Function from A into B)

นิยาม ฟังก์ชันจาก A ไป B คือฟังก์ชันที่ $D_f = A$ และ $R_f \subset B$ ใช้สัญลักษณ์ $f: A \rightarrow B$

หมายเหตุ 1. ฟังก์ชันปกติทั่วไปจะเป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ R ไป R

2. f เรียกว่าเป็นฟังก์ชันระหว่าง A กับ B เมื่อ $f: A \rightarrow B$ แต่ $D_f \neq A$

ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B (Function from A onto B)

นิยาม ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B คือฟังก์ชันที่ $D_f = A$ และ $R_f = B$ ใช้สัญลักษณ์ $f: A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} B$

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one Function)

นิยาม f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งก็ต่อเมื่อ $f: A \rightarrow B$ และถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ หรือ

กล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชัน โดย $(x, y) \in f$ ทุก x ที่ต่างกัน จะต้องได้ y ที่ต่างกัน

ด้วย ใช้สัญลักษณ์ $f: A \xrightarrow{1-1} B$

แปลความหมายนิยามของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งในเชิงเรขาคณิตได้ว่า “ f เรียกว่าฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งได้ก็ต่อเมื่อ เส้นตรง $f = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ ถ้าตัดกราฟของ f จะตัดเพียงจุดเดียว ”

หมายเหตุ : ให้ f เป็นฟังก์ชัน โดย $(x, y) \in f$ ถ้าทุก x ที่ต่างกันให้ค่าของ y ซ้ำกัน เรียก f ว่าเป็น “ many to one ฟังก์ชัน ”

ฟังก์ชันอาจประกอบกันเป็นรูปแบบฟังก์ชันใหม่ เช่น

-ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B หมายถึง $f: A \rightarrow B$ และ $f: A \xrightarrow{1-1} B$

ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์รวมได้ว่า $f: A \xrightarrow{1-1} B$

-ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป ทั่วถึง B หมายถึง $f: A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} B$ และ $f: A \xrightarrow{1-1} B$

ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์รวมได้ว่า $f: A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} B$

ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (Identity function)

นิยาม f เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ก็ต่อเมื่อ ทุก $(x, y) \in f, x = y$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ I หรืออีกนัยหนึ่งคือ $I = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x\}$

หมายเหตุ : ถ้ากำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน $f = g$ ก็ต่อเมื่อ $D_f = D_g$ และ $R_f = R_g$

ตัวอย่างที่ 1.27 จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันลักษณะใด

$$f_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 3x + 1\}$$

$$f_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = |x|\}$$

$$f_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \log 2x \text{ และ } 2x > 0\}$$

$$f_4 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x}\}$$

แนวคิด f_1 เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก R ไป R หรือ $f_1: R \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} R$

f_2 เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R หรือ $f_2: R \rightarrow R$ และ f_2 เป็น “many to one ฟังก์ชัน”

f_3 เป็นฟังก์ชันจาก R^+ ไป R หรือ $f_3: R^+ \rightarrow R$

f_4 เป็นฟังก์ชันจาก R^+ ไป R^+ หรือ $f_4: R^+ \rightarrow R^+$

หมายเหตุ : f_3 และ f_4 เป็นฟังก์ชันระหว่าง R กับ R

$$f_5 = \{(0,0), (1,1), (2,2), \dots, (100,100)\}$$

$$f_6 = \{(x, y) \in I \times I \mid x = y \text{ และ } 0 \leq x \leq 100\}$$

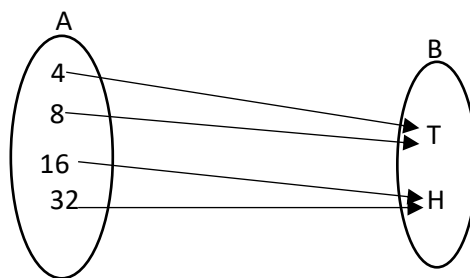
$f_5 = f_6$ และ f_5 และ f_6 เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

2.3 การกำหนดฟังก์ชัน การกำหนดฟังก์ชันอาจกำหนดได้หลายแบบ ดังนี้

1. การเขียนแผนภาพ (Venn's diagram)
2. การแจกแจงสมาชิกในรูปของเซตหรือแจกแจงโดยตาราง
3. การเขียนกราฟของฟังก์ชัน
4. การกำหนดเงื่อนไข

ตัวอย่างที่ 1.28

ก. จากแผนภาพพิจารณา f_1 ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ ถ้าเป็นจะเป็นฟังก์ชันในลักษณะใด



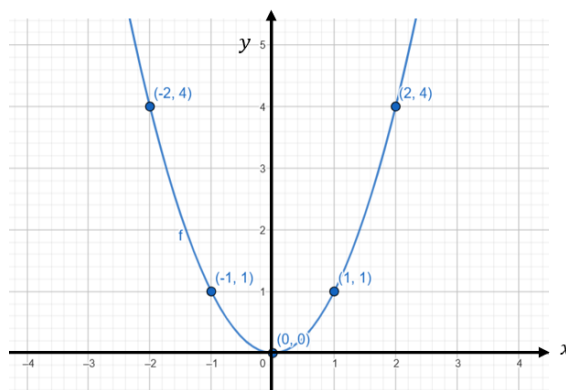
แนวคิด จะเห็นได้ว่าแต่ละสมาชิกของ A ที่เป็นโดเมนจับคู่กับสมาชิกของ B ที่เป็นเรนจ์ เพียง 1 สมาชิกเท่านั้น ดังนั้น $f_1: A \rightarrow B$ (เนื่องจากสมาชิกทุกตัวของ B ถูกจับคู่ด้วยสมาชิกของ A)

ข. จงกำหนด f_1 ในรูปของการแจกแจงสมาชิกหรือแจกแจงตาราง ซึ่งมีแผนภาพแบบเดียวกับ

ข้อ ก. แนวคิด $f_1 = \{(4, T), (8, T), (16, H), (32, H)\}$ หรือแจกแจงโดยตารางเป็น

x	4	8	16	32
y	T	T	H	H

ค. ให้ $f_3 = \{...(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), ...\}$ จงกำหนด f_3 ในรูปของกราฟ



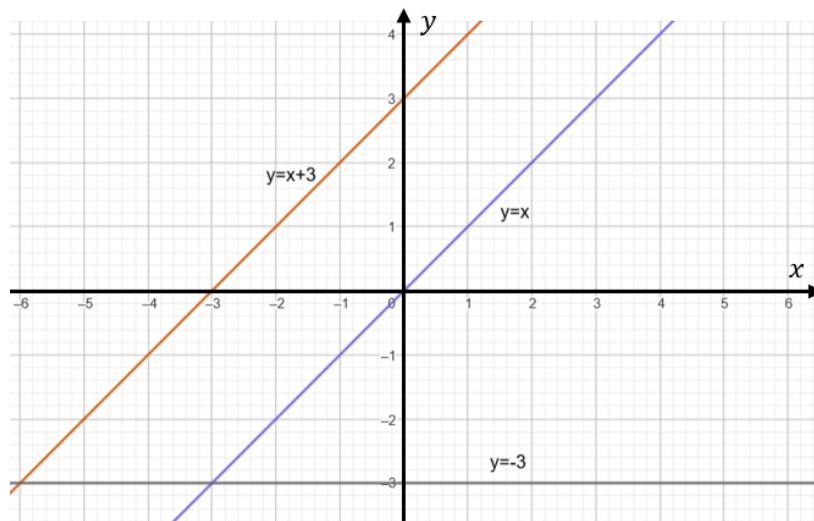
ง. จาก f_3 ในข้อ ค. จงกำหนด f_3 ในรูปการกำหนดเงื่อนไข

แนวคิด $f_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$

2.4 ชนิดของฟังก์ชัน

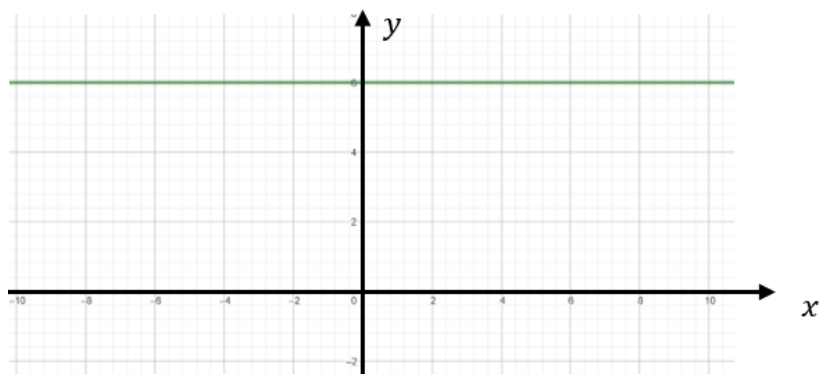
2.4.1 ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function) หมายถึง ฟังก์ชันที่มีกำลังของตัวแปรของฟังก์ชันเป็นหนึ่ง มีกราฟของฟังก์ชันเป็นเส้นตรง

รูปทั่วไปของฟังก์ชันเชิงเส้น คือ $f(x) = ax + b$ หรือ $y = ax + b$ เมื่อ $a, b \in R$
 ถ้า $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ กราฟของฟังก์ชันจะไม่ขนานกับแกน x หรือแกน y เช่น $y = x + 3$
 ถ้า $a \neq 0$ แต่ $b = 0$ กราฟของฟังก์ชันจะผ่านจุดกำเนิดและไม่ขนานกับแกน x หรือแกน y



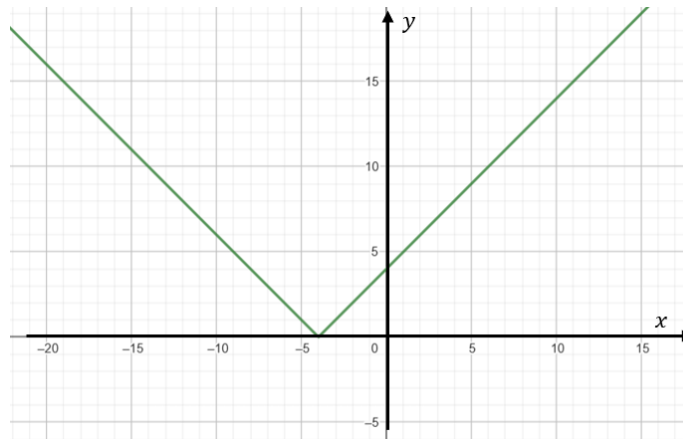
2.4.2 ฟังก์ชันค่าคงที่ (Constant Function) หมายถึง ฟังก์ชันเชิงเส้น ซึ่ง $a = 0$

แต่ $b \neq 0$ รูปทั่วไปของฟังก์ชันค่าคงที่ $f(x) = b$ หรือ $y = b$ เช่น $y = 6$ กราฟของฟังก์ชันขนานกับ แกน x



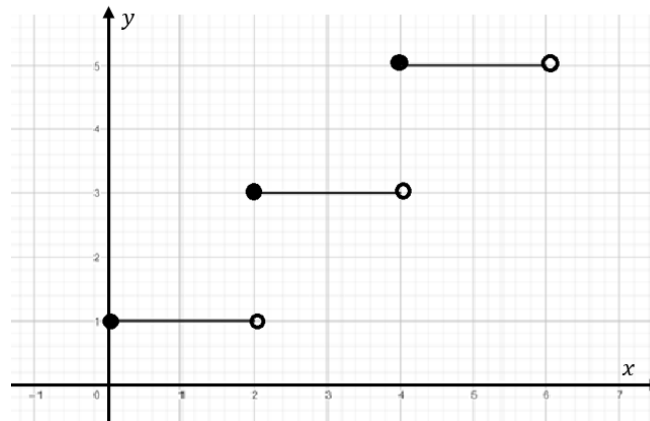
2.4.3 ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value Function) หมายถึง ฟังก์ชันที่มีเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์เข้ามาเกี่ยวข้องกับตัวแปรของฟังก์ชัน

เช่น $y = |x + 4|$ และ $y = |x| + 4$ แต่ $y = |x| + 4$ ไม่จัดว่าเป็นฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์



2.4.4 ฟังก์ชันขั้นบันได (Step Function) หมายถึง ฟังก์ชันที่มีค่าของฟังก์ชันคงที่เป็นช่วง ๆ ไป

$$\text{เช่น } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } 0 \leq x < 2 \\ 3 & \text{เมื่อ } 2 \leq x < 4 \\ 5 & \text{เมื่อ } 4 \leq x < 6 \end{cases}$$



2.4.5 ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function) หมายถึง ฟังก์ชันที่มีกำลังสูงสุดของตัวแปรของฟังก์ชันเป็นสอง โดยปกติมีกราฟของฟังก์ชันเป็นเส้นโค้งพาราโบลา

รูปทั่วไปของฟังก์ชันกำลังสอง $f(x) = ax^2 + bx + c$ หรือ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a, b, c \in R, a \neq 0$

-ถ้า $a > 0$ กราฟของฟังก์ชันจะหงาย ปราบกจุดต่ำสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

-ถ้า $a < 0$ กราฟของฟังก์ชันจะคว่ำลง ปราบกจุดสูงสุด และค่าสูงสุดของฟังก์ชัน

จุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของฟังก์ชัน (จุดยอดของกราฟ) คือ $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน (ค่า y) คือ $\frac{4ac-b^2}{4a}$

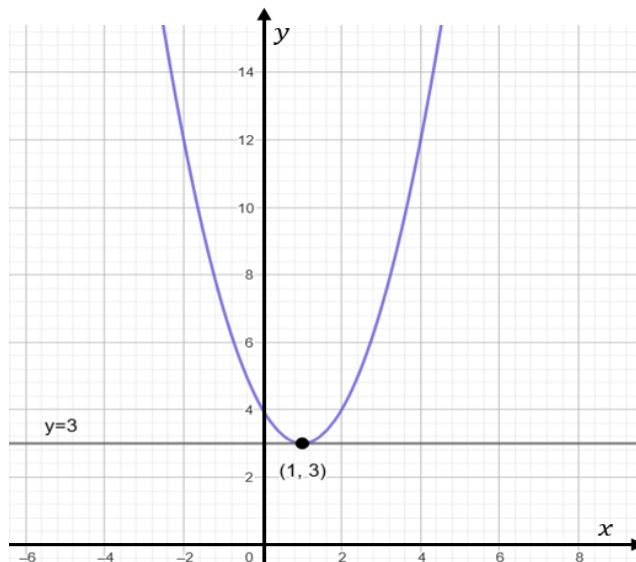
ตัวอย่างที่ 1.29 จงเขียนกราฟของ $f(x) = x^2 - 2x + 4$ พร้อมทั้งหาจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุด (จุดวกกลับ) และ ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

แนวคิด ก. จาก $f(x) = x^2 - 2x + 4$ มีค่า $a = 1, b = -2, c = 4$

จาก $a > 0$ จะได้จุดต่ำสุดของฟังก์ชันคือ $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{16-4}{4}\right)$
 $= \left(1, \frac{12}{4}\right) = (1, 3)$

ข. ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันคือ 3

กราฟของ $f(x) = x^2 - 2x + 4$ เป็นดังนี้



การหาจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดและการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด จึงสามารถหาได้ 2 อย่าง คือ โดยการคำนวณหรือใช้สูตรกับโดยการวาดกราฟของฟังก์ชัน

2.4.6 ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function) หมายถึง ฟังก์ชันที่มีรูปทั่วไปของฟังก์ชันเป็น

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

เมื่อ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \in R, n \in I^+$

ถ้า $a_n \neq 0, n$ เป็นกำลังของฟังก์ชันพหุนาม เช่น

$$f(x) = 2x + 1 \text{ เป็นฟังก์ชันกำลังหนึ่ง (ฟังก์ชันเชิงเส้น) ,}$$

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \text{ เป็นฟังก์ชันกำลังสอง}$$

$$f(x) = -2x^5 - 7x + 3 \text{ เป็นฟังก์ชันกำลังห้า}$$

หมายเหตุ: กำลังของฟังก์ชัน คือ กำลังสูงสุดของตัวแปรฟังก์ชัน

2.4.7 ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational Function) หมายถึง ฟังก์ชันที่มีรูปทั่วไปของฟังก์ชัน

เป็น $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ เมื่อ $P(x), Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ที่ $Q(x) \neq 0$

$$\text{เช่น } f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4}, x \neq 4$$

2.4.8 ฟังก์ชันอตรรกยะ (Irrational Function) หมายถึง ฟังก์ชันที่มีตัวแปรของฟังก์ชัน

$$\text{ติดกรณฑ์ เช่น } f(x) = 3\sqrt{x} + 7 \text{ และ } f(x) = \sqrt{x^5} - 2$$

**ฟังก์ชันทั้งหมดที่กล่าวมาจัดเป็นฟังก์ชันพีชคณิต

2.4.9 ฟังก์ชันอดิสัย (Transcendental Function) หมายถึง ฟังก์ชันอื่นๆที่ไม่ใช่ฟังก์ชัน

พีชคณิตที่สำคัญ ได้แก่

$$f(x) = 6 \cos(2x + 1) \text{ เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ , } f(x) = \sin^{-1} x^2 \text{ เป็นฟังก์ชันอิน}$$

เวอร์สตรีโกณมิติ

$$f(x) = 3^x \text{ เป็นฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล , } f(x) = \log x \text{ เป็นฟังก์ชันลอการิทึม}$$

2.5 ฟังก์ชันเชิงประกอบ (Composite Function)

นิยาม ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันโดย $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ และ $R_f \subset D_g$ แล้ว $g \circ f: A \rightarrow C$

โดยที่สัญลักษณ์ $g \circ f$ แทนฟังก์ชันเชิงประกอบของ f กับ $g, g \circ f$ หมายถึง $g(f(x))$

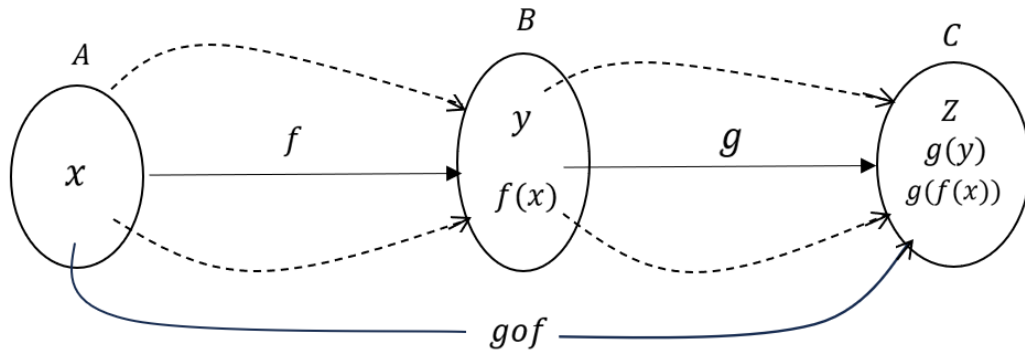
แปลความหมายนิยามของฟังก์ชันเชิงประกอบในเชิงสัญลักษณ์เซต

ถ้า $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ โดยที่ $x \in A, y \in B, z \in C$ แล้ว

$$gof = \{(x, z) \mid \text{มี } y \text{ ซึ่งทำให้ } (x, y) \in f \text{ และ } (y, z) \in g\} \text{ หรือ}$$

$$gof = \{(x, g)f(x) \mid \text{มี } f(x) \text{ ซึ่งทำให้ } (x, f(x)) \text{ และ } (f(x), gf(x)) \in g\}$$

แปลความหมายนิยามของฟังก์ชันเชิงประกอบออกมาในเชิงเรขาคณิต



โดยที่ $y = f(x)$, $z = g(y) = g(f(x))$

ทฤษฎีของฟังก์ชันเชิงประกอบที่น่าสนใจ

1. ถ้า $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ และ $h: C \rightarrow D$

แล้ว $ho(gof) = (hog)of$ เป็นฟังก์ชัน $A \rightarrow D$

2. ถ้า $f: A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$, $g: B \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} C$ แล้ว $gof: A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} C$

3. ถ้า $f: A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$, $g: B \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} C$ แล้ว $gof: A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} C$

4. ถ้า $gof: A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} C$ แล้ว $g: B \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} C$

5. ถ้า $gof: A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} C$ แล้ว $f: A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$

ตัวอย่างที่ 1.6 กำหนดให้ $f(x) = 2x - 3$; $g(x) = x^2 - 2x - 35$ จงหา fog และ gof

แนวคิด เนื่องจาก $R_g \subset D_f \quad \because R_g \subset R \text{ และ } D_f = R$

$$\therefore \text{หา } fog \text{ ได้ } fog = f(g(x)) = f(x^2 - 2x - 35) = 2x^2 - 4x - 73$$

$$\therefore fog = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x^2 - 4x - 73\}$$

เนื่องจาก $R_f \subset D_g \quad \because R_f = R \text{ และ } D_g = R$

$$\therefore \text{หา } gof \text{ ได้ } gof = g(f(x)) = g(2x - 3) = 4x^2 - 16x - 20$$

$$\therefore gof = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 4x^2 - 16x - 20\}$$

ตัวอย่างที่ 1.7 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{x, y\}$

และ $f: A \rightarrow B$ ซึ่ง $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

$g: B \rightarrow C$ ซึ่ง $g = \{(a, x), (b, y), (c, y)\}$ จงหา gof และ fog

แนวคิด $R_f = \{a, b, c\}$, $D_g = \{a, b, c\}$ เห็นได้ว่า $R_f \subset D_g$

$\therefore$ หา gof ได้เป็น $gof = \{(1, x), (2, y), (3, y)\}$

$R_g = \{x, y\}$, $D_f = \{1, 2, 3\}$ เห็นได้ชัดว่า $R_g \not\subset D_f \therefore$ หา fog ไม่ได้

ตัวอย่างที่ 1.8 $g(x) = x + 1$ และ $gof(x) = \sqrt{x+1} + 1$ จงหา $f(x)$

แนวคิด เนื่องจาก $gof(x) = g(f(x))$ นั่นคือ $f(x)$ เป็นโดเมน $g(x)$

$\therefore$ หา $gof(x) = g(f(x)) = \sqrt{x+1} + 1$

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

1.6 อินเวอร์สของฟังก์ชันและฟังก์ชันอินเวอร์ส

นิยาม อินเวอร์สของฟังก์ชัน f คือ เซตของคู่ลำดับที่สมาชิกตัวหน้าและตัวหลังสลับที่กันทุกคู่ลำดับที่เป็นสมาชิก f เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ f^{-1}

แปลความหมายนิยามของอินเวอร์สของฟังก์ชัน f ออกมาในเชิงเซตว่า

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid x = y', y = x' \text{ สำหรับทุกๆ } (x', y') \in f\}$$

หรือถ้า $f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ โดย เป็นฟังก์ชันแล้ว $f^{-1} = \{(x, y) \mid x = f(y)\}$

ตัวอย่างที่ 1.9 จงหาอินเวอร์สของฟังก์ชันต่อไปนี้และพิจารณาว่าอินเวอร์สของฟังก์ชันใดเป็นหรือไม่เป็นฟังก์ชัน

$$f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\}, g = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$$

$$h = \{(e, 1), (f, 2), (g, 3), (h, 4)\}$$

แนวคิด $f^{-1} = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, d)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน เนื่องจาก 1 จับคู่กับเรนจ์ถึง 2 ตัว

$$g^{-1} = \{(x, y) \in R \times R \mid x = y^2\}$$
 ไม่เป็นฟังก์ชัน เนื่องจาก มีค่า x ที่จับคู่กับ y ถึง

2 ตัว เช่น $x = 1$, จับคู่กับ y ถึง 2 ตัว คือ -1 และ 1

$$h^{-1} = \{(1, e), (2, f), (3, g), (4, h)\}$$
 เป็นฟังก์ชัน

หมายเหตุ ; อินเวอร์สของฟังก์ชัน อาจจะเป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชันก็ได้
อินเวอร์สของฟังก์ชัน ที่เป็นฟังก์ชัน เรียกว่า ฟังก์ชันอินเวอร์ส

2.6 พีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of function)

ฟังก์ชันใหม่ๆอาจเกิดจากการนำเอาฟังก์ชันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชัน หรือ มากกว่า มารวมกันทางพีชคณิต

นิยาม กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} f + g &= \{(x, y) | y = f(x) + g(x) = (f + g)(x) \text{ โดย } x \in D_f \cap D_g\} \\ f - g &= \{(x, y) | y = f(x) - g(x) = (f - g)(x) \text{ โดย } x \in D_f \cap D_g\} \\ f \cdot g &= \{(x, y) | y = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x) \text{ โดย } x \in D_f \cap D_g\} \\ \frac{f}{g} &= \{(x, y) | y = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x) \text{ โดย } x \in D_f \cap D_g \text{ และ } g(x) \neq 0\} \end{aligned}$$

ผลที่ได้จากนิยามอาจทำให้เกิดรูปแบบฟังก์ชันใหม่ๆ เช่น

$$f^n(x) = [f(x)]^n \quad ; \quad \frac{1}{f^n(x)} = \sqrt[n]{f(x)}$$

ตัวอย่างที่ 1.10 กำหนดให้ $f(x) = x + 5, g(x) = x^2 + 1$

จงหา $(f + g)(x), (f - g)(x), (f \cdot g)(x), \frac{f}{g}(x)$ และหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันด้วย

แนวคิด

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 5 && \text{มี } D_f = R, R_f = R \\ g(x) &= x^2 + 1 && \text{มี } D_g = R, R_g = [1, \infty) \\ (f + g)(x) &= x^2 + x + 6 && \text{มี } D_{(f+g)} = R, R_{(f+g)} = \left[\frac{23}{4}, \infty\right) \\ (f - g)(x) &= 4 + x - x^2 && \text{มี } D_{(f-g)} = R, R_{(f-g)} = \left(-\infty, \frac{17}{4}\right) \\ (f \cdot g)(x) &= x^3 + 5x^2 + x + 5 && \text{มี } D_{f \cdot g} = R, R_{(f \cdot g)} = R \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{x+5}{x^2+1} && \text{มี } D_{\frac{f}{g}} = R, R_{\frac{f}{g}} = \left(\frac{5-\sqrt{26}}{2}, \frac{5+\sqrt{26}}{2}\right) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.11 กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in R \times R | y = x^3, x \leq 3\}$

$$g = \{(x, y) \in R \times R | y = x^2, x < 5\}$$

จงหา $(f + g)(x), (f - g)(x), (f \cdot g)(x), \frac{f}{g}(x)$ และโดเมนของแต่ละคำถามด้วย

แนวคิด

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= x^2 + x^3 && \text{มี } D_{(f+g)} = (-\infty, 3] \\ (f - g)(x) &= x^3 - x^2 && \text{มี } D_{(f-g)} = (-\infty, 3] \\ (f \cdot g)(x) &= x^5 && \text{มี } D_{(f \cdot g)} = (-\infty, 3] \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= x && \text{มี } D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = (-\infty, 0) \cup (0, 3] \end{aligned}$$

2.7 แนวทางการนำความรู้เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์

ในโลกของการศึกษาวิทยาศาสตร์ การทำความเข้าใจและนำความรู้เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันไปใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพถือเป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่ง เพราะแนวคิดเหล่านี้เป็นรากฐานที่ช่วยให้ผู้เรียนสามารถวิเคราะห์ ทำความเข้าใจ และอธิบายปรากฏการณ์ทางวิทยาศาสตร์ได้อย่างลึกซึ้งและเป็นระบบ นี่คือความสำคัญของการนำความรู้เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์:

1. การสร้างแบบจำลองทางวิทยาศาสตร์ (Scientific Modeling):

วิทยาศาสตร์มักเกี่ยวข้องกับการสร้างแบบจำลองเพื่ออธิบายและทำนายพฤติกรรมของระบบต่างๆ ความสัมพันธ์และฟังก์ชันเป็นเครื่องมือที่จำเป็นในการสร้างแบบจำลองเชิงปริมาณ ตัวอย่างเช่น กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน $F = ma$ เป็นความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่อธิบายแรง มวล และความเร่ง

2. การวิเคราะห์ข้อมูลและการตีความ (Data Analysis and Interpretation):

การทดลองทางวิทยาศาสตร์มักจะสร้างข้อมูลจำนวนมาก การใช้ความรู้เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันช่วยให้ผู้เรียนสามารถวิเคราะห์ข้อมูลเหล่านั้นเพื่อค้นหารูปแบบ แนวโน้ม และความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร

ตัวอย่างเช่น การพลอตข้อมูลในกราฟ (เช่น ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิกับปริมาตรของแก๊ส) และการระบุประเภทของฟังก์ชันที่เหมาะสม (เช่น ฟังก์ชันเชิงเส้น, ฟังก์ชันกำลังสอง, ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล) ช่วยให้ผู้เรียนสามารถตีความผลการทดลองและสรุปผลได้อย่างมีเหตุผล

3. การทำนายและพยากรณ์ (Prediction and Forecasting):

เมื่อเข้าใจความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างตัวแปรแล้ว ผู้เรียนสามารถใช้ความรู้นี้เพื่อทำนายผลลัพธ์ในสถานการณ์ที่แตกต่างกันได้

เช่น การทำนายตำแหน่งของวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่เมื่อเวลาผ่านไป หรือการพยากรณ์การเติบโตของประชากรจุลินทรีย์โดยใช้ฟังก์ชันการเติบโตแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล

การพัฒนาความคิดเชิงนามธรรมและตรรกะ (Development of Abstract and Logical Thinking):

4. แนวคิดเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันเป็นนามธรรม

การสอนแนวคิดเหล่านี้ในบริบททางวิทยาศาสตร์ช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาทักษะการคิดเชิงนามธรรม ซึ่งจำเป็นสำหรับการทำความเข้าใจแนวคิดทางวิทยาศาสตร์ที่ซับซ้อน

นอกจากนี้ การระบุความสัมพันธ์แบบเหตุและผล (cause and effect) ผ่านฟังก์ชันยังช่วยเสริมสร้างการคิดเชิงตรรกะและเป็นระบบ

5. การเชื่อมโยงความรู้ระหว่างสาขาวิชา (Interdisciplinary Connection):

ความสัมพันธ์และฟังก์ชันเป็นแนวคิดหลักทั้งในวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ การนำเสนอแนวคิดเหล่านี้ร่วมกันช่วยให้ผู้เรียนเห็นความเชื่อมโยงและความสำคัญของคณิตศาสตร์ในบริบททางวิทยาศาสตร์

สิ่งนี้ส่งเสริมการเรียนรู้แบบบูรณาการและช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจว่าความรู้ไม่ได้แยกส่วน แต่มีความสัมพันธ์กัน

6. การสื่อสารทางวิทยาศาสตร์ (Scientific Communication):

การใช้กราฟ สมการ และฟังก์ชันเป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพในการสื่อสารผลการค้นพบทางวิทยาศาสตร์ การสอนให้ผู้เรียนสามารถสร้างและตีความกราฟและสมการได้อย่างถูกต้อง เป็นการเสริมสร้างทักษะการสื่อสารทางวิทยาศาสตร์ที่สำคัญ

ตัวอย่างการประยุกต์ใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์:

ฟิสิกส์:

- กฎของโอห์ม: $V = IR$ (ความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างแรงดัน กระแส และความต้านทาน)

- กฎการเคลื่อนที่: $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ (ฟังก์ชันกำลังสองอธิบายการเคลื่อนที่ภายใต้ความเร่งคงที่)

- การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์: ความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ เวลา และความเร็วเริ่มต้น

เคมี:

- อัตราการเกิดปฏิกิริยา: ความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของสารตั้งต้นกับอัตราการเกิดปฏิกิริยา (มักเป็นฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลหรือกำลัง)

- กฎของก๊าซ: $PV = nRT$ (ความสัมพันธ์ระหว่างความดัน ปริมาตร อุณหภูมิ และจำนวนโมล)

ชีววิทยา:

-การเติบโตของประชากร: ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลหรือโลจิสติกส์ในการอธิบายการเติบโตของประชากร

-เอนไซม์คิเนติกส์: ความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของสารตั้งต้นกับอัตราการทำงานของเอนไซม์

-ความสัมพันธ์ระหว่างสปีชีส์: การทำความเข้าใจความสัมพันธ์แบบผู้ล่า-เหยื่อ หรือการแข่งขันผ่านกราฟและแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์

โดยสรุป การนำความรู้เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์ไม่เพียงแต่ช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจเนื้อหาทางวิทยาศาสตร์ได้ลึกซึ้งขึ้นเท่านั้น แต่ยังช่วยพัฒนาทักษะการคิดวิเคราะห์ การแก้ปัญหา และการสื่อสาร ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการเป็นพลเมืองที่มีความรู้ความเข้าใจในวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ตัวอย่างสถานการณ์**การประยุกต์ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function)**

สถานการณ์ 1. นักวิทยาศาสตร์การวัดอุณหภูมิของห้องทดลองแห่งหนึ่งได้ 25 องศาเซลเซียส แต่ในคู่มือการจัดสภาพแวดล้อมสำหรับห้องทดลองนี้กำหนดให้ตั้งอุณหภูมิที่ 50 องศาฟาเรนไฮต์ เขาต้องปรับอุณหภูมิในห้องทดลองไว้ที่อุณหภูมิกี่องศาเซลเซียส

แนวคิด จากสูตรการเปลี่ยนหน่วยอุณหภูมิองศาฟาเรนไฮต์ (F) เป็นอุณหภูมิหน่วยองศาเซลเซียส (C) คือ

$$F = \frac{9}{5}(C) + 32 \text{ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น}$$

แทนค่าจากโจทย์จะได้ $50 = \frac{9}{5}(C) + 32$

$$50 - 32 = \frac{9}{5}(C)$$

$$18 = \frac{9}{5}(C)$$

$$C = 18 \times \frac{5}{9} = 10$$

ดังนั้น นักวิทยาศาสตร์ต้องปรับอุณหภูมิในห้องทดลองไว้ที่อุณหภูมิ 10 องศาเซลเซียส

สถานการณ์ 2 : การเดินทางด้วยรถไฟใช้ความเร็วคงที่ ถ้ารถไฟขบวนหนึ่งออกจากสถานี A มุ่งหน้าไปยังสถานี B ด้วยอัตราเร็วคงที่ 120 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เมื่อเวลาผ่านไป 0 ชั่วโมง รถไฟอยู่ที่สถานี A จงสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางที่รถไฟเคลื่อนที่ได้กับเวลาที่ใช้ในการเดินทาง และนำมาใช้ในการทำนายการเดินทาง"

แนวคิด การนำความรู้เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันเชิงเส้นมาใช้

การระบุตัวแปร:

-ตัวแปรต้น (Independent Variable): เวลา (t) หน่วยเป็นชั่วโมง

-ตัวแปรตาม (Dependent Variable): ระยะทาง (d) หน่วยเป็นกิโลเมตร

-ค่าคงที่: อัตราเร็ว (v) ซึ่งในที่นี้คือ 120 กิโลเมตรต่อชั่วโมง (เป็นค่าคงที่เพราะอัตราเร็วคงที่)

การสร้างความสัมพันธ์เชิงเส้น: จากความรู้พื้นฐานเรื่องอัตราเร็ว

$$\text{อัตราเร็ว} = \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{เวลา}} \text{ หรือ } v = \frac{d}{t}$$

เราต้องการแสดงระยะทางในรูปของเวลา ดังนั้นจัดรูปสมการใหม่จะได้: $d = vt$

แทนค่าอัตราเร็วคงที่ $v = 120$ ลงในสมการ จะได้ ฟังก์ชันเชิงเส้น: $d(t) = 120t$

นี่คือฟังก์ชันเชิงเส้น เพราะตัวแปร t มีกำลังเป็น 1 และกราฟของฟังก์ชันนี้จะเป็นเส้นตรงผ่านจุดกำเนิด (0,0) ซึ่งสอดคล้องกับสถานการณ์ที่ระยะทางเป็น 0 เมื่อเวลาเป็น 0

การสร้างตารางข้อมูล (เพื่อช่วยในการทำความเข้าใจและพลอตกราฟ): เราสร้างตารางแสดงระยะทางที่รถไฟเคลื่อนที่ได้ ณ เวลาต่างๆ ได้ดังนี้

เวลา (t) (ชั่วโมง)	ระยะทาง $d(t) = 120t$ (กิโลเมตร)
0	$120 \times 0 = 0$
1	$120 \times 1 = 120$
2	$120 \times 2 = 240$
3	$120 \times 3 = 360$
4	$120 \times 4 = 480$

การประยุกต์ใช้เพื่อการทำนาย: เช่น "ถ้าสถานี B อยู่ห่างจากสถานี A 600 กิโลเมตร รถไฟจะใช้เวลากี่ชั่วโมงในการเดินทางถึงสถานี B"

แนวคิด แทน $d = 600$ ในสมการ

ระยะทาง $d(t) = 120t$ (กิโลเมตร)

$$600 = 120t$$

$$t = \frac{120}{600} = 5 \text{ ชั่วโมง}$$

"ถ้ารถไฟเดินทางไป 3.5 ชั่วโมง รถไฟจะเคลื่อนที่ได้ระยะทางกี่กิโลเมตร?"

แทน $t = 3.5$ ในสมการ จะได้ $d = 120 \times 3.5 = 420$ กิโลเมตร

การประยุกต์ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function)

สถานการณ์ 3 ; การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ของการยิงลูกบอล

ในวิชาฟิสิกส์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสาขากลศาสตร์ (Kinematics) ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function) มีบทบาทสำคัญในการอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้แรงโน้มถ่วง โดยละเลยแรงต้านอากาศ ตัวอย่างเช่น การยิงลูกบอลขึ้นไปในอากาศ

สถานการณ์: สมมติว่านักวิทยาศาสตร์กำลังศึกษาการเคลื่อนที่ของลูกบอลที่ถูกยิงขึ้นไปในแนวตั้งด้วยเครื่องยิงลูกบอล และได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสูงของลูกบอล (h) จากพื้นดินเป็นฟังก์ชันของเวลา (t) ดังนี้:

$$h(t) = -4.9t^2 + 20t + 1.5$$

เมื่อ: $h(t)$ คือ ความสูงของลูกบอลจากพื้นดิน (หน่วยเป็นเมตร) ณ เวลา t

t คือ เวลาที่ผ่านไปนับตั้งแต่ลูกบอลถูกยิง (หน่วยเป็นวินาที)

$-4.9t^2$ แสดงถึงผลของแรงโน้มถ่วงของโลก (โดยค่า -4.9 m/s^2 คือครึ่งหนึ่งของความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ ที่มีทิศทางลง)

$20t$ แสดงถึงผลของความเร็วเริ่มต้นในการยิง (ในที่นี้คือ 20 m/s)

1.5 แสดงถึงความสูงเริ่มต้นของลูกบอลจากพื้นดิน ณ เวลา $t = 0$ (ในที่นี้คือ 1.5 เมตร)

อยากรู้อะไรว่าลูกบอลมีความสูงเท่าใดที่เวลา 2 วินาที และลูกบอลจะขึ้นไปได้สูงสุดเท่าใด และใช้เวลาานานเท่าใดจึงจะถึงจุดสูงสุดนั้น

แนวคิด เราสามารถหาได้โดยแทนค่า $t = 2$ ลงในฟังก์ชัน:

$$\begin{aligned} h(2) &= -4.9(2)^2 + 20(2) + 1.5 \\ &= -4.9(4) + 40 + 1.5 \\ &= -19.6 + 40 + 1.5 \\ &= 21.9 \end{aligned}$$

ดังนั้น ที่เวลา 2 วินาที ลูกบอลจะมีความสูง 21.9 เมตร

ลูกบอลจะขึ้นไปได้สูงสุดเท่าใด และใช้เวลาานเท่าใดจึงจะถึงจุดสูงสุดนั้น เนื่องจากฟังก์ชันความสูงเป็นฟังก์ชันกำลังสองที่มีสัมประสิทธิ์หน้า t^2 เป็นลบ (กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ) จุดสูงสุดคือจุดยอด (vertex) ของพาราโบลา เวลาที่ใช้ในการถึงจุดสูงสุด (vertex) หาได้จากสูตร

$$t(\text{vertex}) = \frac{-b}{2a} \text{ โดยที่ } a = -4.9 \text{ และ } b = 20$$

$$t(\text{vertex}) = \frac{-20}{2(-4.9)} = \frac{-20}{-9.8} \approx 2.04$$

ดังนั้น ลูกบอลจะใช้เวลาประมาณ 2.04 วินาทีในการไปถึงจุดสูงสุด

จากนั้น หาความสูงสูงสุดโดยแทนค่า $t(\text{vertex})$ ลงในฟังก์ชัน $h(t)$

$$\begin{aligned} h(2.04) &= -4.9(2.04)^2 + 20(2.04) + 1.5 \\ &= -4.9(4.1616) + 40.8 + 1.5 \\ &= -20.39184 + 40.8 + 1.5 \approx 21.908 \end{aligned}$$

ดังนั้น ลูกบอลจะขึ้นไปได้สูงสุดประมาณ 21.91 เมตร

ลูกบอลจะตกกระทบพื้นดินเมื่อเวลาใด? ลูกบอลจะตกกระทบพื้นดินเมื่อความสูง $h(t) = 0$

ดังนั้น เราต้องแก้สมการกำลังสอง:

$$-4.9t^2 + 20t + 1.5 = 0$$

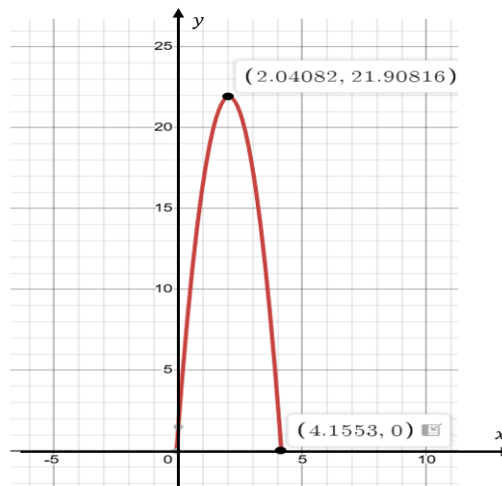
ใช้สูตรการหารากของสมการกำลังสอง $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ โดยที่ $a = -4.9, b = 20, c = 1.5$

มีสองคำตอบที่เป็นไปได้:

$t_1 = -9.8 - 20 + 20.72 = -9.8072 \approx -0.073$ (เวลาไม่สามารถเป็นลบได้ในบริบทนี้ จึงไม่มีความหมายทางกายภาพ)

$t_2 = -9.8 - 20 - 20.72 = -9.8 - 40.72 \approx 4.155$ ดังนั้น ลูกบอลจะตกกระทบพื้นดินเมื่อเวลาประมาณ 4.16 วินาที

สามารถเขียนกราฟการเคลื่อนที่ได้ดังนี้



3. การประยุกต์ฟังก์ชันเอ็กโพเนนเชียล (Exponential Function)

สถานการณ์ 4. จากการนับการขยายพันธุ์ของแบคทีเรียชนิดหนึ่งในหน่วยเวลาเป็นวินาที ได้ข้อมูลดังตาราง

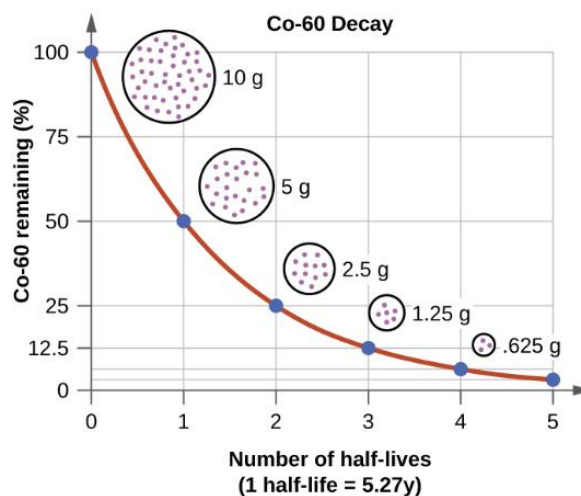
วินาที	1	2	3	4	5	6	7	...
จำนวนแบคทีเรีย	2	4	8	16	32	64	128	...

อยากรหาว่าถ้าเวลาผ่านไป 10 วินาที จะมีแบคทีเรียจำนวนกี่ตัว

แนวคิด จากสถานการณ์นี้ เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของจำนวนแบคทีเรีย (y) กับเวลาในหน่วยวินาที (t) ได้ดังนี้ $y = 2^t$ เป็นความสัมพันธ์แบบเลขยกกำลัง นั่นคือ ฟังก์ชันเอ็กโพเนนเชียล

ดังนั้น ถ้าเวลาผ่านไป 10 วินาที จะมีแบคทีเรียจำนวน $y = 2^{10} = 1,024$ ตัว

สถานการณ์ 5; การประยุกต์ฟังก์ชันเอ็กโพเนนเชียลกับครึ่งชีวิตของสารต่าง ๆ ตัวอย่างเช่น โคบอลต์-60



ที่มารูปภาพ; <https://shorturl.asia/h7suL>

จากรูป โคบอลต์-60 ซึ่งมีครึ่งชีวิต 5.27 ปี จะเหลืออยู่ 50% หลังจาก 5.27 ปี (ครึ่งชีวิตหนึ่งครั้ง) เหลืออยู่ 25% หลังจาก 10.54 ปี (ครึ่งชีวิตสองครั้ง) เหลืออยู่ 12.5% หลังจาก 15.81 ปี (ครึ่งชีวิตสามครั้ง) และอื่น ๆ (CC-BY 4.0; OpenStax)

ตัวอย่าง เช่น ครึ่งชีวิตของพลูทอริน-20 อยู่ที่ 11.0 วินาที หากตัวอย่างมีพลูทอริน -20 อยู่ 5.00 กรัมในตอนแรก จะเหลือพลูทอริน-20 เท่าใดหลังจากผ่านไป 44.0 วินาที

แนวคิด กำหนด y แทน ปริมาณของสารที่เหลือ และ n แทนจำนวนครั้งของการลดลงครึ่งหนึ่ง (ครึ่งชีวิต) และ a แทน ปริมาณของสารที่มีในตอนแรก

$$\text{จะได้ความสัมพันธ์ } y = (a)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

สารละลายพลูทอริน-20 หากเราเปรียบเทียบเวลาที่ผ่านไปกับครึ่งชีวิตของไอโซโทป จะพบว่า 44.0 วินาทีที่มีค่าเท่ากับครึ่งชีวิตพอดี 4 ครั้งพอดี จากสมการก่อนหน้า $n = 4$ การแทนค่าและแก้สมการจะได้ผลลัพธ์ดังนี้:

$$y = (a)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$y = (5.00)\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$y = (5.00)\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$y = 0.013 \text{ กรัม}$$

ดังนั้น พลูทอริน-20 เหลืออยู่ไม่ถึงหนึ่งในสามกรัม

สถานการณ์ 6 : สมมติว่ามีการเกิดไฟป่าขึ้น และรัศมีของพื้นที่ที่ไฟไหม้ (r) เพิ่มขึ้นตามเวลา (t) โดยสามารถประมาณได้ด้วยฟังก์ชัน:

$$r(t) = 2t + 1$$

เมื่อ r มีหน่วยเป็นกิโลเมตร และ t มีหน่วยเป็นชั่วโมง (โดย $t = 0$ คือเวลาที่เริ่มสังเกต) ขณะเดียวกัน พื้นที่ของวงกลม (A) ที่ไฟป่าเผาไหม้สามารถคำนวณได้จากรัศมี (r) ด้วยสูตรพื้นที่วงกลม:

$$A(r) = \pi r^2$$

เมื่อ A มีหน่วยเป็นตารางกิโลเมตร

เราต้องการหาว่าพื้นที่ที่ไฟป่าเผาไหม้จะเป็นเท่าใดเมื่อเวลาผ่านไป 3 ชั่วโมง

แนวคิด การคำนวณด้วยฟังก์ชันคอมโพสิต:

ฟังก์ชันภายใน ($r(t)$): คำนวณรัศมีที่ไฟไหม้เมื่อเวลาผ่านไป 3 ชั่วโมง

$$r(3) = 2(3) + 1 = 6 + 1 = 7 \text{ กิโลเมตร}$$

ฟังก์ชันภายนอก ($A(r)$): นำรัศมีที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 ไปคำนวณพื้นที่

$$A(r(3)) = A(7) = \pi(7)^2 = 49\pi \text{ ตารางกิโลเมตร}$$

หากใช้ค่าประมาณ $\pi \approx 3.14159$

$$A(7) \approx 49 \times 3.14159 \approx 153.938 \text{ ตารางกิโลเมตร}$$

คำตอบ: เมื่อเวลาผ่านไป 3 ชั่วโมง พื้นที่ที่ไฟฟ้าเผาไหม้จะอยู่ที่ประมาณ 49π ตารางกิโลเมตร หรือประมาณ 153.938 ตารางกิโลเมตร

ความสำคัญในการสอนวิทยาศาสตร์: สถานการณ์นี้แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันคอมโพสิตช่วยให้เราสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ ที่ซับซ้อนเข้าด้วยกัน ทำให้สามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ทางวิทยาศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยไม่ต้องคำนวณค่าตัวแปรกลาง (รัศมี) แยกต่างหากในแต่ละครั้ง ซึ่งเป็นประโยชน์อย่างมากในการทำความเข้าใจระบบธรรมชาติและสร้างการพยากรณ์ต่างๆ เช่น การพยากรณ์ขนาดของไฟฟ้าในอนาคต

สรุปสาระสำคัญ

1. ความสัมพันธ์ คือการจับคู่ระหว่างสมาชิกของสองเซต โดยแต่ละคู่อันดับแสดงความเชื่อมโยงกัน เช่น คู่ของ (เวลา, ระยะทาง) หรือ (อุณหภูมิ, ปริมาตร)
2. ฟังก์ชัน คือความสัมพันธ์ชนิดพิเศษที่สมาชิกแต่ละตัวของโดเมน (ตัวแปรต้น) จับคู่กับสมาชิกในโคโดเมน (ตัวแปรตาม) เพียงตัวเดียวเท่านั้น ทำให้ค่าตัวแปรตามถูกกำหนดโดยตัวแปรต้นเพียงหนึ่งเดียวเสมอ ฟังก์ชันมีความสำคัญอย่างยิ่งในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบาย ปรากฏการณ์ทางวิทยาศาสตร์ และการ ทำนายผลลัพธ์ ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันเชิงเส้น ($y = mx + c$) สามารถใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาในการเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่ ซึ่งช่วยให้เราเข้าใจและวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในระบบต่าง ๆ ได้อย่างเป็นระบบ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1. กำหนดให้ $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{0,2,4,6,8\}$. จงหาความสัมพันธ์ r

$$1. r_1 = \{(x, y) \in A \times B | x > y\}$$

$$2. r_2 = \{(x, y) \in A \times A | y = 2x\}$$

$$3. r_3 = \{(x, y) \in A \times B | y = x^3\}$$

$$4. r_4 = \{(x, y) \in A \times B | y \text{ is divisible by } x\}$$

2. กำหนดให้ $A = \{x | x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N}\}$. จงหาความสัมพันธ์ r

$$1. r_1 = \{(x, y) \in A \times B | y = 2x + 3\}$$

$$2. r_2 = \{(x, y) \in A \times B | y = x^2\}$$

$$3. r_3 = \{(x, y) \in A \times B | y = \sqrt{x - 3}\}$$

$$4. r_4 = \{(x, y) \in B \times A | x + y = 4\}$$

3. กำหนดให้ $A \times B = \{(m, 4), (n, 6), (n, 4), (m, 6), (a, 4), (a, 6)\}$ จงหาเซต A, B

4. กำหนดให้ $A = \{2,3,4\}$ และ $B = \{a\}$ จงหา $(A \times B) \cup (B \times A)$

5. จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดบ้างที่เป็นฟังก์ชัน

$$1. r_1 = \{(1,2), (3,1), (4,4)\}$$

$$2. r_2 = \{(1,2), (1,1), (4,4)\}$$

$$3. r_3 = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4)\}$$

$$4. r_4 = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$$

$$5. r_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = 2x + 1\}$$

$$6. r_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = |2x - 3|\}$$

6. กำหนด $f = \{(1, a), (2, b), (3, b), (4, d), (5, e)\}$ จงหา $f(1), f(3)$

7. กำหนด $f = \{(x, y) \in R \times R | y = 2x - 9\}$, จงหา $f(-5), f(0)$ และ $f(7)$

8 กำหนด $f(x) = x^2 - 2x + 1$ จงหา

1. $f(2)$

2. $f(0)$

3. $f(a + h)$

4. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

9. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $r = \{(1,1), (2,4), (3,9)\}$

2. $r = \{(-1,1), (-2,4), (-3,9)\}$

3. $r = \{(2,4), (3,5), (4,6)\}$

4. $r = \{(-1,-2), (-3,-4), (-5,-6)\}$

10. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $r = \{(x, y) \in N \times N | x + y = 5\}$

2. $r = \{(x, y) \in N \times N | x = 2y \wedge x < 8\}$

3. $r = \{(x, y) \in N \times N | y = 4 \wedge x < 5\}$

4. $r = \{(x, y) \in N \times N | x - y = 3 \wedge x \leq 6\}$

5. $r = \{(x, y) \in N \times N | x^2 + y^2 = 25\}$

11. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f = \{(x, y) \in R \times R | y = 2x + 3\}$

2. $f = \{(x, y) \in R \times R | y = 3\}$

3. $f = \{(x, y) \in R \times R | y = \frac{2x-3}{5x+4}\}$

$$4. f = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \frac{x+3}{2x-1} \right\}$$

$$5. f = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x^2 - 9} \right\}$$

$$6. f = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x^2 + 4} \right\}$$

$$7. r = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{4 - x^2} \right\}$$

12. กำหนดให้ $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = x^2 + 5$ จงหา

1. $(g \circ f)(1)$

2. $(f \circ g)(-2)$

3. $(f \circ f)(2)$

4. $(g \circ g)(5)$

5. $(f \circ f)(x)$

6. $(g \circ g)(x)$

13. กำหนด $f(t) = 2t + 5$, และ $g(t) = t^3 - 2t^2$ จงหา $(f \circ g)(0)$

14. กำหนด $f(x) = 2x + 3$, และ $g(x) = 2x^2 + x$ จงหา $(f \circ g)(-1)$ และ $(f \circ f)(2)$

>>...END

บทที่ 2 เมทริกซ์

2.1 มิติและสัญลักษณ์ของเมทริกซ์

ความหมายของเมทริกซ์ : กลุ่มของจำนวนที่เรียงกันอยู่เป็นแถว (row) และเป็นหลัก (column) ล้อมรอบด้วยวงเล็บ [] หรือ () โดยจะต้องมีจำนวนอยู่ครบทุกตำแหน่งในแต่ละแถว และแต่ละหลัก จำนวนแต่ละจำนวนเหล่านั้น เรียกว่า สมาชิกของเมทริกซ์

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดเมทริกซ์

$$\begin{matrix} \text{แถวที่ 1} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\ & \text{หลักที่ 4} \end{matrix}$$

สมาชิกของเมทริกซ์แถวที่ 1 หลักที่ 4 คือ 0 และ สมาชิกของเมทริกซ์แถวที่ 2 หลักที่ 1 คือ 2

เมทริกซ์ที่มี m แถว และ n หลัก เราเรียกว่า $m \times n$ เมทริกซ์ และกล่าวว่าเมทริกซ์นี้มีมิติเท่ากับ $m \times n$

ตัวอย่างที่ 2.2

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{เป็น } 2 \times 4 \text{ เมทริกซ์ มีมิติเป็น } 2 \times 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{เป็น } 2 \times 2 \text{ เมทริกซ์ มีมิติเป็น } 2 \times 2 \text{ หรือเรียกว่า เมทริกซ์จัตุรัส}$$

$$[0 \quad 4 \quad 6] \quad \text{เป็น } 1 \times 3 \text{ เมทริกซ์ มีมิติเป็น } 1 \times 3 \text{ หรือเรียกว่า เมทริกซ์แถว}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{เป็น } 3 \times 1 \text{ เมทริกซ์ มีมิติเป็น } 3 \times 1 \text{ หรือเรียกว่า เมทริกซ์หลัก}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{เป็น } 3 \times 2 \text{ เมทริกซ์ มีมิติเป็น } 3 \times 2 \text{ หรือเรียกว่า เมทริกซ์ศูนย์}$$

นิยมใช้ $A, B, C, \dots$ แทน เมทริกซ์ และ $a, b, c, \dots$ แทนสมาชิกของเมทริกซ์ ในกรณีที่ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ จะเขียน A ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

หรือเขียนแทนด้วย $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

ตัวอย่างที่ 2.3 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{5 \times 5}$ โดยที่ $a_{ij} = 3$ ถ้า $i \leq j$ และ $a_{ij} = 0$ ถ้า $i > j$ จงเขียน A โดยมีสมาชิกทุกตัว

แนวคิด $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ทรานสโพสของเมทริกซ์

ถ้า A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ ทรานสโพสของ A (Transpose of A) เขียนแทนด้วย A^t คือเมทริกซ์ใหม่ที่เกิดจากการนำแถวของเมทริกซ์เดิมมาสร้างเป็นหลักของเมทริกซ์ใหม่

ตัวอย่างที่ 2.4 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ จงหา A^t และ $(A^t)^t$

จะได้ว่า $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ $(A^t)^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $A = (A^t)^t$

2.2 การเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์ทั้งสองมีมิติเท่ากันและสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

$$A = B \text{ ก็ต่อเมื่อมิติเท่ากัน และ } a_{ij} = b_{ij}$$

ตัวอย่างที่ 2.5 $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{2} & \sqrt{4} \\ 3-2 & \sqrt{9} \end{bmatrix}$ แต่ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 2.6 ถ้า $\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix}$ แล้วจงหาค่าของ x และ y

แนวคิด เนื่องจากเมทริกซ์ทั้ง 2 เท่ากัน

ดังนั้น $x + y = 12$ (1)

$x - y = 4$ (2)

แก้สมการ (1) , (2) จะได้ $x = 8, y = 4$

ตัวอย่างที่ 2.7 จงหาค่า x, y และ z จากสมการเมทริกซ์ที่กำหนดให้

$$\begin{bmatrix} x+y & 0 & -2 \\ 1 & y-z & 4 \\ 8 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 8 & -y & x-z \end{bmatrix}$$

แนวคิด เนื่องจากเมทริกซ์ทั้ง 2 เท่ากัน

ดังนั้น $x + y = 3$ (1)

$y - z = -2$ (2)

$x - z = -3$ (3)

$-y = -2$ (4)

จากสมการที่ (4) ได้ว่า $y = 2$

แทนค่า y ใน (1) ได้ว่า $x = 1$

แทนค่า x ใน (3) ได้ว่า $z = 4$

$\therefore x = 1, y = 2, z = 4$

2.3 การบวกเมทริกซ์

เมทริกซ์ 2 เมทริกซ์จะบวกกันได้ก็ต่อเมื่อมีมิติเท่ากัน และเอาสมาชิกตำแหน่งเดียวกัน

บวกกัน ผลลัพธ์ที่ได้มีมิติเท่าเดิม

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ แล้ว

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

ตัวอย่างที่ 2.8 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

แนวคิด $A + B = \begin{bmatrix} 1+4 & 3+2 & 2-1 \\ 2-2 & 1+4 & -3+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ศูนย์ (Zero matrix)

คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วย $\underline{0}$ ไม่ว่าเมทริกซ์ศูนย์จะมีมิติเท่าใดก็

ตาม นั่นคือ $\underline{0} = [0]_{m \times n}$

เช่น $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

คุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกเมทริกซ์

ถ้า A, B, C เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ แล้ว

1. $A + B$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ (คุณสมบัติปิด)
2. $A + B = B + A$ (คุณสมบัติการสลับที่)
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)
4. $A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$ (มี $\underline{0}$ เป็นเอกลักษณ์)
5. $A + (-A) = -A + A = \underline{0}$ (มีอินเวอร์ส)

2.4 การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

ให้เอาจำนวนจริงคูณเข้าไปในทุกสมาชิกเลย

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ C เป็นจำนวนจริงแล้ว, $cA = [ca_{ij}]_{m \times n}$

ตัวอย่างที่ 2.9 ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา $3A$

แนวคิด $3A = \begin{bmatrix} 3 \times 0 & 3 \times 5 & 3 \times (-2) \\ 3 \times 2 & 3 \times 1 & 3 \times 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 15 & -6 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2.10 ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 20 \\ -12 & 4 & 32 \end{bmatrix}$ และ $B = cA$

โดยที่ c เป็นจำนวนจริง B เป็นเมทริกซ์ ที่มี $b_{23} = 8$ จงหา c และเมทริกซ์ B

แนวคิด

$$B = cA$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 4 & 8 & 20 \\ -12 & 4 & 32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c \times 4 & c \times 8 & c \times 20 \\ c \times (-12) & c \times 4 & c \times 32 \end{bmatrix}$$

$$\text{แต่ } c \times 32 = b_{23} = 8$$

$$\therefore c = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \times 4 & \frac{1}{4} \times 8 & \frac{1}{4} \times 20 \\ \frac{1}{4} \times (-12) & \frac{1}{4} \times 4 & \frac{1}{4} \times 32 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

การลบเมทริกซ์

คือ การบวกด้วยนิเสธของเมทริกซ์ที่เป็นตัวลบ ดังนั้น $A - B = A + (-B)$

ตัวอย่างที่ 2.11 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ จงหา $2A - 3B$

แนวคิด

$$2A - 3B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + (-3 \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix})$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -3 & -15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2.12 ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ x

จากสมการ $2(x + C) = 2\{x + 5(A - x)\} + B$

แนวคิด $2(x + C) = 2\{x + 5(A - x)\} + B$

$$2x + 2C = 2\{5A - 4x\} + B$$

$$= 10A - 8x + B$$

$$10x = 10A + B - 2C$$

$$x = A + \frac{1}{10}B - \frac{1}{5}C$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{31}{10} & 2 \\ -1 & \frac{1}{10} \\ \frac{83}{10} & \frac{22}{5} \end{bmatrix}$$

คุณสมบัติการคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

ถ้า A, B เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ และ c, d เป็นจำนวนจริงแล้ว

1. cA เป็น $m \times n$ เมทริกซ์
2. $(cd)A = c(dA)$
3. $c(A + B) = cA + cB$
4. $(c + d)A = cA + dA$
5. $1A = A$
6. $-1A = -A$
7. $0A = \underline{0}$
8. $c\underline{0} = \underline{0}$

2.5 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

1) เมทริกซ์ A และ B จะหาผลคูณได้ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของเมทริกซ์ A เท่ากับ จำนวนแถวของเมทริกซ์ B กล่าวคือ

ถ้า A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์

B เป็น $n \times r$ เมทริกซ์

$A \times B$ หรือ AB จะเป็น $m \times r$ เมทริกซ์

2) เวลาคูณให้นำเอาสมาชิกในแถวของเมทริกซ์ A ไปคูณกับสมาชิกในหลังของเมทริกซ์ B แล้วบวกผลคูณเข้าด้วยกัน จะเกิดคำตอบหนึ่งตัว สังเกตจากแผนภาพ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}]$$

เขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2.13 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา AB และ BA

แนวคิด $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (1)(3) + (2)(1) + (0)(2) & (1)(0) + (2)(3) + (0)(2) \\ (1)(3) + (0)(1) + (2)(2) & (1)(0) + (0)(3) + (2)(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3)(1) + (0)(1) & (3)(2) + (0)(0) & (3)(0) + (0)(2) \\ (1)(1) + (3)(1) & (1)(2) + (3)(0) & (1)(0) + (3)(2) \\ (2)(1) + (2)(1) & (2)(2) + (2)(0) & (2)(0) + (2)(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $AB \neq BA$

ตัวอย่างที่ 2.14 จงหาเมทริกซ์ x ที่ทำให้ $Ax = B$ โดยที่ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$

แนวคิด ให้ $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\therefore Ax = B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a + 3c & 2b + 3d \\ 5a + 4c & 5b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{array}{rcl} 2a + 3c & = & -1 \end{array} \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{array}{rcl} 5a + 4c & = & -6 \end{array} \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{array}{rcl} 2b + 3d & = & 7 \end{array} \dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{array}{rcl} 5b + 4d & = & 7 \end{array} \dots\dots\dots (4)$$

จากการแก้ระบบสมการ (1) , (2) , (3) และ (4) จะได้ $a = -2, b = -1, c = 1, d = 3$

$$\therefore x = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

เอกลักษณ์ของการคูณเมทริกซ์

เมทริกซ์เอกลักษณ์หรือยูนิตเมทริกซ์ คือเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ สมาชิกแนวทแยงมุมหลัก (จากบนซ้ายถึงล่างขวา) เป็น 1 โดยตลอด สมาชิกอื่นๆเป็น 0หมด ใช้สัญลักษณ์ I

$I = [i_{pq}]_{n \times n}$ จะเป็นยูนิตเมทริกซ์ ก็ต่อเมื่อ

$$i_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } p = q \\ 0 & \text{เมื่อ } p \neq q \end{cases}$$

$$\text{เช่น } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2.15 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $f(A)$ ถ้า $f(x) = x^3 - 4x + 5I$

$$\begin{aligned} \text{แนวคิด} \quad \therefore \quad f(x) &= x^3 - 4x + 5I \\ f(A) &= A^3 - 4A + 5I \end{aligned}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+8 & 2-6 \\ 4-12 & 8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-16 & -4+34 \\ 36+24 & -16-51 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(A) &= \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -16 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & 22 \\ 44 & -50 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

(1) กำหนด A และ B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์

B เป็นอินเวอร์สการคูณ ของ A ก็ต่อเมื่อ $AB = BA = I$ มักแทน B ด้วย A^{-1}

(2) ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $ad - bc \neq 0$ แล้ว

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(3) เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $ad - bc = 0$ จะหา A^{-1} ไม่ได้ เรียกเมทริกซ์ A ว่า

ซิงกูลาร์เมทริกซ์ (Singular Matrix)

(4) เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $ad - bc \neq 0$ จะหา A^{-1} ได้ เรียกเมทริกซ์ A ว่า

นอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ (Non-Singular Matrix)

ตัวอย่างที่ 2.16 จงหา A^{-1} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\text{แนวคิด} \quad \therefore \quad ad - bc = (1)(3) - (4)(-2) = 3 + 8 = 11$$

$$\text{จากสูตร} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{-4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2.17 จงหา A^{-2}, A^{-3} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

แนวคิด $A^{-1} = \frac{1}{(2)(1)-(1)(3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$$A^{-2} = (A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = (A^{-1}) \cdot (A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -13 & 10 \\ 30 & -23 \end{bmatrix}$$

2.6 คุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์

ถ้า A, B, C เป็น 2×2 เมทริกซ์

- | | |
|---|----------------------------|
| (1) AB เป็น 2×2 เมทริกซ์ ด้วย | (คุณสมบัติปิด) |
| (2) $(AB)C = A(BC)$ | (คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม) |
| (3) $AI = IA = A$ | (คุณสมบัติเอกลักษณ์) |
| (4) $A(B + C) = AB + AC$
หรือ $(B + C)A = BA + CA$ | (คุณสมบัติการแจกแจง) |

คุณสมบัติสำคัญที่ควรทราบ

- (1) AB ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ BA
- (2) กำหนด A และ B เป็น $m \times n$ เมทริกซ์

ถ้า $A + B = A + C$ แล้ว $B = C$
 ถ้า $A - B = A - C$ แล้ว $B = C$
 $(A + B)^t = A^t + B^t$
 $(A - B)^t = A^t - B^t$
- (3) กำหนด A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์, B เป็น $n \times p$ เมทริกซ์, C เป็น $p \times q$ เมทริกซ์

$(AB)^t = B^t \cdot A^t$
 $(ABC)^t = C^t \cdot B^t \cdot A^t$
 $(A^t)^t = A$
 $(cA)^t = c(A)^t$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง

(4) ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A \cdot A^2$$

(5) กำหนด A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์, B เป็น $n \times p$ เมทริกซ์

$$\text{ถ้า } AB \neq BA \text{ แล้วจะได้ } (A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A-B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$$

$$\text{ถ้า } AB = BA \text{ แล้วจะได้ } (A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

(6) ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และเป็นนอนซิงกูลาร์แล้ว

$$AB \text{ เป็นนอนซิงกูลาร์และ } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(7) ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก $A^{-n} = (A^{-1})^n$

(8) ถ้า A, B, C เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้ว

$$\text{ถ้า } B = C \text{ แล้ว } AB = AC$$

$$\text{ถ้า } B = C \text{ แล้ว } BA = CA$$

$$\text{ถ้า } AB = AC \text{ แล้วไม่จำเป็นที่ } B = C$$

$$\text{ถ้า } A \text{ เป็นนอนซิงกูลาร์เมทริกซ์แล้ว และ } AB = AC \text{ จะได้ } B = C$$

$$\text{ถ้า } AB = \underline{0} \text{ ไม่จำเป็นที่ } A = \underline{0} \text{ หรือ } B = \underline{0}$$

2.7 ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้ว ดีเทอร์มิแนนต์ของ A เขียนแทนด้วย $\det(A)$ หรือ $|A|$ หรือ

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ คือ จำนวนจริง } ad - bc$$

$$\text{นั่นคือ } \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ข้อสังเกต (1) ฟังก์ชันจากเซตของ 2×2 เมทริกซ์ ไปยังเซตของจำนวนจริง เรียกว่า

ฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์

(2) ฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะเมทริกซ์ 2 เมทริกซ์ที่ต่างกัน อาจมีค่าดีเทอร์มิแนนต์เท่ากันได้

(3) เมทริกซ์ที่จะหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ได้ จะต้องเป็นเมทริกซ์จัตุรัสเท่านั้น

(4) การหาดีเทอร์มิแนนต์ของ 1×1 เมทริกซ์

$$\text{ถ้า } A = [a]_{1 \times 1} \text{ จะได้ } \det(A) = |a| = a \quad \text{เช่น}$$

$$A = [4] \quad , \quad \det(A) = |4| = 4$$

ตัวอย่างที่ 2.18 จงหาค่า $\det(A)$ ถ้ากำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

แนวคิด $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (-4)(3) = 2 + 12 = 14$

ตัวอย่างที่ 2.19 จงหาค่า x ที่ทำให้ $\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2 & x+2 \end{vmatrix} = 3, x \in$

แนวคิด $(x-2)(x+2) - (1)(2) = 3$
 $x^2 - 4 - 2 = 3$
 $x^2 = 9$
 $\therefore x = \pm 3$

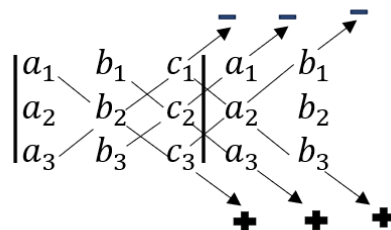
ตัวอย่างที่ 2.20 จงหาค่า x ที่ทำให้ $\det(A - xI) = 8$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

แนวคิด $\det\left(\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 8$
 $\det\left(\begin{bmatrix} -2-x & 7 \\ 6 & 3-x \end{bmatrix}\right) = 8$
 $(-2-x)(3-x) - (7)(6) = 8$
 $-6 - x + x^2 - 42 = 8$
 $x^2 - x - 56 = 0$
 $(x+7)(x-8) = 0$
 $\therefore x = -7, 8$

การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ มิติ 3×3

1. โดยใช้กฎแห่งการคูณไขว้ ทำได้ดังนี้

- (1) ให้นำสมาชิกเมทริกซ์หลักที่ 1 และที่ 2 มาเขียนต่อทางขวามือ Determinant
- (2) ให้นำสมาชิกทั้ง 3 หลัก มาคูณกันตามลูกศร โดยถือหลักว่า คูณลงได้ เครื่องหมายเป็นบวก คูณขึ้นได้เครื่องหมายเป็นลบ แล้วนำผลคูณมาบวกกัน



ตัวอย่างที่ 2.21 จงหาค่าของ $\det(A)$ ถ้ากำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

แนวคิด

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \nearrow 4 \\ \searrow 0 \end{matrix}$$

$\therefore \det(A) = 1 -$

2. การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยใช้แฟกเตอร์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$

ไมเนอร์ (Minor)

ไมเนอร์ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย M_{ij} คือ ดีเทอร์มิแนนต์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ออกจากเมทริกซ์ A เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

ไมเนอร์ของ a_{11} หรือ $M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (2)(-2) = 3$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (4)(-1) - (2)(0) = -4$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (-3)(0) = -1$$

โคแฟกเตอร์ (Cofactor)

โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย C_{ij} คือ ผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ กับไมเนอร์ของ a_{ij}

นั่นคือ $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \{(3)(-1) - (1)(1)\} = -4$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \{(-2)(-1) - (1)(4)\} = 2$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \{(1)(-1) - (0)(4)\} = -1$$

เมื่อเข้าใจเกี่ยวกับเรื่อง โคแฟคเตอร์แล้ว การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ โดยใช้โคแฟคเตอร์มีหลักคือ “ให้เอาสมาชิกแต่ละตัวในแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่ง จากเมทริกซ์ที่กำหนดคูณกับโคแฟคเตอร์ของสมาชิกนั้น แล้วเอาผลที่ได้ในแถวนั้นหรือหลักนั้นบวกกัน”

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ถ้าหาค่า **det** โดยใช้แถว

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \quad ** \quad (\text{ใช้แถวที่ 1})$$

$$\text{หรือ} \quad \det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \quad ** \quad (\text{ใช้แถวที่ 2})$$

ถ้าหาค่า **det** โดยใช้หลัก

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \quad ** \quad (\text{ใช้หลักที่ 1})$$

$$\text{หรือ} \quad \det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \quad ** \quad (\text{ใช้หลักที่ 2})$$

- ข้อสังเกต
- (1) จะใช้แถวใดหรือหลักใด ค่า **det** จะเท่ากันหมด
 - (2) ควรเลือกทำในแถวหรือหลักที่มี 0 อยู่
 - (3) นำไปใช้หาค่า **det** ของ 4×4 เมทริกซ์ได้

ตัวอย่างที่ 2.22 จงหาค่าของ $\det(A)$ โดยใช้วิธีโคแฟคเตอร์ เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

แนวคิด ใช้แถวที่ 2

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 + (2)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(-1)^3 \{(2)(-1) - (3)(1)\} + (2)(-1)^5 \{(1)(-1) - (2)(2)\} \\ &= (-2 - 3) - 2(1 - 4) \\ &= -5 + 6 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.23 จงหาค่าของ $\det(A)$ เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

แนวคิด $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} + a_{41}C_{41}$

$$\begin{aligned} &= 3(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 1(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3\{a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}\} - \{a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}\} \\ &= 3\{0 + 0 + 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\} - \{6(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0\} \\ &= 3\{(-1)(1)\} - \{(-6)(1)\} = -3 + 6 = 3 \end{aligned}$$

การหาอินเวอร์สโดยใช้โคแฟกเตอร์

แอดจอยท์ของเมทริกซ์ (Adjoint of Matrix)

ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ และ C_{ij} เป็นโคแฟกเตอร์ของ a_{ij}

แอดจอยท์ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $\text{adj}(A)$ คือทรานซ์โพสของเมทริกซ์ขนาด

$n \times n$ โดยที่สมาชิกในตำแหน่ง ij คือ C_{ij}

นั่นคือ $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t$ **

ดังนั้น ถ้า A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ และ $|A| \neq 0$ แล้ว

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A)$$

ตัวอย่างที่ 2.24 จงหาอินเวอร์สของเทริกซ์โดยใช้ Adjoint เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

แนวคิด $|A| = -3$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

ถ้า A, B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์

1. ถ้า $A = B$ แล้ว $\det(A) = \det(B)$
2. ถ้า $\det(A) = \det(B)$ แล้ว ไม่จำเป็นที่ $A = B$
3. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
4. $\det(A^{-1}) \cdot \det(A) = 1$
5. $\det(A^t) = \det(A)$
6. $\det(cA) = c^n \det(A)$, c เป็นจำนวนจริง
7. ถ้า A มีสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่ง เป็น 0 ทั้งหมด จะได้

$$\det(A) = 0 \text{ เช่น } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

8. ถ้า A มีสมาชิกใน 2 แถวใด หรือ 2 หลักใดเท่ากัน จะได้ $\det(A) = 0$

$$\text{เช่น } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

9. ถ้า B คือเมทริกซ์ที่เกิดจาก A โดยการสลับแถว 2 แถวใด ๆ หรือสลับหลัก 2 หลักใด ๆ แล้ว $\det(B) = -\det(A)$ เช่น

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

10. ถ้า B เกิดจากการคูณแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่ง ด้วยค่าคงตัว c จะได้ $\det(B) = c \det(A)$ เช่น

$$\begin{vmatrix} 3(1) & 3(2) \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

11. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจากเมทริกซ์ A โดยการเอาเลขคงตัวคูณกับสมาชิกแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่ง แล้วเอาผลที่ได้ไปรวมกับสมาชิกอีกแถวหนึ่ง หรืออีกหลักหนึ่งแล้ว $\det(B) = \det(A)$

$$\text{เช่น } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3(2) + 4 & 3(3) + 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

12. ถ้า A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ที่แถวหนึ่งหรือหลักหนึ่ง เป็น c เท่าของอีกแถวหนึ่ง หรือหลักหนึ่งแล้ว $\det(A) = 0$ เช่น

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3(1) & 3(2) \end{vmatrix} = 0$$

13. ถ้าสมาชิกทั้งหมดได้หรือเหนือแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ A เป็นศูนย์ แล้ว

$\det(A)$ คือผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงหลัก

$$\text{เช่น } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 4 \times 6 = 24$$

ตัวอย่างที่ 2.25 ถ้า $\begin{vmatrix} x-1 & x \\ 3 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ จงหาค่า x

แนวคิด $(x-1)(x+2) - 3x = (-2)(-4) - (2)(1)$

$$x^2 + x - 2 - 3x = 6$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x+2)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -2, 4$$

ตัวอย่างที่ 2.26 จงหาค่า x จากสมการ $ax^2 + 2bx + c = 0$ เมื่อ $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0$

แนวคิด

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0$$

$$ac - b^2 = 0$$

$$\therefore b^2 = ac$$

จากสูตร

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b \pm \sqrt{4ac - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.27 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ จงหาค่า x ที่ทำให้ $|A - xI| = 0$

แนวคิด

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-x & -1 & -2 \\ 2 & 4-x & 2 \\ 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-x & -1 & -2 \\ 2 & 4-x & 2 \\ 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

$(1-x)(4-x)^2 - 2 - 4 + 8 - 2x - 2 + 2x + 8 - 2x = 0$
 $16 - 24x + 9x^2 - x^3 - 2x + 8 = 0$
 $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$
 $(x-2)(x^2 - 7x + 12) = 0$
 $(x-2)(x-3)(x-4) = 0$
 $\therefore x = 2, 3, 4$

$$(1-x)(4-x)^2 - 2 - 4 + 8 - 2x - 2 + 2x + 8 - 2x = 0$$

$$16 - 24x + 9x^2 - x^3 - 2x + 8 = 0$$

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

$$(x-2)(x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$(x-2)(x-3)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 2, 3, 4$$

2.8 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์

วิธีที่ 1 การกระทำตามแถวของเมทริกซ์ (Row Operation)

ให้เปลี่ยนสมการอยู่ในรูปของเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ และตัวคงที่ แล้วใช้การกระทำตามแถวดังนี้

- 1) สลับที่กันระหว่างแถว 2 แถวใดๆก็ได้
- 2) คูณแถวใดแถวหนึ่ง ด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ 0 ได้
- 3) คูณแถวใดแถวหนึ่ง ด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ 0 แล้วนำไปบวกหรือลบกับอีกแถวใดแถวหนึ่งได้

$$a_1x + b_1y = k_1$$

$$a_2x + b_2y = k_2$$

เขียนเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ และค่าคงที่

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

หลักการทำให้

1. พยายามทำให้ส่วนทางซ้ายของเส้นตรงเป็นยูนิตเมทริกซ์
 2. เวลาทำควรทำให้เกิด 0 ให้ครบตามจำนวนตำแหน่งเสียก่อน แล้วค่อยทำให้เกิด 1
- สำหรับคำตอบ ค่าของ x คือตัวคงที่ในแถวที่ 1 ค่าของ y คือตัวคงที่ในแถวที่ 2

ตัวอย่างที่ 2.28 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้น $3x + 2y = -3$
 $x - 3y = 13$

แนวคิด

วิธีที่ 1 การกระทำตามแถวของเมทริกซ์ (Row Operation)

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 13 \end{array} \right] \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}$$

$$\text{ทำ } R_1 = \frac{1}{3}R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & -1 \\ 4 & -3 & 13 \end{array} \right]$$

$$\text{ทำ } R_2 = -4R_1 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & \frac{-17}{3} & 17 \end{array} \right]$$

$$\text{ทำ } R_2 = \frac{-3}{17}R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right]$$

$$\text{ทำ } R_1 = \frac{-2}{3}R_2 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right]$$

$$\therefore x = 1, y = -3$$

วิธีที่ 2 โดยใช้อินเวอร์สของเมทริกซ์ มีหลักการทำดังนี้

1. เขียนเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของตัวแปร และเมทริกซ์ของค่าคงที่
2. หาคอินเวอร์สของเมทริกซ์ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปร
3. นำเอาอินเวอร์สไปคูณด้านซ้ายตลอดสมการ

ตัวอย่างที่ 2.29 จงแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -1 \\ -3x + 5y &= 2 \end{aligned}$$

แนวคิด

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

อินเวอร์สการคูณของ

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \text{ คือ } \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = 1, y = 1$$

ตัวอย่างที่ 2.30 จงแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 8 \\ -x + 4y + 2z &= -4 \\ 3x - y + 2z &= 9 \end{aligned}$$

แนวคิด เขียนเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (Coefficient Matrix) A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ตัวแปร (Variable Matrix) X:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ค่าคงที่ (Constant Matrix) B:

$$B = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ต้องหาโคแฟกเตอร์ของ A

$$\begin{aligned} \text{cof.}(A) &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 8 & -11 \\ 5 & 1 & -7 \\ -10 & -5 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จาก $\text{adj.}A = (\text{cof.}(A))^t$

$$\text{adj.}A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -10 \\ 8 & 1 & -5 \\ -11 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \det A = -15$

และจาก

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} (\text{adj.}A) \\ &= \frac{1}{-15} \begin{bmatrix} 10 & 5 & -10 \\ 8 & 1 & -5 \\ -11 & -7 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จากความสัมพันธ์ $X = A^{-1}(B)$ แทนค่าจะได้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{1}{-15} \begin{bmatrix} 10 & 5 & -10 \\ 8 & 1 & -5 \\ -11 & -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-15} \begin{bmatrix} (10)(8) + (5)(-4) + (-10)(9) \\ (8)(8) + (1)(-4) + (-5)(9) \\ (-11)(8) + (-7)(-4) + (5)(9) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{-15} \begin{bmatrix} -30 \\ 15 \\ -15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{-15}\right)(-30) \\ \left(\frac{1}{-15}\right)(15) \\ \left(\frac{1}{-15}\right)(-15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

สรุปคำตอบได้ว่า $x = 2, y = -1$ และ $z = 1$

วิธีที่ 3 โดยใช้กฎของแครมเมอร์ (Cramer's rule)

จะกล่าวเฉพาะสมการ 3 ชั้น โดยสมมติสมการอยู่ในรูป

$$a_1x + b_1y + c_1z = k_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = k_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = k_3$$

จะได้

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

ถ้า

$$|A| \neq 0 \text{ แล้ว}$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|}, y = \frac{|A_2|}{|A|}, z = \frac{|A_3|}{|A|}$$

ตัวอย่างที่ 2.31 จงแก้ระบบสมการ $x + y + z = 10$

$$3x + z = 13$$

$$2x + y - z = 9$$

แนวคิด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, |A| = 7$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 13 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & -1 \end{bmatrix}, |A_1| = 25$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 3 & 13 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \end{bmatrix}, |A_2| = 29$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 3 & 0 & 13 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}, |A_3| = 16$$

คำตอบของสมการคือ

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{25}{7}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{29}{7}$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{16}{7}$$

2.9 การประยุกต์ความรู้เรื่องเมทริกซ์ไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์

การประยุกต์ใช้ความรู้เรื่อง เมทริกซ์ ในการสอนวิทยาศาสตร์มีความสำคัญอย่างยิ่ง เพราะเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพสูงในการจัดการ วิเคราะห์ และทำความเข้าใจข้อมูลที่ซับซ้อน

ตัวอย่างการประยุกต์ใช้ความรู้เรื่อง เมทริกซ์ ในการสอนวิทยาศาสตร์ มีดังนี้

สถานการณ์ 1 : การวิเคราะห์ข้อมูลจากห้องปฏิบัติการเคมีโดยใช้เมทริกซ์

"นักวิทยาศาสตร์ห้องหนึ่งทำการทดลองเพื่อศึกษาปฏิกิริยาเคมีระหว่างสาร A และสาร B ซึ่งก่อให้เกิดสารผลิตภัณฑ์ C และ D โดยทำการทดลองที่อุณหภูมิและความดันต่างกัน 3 สภาวะ และบันทึกปริมาณสารตั้งต้นและสารผลิตภัณฑ์ที่ได้ในแต่ละครั้ง

ข้อมูลที่ได้ มีดังนี้:

สภาวะทดลอง	สาร A เริ่มต้น (mol)	สาร B เริ่มต้น (mol)	สาร C ผลิตภัณฑ์ (mol)	สาร D ผลิตภัณฑ์ (mol)
1 (25°C)	10	12	8	5
2 (50°C)	10	12	9	6
3 (75°C)	10	12	7	4

1. ครูต้องการให้นักวิทยาศาสตร์นำข้อมูลเหล่านี้มาจัดระเบียบและวิเคราะห์ เพื่อทำความเข้าใจการเปลี่ยนแปลงปริมาณสารในแต่ละสภาวะ"

2. การเกิดผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดมีปริมาณสารที่หายไปเท่าใด
3. ถ้าเพิ่มปริมาณสารตั้งต้นเป็น 2 เท่า จะเกิดสารผลิตภัณฑ์ C และ D เป็นเท่าใด
4. ถ้าราคาต่อโมลของสารแต่ละชนิดเป็นดังนี้ ในการทดลองนี้ได้กำไรหรือขาดทุนกี่บาท

สาร	สาร A	สาร B	สาร C	สาร D
ราคาต่อโมล	3	5	7	4

แนวคิด เราสามารถนำความรู้เรื่องเมทริกซ์มาใช้ในการจัดเก็บข้อมูลในรูปเมทริกซ์ (Data Representation): ด้วยการจัดเรียงข้อมูลที่ได้จากการทดลองลงในรูปของเมทริกซ์ เพื่อความเป็นระเบียบและง่ายต่อการจัดการได้ดังนี้

1. สามารถจัดให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ M ได้ดังนี้:

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 8 & 5 \\ 10 & 12 & 9 & 6 \\ 10 & 12 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

แต่ละแถว (row) แทนสภาวะการทดลองที่แตกต่างกัน และ

แต่ละคอลัมน์ (column) แทนปริมาณของสารแต่ละชนิด

2. การคำนวณการเปลี่ยนแปลงปริมาณสารโดยใช้การลบเมทริกซ์ (Matrix Subtraction):

สร้างเมทริกซ์ S ที่เป็นปริมาณสารที่เหลืออยู่ (ผลิตภัณฑ์)

$$S = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

และเมทริกซ์ R ที่เป็นปริมาณสารตั้งต้น

$$R = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 10 & 12 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

ปริมาณสารที่หายไป เราสามารถใช้เมทริกซ์เดิมเพื่อคำนวณการเปลี่ยนแปลงจากสารตั้งต้นไปเป็นสารผลิตภัณฑ์ได้

$$R - S = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 10 & 12 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

จากเมทริกซ์ผลลัพธ์แถวที่ 1 อธิบายได้ว่าที่สภาวะทดลอง (25°C) ในการเกิดสาร C จะมีสารที่ A และ B หายไป 2 โมล

ถ้าเพิ่มปริมาณสารตั้งต้นเป็น 2 เท่า จะเกิดสารผลิตภัณฑ์ C และ D ดังเมทริกซ์

$$2M = \begin{bmatrix} 2(10) & 2(12) & 2(8) & 2(5) \\ 2(10) & 2(12) & 2(9) & 2(6) \\ 2(10) & 2(12) & 2(7) & 2(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 24 & 16 & 10 \\ 20 & 24 & 18 & 12 \\ 20 & 24 & 14 & 8 \end{bmatrix}$$

จากเมทริกซ์ผลลัพธ์แถวที่ 1 อธิบายได้ว่าที่สภาวะทดลอง (25°C) ถ้าเพิ่มปริมาณสารตั้งต้นเป็น 2 เท่า จะเกิดสาร C และ D เป็น 2 เท่าด้วย

3. ราคาต่อโมลของสารแต่ละชนิด แทนด้วยเมทริกซ์ P ได้ดังนี้

$$P = \begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_C \\ P_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

เราสามารถหาดัชนีรวมของสารตั้งต้นหรือมูลค่ารวมของสารผลิตภัณฑ์ในแต่ละสภาวะได้โดยการคูณเมทริกซ์

เราสามารถหาดัชนีรวมของสารตั้งต้น ได้ดังนี้

$$R \times P_{AB} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 10 & 12 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (10)(3) + (10)(5) \\ (10)(3) + (10)(5) \\ (10)(3) + (10)(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 80 \\ 80 \end{bmatrix}$$

เราสามารถหามูลค่ารวมของสารผลิตภัณฑ์ในแต่ละสภาวะ ได้ดังนี้

$$S \times P_{CD} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (8)(7) + (5)(4) \\ (9)(7) + (6)(4) \\ (7)(7) + (4)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76 \\ 87 \\ 65 \end{bmatrix}$$

หามูลค่าของสารที่ได้เทียบกับต้นทุน

$$\begin{bmatrix} 76 \\ 87 \\ 65 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 80 \\ 80 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ -15 \end{bmatrix}$$

พบว่าได้กำไรที่สภาวะทดลอง (50°C) ส่วนที่สภาวะทดลอง (25°C) และ ที่สภาวะทดลอง (75°C) ขาดทุนเนื่องจากมูลค่าที่ได้น้อยกว่าต้นทุน

จะเห็นว่าเมทริกซ์เป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพในการจัดระเบียบข้อมูลเชิงตาราง (tabular data) ที่มีหลายตัวแปรและหลายสภาวะ

สถานการณ์ 2: การวิเคราะห์องค์ประกอบของสารผสมโดยใช้ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

นักวิทยาศาสตร์ทำการวิเคราะห์ตัวอย่างของ โลหะผสม ชนิดหนึ่ง ซึ่งทราบว่าประกอบด้วย ทองแดง (Cu), สังกะสี (Zn), และ นิกเกิล (Ni) เท่านั้น แต่ไม่ทราบสัดส่วนที่แน่นอน จึงหาเครื่องมือที่สามารถวัดมวลรวมของตัวอย่าง และสามารถทำการทดลองที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติทางเคมีบางอย่างเพื่อหาข้อมูลเพิ่มเติม มีข้อมูลการทดลองดังนี้:

“มวลรวม ของตัวอย่างโลหะผสมคือ 150 กรัมเมื่อนำไปทำปฏิกิริยาเคมีเฉพาะ สารละลายที่ได้รับว่ามี ปริมาณทองแดงเป็น 2 เท่าของปริมาณสังกะสี การวิเคราะห์เพิ่มเติมพบว่า ปริมาณนิกเกิลมีค่าน้อยกว่าปริมาณทองแดงอยู่ 10 กรัม นักวิทยาศาสตร์ต้องการหาว่าในโลหะผสมนี้มี ทองแดง สังกะสี และนิกเกิล อย่างละกี่กรัม”

แนวคิด กำหนดตัวแปรแทนปริมาณของแต่ละโลหะในหน่วยกรัม:

ให้ x แทน ปริมาณทองแดง (Cu) ในหน่วยกรัม

ให้ y แทน ปริมาณสังกะสี (Zn) ในหน่วยกรัม

ให้ z แทน ปริมาณนิกเกิล (Ni) ในหน่วยกรัม

การสร้างระบบสมการเชิงเส้น: จากข้อมูลที่โจทย์ให้มา ให้นักวิทยาศาสตร์สร้างสมการตามเงื่อนไขแต่ละข้อ:

- เงื่อนไข 1 (มวลรวม): ปริมาณทองแดง + ปริมาณสังกะสี + ปริมาณนิกเกิล = มวลรวม

$$\text{สมการที่ 1: } x + y + z = 150$$

- เงื่อนไข 2 (ปริมาณทองแดงเป็น 2 เท่าของปริมาณสังกะสี)

$$\text{สมการที่ 2: } x = 2y \text{ หรือจัดรูปใหม่เป็น } x - 2y + 0z = 0$$

- เงื่อนไข 3 ปริมาณนิกเกิลน้อยกว่าปริมาณทองแดงอยู่ 10 กรัม

$$\text{สมการที่ 3: } z = x - 10 \text{ หรือจัดรูปใหม่เป็น } -x + 0y + z = -10$$

สรุปได้เป็นระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร 3 สมการ:

$$x + y + z = 150 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$x - 2y + 0z = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$-x + 0y + z = -10 \quad \dots\dots\dots (3)$$

การแปลงระบบสมการเป็นรูปแบบเมทริกซ์ (Matrix Form): เขียนระบบสมการนี้ในรูปของสมการเมทริกซ์ $AX = B$:

เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (Coefficient Matrix) A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ตัวแปร (Variable Matrix) X :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ค่าคงที่ (Constant Matrix) B :

$$B = \begin{bmatrix} 150 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น สมการเมทริกซ์คือ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$

การแก้ระบบสมการโดยใช้เมทริกซ์ (Matrix Solutions) มีวิธีการแก้ปัญหาได้หลายวิธี ได้แก่

1. วิธีของคราเมอร์ (Cramer's Rule): ใช้ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant) ในการหาค่า x, y, z (เหมาะสำหรับนักศึกษาที่คุ้นเคยกับการคำนวณดีเทอร์มิแนนต์)
2. วิธีเมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix Method): หาเมทริกซ์ผกผันของ A (คือ A^{-1}) แล้วหา $X = A^{-1}B$ (เหมาะสำหรับนักศึกษาที่เข้าใจแนวคิดเมทริกซ์ผกผัน)
3. การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน (Elementary Row Operations) หรือวิธีการกำจัดแบบเกาส์เซียน (Gaussian Elimination): แปลงเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid B]$ ให้อยู่ในรูปขั้นบันไดลดรูปตามแถว (Reduced Row Echelon Form) เพื่อหาค่า x, y, z โดยตรง

วิธีที่ 1 การแก้ระบบสมการด้วยวิธีของคราเมอร์ (Cramer's Rule): ใช้ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, |A| = -5$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 150 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -10 & 0 & 1 \end{bmatrix}, |A_1| = -320$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 150 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -10 & 1 \end{bmatrix}, |A_2| = -160$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 150 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -10 \end{bmatrix}, |A_3| = -270$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-320}{-5} = 64 \\y &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-160}{-5} = 32 \\z &= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-270}{-5} = 54\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 วิธีเมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix Method): หาเมทริกซ์ผกผันของ A (คือ A^{-1}) แล้วหา

$$X = A^{-1}B$$

ต้องหาโคแฟกเตอร์ของ A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{cof.}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{จาก } \text{adj.}A = (\text{cof.}(A))^t$$

$$\text{adj.}A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{เนื่องจาก } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, |A| = -5$$

และจาก

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \frac{1}{\det A} (\text{adj.}A) \\ &= \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

จากความสัมพันธ์ $X = A^{-1}(B)$ แทนค่าจะได้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} (-2)(150) + (-1)(0) + (2)(-10) \\ (-1)(150) + (2)(0) + (1)(-10) \\ (-2)(150) + (-1)(0) + (-3)(-10) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -320 \\ -160 \\ -270 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\frac{1}{-5})(-320) \\ (\frac{1}{-5})(-160) \\ (\frac{1}{-5})(-270) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 \\ 32 \\ 54 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จะได้ว่า $x = 64, y = 32$ และ $z = 54$

วิธีที่ 3 การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน (Elementary Row Operations) หรือวิธีการ

กำจัดแบบเกาส์เซียน (Gaussian Elimination): แปลงเมทริกซ์แต่งเต็ม $[A | B]$ ให้อยู่ในรูป

ขั้นบันไดลดรูปตามแถว (Reduced Row Echelon Form)

$$[A | B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -10 \end{array} \right]$$

ทำ $R_2 = R_2 - R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & -3 & -1 & -150 \\ -1 & 0 & 1 & -10 \end{array} \right]$$

ทำ $R_3 = R_3 + R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & -3 & -1 & -150 \\ 0 & 1 & 2 & 140 \end{array} \right]$$

สลับ R_2 กับ R_3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 2 & 140 \\ 0 & -3 & -1 & -150 \end{array} \right]$$

$$\text{ทำ } R_3 = R_3 + 3R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 2 & 140 \\ 0 & 0 & 5 & 270 \end{array} \right]$$

$$\text{ทำ } R_3 = \frac{R_3}{5}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 2 & 140 \\ 0 & 0 & 1 & 54 \end{array} \right]$$

$$\text{ทำ } R_2 = R_2 - 2R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & 54 \end{array} \right]$$

$$\text{ทำ } R_1 = R_1 - R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 118 \\ 0 & 1 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & 54 \end{array} \right]$$

$$\text{ทำ } R_1 = R_1 - R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 64 \\ 0 & 1 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & 54 \end{array} \right]$$

สรุปคำตอบได้ว่า $x = 64$, $y = 32$ และ $z = 54$

สรุปผลที่ได้ ทองแดง (Cu): $x = 64$ กรัม

สังกะสี (Zn): $y = 32$ กรัม

นิกเกิล (Ni): $z = 54$ กรัม

การตรวจสอบคำตอบและสรุปผลทางวิทยาศาสตร์: ให้นักศึกษาตรวจสอบคำตอบที่ได้กับเงื่อนไขในโจทย์: แทนค่าในแต่ละสมการ

$$\text{สมการที่ 1} \quad 64 + 32 + 54 = 150 \text{ กรัม (ถูกต้อง)}$$

$$\text{สมการที่ 2} \quad 64 = 2 \times 32 \quad (\text{ถูกต้อง})$$

$$\text{สมการที่ 3} \quad 54 = 64 - 10 \quad (\text{ถูกต้อง})$$

สรุปว่า โลหะผสมประกอบด้วยทองแดง 64 กรัม, สังกะสี 32 กรัม และนิกเกิล 54 กรัม

สรุปสาระสำคัญ

เมทริกซ์ คือกลุ่มของตัวเลขหรือสัญลักษณ์ที่จัดเรียงกันเป็นแถว (rows) และคอลัมน์ (columns) ในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยแต่ละตำแหน่งในเมทริกซ์เรียกว่าสมาชิก (element) ขนาดของเมทริกซ์จะถูกระบุด้วยจำนวนแถวคูณจำนวนคอลัมน์ เช่น เมทริกซ์ 3×2 มี 3 แถว 2 คอลัมน์

เราสามารถดำเนินการกับเมทริกซ์ได้หลายอย่าง เช่น การบวก การลบ และการคูณ ซึ่งมีกฎเฉพาะตัว การบวกและลบจะทำได้เมื่อเมทริกซ์มีขนาดเท่ากัน โดยนำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาบวกหรือลบกัน ส่วนการคูณเมทริกซ์จะซับซ้อนกว่า โดยจำนวนคอลัมน์ของเมทริกซ์แรกต้องเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ที่สอง

เมทริกซ์มีบทบาทสำคัญในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น การแปลงทางเรขาคณิต การจัดการข้อมูลขนาดใหญ่ และเป็นรากฐานในสาขาต่างๆ เช่น วิทยาการคอมพิวเตอร์ ฟิสิกส์ และเศรษฐศาสตร์. การทำความเข้าใจเมทริกซ์จึงเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการวิเคราะห์และแก้ไขปัญหาที่ซับซ้อนในหลากหลายสาขาวิชา.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา

1. $A + B, B - C, 2A - 3C$

2. จงหาเมทริกซ์ x จากสมการ $2(x + C) = 2\{x + 5(A - x)\} + B$

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ จงหา AB, BA

3. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ จงหา AB, BA

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $A^2 - 4A - 5I$

5. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(AB), \det(A^t)$

6. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A)$

7. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2x \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2x & -x \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $\det A = 4\det B$

8. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $C = 2AB^{-1} + B^{-1}$

9. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} และ B^{-1}

ข้อ 10-12 จงแก้ระบบสมการ ด้วยวิธีต่อไปนี้

1. วิธีของคราเมอร์ (Cramer's Rule): ใช้ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

2. วิธีเมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix Method): หาเมทริกซ์ผกผันของ A (คือ A^{-1}) แล้ว

หา $X = A^{-1}B$

3. การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน (Elementary Row Operations) หรือวิธีการกำจัดแบบเกาส์เซียน (Gaussian Elimination): แปลงเมทริกซ์แต่งเต็ม $[A | B]$ ให้อยู่ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปตามแถว (Reduced Row Echelon Form)

10. จงแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 13 \\ 2x - 3y &= -5 \end{aligned}$$

11. จงแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + y + z &= 7 \\ 2x + 3y - z &= 0 \\ 3x + 4y + 2z &= 17 \end{aligned}$$

12. จงแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 3x + y &= 6 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}$$

13. นักวิทยาศาสตร์กำลังทำการวิเคราะห์ตัวอย่างสารละลายที่ไม่ทราบองค์ประกอบ ซึ่งทราบว่าประกอบด้วย กรดอ่อน 2 ชนิด (HA และ HB) และ เบสอ่อน 1 ชนิด (C) ละลายอยู่ในน้ำ ที่สภาวะสมดุล นักวิทยาศาสตร์ได้ทำการวัดค่าบางอย่างที่เกี่ยวข้องกับความเข้มข้นของไอออนในสารละลาย และพบว่าสามารถตั้งสมการความสัมพันธ์เชิงเส้นของความเข้มข้นที่สภาวะสมดุลได้ 3 สมการดังนี้:

ความเข้มข้นของ HA บวกกับความเข้มข้นของ HB เท่ากับ 7 หน่วยโมลาร์:

$$[HA] + [HB] = 7$$

ความเข้มข้นของ HA ลบด้วยความเข้มข้นของ C เท่ากับ 1 หน่วยโมลาร์:

$$[HA] - [C] = 1$$

สองเท่าของความเข้มข้นของ HB บวกกับความเข้มข้นของ C เท่ากับ 11 หน่วยโมลาร์:

$$2[HB] + [C] = 11$$

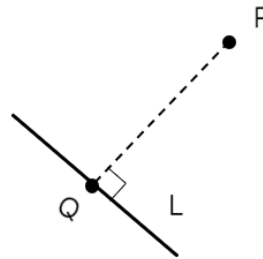
ถ้านักวิทยาศาสตร์ต้องการหาค่าความเข้มข้นของกรด HA, กรด HB, และเบส C ในหน่วยโมลาร์ (M) โดยใช้ความรู้เรื่อง ดีเทอร์มิแนนซ์เมทริกซ์ จงหาว่ากรดและเบสที่ทำการวิเคราะห์แต่ละชนิดมีความเข้มข้นเท่าใด

บทที่ 3

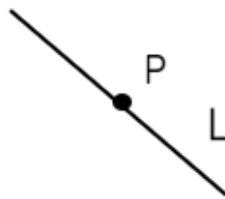
เรขาคณิตวิเคราะห์

3.1 โพรเจกชัน (Projections)

3.1.1 โพรเจกชันของจุด ตามรูป 3.1 ให้ P เป็นจุดอยู่นอกเส้นตรง L ถ้าลากเส้นตรงจาก P มาพบเส้นตรง L ที่จุด Q โดยเส้นตรง PQ ตั้งฉากกับเส้นตรง L แล้วจุด Q จะเป็นโพรเจกชันของจุด P บนเส้นตรง L

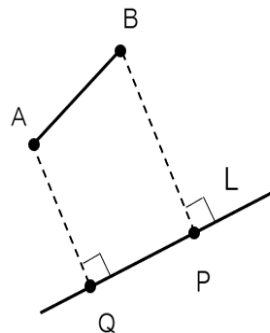


รูป 3.1 (จุด Q เป็นโพรเจกชันของจุด P บนเส้นตรง L เมื่อจุด P อยู่นอกเส้นตรง L)

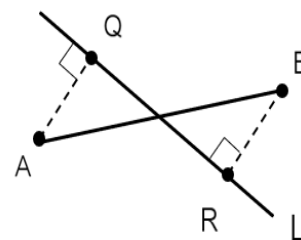


รูป 3.2 (ถ้าให้จุด P อยู่บนเส้นตรง L โพรเจกชันของจุด P บนเส้นตรง L ก็คือจุด P)

3.1.2 โพรเจกชันของส่วนของเส้นตรง ตามรูป 3.3 และ 3.4 โพรเจกชันของส่วนของเส้นตรง AB บนเส้นตรง L ได้แก่ส่วนของเส้นตรง QR บนเส้นตรง L โดยที่จุด Q และ R เป็นโพรเจกชันของจุด A และ B บนเส้นตรง L ตามลำดับ



รูป 3.3 (QR เป็นโพรเจกชันของ AB)



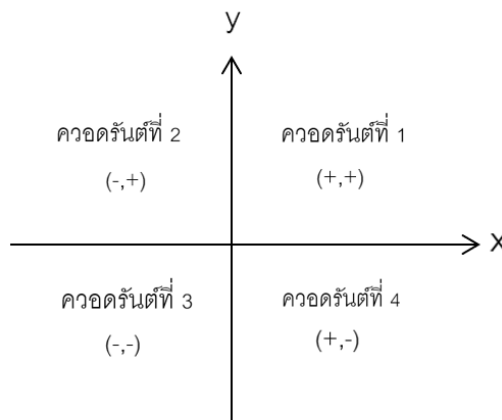
รูป 3.4 (QR เป็นโพรเจกชันของ AB)

3.1.3 โพรเจกชันบนแกนพิกัดจากของจุดต่างๆ

1. ทบทวนเรื่องระบบแกนพิกัด

แกนพิกัดประกอบด้วยเส้นจำนวนที่ลากในแนวนอน เรียกว่า แกน x และเส้นจำนวนที่ลากในแนวตั้ง เรียกว่า แกน y

แกน x และ แกน y จึงตัดกันได้ฉากกันบนพื้นระนาบหนึ่ง และแบ่งพื้นระนาบออกเป็นสี่ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า ควอดรนต์ (quadrant)



จุดที่แกน x ตัดกับแกน y เรียกว่า จุดกำเนิด

ข้อสังเกตจุดในควอดรนต์ต่างๆ

จุดในควอดรนต์ที่ 1 จะจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งกับคู่อันดับ ของจำนวนจริง ซึ่งมีจำนวนจริงตัวแรกเป็นบวก และจำนวนจริงตัวหลังเป็น บวก เช่นเดียวกัน เช่น $(2,8)$

จุดในควอดรนต์ที่ 2 จะจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งกับคู่อันดับ ของจำนวนจริง ซึ่งมีจำนวนจริงตัวแรกเป็นลบ และจำนวนจริงตัวหลังเป็น บวก เช่น $(-3,7)$

จุดในควอดรนต์ที่ 3 จะจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งกับคู่อันดับ ของจำนวนจริง ซึ่งมีจำนวนจริงตัวแรกเป็นลบ และจำนวนจริงตัวหลังเป็น ลบ ด้วย เช่น $(-4,-3)$

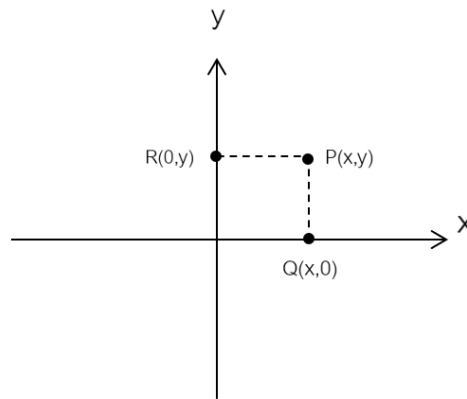
จุดในควอดรนต์ที่ 4 จะจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งกับคู่อันดับ ของจำนวนจริง ซึ่งมีจำนวนจริงตัวแรกเป็นบวก และจำนวนจริงตัวหลังเป็น ลบ เช่นเดียวกัน เช่น $(3,-3)$

2. โพรเจกชันบนแกน x

โพรเจกชันบนแกน x ของจุด (x, y) ก็คือจุดที่อยู่บนแกน x ซึ่งมีโคออร์ดิเนตเป็น $(x, 0)$

3. โพรเจกชันบนแกน y

โพรเจกชันบนแกน y ของจุด (x, y) ก็คือจุดที่อยู่บนแกน y ซึ่งมีโคออร์ดิเนตเป็น $(0, y)$

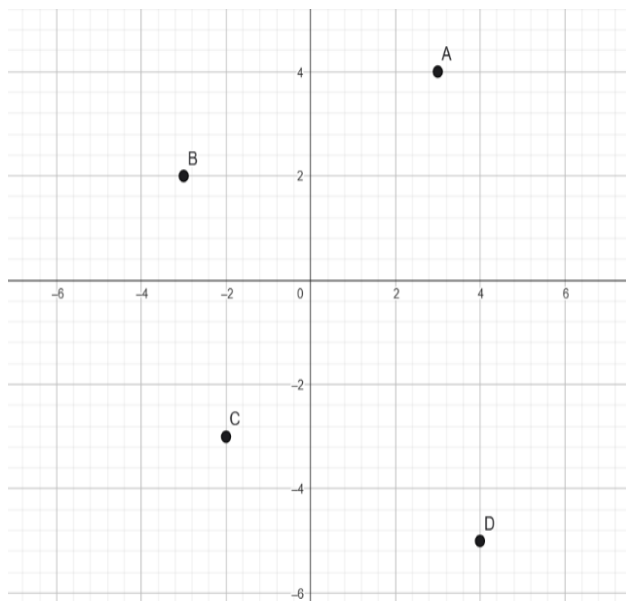


สรุป โพรเจกชันบนแกน x ของจุด (x, y) ก็คือจุด $(x, 0)$

โพรเจกชันบนแกน y ของจุด (x, y) ก็คือจุด $(0, y)$

ตัวอย่างที่ 3.1 จงหาโพรเจกชันบนแกน x และแกน y ของจุดต่อไปนี้
 $(3, 4), (-3, 2), (-2, -3), (4, -5)$

แนวคิด

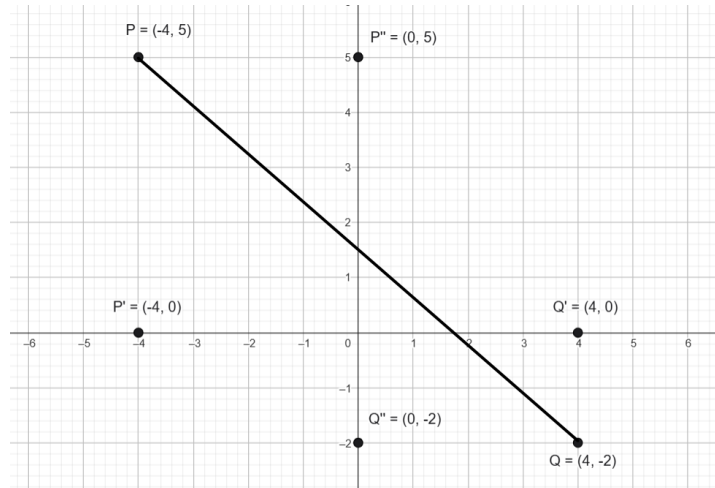


1. โพรเจกชันของจุด $(3, 4)$ บนแกน x คือจุด $(3, 0)$
2. โพรเจกชันของจุด $(3, 4)$ บนแกน y คือจุด $(0, 4)$
3. โพรเจกชันของจุด $(-3, 2)$ บนแกน x คือจุด $(-3, 0)$
4. โพรเจกชันของจุด $(-3, 2)$ บนแกน y คือจุด $(0, 2)$
5. โพรเจกชันของจุด $(-2, -3)$ บนแกน x คือจุด $(-2, 0)$
6. โพรเจกชันของจุด $(-2, -3)$ บนแกน y คือจุด $(0, -3)$
7. โพรเจกชันของจุด $(4, -5)$ บนแกน x คือจุด $(4, 0)$
8. โพรเจกชันของจุด $(4, -5)$ บนแกน y คือจุด $(0, -5)$

ตัวอย่างที่ 3.2 จงหาโปรเจกชันบนแกน x และแกน y ของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด

$P(-4,5)$ กับ $Q(4,-2)$

แนวคิด



1. โปรเจกชันบนแกน x หาโปรเจกชันบนแกน x ของจุด $P(-4,5)$ ได้จุด $P'(-4,0)$ และโปรเจกชันบนแกน x ของจุด $Q(4,-2)$ ก็คือจุด $Q'(4,0)$

$\therefore$ โปรเจกชันบนแกน x ของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $P(-4,5)$ กับ $Q(4,-2)$ ก็คือส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $P'(-4,0)$ กับ $Q'(4,0)$ หรือคือส่วนของแกน x จากจุด $P'(-4,0)$ ถึง $Q'(4,0)$

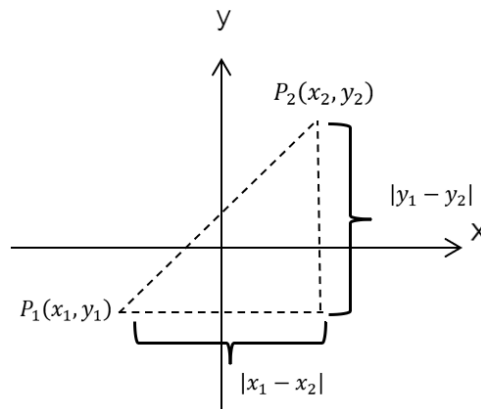
2. โปรเจกชันของแกน y โปรเจกชันบนแกน y ของจุด $P(-4,5)$ คือจุด $P''(0,5)$ และโปรเจกชันบนแกน y ของจุด $Q(4,-2)$ ก็คือจุด $Q''(0,-2)$

$\therefore$ โปรเจกชันบนแกน y ของส่วนของเส้นตรง PQ ก็คือส่วนของแกน y จากจุด $P''(0,5)$ ถึงจุด $Q''(0,-2)$

3.2 ระยะระหว่างจุด 2 จุด

ทฤษฎีบท : ถ้า $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบระยะระหว่างจุด P_1 และ P_2 จะเท่ากับ $|P_1 P_2|$ ซึ่งคำนวณได้จากสมการ

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



สูตรนี้สามารถนำไปใช้คำนวณหาได้ไม่ว่า จุด 2 จุด คือ P_1 กับ P_2 จะอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x หรือขนานกับแกน y หรือไม่ขนานกับแกนใดเลย

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาระยะระหว่างจุด $A(3, -1)$ และจุด $B(-4, -2)$

แนวคิด จากสูตร $|P_1 P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

เป็นระยะระหว่างจุด P_1 และ P_2

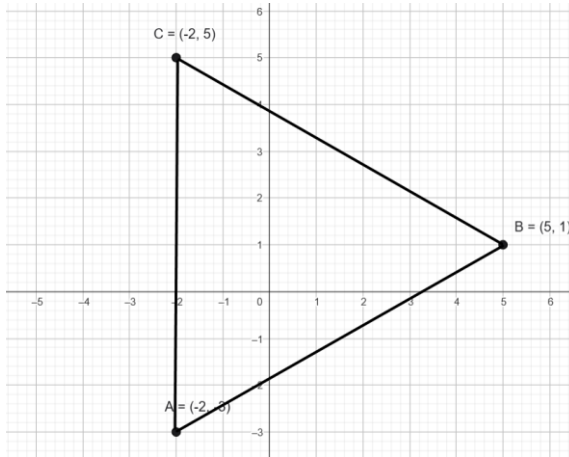
$\therefore$ ระยะระหว่างจุด A และ $B = |AB|$

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(3 - (-4))^2 + ((-1) - (-2))^2} \\ &= \sqrt{(3 + 4)^2 + (-1 + 2)^2} \\ &= \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหาความยาวของแต่ละด้านของสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมยอด ดังนี้

$A(-2, -3), B(5, 1), C(-2, 5)$ และบอกด้วยว่าเป็นสามเหลี่ยมชนิดใด

แนวคิด



$$\text{ความยาว } AC = 5 - (-3) = 5 + 3 = 8$$

$$\text{ความยาว } AB = |AB|$$

$$= \sqrt{(5 + 2)^2 + (1 + 3)^2} = \sqrt{65}$$

$$\text{ความยาว } BC = |BC|$$

$$= \sqrt{(5 + 2)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{65}$$

สามเหลี่ยม ABC มีด้าน 2 ด้าน ยาวเท่ากัน

ดังนั้น ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมีด้าน AC เป็นฐาน

ตัวอย่างที่ 3.5 สามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีจุด $A(-\sqrt{3}, 2), B(2\sqrt{3}, -1), C(2\sqrt{3}, 5)$ เป็นจุดมุมยอด สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมชนิดใด

แนวคิด

หาความยาวด้านทั้งสามของ สามเหลี่ยม ABC ดังนี้

$$|AB| = \sqrt{(-\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2 + (2 + 1)^2}$$

$$= \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + 9} = \sqrt{36} = 6$$

$$|BC| = \sqrt{(2\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2 + (-1 - 5)^2}$$

$$= \sqrt{0 + 36} = \sqrt{36} = 6$$

$$|AC| = \sqrt{(-\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2 + (2 - 5)^2}$$

$$= \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + 9} = \sqrt{36} = 6$$

สามเหลี่ยม ABC มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน ดังนั้นจึงเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

ตัวอย่างที่ 3.6 จงหาโคออร์ดิเนตของจุด A ซึ่งอยู่บนแกน y ที่มีระยะห่างจากจุด $B(-5, -2)$ และจุด $C(3, 2)$ เท่ากัน

แนวคิด สมมติให้จุด A มีโคออร์ดิเนตเป็น $(0, y)$ ที่ให้พิกัดตัวแรกเป็นศูนย์ เพราะทราบว่าจุด A อยู่บนแกน y

$$\therefore |AB| = \sqrt{(0+5)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{25 + (y^2 + 4y + 4)}$$

$$|AC| = \sqrt{(0-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{9 + (y^2 - 4y + 4)}$$

โจทย์กำหนดให้ $|AB| = |AC|$

$$\therefore \sqrt{25 + (y^2 + 4y + 4)} = \sqrt{9 + (y^2 - 4y + 4)}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการได้

$$25 + (y^2 + 4y + 4) = 9 + (y^2 - 4y + 4)$$

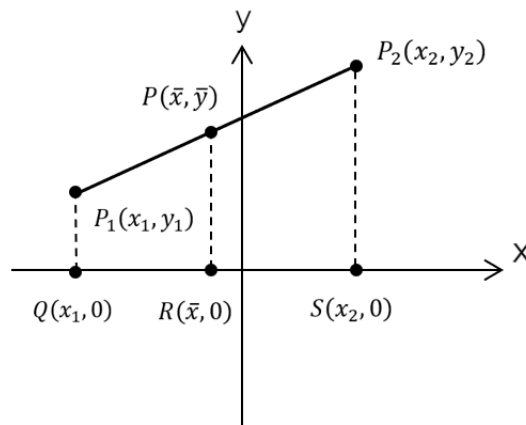
$$8y = 9 - 25 = -16$$

$$y = \frac{-16}{8} = -2$$

$\therefore$ โคออร์ดิเนตของจุด A คือ $(0, -2)$

3.3 การหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

ถ้ากำหนดให้จุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดสองจุดบนพืนระนาบ ให้ $P(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 จะหาค่า $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ ให้อยู่ในเทอมของค่า x_1, y_1 และ x_2, y_2



จะเห็นว่าจุด $Q(x_1, 0), R(\bar{x}, 0), S(x_2, 0)$ เป็นโพรเจกชันบนแกน X ของจุด $P_1(x_1, y_1), P(\bar{x}, \bar{y})$ และ $P_2(x_2, y_2)$ ตามลำดับ แต่ $P(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง P_1P_2
 $\therefore R(\bar{x}, 0)$ จะเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง QS ด้วย
 (โดยคุณสมบัติของเส้นขนาน)
 $\therefore |QR| = |RS|$

แต่ $|QR| = |x_1 - \bar{x}|$ และ $|RS| = |\bar{x} - x_2|$

$$\therefore |x_1 - \bar{x}| = |\bar{x} - x_2|$$

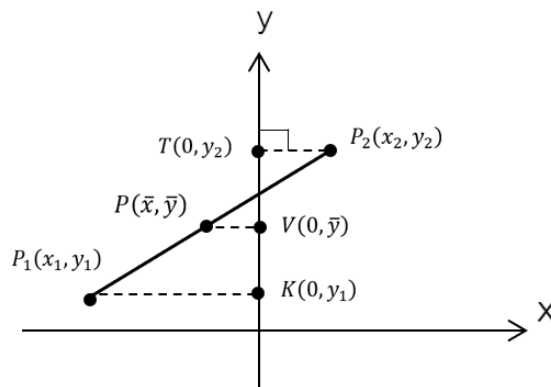
แต่ $\bar{x}$ เป็นค่าที่อยู่ระหว่าง x_1 กับ x_2 กล่าวคือ $\bar{x}$ อาจมากกว่า x_1 และน้อยกว่า x_2 หรือ $\bar{x}$ อาจมากกว่า x_2 และน้อยกว่า x_1

ดังนั้น $|x_1 - \bar{x}|$ กับ $|\bar{x} - x_2|$ จะมีเครื่องหมายเหมือนกัน คืออาจเป็น $+$ ทั้งคู่ หรืออาจเป็น $-$ ทั้งคู่

$$\therefore x_1 - \bar{x} = \bar{x} - x_2$$

$$2\bar{x} = x_1 + x_2$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



จุด K, V และ T เป็นโพรเจกชันบนแกน y ของจุด P_1, P และ P_2 ตามลำดับ โดยวิธีทำนองเดียวกับการหาค่า $\bar{x}$ จะสามารถหาค่า $\bar{y}$ ได้ตามสมการต่อไปนี้

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

สรุป ถ้า $P(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$

$$\text{แล้ว } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ และ } \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ตัวอย่างที่ 3.7 $(-4,6)$ และ $(2,3)$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง จงหาจุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้

แนวคิด จุดศูนย์กลางของวงกลมน้อยเป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง จุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงนั้น ดังนั้น ถ้าให้ $P(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง $(-4,6)$ และ $(2,3)$ แล้ว $P(\bar{x}, \bar{y})$ ก็คือ จุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้นั่นเอง หาค่า $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ ได้ดังนี้

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

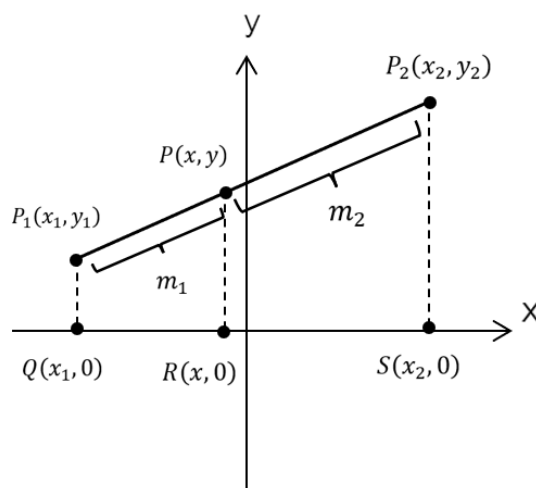
$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{6 + 3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\therefore \text{จุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้มีโคออร์ดิเนต } \left(-1, \frac{9}{2}\right)$$

3.4 จุดแบ่งเส้นตรงตามอัตราส่วนที่กำหนดให้

1. แบ่งภายใน

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด P_1 และ P_2 โดยแบ่งส่วนของเส้นตรง P_1P_2 นี้ ออกเป็นสองส่วน ตามอัตราส่วน $m_1 : m_2$ ดังรูป



จุด $Q(x_1, 0), R(x, 0), S(x_2, 0)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $P_1(x_1, y_1), P(x, y)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ บนแกน X ตามลำดับ

$$\text{ตามกำหนดให้ } \frac{m_1}{m_2} = \frac{|QR|}{|RS|}$$

$$\therefore \frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

$$m_1(x_2 - x) = m_2(x - x_1)$$

$$m_1x_2 - m_1x = m_2x - m_2x_1$$

$$m_1x_2 + m_2x_1 = m_1x + m_2x$$

ดังนั้น

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะสามารถพิสูจน์ได้ว่า

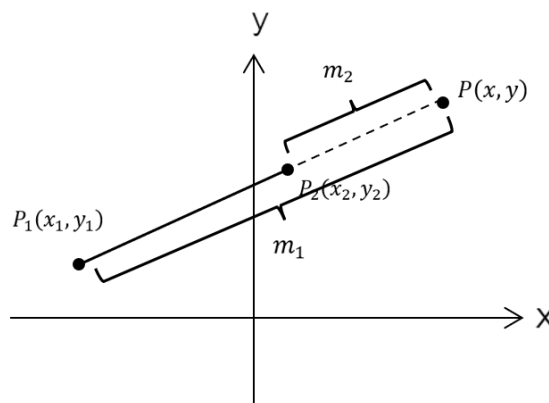
$$y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

สรุป ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดอยู่บนส่วนของเส้นตรง ที่เชื่อมจุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ และแบ่งส่วนของเส้นตรง P_1P_2 นี้ออกเป็นสองส่วนตามอัตราส่วน $m_1 : m_2$ แล้วจะได้

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} \text{ และ } y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

2. แบ่งภายนอก

ให้ $P(x, y)$ อยู่บนส่วนของเส้นตรงที่ต่อออกไปจากส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ ทำให้อัตราส่วนระหว่าง P_1P ต่อ P_2P เท่ากับ $m_1 : m_2$ จะสามารถพิสูจน์ในทำนองเดียวกับกรณีแบ่งภายในได้ว่า



$$x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2} \text{ และ } y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$$

ตัวอย่างที่ 3.8 จงหาโคออร์ดิเนตของจุดที่แบ่งส่วนของเส้นตรง ซึ่งเชื่อมจุด $(1,3)$ และ $(2,7)$

อย่างภายใน เป็นอัตราส่วน 3 : 4

แนวคิด ให้โคออร์ดิเนตของจุดแบ่งคือ (x, y)

$$\text{จากสูตร} \quad x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$$

$$\text{ในที่นี้} \quad m_1 = 3, m_2 = 4, x_1 = 1, x_2 = 2$$

$$\therefore \quad x = \frac{(3)(2) + (4)(1)}{3+4} = \frac{10}{7}$$

$$\text{จากสูตร} \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

$$\text{ในที่นี้} \quad y_1 = 3, y_2 = 7$$

$$\therefore \quad y = \frac{(3)(7) + (4)(3)}{3+4} = \frac{33}{7}$$

ดังนั้น โคออร์ดิเนตของจุดแบ่ง คือ $\left(\frac{10}{7}, \frac{33}{7}\right)$

ตัวอย่างที่ 3.9 จงหาโคออร์ดิเนตของจุดซึ่งแบ่งส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อจุด $(-1,2)$ และ

$(4, -5)$ อย่างภายนอก เป็นอัตราส่วน 2 : 3

แนวคิด ให้โคออร์ดิเนตของจุดแบ่งคือ (x, y)

$$\text{จากสูตร} \quad x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$$

$$\text{ในที่นี้} \quad m_1 = 2, m_2 = 3, x_1 = -1, x_2 = 4$$

$$\therefore \quad x = \frac{(2)(4) - (3)(-1)}{2-3} = -11$$

$$\text{จากสูตร} \quad y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$$

$$\text{ในที่นี้} \quad y_1 = 2, y_2 = -5$$

$$\therefore \quad y = \frac{(2)(-5) - (3)(2)}{2-3} = \frac{-16}{-1} = 16$$

ดังนั้น จุดแบ่งภายนอกมีโคออร์ดิเนต คือ $(-11, 16)$

3.5 การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

- เมื่อทราบความยาวของฐานและความสูงของรูปสามเหลี่ยม

$$\text{สูตรพื้นที่รูปสามเหลี่ยม} = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

- เมื่อทราบความยาวทั้งสามด้านของรูปสามเหลี่ยม

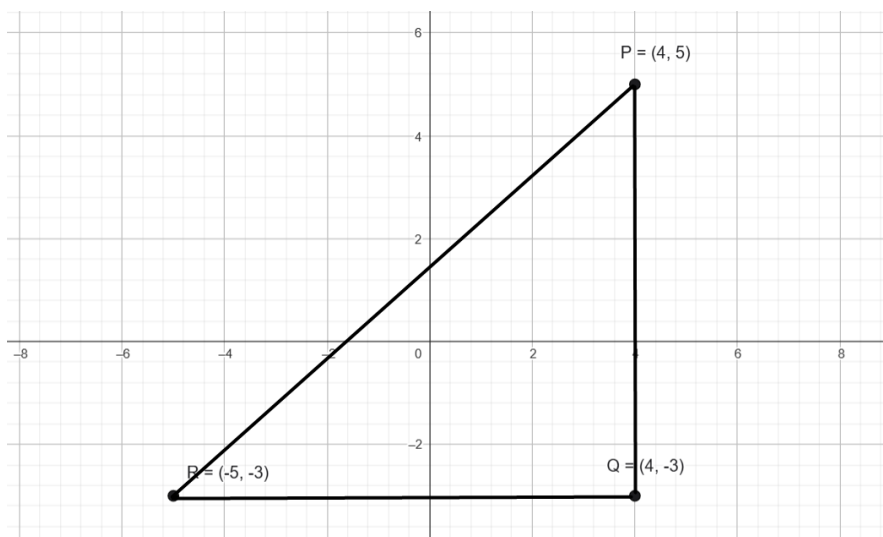
ให้ a, b และ c เป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม

$$\text{สูตรพื้นที่รูปสามเหลี่ยม} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{เมื่อ } s = \frac{a+b+c}{2}$$

ตัวอย่างที่ 3.10 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีจุดยอดเป็น $(4,5)$ $(4,-3)$ และ $(-5,-3)$

แนวคิด จากรูปจะเห็นว่าส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อดจุด $(4,5)$ และ $(4,-3)$ หรือ PQ นั้นขนานกับแกน y และส่วนของเส้นตรง ก็ขนานกับแกน x



$\therefore$ สามเหลี่ยม PQR เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ใช้ QR เป็นฐาน ดังนั้น PQ จะเป็น

ความสูง

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม} &= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} \\ &= \frac{1}{2} \times |-5 - 4| \times |-3 - 5| \\ &= \frac{1}{2} \times 9 \times 8 = 36 \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

หรืออาจใช้สูตร

$$\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{ให้ } a = |PQ| = |-3 - 5| = 8$$

$$b = |QR| = |-5 - 4| = 9$$

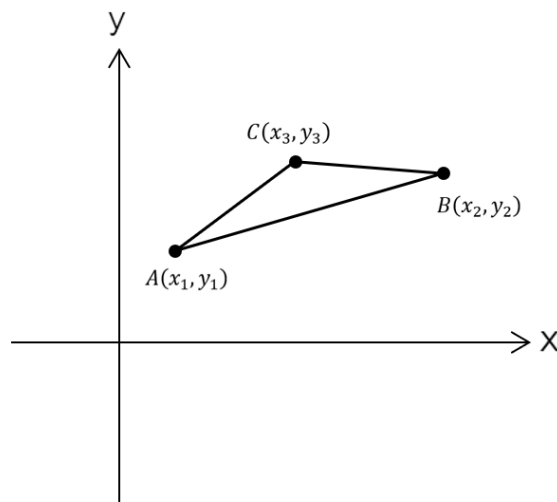
$$c = |PR| = \sqrt{(-5 - 4)^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{145} = 12.04$$

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{14.52(14.52 - 8)(14.52 - 9)(14.52 - 12.04)} \\ &= 35.9996 = 36 \text{ หน่วย}\end{aligned}$$

3. การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม เมื่อทราบค่าโคออร์ดิเนต ของจุดยอดทั้งสาม

ให้ $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ และ $C(x_3, y_3)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC ดัง

รูป



จะได้สูตรการคำนวณหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC รูปนี้ว่า

$$\text{สูตรพื้นที่สามเหลี่ยม} = \frac{1}{2} |(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)|$$

หรืออาจพิจารณาจากรูปต่อไปนี้

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ข้อสังเกต การเรียงค่าโคออร์ดิเนตตามรูปข้างบน มีหลักง่าย ๆ ว่าจะเริ่มต้นจาก ค่าโคออร์ดิเนตของจุดใดก่อนก็ได้ เรียงลำดับวนไปทางใดทางหนึ่งเรื่อยๆ จนถึงค่าโคออร์ดิเนตของจุดเริ่มอีกครั้ง

3.6 การหาค่าโคออร์ดิเนตของจุดตัดของเส้นมัธยฐาน

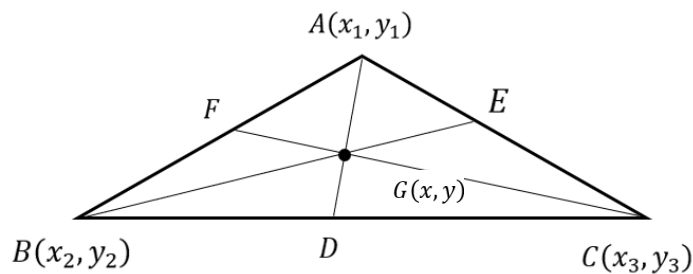
ให้ $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ และ $C(x_3, y_3)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมี D E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC CA และ AB ตามลำดับ และให้ $G(x, y)$ เป็นจุดตัดกันของเส้นมัธยฐาน

หาค่า x, y หรือโคออร์ดิเนตของจุดตัดของเส้นมัธยฐานได้จากสูตร

$$\text{หาค่า } x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

จุด $G(x, y)$ นี้ เรียกว่า Centroid ของรูปสามเหลี่ยม

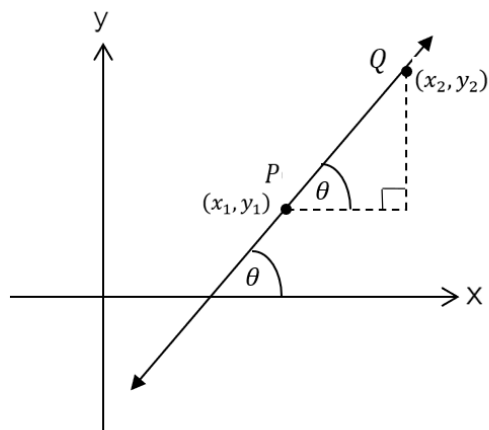


3.7 ความชันของเส้นตรง

กำหนด $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$

m เป็นความชันของเส้นตรง PQ ก็ต่อเมื่อ

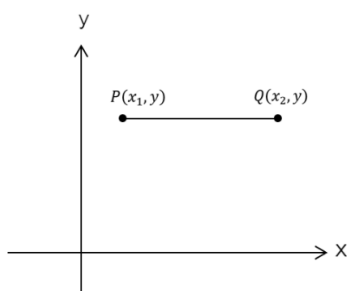
$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



ให้ θ เป็นมุมที่วัดแกน x ทางบวกในทิศทวนเข็มนาฬิกาถึงเส้นตรงที่กำหนด เรียก θ ว่า มุมเอียงของเส้นตรง

ดังนั้น $m = \tan \theta$ เมื่อ $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$

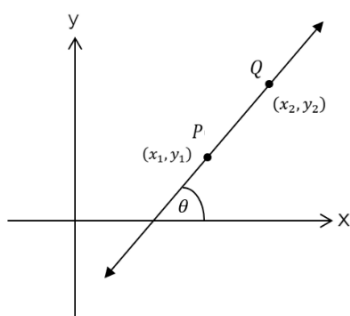
พิจารณาเส้นตรงตามลักษณะของความชัน



เส้นตรงขนานแกน x

$$m = 0$$

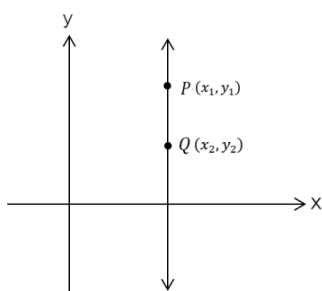
$$\theta = 0^\circ$$



เส้นตรงเอียงทำมุมแหลมกับแกน x

$$m > 0$$

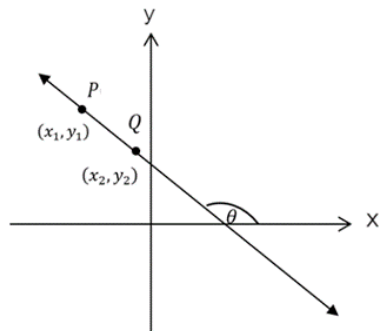
$$0^\circ < \theta < 90^\circ$$



เส้นตรงขนานแกน y

ความชันหาค่าไม่ได้

$$\theta = 90^\circ$$



เส้นตรงเอียงทำมุมป้านกับแกน x

$$m < 0$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ$$

ข้อสังเกต

1. เส้นตรงเส้นเดียวกันความชันย่อมเท่ากัน
2. เส้นตรงสองเส้น (ไม่ขนานกับแกน y) จะขนานกันก็ต่อเมื่อ เส้นตรงทั้งสองมีความชันเท่ากัน
3. เส้นตรงทั้งสองเส้น (ไม่ขนานกับแกน y) จะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเป็น -1

ให้ m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง l_1 และ l_2 ตามลำดับ

$$l_1 \perp l_2 \leftrightarrow m_1 m_2 = -1$$

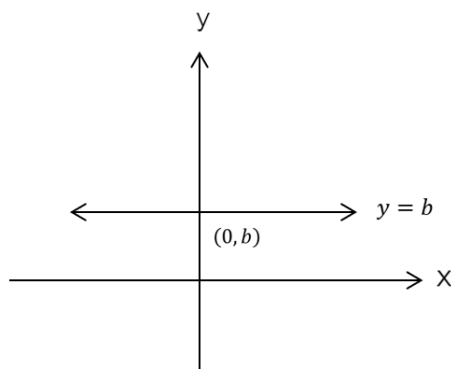
เมื่อ l_1 และ l_2 ไม่ขนานแกน y

3.8 ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง

1. เส้นตรงขนานแกน x ตัดแกน y ที่จุด $(0, b)$

มีสมการเป็น

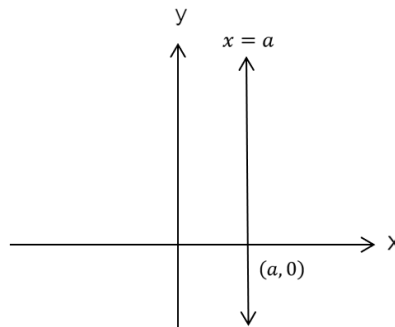
$$y = b$$



2. เส้นตรงขนานแกน y ตัดแกน x ที่จุด $(a, 0)$

มีสมการเป็น

$$x = a$$



3. เส้นตรงไม่ขนานแกน x และไม่ขนานแกน y

3.1 กำหนดจุด (x_1, y_1) และความชัน m

สมการเส้นตรง คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

เรียกสมการในรูปนี้ว่า Point-slope form

ตัวอย่างที่ 3.11 เส้นตรงที่มีความชันเป็น $-\frac{5}{2}$ ผ่านจุด $(-1, 6)$

แนวคิด มีสมการเป็น

$$y - 6 = -\frac{5}{2}(x - (-1))$$

$$2y - 12 = -5x - 5$$

$$5x + 2y - 7 = 0$$

3.2 กำหนดจุด 2 จุด คือ (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)

สมการเส้นตรง คือ $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

เรียกสมการในรูปนี้ว่า Two-point form

ตัวอย่างที่ 3.12 เส้นตรงที่ผ่านจุด $(4, -7)$ และ $(3, 9)$

แนวคิด มีสมการเป็น

$$\frac{y - 9}{x - 3} = \frac{9 - (-7)}{3 - 4}$$

$$-y + 9 = 16x - 48$$

$$16x + y + 57 = 0$$

3.3 กำหนดความชัน m ตัดแกน y ที่จุด $(0, c)$

สมการเส้นตรง คือ $y = mx + c$

เรียกสมการในรูปนี้ว่า Slope-intercept form และเป็นสมการมาตรฐาน

(Standard equation)

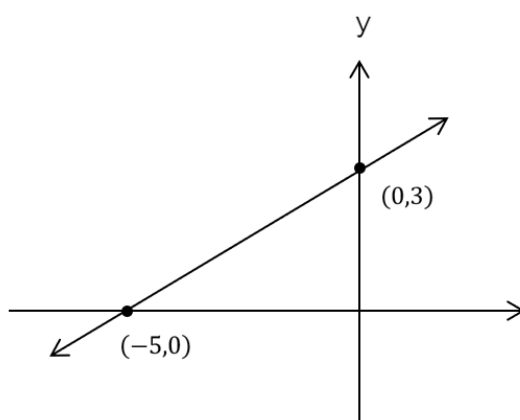
ตัวอย่างที่ 3.13 เส้นตรงมีความชัน $\frac{4}{7}$ ตัดแกน y ที่จุด $(0, -2)$

แนวคิด มีสมการเป็น $y = \frac{4}{7}x + (-2)$
หรือ $4x - 7y - 14 = 0$

หมายเหตุ

ถ้าเส้นตรงตัดแกน x ที่จุด $(a, 0)$ เรียก a ว่า ระยะตัดแกน x (x - intercept)

ถ้าเส้นตรงตัดแกน y ที่จุด $(0, b)$ เรียก b ว่า ระยะตัดแกน y (y - intercept)

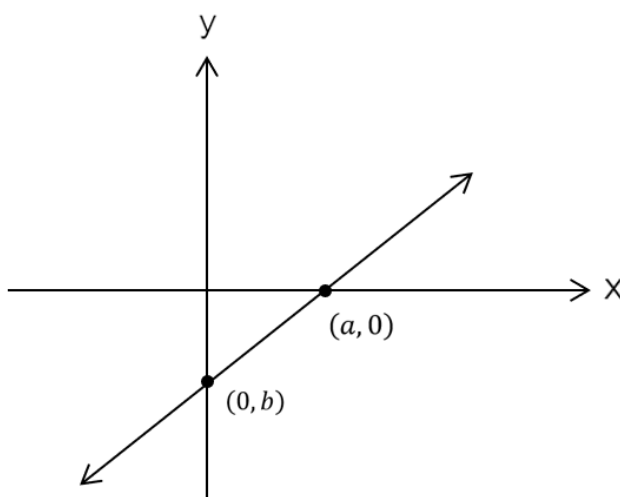


จากรูป

ระยะตัดแกน x คือ -5

ระยะตัดแกน y คือ 3

3.4 กำหนดระยะแกน x เป็น a ระยะตัดแกน y เป็น b



สมการเส้นตรง คือ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ เมื่อ $a, b \neq 0$

เรียกสมการในรูปนี้ว่า Intercept form

ตัวอย่างที่ 3.14 เส้นตรงมีระยะตัดแกน x เป็น $\frac{3}{5}$ ระยะตัดแกน y เป็น $-\frac{6}{7}$

แนวคิด มีสมการเป็น

$$\frac{x}{\frac{3}{5}} + \frac{y}{-\frac{6}{7}} = 1$$

$$\frac{5x}{3} - \frac{7y}{6} = 1$$

$$10x - 7y - 6 = 0$$

3.5 สมการทั่วไป (General equation) ของเส้นตรง

สมการเส้นตรง คือ $Ax + By + C = 0$

เมื่อ A, B และ C เป็นค่าคงตัว โดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

1) ถ้า $A = 0$ และ $B \neq 0$ จะได้ $y = -\frac{C}{B}$ เป็นเส้นตรงขนานแกน x

2) ถ้า $A \neq 0$ และ $B = 0$ จะได้ $x = -\frac{C}{A}$ เป็นเส้นตรงขนานแกน y

3) ถ้า $A \neq 0$ และ $B \neq 0$ จะได้เส้นตรงที่มีความชันเป็น $-\frac{A}{B}$ มีระยะตัดแกน x เป็น $-\frac{C}{A}$ มีระยะตัดแกน y เป็น $-\frac{C}{B}$

ตัวอย่างที่ 3.15 จากสมการเส้นตรง $6x - 4y + 15 = 0$

แนวคิด จะได้ $A = 6, B = -4, C = 15$

เส้นตรงนี้มีความชัน $= -\frac{A}{B} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

ระยะตัดแกน x $= -\frac{C}{A} = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2}$

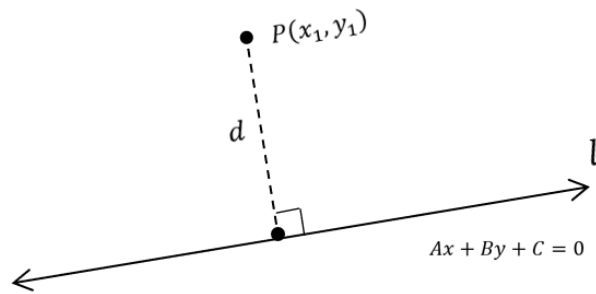
ระยะตัดแกน y $= -\frac{C}{B} = \frac{-15}{-4} = \frac{15}{4}$

3.9 ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับจุด

กำหนดสมการเส้นตรง l คือ $Ax + By + C = 0$ และ $P(x_1, y_1)$ เป็นจุดใดๆที่ไม่อยู่บนเส้นตรง l

ให้ d เป็นระยะทางจากจุด P ไปยังเส้นตรง l

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



ตัวอย่างที่ 3.16 ระยะทางจากจุด $(-4, 10)$ ไปยังเส้นตรง $2x - y + 3 = 0$

แนวคิด

$$d = \frac{|2(-4) - 10 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \text{ หน่วย}$$

3.10 ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน

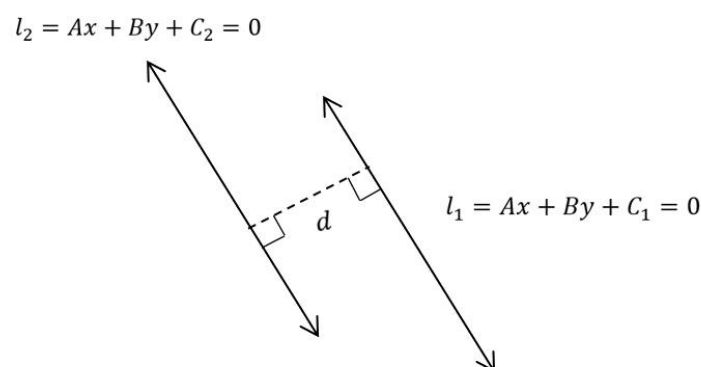
กำหนด l_1 และ l_2 เป็นเส้นขนาน 2 เส้น โดย

$$l_1 = Ax + By + C_1 = 0 \text{ และ}$$

$$l_2 = Ax + By + C_2 = 0$$

ให้ d เป็นระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน l_1 และ l_2

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

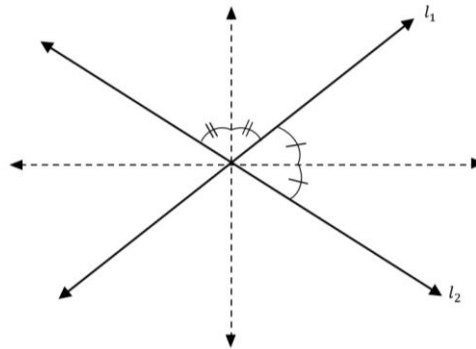


ตัวอย่างที่ 3.17 ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน $3x - 4y + 9 = 0$ และ $3x - 4y - 6 = 0$

แนวคิด

$$d = \frac{|9 - (-6)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

สมการเส้นตรงแบ่งครึ่งมุมระหว่างเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน



กำหนดสมการเส้นตรง l_1 และ l_2

$$l_1 = A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2 = A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

สมการเส้นแบ่งครึ่งมุมที่เกิดจากเส้นตรง l_1 ตัดกับ l_2 คือ

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

ตัวอย่างที่ 3.18 สมการเส้นแบ่งครึ่งมุมที่เกิดจากเส้นตรง $7x + y - 3 = 0$ และ $x - y + 7 = 0$

แนวคิด

$$\frac{7x+y-3}{\sqrt{7^2+1^2}} = \pm \frac{(x-y+7)}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$\frac{7x+y-3}{5\sqrt{2}} = \pm \frac{(x-y+7)}{\sqrt{2}}$$

$$7x + y - 3 = \pm(5x - 5y + 35)$$

จะได้

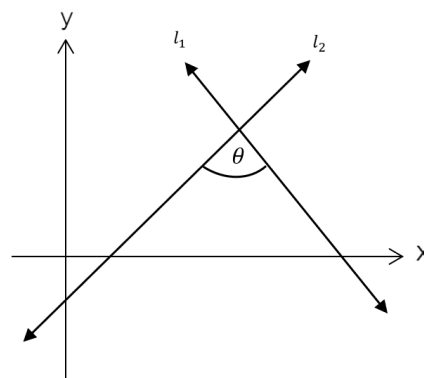
$$2x + 6y - 38 = 0$$

และ

$$12x - 4y + 32 = 0$$

เป็นสมการที่ต้องการ

มุมที่เกิดจากเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน



ให้เส้นตรง l_1 และ l_2 มีความชันเป็น m_1 และ m_2 ตามลำดับ

θ เป็นมุมที่เกิดจากเส้นตรง l_1 ตัดกับ l_2 โดยวัดจาก l_2 ไป l_1 ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

หมายเหตุ

นี่จะเป็นมุมบวกที่เล็กที่สุดจาก l_1 ไป l_2

ตัวอย่างที่ 3.19 จงหามุมที่เกิดจากเส้นตรง $2x - 3y - 5 = 0$ ตัดกับเส้นตรง $x + 5y + 2 = 0$

แนวคิด เส้นตรง $2x - 3y - 5 = 0$ มีความชัน $m_1 = \frac{2}{3}$
 เส้นตรง $x + 5y + 2 = 0$ มีความชัน $m_2 = -\frac{1}{5}$

จาก
$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \\ &= \frac{\frac{2}{3} - (-\frac{1}{5})}{1 + \frac{2}{3}(-\frac{1}{5})} \\ &= \frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} \\ &= 1 \\ \theta &= 45^\circ\end{aligned}$$

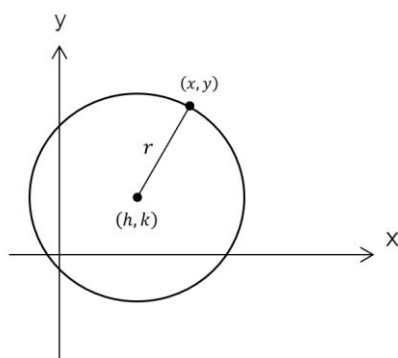
ดังนั้น เส้นตรงสองเส้นตัดกันเป็นมุม 45°

3.11 ภาคตัดกรวย

ภาคตัดกรวย (Conic section) เป็นเส้นที่เกิดจากการนำพื้นระนาบหรือระนาบ (Plane) มาตัดพื้นผิวของกรวยกลมตรง เส้นเหล่านี้เป็นเซตของจุดที่อยู่ทั้งหมดบนระนาบและพื้นผิวของกรวย ซึ่งมีทั้งจุด เส้นตรง และเส้นโค้ง เช่น วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา

1. วงกลม

วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่บนระนาบเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ เรียกจุดคงที่ว่า จุดศูนย์กลาง และเรียกระยะทางคงที่ที่เท่ากันว่า รัศมีของวงกลม



สมการรูปมาตรฐานวงกลม
จุดศูนย์กลาง (0,0) $(x)^2 + (y)^2 = r^2$
จุดศูนย์กลาง (h, k) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

ตัวอย่างที่ 3.20 จงหาสมการของวงกลมที่มีจุด $A(-1,3)$ และ $B(5,7)$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

แนวคิด จุดศูนย์กลางเป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ ดังนั้น พิกัดของจุดศูนย์กลาง คือ

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = (2,5)$$

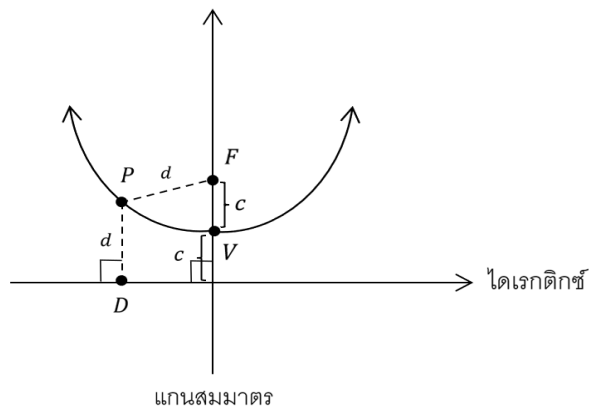
$$\begin{aligned} \text{รัศมี} &= \text{ระยะห่างระหว่างจุด } (-1,3) \text{ และ } (2,5) \\ &= \sqrt{(-1-2)^2 + (3-5)^2} \\ &= \sqrt{9+4} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการของวงกลม คือ $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 13$

หรือ $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 16 = 0$

2. พาราโบลา

พาราโบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบที่อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง และอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ



จุดยอด	ลักษณะ	สมการรูปมาตรฐาน
(0,0)	หงาย - คว่ำ	$4cy = x^2$
	ตะแคง(เปิด)ซ้าย - ขวา	$4cx = y^2$
(h,k)	หงาย - คว่ำ	$4c(y-k) = a(x-h)^2$
	ตะแคง(เปิด)ซ้าย - ขวา	$4c(x-h) = a(y-k)^2$

ตัวอย่างที่ 3.21 กำหนดพาราโบลาที่มีสมการ $(x + 3)^2 = 6(y - 2)$ จงหา จุดยอด โฟกัส

ไดเรกทริกซ์ ความยาวเลตัสเรกตัม พร้อมทั้งวาดกราฟ

แนวคิด $(x + 3)^2 = 6(y - 2)$ เทียบกับ $(x - h)^2 = 4c(y - k)$ จะได้ว่า

$$\text{จุดยอดอยู่ที่ } (h, k) = (-3, 2) \text{ และ } 4c = 6$$

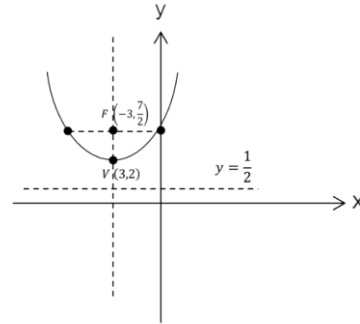
$$c = \frac{3}{2}$$

จากสมการของพาราโบลา จะได้ว่า

แกนของพาราโบลาขนานกับแกน y และ

เนื่องจาก $c > 0$ แสดงว่า พาราโบลานี้เป็น

พาราโบลาหงาย



โฟกัสอยู่เหนือจุดยอด $\frac{3}{2}$ หน่วย ดังนั้น

$$\text{โฟกัสอยู่ที่ } (-3, 2 + \frac{3}{2}) = (-3, \frac{7}{2})$$

ไดเรกทริกซ์ ตั้งฉากกับแกน y อยู่ต่ำกว่าจุดยอด $\frac{3}{2}$ หน่วย ดังนั้น

$$\text{สมการของไดเรกทริกซ์ คือ } y = 2 - \frac{3}{2}$$

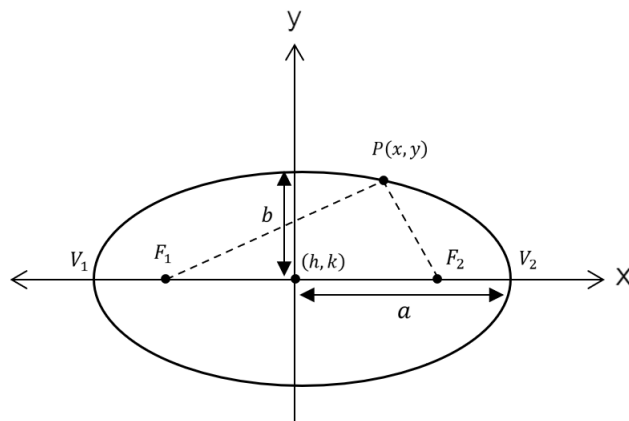
$$y = \frac{1}{2}$$

$$\text{ความยาวเลตัสเรกตัม} = |4c| = 6 \text{ หน่วย}$$

3. วงรี

วงรี คือ คือเซตของจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆในเซตนี้ไป

ยังจุดคงที่สองจุด มีค่าคงตัวเสมอ



จุดศูนย์กลาง	ลักษณะ	สมการรูปมาตรฐาน
(0,0)	แนวนอน	$\frac{(x)^2}{a^2} + \frac{(y)^2}{b^2} = 1$
	แนวตั้ง	$\frac{(x)^2}{b^2} + \frac{(y)^2}{a^2} = 1$
(h, k)	แนวนอน	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$
	แนวตั้ง	$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$
; $a^2 = b^2 + c^2$ และ $a > b > 0$		

ตัวอย่างที่ 3.22 จงหาสมการของวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่ $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$ และมีผลบวกของระยะทางจากจุดบนวงรีถึงโฟกัสทั้งสอง เท่ากับ 12 หน่วย

แนวคิด ผลบวกของระยะทางจากจุดบนวงรีถึงโฟกัสทั้งสอง = $2a$

ดังนั้น $2a = 12$

$$a = 6$$

จากโฟกัส $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$ จะได้ว่า จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ และ $c = 5$

ดังนั้น $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 25 = 11$

เนื่องจากโฟกัสอยู่บนแกน ดังนั้น สมการของวงรีคือ

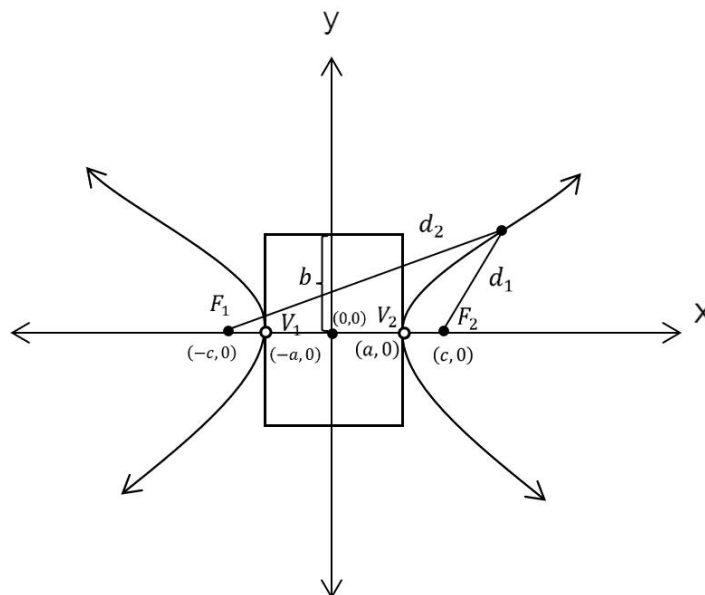
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$

หรือ $11x^2 + 36y^2 = 396$

4. ไฮเพอร์โบลา

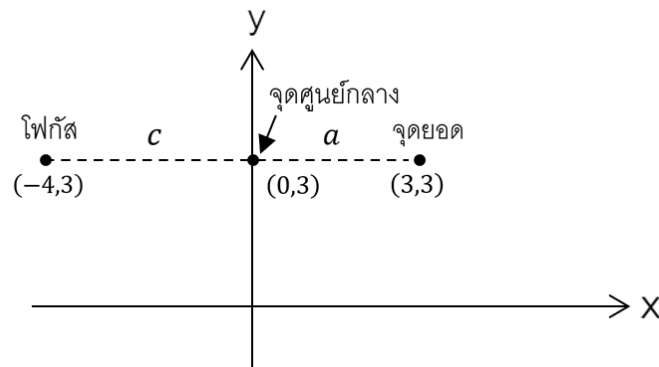
ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัวเสมอ



จุดศูนย์กลาง	ลักษณะ	รูปมาตรฐาน
(0,0)	แนวนอน	$\frac{(x)^2}{a^2} - \frac{(y)^2}{b^2} = 1$
	แนวตั้ง	$\frac{(y)^2}{a^2} - \frac{(x)^2}{b^2} = 1$
(h, k)	แนวนอน	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
	แนวตั้ง	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
$c^2 = a^2 + b^2$		

ตัวอย่างที่ 3.23 จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (3, 3) โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (-4, 3) และจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน y

แนวคิด จุด (-4, 3) และ (3, 3) อยู่ในแนวที่ขนานกับแกน x ดังนั้นแกนตามขวางจะขนานกับแกน x



เนื่องจาก จุดศูนย์กลางอยู่บนแกน y ดังนั้น จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 3)$

$$a = 3 \text{ และ } c = 4$$

$$\text{ดังนั้น } b^2 = 16 - 9 = 7$$

สมการของไฮเพอร์โบลา คือ

$$\frac{(x-0)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{7} = 1$$

$$7x^2 - 9(y^2 - 6y + 9) = 63$$

$$7x^2 - 9y^2 + 54y - 144 = 0$$

การประยุกต์เรขาคณิตวิเคราะห์กับการสอนวิทยาศาสตร์

เรขาคณิตวิเคราะห์เป็นเสมือน "สะพานเชื่อม" ระหว่างแนวคิดทางคณิตศาสตร์นามธรรม กับปรากฏการณ์ทางวิทยาศาสตร์ที่เป็นรูปธรรม ทำให้เราสามารถ:

เปลี่ยนข้อมูลเชิงปริมาณให้เป็นภาพที่ชัดเจน: จากชุดตัวเลขของตำแหน่งหรือการเคลื่อนที่ เรขาคณิตวิเคราะห์ช่วยให้เราพล็อตกราฟ สร้างแผนภาพ และเห็นรูปทรงเรขาคณิตที่ซ่อนอยู่ เช่น วงโคจรของดาวเทียมที่เป็นวงรี หรือเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เป็นพาราโบลา

สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์: เมื่อเราเห็นรูปทรงแล้ว เราสามารถใช้สมการทางเรขาคณิตวิเคราะห์มาอธิบายรูปทรงเหล่านั้นได้อย่างแม่นยำ ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญในการสร้างแบบจำลองทางวิทยาศาสตร์เพื่อทำนายหรืออธิบายพฤติกรรมของระบบต่างๆ

แก้ปัญหาที่ซับซ้อนในโลกแห่งความเป็นจริง: ไม่ว่าจะเป็นการคำนวณหาระยะทาง การหาจุดที่วัตถุจะมาบรรจบกัน หรือการออกแบบอุปกรณ์ต่างๆ ความรู้เรื่องพิกัด ระยะทาง จุดตัด และสมการของรูปทรงเรขาคณิตต่างๆ ล้วนเป็นเครื่องมือสำคัญในการแก้ไขปัญหาในหลากหลายสาขาวิชา ตั้งแต่ฟิสิกส์ เคมี ไปจนถึงชีววิทยาและดาราศาสตร์

การสอนวิทยาศาสตร์โดยผสมผสานเรขาคณิตวิเคราะห์เข้าด้วยกัน จึงไม่เพียงแต่ช่วยให้นักเรียนพัฒนาทักษะการคิดเชิงคำนวณเท่านั้น แต่ยังช่วยเสริมสร้างความเข้าใจเชิงมโนภาพ

(Visual Understanding) และทักษะการแก้ปัญหาเชิงประยุกต์ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับการเป็นนักวิทยาศาสตร์และนักคิดในยุคปัจจุบัน

ตัวอย่างการนำไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์ มีดังนี้

สถานการณ์ 1. มีเรืออยู่ที่จุด A (2,3) และต้องการเดินทางไปยังจุด B (8,11) โดยพิกัดเป็นกิโลเมตร จงคำนวณระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างเรือทั้งสองลำ (เส้นตรง):

แนวคิด ใช้สูตรระยะห่าง

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(8 - 2)^2 + (11 - 3)^2}$$

$$d = \sqrt{36 + 64}$$

$$d = 100$$

$$d = 10 \quad \text{กิโลเมตร}$$

สถานการณ์ 2 นักวิทยาศาสตร์กำลังทำการทดลองเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง ระยะที่ปล่อยวัตถุ (x) กับ ระยะที่วัตถุหยุดนิ่ง (y) หลังจากที่ถูกปล่อยลงบนพื้นผิวที่มีแรงเสียดทาน พวกเขาได้ทำการทดลองสองครั้งและเก็บผลลัพธ์ได้ดังนี้:

1. การทดลองที่ 1: เมื่อปล่อยวัตถุจากระยะ 2 เมตร ($x = 2$) วัตถุจะหยุดนิ่งที่ระยะ 4 เมตร ($y = 4$) ดังนั้นได้จุดข้อมูลคือ (2, 4)

2. การทดลองที่ 2: เมื่อปล่อยวัตถุจากระยะ 4 เมตร ($x = 4$) วัตถุจะหยุดนิ่งที่ระยะ 8 เมตร ($y = 8$) ดังนั้นได้จุดข้อมูลคือ (4, 8)

นักวิทยาศาสตร์ต้องการหาสมการเส้นตรง ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะที่ปล่อยวัตถุกับระยะที่วัตถุหยุดนิ่ง เพื่อใช้ในการทำนายผลลัพธ์ของการปล่อยวัตถุในระยะอื่นๆ

แนวคิด

หาความชัน (m):
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 4}{4 - 2} = 2$$

ใช้สมการจุด-ความชัน $y - y_1 = m(x - x_1)$ เลือกจุด (2,4) และ $m = 2$:

$$y - 4 = 2(x - 2)$$

$$y - 4 = 2x - 4$$

$$y = 2x$$

คำตอบ: สมการเส้นตรงที่อธิบายความสัมพันธ์นี้คือ $y = 2x$

สถานการณ์ 3 ในระบบนิเวศแห่งหนึ่ง นักชีววิทยาได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนประชากรของกวาง (เหยื่อ) และหมาป่า (ผู้ล่า) พบว่าสามารถสร้างแบบจำลองความสัมพันธ์ได้ด้วยสมการเชิงเส้นดังนี้:

สมการ (1) (ความสัมพันธ์ที่ผู้ล่าต้องการเหยื่อ): จำนวนหมาป่า (y) จะแปรผันตามจำนวนกวาง (x) โดยมีสมการคือ: $y = 0.5x - 2$

สมการ (2) (ความสัมพันธ์ที่เหยื่อได้รับผลกระทบจากผู้ล่า): จำนวนกวาง (x) จะแปรผกผันกับจำนวนหมาป่า (y) โดยมีสมการคือ: $x = -2y + 10$

คำถาม: จงหาจุดสมดุล ของจำนวนประชากรกวางและหมาป่าในระบบนิเวศนี้ โดยที่จำนวนประชากรทั้งสองชนิดจะคงที่และไม่เปลี่ยนแปลง

แนวคิด สมมติให้:

x = จำนวนประชากรเหยื่อ (หน่วย: พันตัว)

y = จำนวนประชากรผู้ล่า (หน่วย: พันตัว)

สมการความสัมพันธ์:

$$y = 0.5x - 2 \quad \dots\dots\dots(1) \text{ (ความสัมพันธ์ที่ผู้ล่าต้องการเหยื่อ)}$$

$$x = -2y + 10 \quad \dots\dots\dots(2) \text{ (ความสัมพันธ์ที่เหยื่อได้รับผลกระทบจากผู้ล่า)}$$

หาจุดสมดุล (จุดตัดของสมการ): นำสมการ (1) แทนในสมการ (2):

$$x = -2(0.5x - 2) + 10$$

$$x = -x + 4 + 10$$

$$x = -x + 14$$

$$x = 14$$

$$x = 7$$

$$\text{แทนค่า } x = 7 \text{ ในสมการ (1) : } y = 0.5(7) - 2$$

$$y = 3.5 - 2$$

$$y = 1.5$$

ดังนั้น จุดสมดุลคือ $(7, 1.5)$ หมายความว่าเมื่อประชากรเหยื่อมี 7,000 ตัว และผู้ล่ามี 1,500 ตัว ระบบนิเวศจะอยู่ในภาวะสมดุล (ตามแบบจำลองนี้)

สถานการณ์ที่ 4 นักวิทยาศาสตร์ต้องการสร้างหอส่งสัญญาณของห้องทดลอง 3 แห่ง ที่ตั้งอยู่บนพิกัด $A(0,0)$, $B(6,0)$ และ $C(0,8)$ จงหาตำแหน่งของหอส่งสัญญาณที่ห่างจากห้องทดลองทั้งสามนี้เป็นระยะทางเท่ากัน

แนวคิด หาสมการเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่ง: ระหว่าง $A(0,0)$ และ $B(6,0)$

จุดกึ่งกลาง AB คือ $(\frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}) = (3,0)$ เส้น AB เป็นเส้นแนวนอน ดังนั้นเส้นตั้งฉากคือ $x = 3$

ระหว่าง ระหว่าง $A(0,0)$ และ $C(0,8)$ จุดกึ่งกลาง AC คือ $(\frac{0+0}{2}, \frac{0+8}{2}) = (0,4)$ เส้น AB เป็นเส้นแนวนอน ดังนั้นเส้นตั้งฉากคือ $y = 4$

จุดศูนย์กลางของวงกลมคือจุดตัดของเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่งทั้งสองเส้น

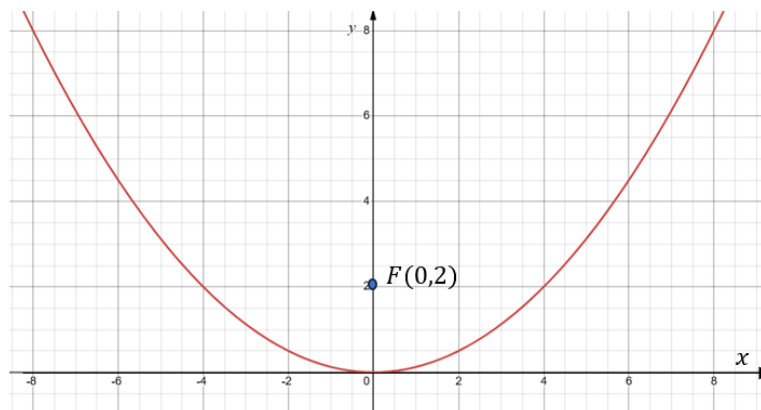
คำตอบ: จุดศูนย์กลางของทั้ง 3 จุด อยู่ที่พิกัด $(3, 4)$

สถานการณ์ 5 ในการทดลองเรื่องการกระเจิงของอนุภาค นักวิทยาศาสตร์ยิงอนุภาคเข้าไปในตัวกลางหนึ่งและบันทึกตำแหน่งที่อนุภาคตกลงบนฉากรับ นักวิทยาศาสตร์สังเกตเห็นว่าเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคเป็น พาราโบลา และต้องการหาตำแหน่งของจุดโฟกัสเพื่อทำความเข้าใจเส้นทางการกระเจิงของอนุภาคสามารถอธิบายได้ด้วยสมการพาราโบลา $x^2 = 8y$ โดยที่จุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$ จงหาจุดโฟกัสของการกระเจิง

แนวคิด หาจุดโฟกัส: สมการพาราโบลาในรูปมาตรฐานคือ $x^2 = 4cy$

เมื่อเปรียบเทียบกับ $x^2 = 8y$ เราจะได้ $c = 2$

วาดรูปเพื่อประกอบการคิด ได้ดังนี้



จาก พาราโบลาที่เปิดขึ้นมีจุดโฟกัสจะอยู่ที่ $(0,2)$

ดังนั้น จุดโฟกัสของเส้นทางการกระเจิงของอนุภาคอยู่ที่พิกัด $(0,2)$

สรุปสาระสำคัญ

ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน: เป็นรากฐานสำคัญของเรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้แกนตั้ง (แกน Y) และแกนนอน (แกน X) ที่ตัดกันเป็นมุมฉาก ณ จุดกำเนิด $(0,0)$ เพื่อกำหนดตำแหน่งของ จุด ไต ๆ

ในระนาบด้วยคู่ลำดับ (x,y) การมีระบบพิกัดนี้ทำให้สามารถแปลงปัญหาเรขาคณิตให้เป็นปัญหาทางพีชคณิตได้

การหาสมการเส้นตรง อาจต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับ การหาระยะทางระหว่างจุดกับจุด จุดกับเส้นตรง ระยะทางระหว่างเส้นตรง จุดกึ่งกลาง ความชัน จุดตัดแกน เหล่านี้ช่วยให้เราสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงเส้นได้

รูปภาคตัดกรวย (Conic Sections): วงกลม, พาราโบลา, วงรี, และไฮเพอร์โบลา คือ รูปทรงเรขาคณิตที่เกิดจากการตัดกรวยด้วยระนาบ ซึ่งแต่ละรูปมี สมการมาตรฐาน เฉพาะตัว การศึกษาภาคตัดกรวยช่วยให้เข้าใจรูปทรงโค้งต่าง ๆ ที่พบได้ในธรรมชาติและวิศวกรรม

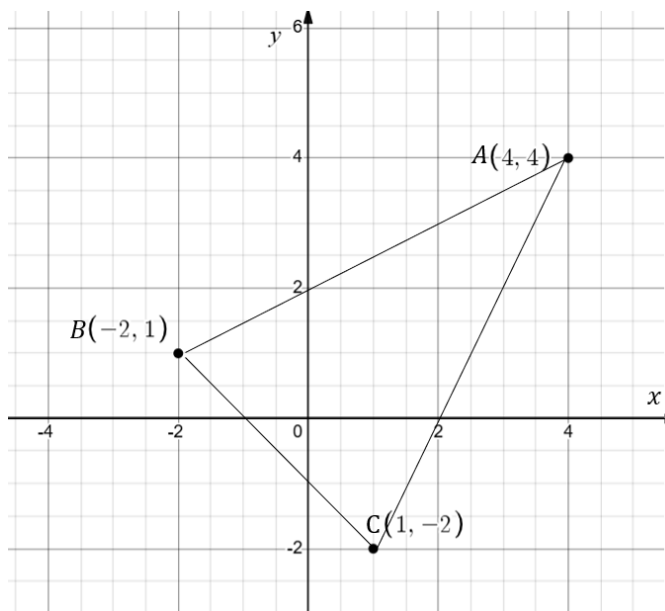
การประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา: แนวคิดและเครื่องมือของเรขาคณิตวิเคราะห์ถูกนำไปใช้ในหลายสาขา เช่น ฟิสิกส์ (การเคลื่อนที่ของวัตถุ, วงโคจร), วิศวกรรม (การออกแบบโครงสร้าง, กราฟิกคอมพิวเตอร์), และวิทยาการคอมพิวเตอร์ (อัลกอริทึมทางเรขาคณิต) การเปลี่ยนปัญหาเรขาคณิตให้เป็นสมการพีชคณิตทำให้สามารถวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้อย่างเป็นระบบ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1. กำหนดจุด $A(-11,6)$, $B(2,-7)$, $C(3,5)$, $D(-5,-3)$, $E(-1,-4)$ และ $F(1,7)$ จงหา

1. ระยะทางระหว่างจุด A กับ B
2. ระยะทางระหว่างจุด A กับ C
3. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด A กับ D
4. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด A กับ F
5. มุมระหว่าง จุด C กับ E

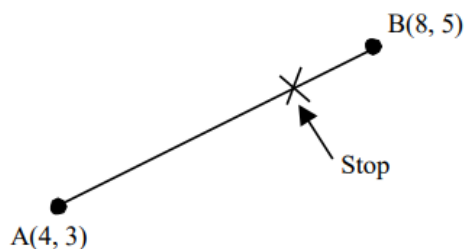
2. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมีจุดมุมทั้งสาม ดังรูป



จงหา

1. ความยาวทั้งสามด้านของรูปสามเหลี่ยม
2. มุมภายในแต่ละมุม
3. สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมชนิดใด โดยพิจารณาข้อมูลจากข้อ 1 และข้อ 2

3. นายเอเดินทางจากพิกัด $A(4,3)$ ไปยัง พิกัด $B(8,5)$ แต่หยุดพักระหว่างทางเมื่อเดินไปได้ $\frac{3}{4}$ ของระยะทางทั้งหมด นายเอเหลือระยะทางเท่าใดจึงจะถึงจุดหมาย และจุดที่นายเอพักเป็นพิกัดเท่าใด



4. พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(0,2)$, $B(-4,4)$ และ $C(-1,-2)$ เท่ากับกี่ตารางหน่วย
5. เส้นตรงที่ผ่านจุด $A(-4,3)$ และ $B(2,1)$ กับเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(-5,3)$ และ $B(3,9)$ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร (ตั้งฉากกัน ขนานกัน เป็นเส้นตรงเดียวกัน หรือไม่ทั้งสามอย่าง)
6. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(-4,3)$ และ $B(-1,-2)$
7. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(3,-5)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x + y + 5 = 0$
8. ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีจุดยอดเป็น $A(-5,6)$, $B(-1,6)$ และ $C(3,2)$ จงหาสมการเส้นมัธยฐาน AD
9. ระยะห่างระหว่างจุด $(2,-1)$ กับเส้นตรง $3x - 4y + 5 = 0$ เป็นเท่าใด
10. จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $3x + 4y - 7 = 0$ และห่างกัน 5 หน่วย
11. ดาวเทียมมีพิกัด ณ จุดหนึ่งคือ $(3,4)$ (ซึ่งหมายถึง 300 กิโลเมตรในแกน x และ 400 กิโลเมตรในแกน y) โดยโลกอยู่ที่ $(0,0)$ จงหาว่าดาวเทียมอยู่ห่างจากโลกกี่กิโลเมตร
12. เสาส่งสัญญาณโทรศัพท์แต่ละต้นได้รับการออกแบบให้รองรับคลื่นความถี่ 12 ไมล์ ถ้าเสานี้ตั้งอยู่ที่พิกัด $(-3,5)$ บนระนาบพิกัดที่มีหน่วยเป็นไมล์ สมการมาตรฐานของขอบเขตด้านนอกของพื้นที่ที่เสานี้ให้บริการคืออะไร ผู้ใช้โทรศัพท์มือถือที่ตำแหน่ง $(8,0)$ อยู่ในช่วงสัญญาณหรือไม่ จงอธิบาย
13. หน้าตัดของหอหล่อเย็นนิวเคลียร์มีรูปร่างเป็นไฮเพอร์โบลา โดยมีสมการ $\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{44^2} = 1$ หอคอยมีความสูง 150 เมตร และระยะทางจากยอดหอคอยถึงจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลามีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของระยะทางจากฐานหอคอยถึงจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา จงหาเส้นผ่านศูนย์กลางของยอดหอคอยและฐานหอคอย

บทที่ 4

ลำดับและอนุกรม

4.1 นิยาม ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก หรือโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

- ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก เรียกว่า **ลำดับจำกัด**
- ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก เรียกว่า **ลำดับอนันต์**

ตัวอย่างที่ 4.1 ตัวอย่างของลำดับจำกัด

1. $\{(x, y) | y = 50x, x \in I^+ \text{ และ } x \leq 12\}$ หรือถ้าเขียนออกมา ก็จะได้เซตของคู่อันดับดังนี้ $\{(1, 50), (2, 100), (3, 150), \dots, (12, 600)\}$ แต่โดยทั่วไปนิยมเขียนเฉพาะค่าของเรนจ์ดังนี้ $50, 100, 150, \dots, 600$ เนื่องจากโดเมน เริ่มจาก $1, 2, 3, \dots$ ไปเรื่อยๆ เราจึงจะละโดเมนเอาไว้ในฐานที่เข้าใจกัน และเราเรียกลำดับที่รู้เทอมสุดท้ายว่าลำดับจำกัด

2. $\{(x, y) | y = 2x, x \in I^+ \text{ และ } x \leq 10\} \therefore$

$\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots, (10, 20)\}$

ดังนั้น โดเมนก็คือ $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ และเรนจ์ก็คือ $\{2, 4, 6, 8, \dots, 20\}$

ถ้าจะเขียนเป็นลำดับก็คือ $2, 4, 6, 8, \dots, 20$ เรียกว่าลำดับจำกัด เพราะเรารู้ว่าเทอมสุดท้ายคือ 20

ตัวอย่างที่ 4.2 ตัวอย่างของลำดับอนันต์

1. $\{(x, y) | y = 2^x, x \in I^+\}$ หรือถ้าเขียนออกมา ก็จะได้เซตของคู่อันดับดังนี้ $\{(1, 2), (2, 4), (3, 8), (4, 16), \dots\}$ โดยทั่วไปนิยมเขียนเฉพาะค่าของเรนจ์ดังนี้

$2, 4, 8, 16, \dots$ เราเรียกลำดับที่ไม่สามารถบอกค่าของเทอมสุดท้ายว่า ลำดับอนันต์

2. $\{(x, y) | y = x^2, x \in I^+\}$ หรือ $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), \dots\}$ โดเมนของลำดับนี้คือ $\{1, 2, 3, \dots\}$ เรนจ์ของลำดับนี้คือ $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ ดังนั้น ลำดับนี้คือ

$1, 4, 9, 16, \dots$ เรียกลำดับนี้ว่า ลำดับอนันต์ เพราะไม่รู้เทอมสุดท้าย

ถ้า a เป็นลำดับจำกัด การเขียนลำดับ a นิยมเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกันไป คือ

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$

ถ้า เป็นลำดับอนันต์ นิยมเขียนดังนี้ $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$

เรียก a_n ว่าพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไป (general term) ของลำดับ

ตัวอย่างที่ 4.3 จงบอกว่าต่อไปนี้เป็นลำดับจำกัด ข้อใดเป็นลำดับอนันต์ ถ้าเป็นลำดับจำกัด เทอมสุดท้ายคืออะไร

1. $3, 6, 9, 12, \dots, 30$

2. $3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots$

3. $-1, -2, -3, -4, \dots, -10$

4. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

5. $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}, n = 1, 2, 3, \dots, 8$

6. $a_n = \frac{2n-1}{n^2}, n \in I^+$

แนวคิด

1. เป็นลำดับจำกัด ดังนั้น เทอมสุดท้าย คือ 30

2. เป็นลำดับอนันต์ ดังนั้น ไม่ทราบเทอมสุดท้าย

3. เป็นลำดับจำกัด ดังนั้น เทอมสุดท้าย คือ -10

4. เป็นลำดับอนันต์ ดังนั้น ไม่ทราบเทอมสุดท้าย

5. เป็นลำดับจำกัด ดังนั้น เทอมสุดท้าย คือ เมื่อ n เป็น 8

ดังนั้น $a_n = \frac{1}{2^{8-1}} = \frac{1}{256-1} = \frac{1}{255}$ จาก $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ เมื่อ $n = 8, a_n = \frac{1}{255}$

6. เป็นลำดับอนันต์ เพราะไม่ทราบเทอมสุดท้าย แต่ทราบว่าเทอมทั่วไปหรือ

พจน์ทั่วไปคือ $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$

ตัวอย่างที่ 4.4 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัดต่อไปนี้

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

2. $1, 3, 9, 27, 81$

แนวคิด

1. จงพิจารณาพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

$$a_1 = 1 = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{2^{(1-1)}}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2^{(2-1)}}$$

$$a_3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{(3-1)}}$$

$$a_4 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^{(4-1)}}$$

ดังนั้น จะได้ $a_n = \frac{1}{2^{(n-1)}}$, เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4$

2. พิจารณาพจน์ที่กำหนดให้ ดังนี้

$$a_1 = 1 = 3^0 = 3^{(1-1)}$$

$$a_2 = 3 = 3^1 = 3^{(2-1)}$$

$$a_3 = 9 = 3^2 = 3^{(3-1)}$$

$$a_4 = 27 = 3^3 = 3^{(4-1)}$$

$$a_5 = 81 = 3^4 = 3^{(5-1)}$$

ดังนั้น จะได้ $a_n = 3^{(n-1)}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, 5$

4.2 ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence or Arithmetic Progression)

นิยาม ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่ผลต่างซึ่งได้จากพจน์ที่ $n + 1$ ลบด้วยพจน์ที่ n มีค่าคงตัว ค่าคงตัวนี้ เรียกว่า ผลต่างร่วม (Common difference)

ถ้าให้ d เป็นผลต่างร่วมจะได้ $d = a_{n+1} - a_n$ หรือ $a_{n+1} = a_n + d$ เมื่อ $n \in I^+$

รูปทั่วไปของลำดับเลขคณิตคือ $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$
 หรือ $a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), (a_1 + 3d), \dots, (a_1 + (n-1)d)$

และพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตก็คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะเห็นว่าพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตจะอยู่ในเทอมของพจน์แรก คือ a_1 และ ผลต่างร่วมคือ d ฉะนั้นถ้าเรารู้ a_1 และ d เราจะหา a_n ได้เสมอ

ตัวอย่างที่ 4.5 ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นลำดับเลขคณิต จงบอกว่าแต่ละข้อมีผลต่างร่วมเป็นเท่าใด

1. $3, 6, 9, 12, \dots$
2. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$
3. $6, 2, -2, -6, -10, \dots$

แนวคิด

1. $3, 6, 9, 12, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วม $= 3$

$$\because 6 - 3 = 3 ; 9 - 6 = 3 ; 12 - 9 = 3$$

2. ผลต่างร่วมของ $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$ คือ 1

$$\because \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 ; \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1 ; \frac{7}{2} - \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

3. ผลต่างร่วมของ $6, 2, -2, -6, -10, \dots$ คือ -4

$$\because 2 - 6 = -4 ; -2 - 2 = -4 ; -6 - (-2) = -4 ; -10 - (-6) = -4$$

ตัวอย่างที่ 4.6 จงหาพจน์ที่ 8 และพจน์ที่ 20 ของลำดับเลขคณิต 2, 5, 8, ...

แนวคิด เนื่องจาก $a_1 = 2$ และ $d = 5 - 2 = 3$ หรือ $d = 8 - 5 = 3$

จากพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต $a_n = a_1 + (n - 1)d$

ดังนั้น $a_8 = a_1 + (8 - 1)3 = 2 + (7)(3) = 2 + 21 = 23$ และ $a_{20} = a_1 + (20 - 1)3 = 2 + (19)(3) = 2 + 57 = 59$

ดังนั้น พจน์ที่ 8 คือ 23 และพจน์ที่ 20 คือ 59

ตัวอย่างที่ 4.7 ถ้า 2, P , Q , R , 22 เป็น 5 พจน์ที่เรียงกันในลำดับเลขคณิต จงหาค่าของ P , Q , R

แนวคิด จาก $a_{n+1} = a_n + d$

ดังนั้นจากลำดับที่ให้ไว้ $P = 2 + d$

และ $Q = P + d$

แทนค่า P ได้ $Q = (2 + d) + d = 2 + 2d$

ทำนองเดียวกัน $R = Q + d = (2 + 2d) + d = 2 + 3d$

และ $22 = R + d$

$$= (2 + 3d) + d$$

$$= 2 + 4d$$

ดังนั้น $4d = 20$ หรือ $d = \frac{20}{4} = 5$

ดังนั้น $P = 2 + 5 = 7$

$$Q = 7 + 5 = 12$$

$$R = 12 + 5 = 17$$

4.3 ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence or Geometric Progression)

นิยาม ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับที่อัตราส่วนของพจน์ที่ $n + 1$ ต่อพจน์ที่ n มีค่าคงตัว ค่าคงตัวนี้ เรียกว่า อัตราส่วนร่วม (Common ratio)

นั่นคือ ถ้าให้ r เป็นอัตราส่วนร่วมจะได้ $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ หรือ $a_{n+1} = a_n \cdot r$ เมื่อ $n \in I^+$

รูปทั่วไปของลำดับเรขาคณิตก็คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

ตัวอย่างที่ 4.8 ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นลำดับเรขาคณิต จงบอกว่าแต่ละข้อมีอัตราส่วนร่วม (r) เป็นเท่าใด

1. $1, 2, 4, 8, 16, \dots$

2. $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{6}, \dots$

แนวคิด

1. จากสูตรหาอัตราส่วนร่วม $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

ในที่นี้ ถ้า $a_n = 1, a_{n+1} = 2$

ดังนั้น $r = \frac{2}{1} = 2$

ถ้า $a_n = 8, a_{n+1} = 16$

ดังนั้น $r = \frac{16}{8} = 2$

ดังนั้น $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม $= 2$

2. จากลำดับเรขาคณิต $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{6}, \dots$

ถ้า $a_n = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{6}$

ดังนั้น $r = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \times 2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

ถ้า $a_n = \sqrt{6}, a_{n+1} = 3\sqrt{2}$

ดังนั้น $r = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

ดังนั้น $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{6}, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม $= \sqrt{3}$

ตัวอย่างที่ 4.9 จงเขียนสี่พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{3}{4}$ และ $r = 4$

แนวคิด $a_1 = \frac{3}{4}$ จากสูตร $a_{n+1} = a_n \cdot r$

ดังนั้น $a_2 = a_1 \cdot r = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$

$$a_3 = a_2 \cdot r = 3 \cdot 4 = 12$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = 12 \cdot 4 = 48$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้คือ $\frac{3}{4}, 3, 12, 48$

ตัวอย่างที่ 4.10 จงหาพจน์ที่ 7 ของลำดับเรขาคณิต $6, 2, \frac{2}{3}, \dots$

แนวคิด $a_1 = 6$ และ $r = \frac{2}{6} = r = \frac{1}{3}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_7 = a_1 r^{7-1}$

$$= 6 \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{6}{729} = \frac{2}{243}$$

ดังนั้น พจน์ที่ 7 ของลำดับ คือ $\frac{2}{243}$

ตัวอย่างที่ 4.11 ถ้า $\frac{4}{3}, x, y, z, \frac{27}{64}$ เป็น 5 พจน์เรียงกันในลำดับเรขาคณิต จงหาค่าของ x, y, z

แนวคิด จาก $a_{n+1} = a_n \cdot r$ จะได้ $x = \frac{4}{3} \cdot r = \frac{4r}{3}$

ดังนั้น $y = x \cdot r = \left(\frac{4r}{3}\right) \cdot r = \frac{4r^2}{3}$

และ $z = y \cdot r = \left(\frac{4r^2}{3}\right) \cdot r = \frac{4r^3}{3}$

และ $\frac{27}{64} = z \cdot r = \left(\frac{4r^3}{3}\right) \cdot r = \frac{4r^4}{3}$

ดังนั้น $r^4 = \frac{27}{64} \cdot \frac{3}{4} = \frac{81}{256} ; r = \pm \frac{3}{4}$

เมื่อ $r = \frac{3}{4}$ จะได้ $x = 1 , y = \frac{3}{4} , z = \frac{9}{16}$

เมื่อ $r = -\frac{3}{4}$ จะได้ $x = -1 , y = \frac{3}{4} , z = \frac{-9}{16}$

4.4 ลิมิตของลำดับอนันต์

ให้ a_n เป็นพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับอนันต์ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด และพจน์ที่ n มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นแล้ว เรียก L ว่า ลิมิตของลำดับ (Limit of a sequence) และเรียกว่า ลำดับนั้นมีลิมิตเท่ากับ L เขียนแทนด้วย

$$\text{สัญลักษณ์} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

เรียกลำดับอนันต์ที่มีลิมิตว่าลำดับคอนเวอร์เจนต์ (Convergent sequence) และเรียกลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิตว่า ลำดับไดเวอร์เจนต์ (divergent sequence)

ในการพิจารณาลิมิตของอันดับนั้น ต้องเป็นลำดับอนันต์ ตัวอย่างเช่น $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ $a_n = (-1)^{n+1}$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิต

ให้ c เป็นค่าคงตัว $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ จะได้ว่า

$$1. \text{ ถ้า } t_n = c \text{ แล้ว } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = cA$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \pm B$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \times b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \times B$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}, B \neq 0$$

ตัวอย่างที่ 4.12 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = 6$

แนวคิด ลำดับนี้คือ $6, 6, 6 \dots$ ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} 6 = 6$

ตัวอย่างที่ 4.13 ให้ $a_n = 4 + \frac{1}{n}$, $b_n = 3 - \frac{1}{n}$ จงหาลิมิตของลำดับที่มี a_n , b_n , $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n \cdot b_n$ และ $\frac{a_n}{b_n}$ ของพจน์ที่ n

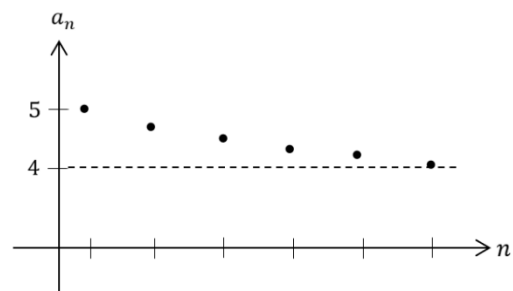
แนวคิด

1. จาก $a_n = 4 + \frac{1}{n}$ ลำดับนี้คือ

$$4 + 1, 4 + \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{3}, \dots$$

จากกราฟจะได้ลิมิตของลำดับนี้เป็น 4

$$\text{นั่นคือ } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{n}\right) = 4$$

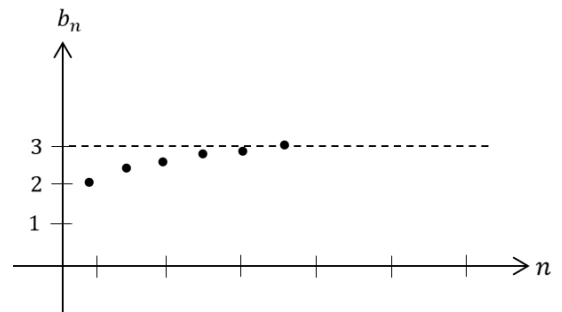


จาก $b_n = 3 - \frac{1}{n}$ ลำดับนี้คือ

$$3 - 1, 3 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{3}, \dots$$

จากกราฟจะได้ลิมิตของลำดับนี้เป็น 3

$$\text{นั่นคือ } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3$$



2. จาก $a_n + b_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right) + \left(3 - \frac{1}{n}\right) = 7$ ลำดับนี้คือ $7, 7, 7, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(4 + \frac{1}{n}\right) + \left(3 - \frac{1}{n}\right) \right\} = 7$$

$$\text{ดังนั้น จะเห็นได้ว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(4 + \frac{1}{n}\right) + \left(3 - \frac{1}{n}\right) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{n}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right)$$

3. จาก $a_n - b_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right) - \left(3 - \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{2}{n}$

ดังนั้น ลำดับนี้คือ $1 + \frac{2}{1}, 1 + \frac{2}{2}, 1 + \frac{2}{3}, 1 + \frac{2}{4}, \dots$ ถ้าเขียนกราฟจะเห็นว่าลิมิตของลำดับนี้เป็น 1

$$\text{นั่นคือ } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(4 + \frac{1}{n}\right) - \left(3 - \frac{1}{n}\right) \right\} = 1$$

ดังนั้น จะเห็นได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(4 + \frac{1}{n}\right) + \left(3 - \frac{1}{n}\right) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{n}\right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right)$

4. จาก $a_n \cdot b_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{n}\right) = 12 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$

ลำดับนี้คือ $12 - 1 - 1, 12 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, 12 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}, \dots$

ถ้าเขียนกราฟจะเห็นว่าลิมิตของลำดับนี้เป็น 12 นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(4 + \frac{1}{n}\right) \left(3 - \frac{1}{n}\right) \right\} = 12$

ดังนั้น จะเห็นได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(4 + \frac{1}{n}\right) \left(3 - \frac{1}{n}\right) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right)$

และในทำนองเดียวกัน $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(4 + \frac{1}{n}\right)}{\left(3 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{4}{3}$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(4 + \frac{1}{n}\right)}{\left(3 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right)}$

ตัวอย่างที่ 4.14 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{5+4n}{n}$

แนวคิด จาก $\frac{5+4n}{n} = \frac{5}{n} + 4 = 5 \left(\frac{1}{n}\right) + 4$

และเนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} 4 = 4$

โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตจะได้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 5 \left(\frac{1}{n}\right) = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 5 \times 0 = 0$$

$$\text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 5 \left(\frac{1}{n}\right) + 4 \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \left(\frac{1}{n}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} 4 = 0 + 4 = 4$$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+4n}{n} = 4$

4.5 อนุกรม (series)

นิยาม อนุกรมคือผลบวกของลำดับนั่นเอง คือ เมื่อ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัด

ดังนั้น $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ เรียกว่า อนุกรมจำกัด และเมื่อ

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$

เป็นลำดับอนันต์ ดังนั้น $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$ เป็นอนุกรมอนันต์

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของอนุกรม

เรียก a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของอนุกรม

เรียก a_3 ว่า พจน์ที่ 3 ของอนุกรม

เรียก a_4 ว่า พจน์ที่ 4 ของอนุกรม

สัญลักษณ์แทนการบวก เพื่อความสะดวกในการเขียนอนุกรม จะใช้อักษรกรีก Σ (ซิกม่า) เป็นสัญลักษณ์แทนการบวก

กล่าวคือ $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

และใช้ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$

คุณสมบัติของ Σ ที่ควรทราบ

1. $\sum_{i=1}^n c = nc$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
2. $\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
3. $\sum_{i=1}^n [a_i \pm b_i] = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมที่มักจะใช้เสมอ คือ

1. $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4}\{n(n+1)\}^2$

ตัวอย่างที่ 4.15 จงหาค่า $\sum_{i=1}^5 (4 - 2i)$

แนวคิด $\sum_{i=1}^5 (4 - 2i)$

$$\begin{aligned} &= (4 - 2 \cdot 1) + (4 - 2 \cdot 2) + (4 - 2 \cdot 3) + (4 - 2 \cdot 4) + (4 - 2 \cdot 5) \\ &= (4 - 2) + (4 - 4) + (4 - 6) + (4 - 8) + (4 - 10) \\ &= 2 + 0 + (-2) + (-4) + (-6) \\ &= 2 + (-12) \\ &= 2 - 12 \\ &= -10 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.16 จงหาค่า $\sum_{k=1}^5 (k^2 + 3)$

แนวคิด $\sum_{k=1}^5 (k^2 + 3)$

$$\begin{aligned} &= (1^2 + 3) + (2^2 + 3) + (3^2 + 3) + (4^2 + 3) + (5^2 + 3) \\ &= (1 + 3) + (4 + 3) + (9 + 3) + (16 + 3) + (25 + 3) \\ &= 4 + 7 + 12 + 19 + 28 \\ &= 70 \end{aligned}$$

4.6 อนุกรมเลขคณิต อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต เรียกว่า อนุกรมเลขคณิต และผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตจะเป็นผลต่างร่วมของอนุกรมเลขคณิตด้วย

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + \{a_1 + (n - 1)d\}$

ถ้าให้ S_n เป็นผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต จะได้ $S_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n - 1)d\}$

$$\text{หรือ } S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

4.7 อนุกรมเรขาคณิต คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} ; r \neq 1$$

$$\text{หรือ } S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} , r \neq 1$$

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ S_n ดังนั้น $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} ; r \neq 1$

$$\text{หรือ } S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} , r \neq 1$$

ตัวอย่างที่ 4.17 จงหาผลบวก 12 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $5 + 10 + 20 + \cdots$

แนวคิด อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 5$ และ $r = 2$ จาก $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$$\text{ดังนั้น } S_{12} = \frac{a_1(1-r^{12})}{1-r} = \frac{5(1-2^{12})}{1-2} = \frac{5(-4095)}{-1} = \frac{-20475}{-1} = 20475$$

4.8 ผลบวกของอนุกรมอนันต์

จากอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ ถ้าให้ S_n เป็นผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมจะได้

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

เรียก $S_1, S_2, S_3, \dots$ แต่ละจำนวนว่า “ผลบวกย่อย” (Partial Sum) ของอนุกรม

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ และเรียก $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ ว่า

“ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม”

ลิมิตของลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม คือ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หรือเรียกว่า “ผลบวกอนันต์ของอนุกรม” ถ้าลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมนี้มีลิมิต เรียกอนุกรมนี้ว่า “อนุกรมคอนเวอร์เจนต์” และถ้าลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมใดไม่มีลิมิต เรียกอนุกรมนั้นว่า “อนุกรมไดเวอร์เจนต์”

การแสดงว่าอนุกรมอนันต์ใดจะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ ทำได้ดังนี้

1. หาลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม

2. พิจารณาลิมิตของลำดับผลบวกย่อย ถ้าลำดับผลบวกย่อยนั้นมีลิมิตจะได้ว่าอนุกรมนั้นเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ถ้าลำดับผลบวกย่อยนั้นไม่มีลิมิต อนุกรมนั้นเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตัวอย่างที่ 4.18 จงพิจารณาว่า $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ ถ้าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ จงหาผลบวกของอนุกรมนี้

แนวคิด ผลบวกย่อยของอนุกรมนี้คือ $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$, $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมนี้คือ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots, \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

เมื่อหาลิมิตของลำดับนี้ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$ ดังนั้นอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์และมีผลบวกเป็น 1

ตัวอย่างที่ 4.19 จงพิจารณาว่า $\sum_{i=1}^{\infty} (2i - 1)$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์หรือคอนเวอร์เจนต์

แนวคิด ผลบวกย่อยของอนุกรมนี้คือ $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 3 = 4$, $S_3 = 4 + 5 =$

$$9, S_4 = 9 + 7 = 16, S_n = \sum_{i=1}^n (2i - 1) = 2 \sum_{i=1}^n i - 1 = 2 \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\} - n = n^2$$

จะได้ลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ คือ $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$ และเนื่องจากลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ไม่มีขีดจำกัด ดังนั้น อนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} (2i - 1)$ จึงไม่มีผลบวก นั่นคือ อนุกรม $\sum_{i=1}^{\infty} (2i - 1)$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ในกรณีที่อนุกรมอนันต์เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนร่วม จะเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ เมื่อ $|r| \geq 1$ และจะเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์เมื่อ $|r| < 1$ โดยมีผลบวกเป็น $\frac{a_1}{1-r}$ ถ้าให้ S เป็นผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตที่เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์จะได้ $S = \frac{a_1}{1-r}$

ตัวอย่างที่ 4.20 จงหาผลบวกของอนุกรม $16 + 12 + 9 + \dots + 16 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \dots$

แนวคิด อนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = 16$ และ $r = \frac{3}{4}$ ซึ่ง $|r| < 1$

ดังนั้น อนุกรมนี้จึงเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์จะได้ $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{16}{1-\frac{3}{4}} = 64$

4.9 การนำความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์

การนำความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์ คือการสร้างความเข้าใจเชิงปริมาณและสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ ช่วยให้นักเรียนเห็นถึงความเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับวิทยาศาสตร์อย่างเป็นรูปธรรม

1. ลำดับ (Sequence) ลำดับคือการจัดเรียงข้อมูลตามลำดับที่แน่นอน ซึ่งเป็นแนวคิดพื้นฐานในการอธิบายปรากฏการณ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงทีละขั้น หรือมีแบบแผนที่สามารถทำนายได้

-ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence): ใช้กับปรากฏการณ์ที่มีการเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างคงที่ เช่น การเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้ความเร่งคงที่, การเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิในอัตราคงที่

-ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence): ใช้กับปรากฏการณ์ที่มีการเพิ่มขึ้นหรือลดลงเป็นเท่าตัว เช่น การสลายตัวของสารกัมมันตรังสี, การเพิ่มจำนวนประชากรของแบคทีเรีย, การสะท้อนของแสง

2. อนุกรม (Series) อนุกรมคือผลรวมของลำดับ ซึ่งช่วยในการคำนวณหาค่ารวมหรือผลลัพธ์สุดท้ายของปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นเป็นขั้นตอน

-อนุกรมเลขคณิต (Arithmetic Series): ใช้ในการคำนวณผลรวมของปริมาณที่เพิ่มขึ้นอย่างคงที่ เช่น การคำนวณระยะทางรวมที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในแต่ละช่วงเวลา

-อนุกรมเรขาคณิต (Geometric Series): ใช้ในการคำนวณผลรวมของปริมาณที่เปลี่ยนแปลงเป็นเท่าตัว เช่น การคำนวณปริมาณสารที่สลายตัวไปทั้งหมด, ระยะทางรวมที่ถูกดุ่มแกว่งก่อนหยุด

ตัวอย่างที่ 1: การสลายตัวของสารกัมมันตรังสี

แนวคิดทางวิทยาศาสตร์: การสลายตัวของสารกัมมันตรังสีเป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นอย่างต่อเนื่อง โดยปริมาณของสารที่เหลืออยู่จะลดลงครึ่งหนึ่งในทุกๆ ช่วงเวลาที่เรียกว่า "ครึ่งชีวิต"

(half-life) ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วย ลำดับเรขาคณิต

สถานการณ์: สารกัมมันตรังสีชนิดหนึ่งมีปริมาณเริ่มต้น 1,600 กรัม มีครึ่งชีวิตเท่ากับ 10 ปี

จงคำนวณหาปริมาณสารที่เหลืออยู่หลังจากผ่านไป 50 ปี

แนวคิด การหาจำนวนครึ่งชีวิตที่ผ่านไป:

$$\text{จำนวนครึ่งชีวิต} = \text{ครึ่งชีวิตเวลาที่ผ่านไป}$$

$$\text{จำนวนครึ่งชีวิต} = 10 \text{ ปี} \text{ ดังนั้น } 50 \text{ ปี} = 5 \text{ รอบ}$$

ใช้ลำดับเรขาคณิตในการคำนวณ:

ปริมาณเริ่มต้น (a_1) = 1,600 กรัม ดังนั้น จำนวนครั้งที่ชีวิตรอบที่ 5 คือพจน์ที่ 6

อัตราส่วนร่วม (r) = $\frac{1}{2}$ (เนื่องจากลดลงครึ่งหนึ่ง)

ลำดับของปริมาณสารที่เหลืออยู่:

$$a_5 = a_1 \cdot r^{6-1}$$

$$a_5 = 1,600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$a_5 = 1,600\left(\frac{1}{32}\right) = 50$$

สรุปคำตอบ หลังจากผ่านไป 50 ปี สารกัมมันตรังสีจะเหลืออยู่ 50 กรัม

ตัวอย่างที่ 2: ฟิสิกส์: การเคลื่อนที่ของวัตถุบนพื้นเอียง

สถานการณ์ : วัตถุชิ้นหนึ่งถูกปล่อยลงมาจากบนพื้นเอียง โดยในวินาทีแรกวัตถุเคลื่อนที่ได้ 2 เมตร และในวินาทีถัดไปจะเคลื่อนที่ได้เพิ่มขึ้น 3 เมตรจากวินาทีก่อนหน้านี้ จงคำนวณหาระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในวินาทีที่ 8 และระยะทางรวมทั้งหมดที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในเวลา 8 วินาที

แนวคิด : ตามสถานการณ์ที่กำหนด การเคลื่อนที่ของวัตถุบนพื้นเอียงสามารถนำมาสร้างเป็นลำดับเลขคณิต ได้ เพราะระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในแต่ละวินาทีเพิ่มขึ้นในอัตราคงที่ การคำนวณระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในวินาทีที่ 8 เราสามารถใช้สูตรของลำดับเลขคณิตได้ดังนี้:

พจน์แรก (a_1) คือ ระยะทางในวินาทีแรก = 2 เมตร

ผลต่างร่วม (d) คือ ระยะทางที่เพิ่มขึ้นในแต่ละวินาที = 3 เมตร

จากสูตร $a_n = a_1 + (n - 1)d$ เมื่อ n คือพจน์ที่ 8:

$$a_8 = 2 + (8 - 1)(3)$$

$$a_8 = 2 + (7)(3)$$

$$a_8 = 2 + (21) = 23$$

ดังนั้น ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในวินาทีที่ 8 คือ 23 เมตร

การคำนวณระยะทางรวมทั้งหมดที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในเวลา 8 วินาที

เราจะใช้สูตรของอนุกรมเลขคณิตเพื่อหาผลรวมของระยะทางทั้งหมด:

$$\text{สูตร: } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\text{แทนค่า: } S_8 = \frac{8}{2}(2 + 23) = (4)(25) = 100 \text{ เมตร}$$

สรุปคำตอบ ระยะทางรวมทั้งหมดที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในเวลา 8 วินาที คือ 100 เมตร .

ตัวอย่างที่ 3 : ชีววิทยา: การเพิ่มจำนวนประชากรแบคทีเรีย

สถานการณ์: นักเรียนกำลังศึกษาการเติบโตของแบคทีเรียในห้องปฏิบัติการ โดยพบว่าแบคทีเรียจะเพิ่มจำนวนขึ้นเป็นสองเท่าทุกๆ ชั่วโมง หากเริ่มต้นด้วยแบคทีเรีย 100 ตัว จงคำนวณว่าเมื่อผ่านไป 24 ชั่วโมง จะมีจำนวนแบคทีเรียทั้งหมดเท่าใด

แนวคิด สถานการณ์นี้สามารถอธิบายได้ด้วย ลำดับเรขาคณิต โดยมีจำนวนแบคทีเรียเริ่มต้น (a_1) เท่ากับ 100 ตัว และอัตราส่วนร่วม (r) เท่ากับ 2 เนื่องจากเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าในทุกๆ ชั่วโมง หาจำนวนชั่วโมงที่ผ่านไป: จากโจทย์คือ 24 ชั่วโมง ซึ่งหมายถึงเราต้องการหาพจน์ที่ 25 ของลำดับ (พจน์ที่ 1 คือชั่วโมงที่ 0)

ใช้สูตรลำดับเรขาคณิต: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

เมื่อ a_n คือ จำนวนแบคทีเรียที่ต้องการหา

a_1 คือ จำนวนแบคทีเรียเริ่มต้น (100)

r คือ อัตราส่วนร่วม (2)

n คือ จำนวนพจน์ (24 ชั่วโมง หมายถึงพจน์ที่ 25)

แทนค่า: $a_{25} = a_1 \cdot r^{25-1}$

$$a_{25} = 100 \cdot (2)^{24}$$

$$a_{25} = 100 \cdot (16,777,216)$$

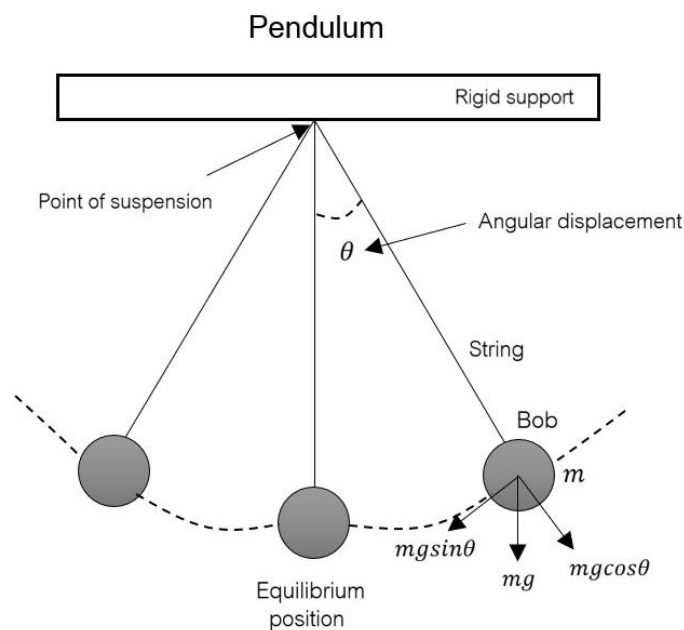
$$a_{25} = 1,677,721,600$$

สรุปคำตอบ เมื่อผ่านไป 24 ชั่วโมง จะมีจำนวนแบคทีเรียทั้งหมด 1,677,721,600 ตัว ซึ่งเป็นจำนวนที่มากกว่าหนึ่งพันล้านตัว แสดงให้เห็นถึงพลังของการเติบโตแบบทวีคูณ (Exponential Growth) ได้อย่างชัดเจน

ตัวอย่างที่ 4 : ฟิสิกส์: การสั่นของลูกตุ้มนาฬิกา

สถานการณ์ : ลูกตุ้มนาฬิกาโบราณมีการสั่นในแต่ละครั้งเป็นระยะทาง 100 เซนติเมตร และระยะทางที่สั่นในครั้งถัดไปจะลดลง 5% จากระยะทางก่อนหน้านี้ จงคำนวณว่าเมื่อลูกตุ้มสั่นครั้งที่ 10 จะสั่นได้ระยะทางเท่าใด และเมื่อสั่นครบ 10 ครั้ง จะสั่นได้ระยะทางรวมทั้งหมดเท่าใด

แนวคิด สถานการณ์นี้อธิบายได้ด้วย ลำดับเรขาคณิต โดยระยะทางที่สั่นแต่ละครั้งคือ 100, 100×0.95 , $100 \times (0.95)^2$, ... และระยะทางรวมสามารถคำนวณได้จาก อนุกรมเรขาคณิต



การคำนวณระยะทางในการสั่นครั้งที่ 10

ระยะทางในการสั่นแต่ละครั้งสร้างเป็นลำดับเรขาคณิต โดยมี:

พจน์แรก (a_1) = 100 เซนติเมตร

อัตราส่วนร่วม (r) = $100\% - 5\% = 95\% = 0.95$

เราจะใช้สูตรของลำดับเรขาคณิต $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ เพื่อหาระยะทางในการสั่นครั้งที่ 10 ($n=10$):

$$a_{10} = 100 \cdot (0.95)^{10-1}$$

$$a_{10} = 100 \cdot (0.95)^9$$

$$a_{10} = 100 \cdot (0.6302)$$

$$a_{10} \approx 63.02 \text{ เซนติเมตร}$$

สรุปคำตอบ: เมื่อลูกตุ้มสั่นครั้งที่ 10 จะสั่นได้ระยะทางประมาณ 63.02 เซนติเมตร

การคำนวณระยะทางรวมทั้งหมดเมื่อสิ้นครบ 10 ครั้ง

เราจะใช้สูตรอนุกรมเรขาคณิต $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ เพื่อหาระยะทางรวมทั้งหมดเมื่อสิ้นครบ 10 ครั้ง ($n=10$):

$$S_{10} = \frac{100(1-(0.95)^{10})}{1-0.95}$$

$$S_{10} = \frac{100(1-0.9587)}{0.05}$$

$$S_{10} = \frac{100(0.4013)}{0.05}$$

$$S_{10} = \frac{40.13}{0.05}$$

$$S_{10} = 802.6 \text{ เซนติเมตร}$$

สรุปคำตอบ: เมื่อสิ้นครบ 10 ครั้ง ลูกตุ้มจะสั้นได้ระยะทางรวมทั้งหมด 802.6 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 5 :เคมี: การเจือจางสารละลาย

สถานการณ์ : ครูกำลังสอนเรื่องการเจือจางสารละลาย โดยเริ่มต้นด้วยสารละลายเข้มข้น 1 ลิตร ที่มีความเข้มข้น 1 โมลาร์ จากนั้นเติมน้ำ 1 ลิตร แล้วทำการแบ่งสารละลายครึ่งหนึ่งออก และเติมน้ำเพิ่มอีก 1 ลิตร ทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จงคำนวณความเข้มข้นของสารละลายเมื่อผ่านกระบวนการนี้ไป 5 ครั้ง และสรุปการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นเมื่อกระบวนการดำเนินต่อไปอย่างไม่มีที่สิ้นสุด

แนวคิด : ความเข้มข้นของสารละลายในแต่ละครั้งจะลดลงเป็นครึ่งหนึ่ง ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยลำดับเรขาคณิต และเมื่อดำเนินไปเรื่อยๆ ความเข้มข้นจะเข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง ซึ่งเป็นแนวคิดของอนุกรมอนันต์

การคำนวณความเข้มข้นของสารละลาย

จากสถานการณ์ที่กำหนด การเจือจางสารละลายสามารถอธิบายได้ด้วย ลำดับเรขาคณิต โดยพจน์แต่ละพจน์คือความเข้มข้นของสารละลายหลังจากการเจือจางในแต่ละครั้ง

ขั้นตอนการคำนวณ

การเจือจางครั้งที่ 1

เริ่มต้น: สารละลาย 1 ลิตร, ความเข้มข้น 1 โมลาร์

เติมน้ำ: เติมน้ำ 1 ลิตร ทำให้ปริมาตรรวมเป็น 2 ลิตร

แบ่งสารละลาย: แบ่งออกครึ่งหนึ่ง (0.5 ลิตร) ทำให้สารละลายที่เหลือมีความเข้มข้นเท่าเดิม แต่มีปริมาตรเหลือ 0.5 ลิตร

เติมน้ำเพิ่ม: เติมน้ำอีก 1 ลิตร ทำให้ปริมาตรรวมเป็น 1.5 ลิตร (0.5 ลิตรเดิม + 1 ลิตรน้ำ)

ความเข้มข้นใหม่:

$$\text{ปริมาณสาร (mole)} = \text{ความเข้มข้น (M)} \times \text{ปริมาตร (L)} = 1 \times 0.5 = 0.5 \text{ mole}$$

$$\text{ความเข้มข้นใหม่} = \frac{\text{ปริมาณสาร}}{\text{ปริมาตรใหม่}} = \frac{0.5 \text{ mole}}{1.5 \text{ L}} = \frac{1}{3} \text{ โมลาร์}$$

ดังนั้น ความเข้มข้นของสารละลายหลังการเจือจางครั้งที่ 1 คือ $\frac{1}{3}$ โมลาร์

การเจือจางครั้งที่ 2

เริ่มต้น: สารละลาย 1 ลิตร, ความเข้มข้น $\frac{1}{3}$ โมลาร์

เติมน้ำ: เติมน้ำ 1 ลิตร ทำให้ปริมาตรรวมเป็น 2 ลิตร

แบ่งสารละลาย: แบ่งออกครึ่งหนึ่ง (1 ลิตร)

ความเข้มข้น: ความเข้มข้นยังคงเป็น $\frac{1}{3}$ โมลาร์ แต่มีปริมาตรเหลือ 1 ลิตร

เติมน้ำเพิ่ม: เติมน้ำอีก 1 ลิตร ทำให้ปริมาตรรวมเป็น 2 ลิตร (1 ลิตรเดิม + 1 ลิตรน้ำ)

ความเข้มข้นใหม่:

$$\text{ปริมาณสาร (mole)} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3} \text{ mole}$$

$$\text{ความเข้มข้นใหม่} = \frac{\text{ปริมาณสาร}}{\text{ปริมาตรใหม่}} = \frac{\frac{1}{3} \text{ mole}}{2 \text{ L}} = \frac{1}{6} \text{ โมลาร์}$$

ดังนั้น ความเข้มข้นของสารละลายหลังการเจือจางครั้งที่ 2 คือ $\frac{1}{6}$ โมลาร์

หมายเหตุ: เนื่องจากโจทย์อธิบายกระบวนการที่ซับซ้อนและไม่ได้ระบุว่า "แบ่งสารละลายครึ่งหนึ่ง" ในครั้งแรกแล้วจะอย่างไรในครั้งต่อไป การคำนวณจึงต้องอ้างอิงกับขั้นตอนที่กำหนดมาอย่างเคร่งครัด

การสรุปการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นเมื่อกระบวนการดำเนินไปอย่างไม่สิ้นสุด

จากรูปแบบการแจกแจงที่กำหนด การคำนวณความเข้มข้นเมื่อผ่านไปหลายครั้งจะต้องพิจารณาแต่ละขั้นตอนอย่างละเอียด:

ครั้งที่ 1: ความเข้มข้นจาก 1 โมลาร์ เหลือ $\frac{1}{3}$ โมลาร์

ครั้งที่ 2: ความเข้มข้นจาก $\frac{1}{3}$ โมลาร์ เหลือ $\frac{1}{6}$ โมลาร์

ครั้งที่ 3: ความเข้มข้นจาก $\frac{1}{6}$ โมลาร์ จะเหลือ $\frac{1}{12}$ โมลาร์ (ขั้นตอนซ้ำแบบเดิม)

ครั้งที่ 4: ความเข้มข้นจาก $\frac{1}{12}$ โมลาร์ จะเหลือ $\frac{1}{24}$ โมลาร์

ครั้งที่ 5: ความเข้มข้นจาก $\frac{1}{24}$ โมลาร์ จะเหลือ $\frac{1}{48}$ โมลาร์

เมื่อพิจารณาความเข้มข้นที่ลดลง จะเห็นว่า ความเข้มข้นจะลดลงเรื่อย ๆ แต่ไม่มีทางเป็นศูนย์ เว้นแต่ปริมาณสารจะหายไปหมด ซึ่งในทางคณิตศาสตร์เรียกว่า **ลู่เข้าสู่ศูนย์** (Converging to Zero) .

ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นเมื่อกระบวนการดำเนินต่อไปอย่างไม่มีที่สิ้นสุด คือ ความเข้มข้นจะค่อย ๆ ลดลงจนเข้าใกล้ศูนย์ แต่ไม่มีทางเป็นศูนย์ ซึ่งสะท้อนหลักการของอนุกรมอนันต์ที่แสดงให้เห็นว่าผลรวมของพจน์ที่ลดลงเรื่อย ๆ สามารถลู่เข้าสู่ค่าที่แน่นอนได้

สรุปสาระสำคัญ

1. ลำดับ (Sequence) ลำดับ คือกลุ่มของตัวเลขหรือสิ่งของที่จัดเรียงกันอย่างมีแบบแผนหรือตามกฎเกณฑ์ที่กำหนดไว้ คุณสมบัติ: ลำดับจะบอกถึง "การจัดเรียง" ของตัวเลขแต่ละตัวในตำแหน่งที่แน่นอน เช่น พจน์ที่ 1, พจน์ที่ 2, พจน์ที่ 3, ...

-ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence): มีผลต่างร่วมคงที่ เช่น 2, 4, 6, 8, ... (เพิ่มขึ้นทีละ 2)

-ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence): มีอัตราส่วนร่วมคงที่ เช่น 2, 4, 8, 16, ... (เพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า)

การประยุกต์ใช้: ใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงทีละขั้นตอน เช่น จำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้นในแต่ละชั่วโมง หรือระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในแต่ละวินาที

2. อนุกรม (Series) อนุกรม คือผลรวมของพจน์ทั้งหมดในลำดับนั้น ๆ

คุณสมบัติ: อนุกรมจะเน้นที่ "ผลรวม" หรือ "ผลลัพธ์สุดท้าย" ของการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้น

-อนุกรมเลขคณิต (Arithmetic Series): ผลรวมของลำดับเลขคณิต เช่น $2+4+6+8=20$

-อนุกรมเรขาคณิต (Geometric Series): ผลรวมของลำดับเรขาคณิต เช่น

$$2+4+8+16=30$$

-การประยุกต์ใช้: ใช้ในการคำนวณผลรวมสะสมของปรากฏการณ์ เช่น ระยะทางรวมทั้งหมดที่รถยนต์วิ่งไปได้ หรือปริมาณสารที่สลายตัวไปทั้งหมดเมื่อผ่านไประยะหนึ่ง

3. การนำลำดับและอนุกรมมาใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์ได้แก่

-การสร้างแบบจำลอง: ลำดับและอนุกรมช่วยให้สามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นอย่างเป็นระบบในทางวิทยาศาสตร์ได้ เช่น การใช้ลำดับเรขาคณิตเพื่อจำลองการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี หรือการใช้ลำดับเลขคณิตเพื่อแสดงการเพิ่มขึ้นของความเร็วในวัตถุที่กำลังตกอย่างอิสระ

-การวิเคราะห์เชิงปริมาณ: แนวคิดเหล่านี้ช่วยให้นักเรียนสามารถวิเคราะห์ข้อมูลที่เก็บได้จากการทดลองได้อย่างเป็นระบบมากขึ้น จากการสังเกตว่าข้อมูลมีแบบแผนอย่างไร แล้วนำความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมมาใช้ในการคำนวณและสรุปผลลัพธ์ได้อย่างแม่นยำ

-การเชื่อมโยงแนวคิด: การสอนแบบบูรณาการนี้ทำให้กำแพงระหว่างวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์พังทลายลง นักเรียนจะเห็นว่าสูตรทางคณิตศาสตร์ไม่ใช่แค่สมการที่ต้องจำ แต่เป็นภาษาที่ใช้ในการทำความเข้าใจโลกทางวิทยาศาสตร์ ทำให้การเรียนรู้มีความหมายและน่าสนใจยิ่งขึ้น

-การพัฒนาทักษะการคิด: การแก้ปัญหาโดยใช้ลำดับและอนุกรมในบริบททางวิทยาศาสตร์ช่วยส่งเสริมทักษะการคิดเชิงวิเคราะห์และการคิดเชิงตรรกะ ทำให้นักเรียนสามารถระบุแบบแผน คาดการณ์ผลลัพธ์ และตรวจสอบสมมติฐานได้อย่างเป็นระบบ

สรุปได้ว่า ลำดับและอนุกรมเป็นมากกว่าเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ แต่เป็นเสมือน "เครื่องมือ" ที่ช่วยให้นักเรียนสามารถมองเห็นโลกวิทยาศาสตร์ผ่านเลนส์เชิงปริมาณได้อย่างชัดเจน

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

- จงบอกว่าลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์
 - 7, 14, 21, 28, 35, 42
 - $4, 9, 16, 25, 36, \dots, (n+1)^2, \dots$
 - $a_n = 2n + 1, n \in \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 20\}$
 - $a_n = \frac{1}{n^2}$
 - $a_n = n^2 - 1$
- จงหาว่า 64 เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับ $a_n = 5n + 4$
- จงหา 3 พจน์แรกของลำดับอนันต์ a_1, a_2, a_3 ซึ่งกำหนดเงื่อนไขดังนี้ $a_1 = 4$ และ $a_n = 3(a_{n-1} + 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $n \geq 2$
- จงหาพจน์ที่ 6 และ พจน์ที่ 10 ของลำดับต่อไปนี้

1) 10, 4, -2, ...	2) 1, 6, 11, ...
3) 3, 6, 12, ...	4) 64, -32, 16, ...
- จงหาลำดับเลขคณิตเมื่อกำหนด (เขียน 3 พจน์แรก)
 - $a_7 = 10$ และ $a_{13} = -2$
 - $a_{26} = 25$ และ $a_{20} = 81$
- ลำดับเลขคณิตหนึ่งมี 35 พจน์ มีผลต่างร่วมเป็น -4 และพจน์สุดท้ายเป็น -121 จงหาพจน์แรก
- ในลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่งมีพจน์ที่ 7 และพจน์ที่ 10 เท่ากับ 16 และ 1024 ตามลำดับ จงหาพจน์ที่ 5 ของลำดับนี้
- ผลบวกสามพจน์แรกของลำดับเรขาคณิตเป็น 19 และมีผลคูณเป็น 216 จงหาลำดับชุดนี้
- จงหาผลบวกของ 7 พจน์แรกของอนุกรม $7 + 15 + 23 + \dots$

10. จงหาผลบวกของอนุกรม $7 + 10 + 13 + \dots + 157$

11. หลดทอดลงถูกเรียงเป็นชั้นๆ พบว่าจำนวนหลดทอดลงในแต่ละชั้นมีมากกว่าจำนวนหลดทอดที่อยู่ในชั้นบนที่อยู่ติดกันเป็นจำนวน 5 อันเสมอ ถ้าชั้นบนสุดมีหลดทอดลง 57 อันและชั้นล่างสุดมีจำนวนหลดทอดลง 182 อัน จงหาว่าเขาเรียงหลดทอดลงทั้งหมดกี่ชั้น

12. นักวิทยาศาสตร์คนหนึ่งเรียงปีกเกอร์เป็นแถวๆ ประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยม โดยจัดปีกเกอร์ในแถวบนให้น้อยกว่าปีกเกอร์ในแถวล่างที่อยู่ติดกันอันหนึ่งเสมอ ถ้าแถวบนสุดมีปีกเกอร์อยู่เพียงหนึ่งอันซึ่งอยู่ในตำแหน่งจุดยอดของสามเหลี่ยม แถวล่างสุดมีปีกเกอร์อยู่ 190 อัน ถาว่าเขาเรียงปีกเกอร์กี่แถว

13. เมื่อต้นปี พ.ศ. 2525 ประชากรของจังหวัดหนึ่งมี 5,000,000 คน ถ้าประชากรลดลง 10% ของจำนวนที่เหลืออยู่ในแต่ละปี จงหาจำนวนประชากรเมื่อสิ้นปี พ.ศ. 2530

14. ครูวิทยาศาสตร์จัดห้องเรียนวิทยาศาสตร์ให้มีเก้าอี้แถวแรก 12 ตัว แถวที่สองมี 14 ตัว แถวที่สาม 16 ตัวเช่นนี้เรื่อยไป ถ้าในห้องจัดเก้าอี้ไว้ 15 แถว จงหาว่ามีเก้าอี้ในห้องทั้งหมดกี่ตัว

15. น้ำยาล้างจานชนิดหนึ่งซัดคราบไขมันได้ 75 % ของปริมาณไขมันที่มีอยู่ จงคำนวณว่าจะกำจัดไขมัน ได้กี่เปอร์เซ็นต์ของปริมาณที่มีอยู่ก่อนการล้าง เมื่อทำการล้าง 5 ครั้ง

16. โรงงานแห่งหนึ่งมีเครื่องปั๊มอากาศติดไว้ที่ถังใบหนึ่ง เพื่อดูดอากาศออกจากถังใบนี้ให้ได้มากที่สุด ทุกหนึ่งนาที่ที่เครื่องจักรนี้ทำงาน จะมีอากาศถูกดูดออกมา $\frac{1}{4}$ ของอากาศที่มีอยู่ในถัง จงหาว่าถ้าเปิดเครื่องให้ปั๊มอากาศทำงานนาน 6 นาที จะมีอากาศเหลืออยู่ในถังคิดเป็นกี่เปอร์เซ็นต์ของปริมาณอากาศเดิมที่มีอยู่ในถัง

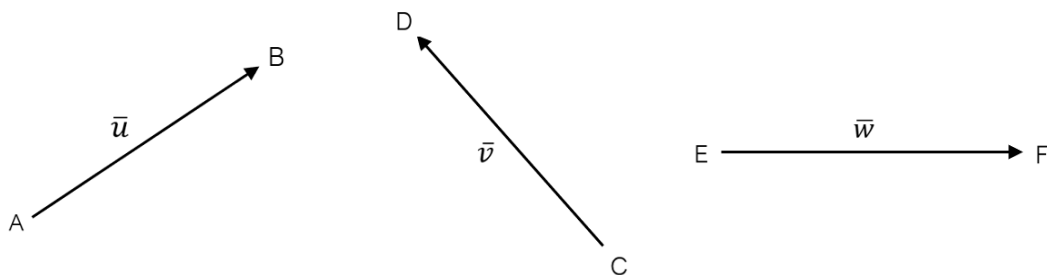
บทที่ 5 เวกเตอร์

5.1 การบอกปริมาณ (Quantity) การบอกปริมาณต่างๆสามารถบอกได้ 2 รูปแบบด้วยกัน

1. **บอกขนาดอย่างเดียว** เรียกการบอกปริมาณแบบนี้ว่า สเกลาร์ หรือปริมาณสเกลาร์ (Scalar quantity) เช่น ความสูง น้ำหนัก ปริมาตร อุณหภูมิ เป็นต้น

2. **บอกขนาดและทิศทาง** เรียกการบอกแบบนี้ว่า เวกเตอร์ หรือปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantity) เช่น ความเร็ว ความเร่ง แรงโมเมนต์ เป็นต้น

เวกเตอร์ในระนาบนั้น ในการศึกษาใช้ส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางกำกับ โดยอาศัยลูกศร ประกอบเข้ากับเส้นตรง เป็นตัวบอกทิศทาง ดังเช่น เวกเตอร์ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ในรูปภาพ



ในส่วนของเส้นตรง AB , CD , EF แทนเวกเตอร์ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ เขียนเป็นสัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{EF} = \vec{w}$ ความยาวของเส้นตรงแต่ละเส้นตรงแต่ละเส้นแทนขนาดของ vector

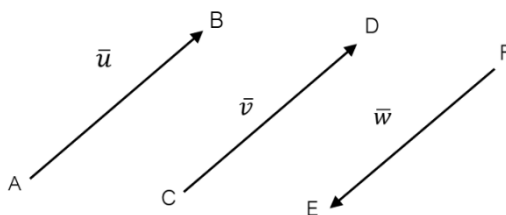
$\overrightarrow{AB}$ เรียกว่า เวกเตอร์ AB , $\overrightarrow{CD}$ เรียกว่า เวกเตอร์ CD , $\overrightarrow{EF}$ เรียกว่า เวกเตอร์ EF

พิจารณาเฉพาะ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

A เรียกว่า จุดเริ่มต้น (Initial point) ของ $\overrightarrow{AB}$, B เรียกว่า จุดสิ้นสุด (Terminal point) ของ $\overrightarrow{AB}$ ขนาดของ $\overrightarrow{AB}$ เขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $|\overrightarrow{AB}|$ หรือ $|\vec{u}|$ หรือ $|\vec{u}|$

5.2 เวกเตอร์ขนานกัน

เวกเตอร์ตั้งแต่ 2 เวกเตอร์ขึ้นไปที่มีทิศทางเดียวกัน หรือตรงข้ามกัน เรียกเวกเตอร์เหล่านี้ว่า เวกเตอร์ขนานกัน

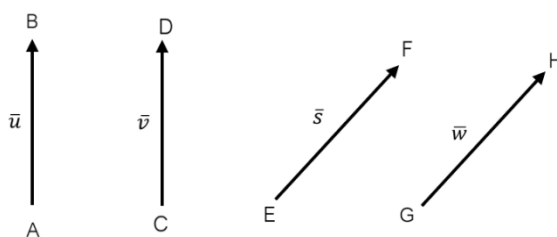


เช่น $\overrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overrightarrow{CD}$ และขนานกับ $\overrightarrow{FE}$

หรือ $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ และขนานกับ $\vec{w}$

5.3 เวกเตอร์เท่ากัน

คือ เวกเตอร์ใด ๆ ที่มีทิศทางเดียวกันและมีขนาดเท่ากันด้วย

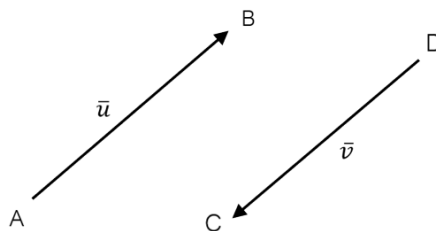


จากรูป $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ หรือ $\vec{u} = \vec{v}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$ หรือ $\vec{s} = \vec{w}$

5.4 นิเสธของเวกเตอร์

นิเสธของ $\overrightarrow{AB}$ ใดๆ เขียนแทนด้วย $-\overrightarrow{AB}$ ซึ่งหมายถึง เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $|\overrightarrow{AB}|$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{AB}$



เช่น $\overrightarrow{AB}$ เป็นนิเสธของ $\overrightarrow{DC}$

หรือ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC}$

$$\vec{u} = -\vec{v}$$

5.5 เวกเตอร์ศูนย์ (Zero vector)

คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 0 เขียนแทนด้วย $\vec{0}$

จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของ $\vec{0}$ เป็นจุดๆเดียวกัน นิเสธของ $\vec{0}$ คือ $\vec{0}$, นั่นคือ $\vec{0}$ คือ $-\vec{0}$

ตัวอย่างที่ 5.1 $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน



จงหา

- 1) เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$
- 2) เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AD}$
- 3) เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{BC}$
- 4) เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{CD}$
- 5) เวกเตอร์ใดบ้างที่ขนานกับ $\overrightarrow{CD}$
- 6) เวกเตอร์ใดบ้างที่เท่ากับ $\overrightarrow{CD}$
- 7) เวกเตอร์ใดบ้างที่เป็นนิเสธกับ $\overrightarrow{BC}$

แนวคิด 1. เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ $\overrightarrow{DC}$

2. เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AD}$ คือ $\overrightarrow{BC}$

3. เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{BC}$ คือ $\overrightarrow{CB}$ และ $\overrightarrow{DA}$

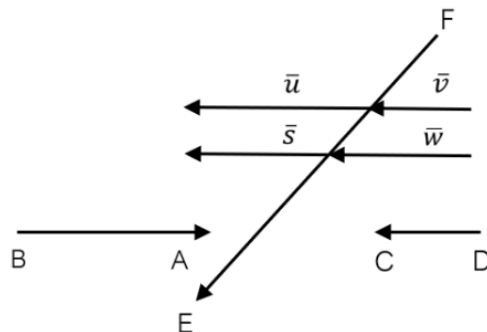
4. เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{CD}$ คือ $\overrightarrow{DC}$ และ $\overrightarrow{AB}$

5. เวกเตอร์ที่มีทิศทางขนานกับ $\overrightarrow{CD}$ คือ $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$

6. เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\overrightarrow{CD}$ คือ $\overrightarrow{BA}$

7. เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกับ $\overrightarrow{BC}$ คือ $\overrightarrow{CB}$ และ $\overrightarrow{DA}$

ตัวอย่างที่ 5.2 จากรูป



จงหา

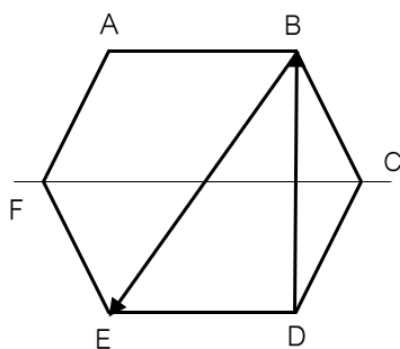
1. เวกเตอร์ใดบ้างที่มีทิศทางเดียวกัน
2. เวกเตอร์ใดบ้างที่มีทิศทางตรงข้ามกัน
3. เวกเตอร์ใดบ้างที่เท่ากัน

แนวคิด เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกันคือ $\overrightarrow{DC}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{s}$

เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{BA}$ คือ $\overrightarrow{DC}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{s}$

เวกเตอร์ที่เท่ากันคือ $\vec{s}$ กับ $\vec{w}$

ตัวอย่างที่ 5.3 เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าจากรูป



จงหา

1. เวกเตอร์ที่เป็นตัวแทนของ $\overrightarrow{AB}$
2. เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\overrightarrow{BC}$
3. เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\overrightarrow{BE}$
4. นิเสธของ $\overrightarrow{DB}$
5. นิเสธของ $\overrightarrow{AB}$

แนวคิด 1. เวกเตอร์ที่เป็นตัวแทนของ $\overrightarrow{AB}$ ได้คือ $\overrightarrow{ED}$

2. เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\overrightarrow{BC}$ คือ $\overrightarrow{FE}$, $-\overrightarrow{EF}$

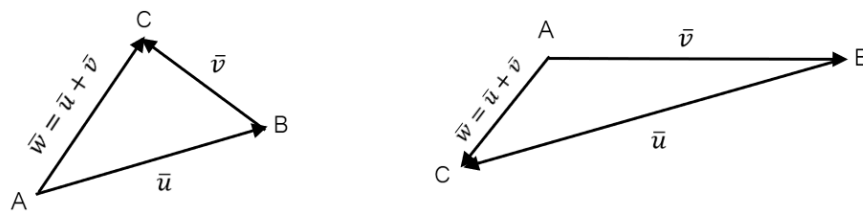
3. เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\overrightarrow{BE}$ คือ $-\overrightarrow{EB}$

4. นิเสธของ $\overrightarrow{DB}$ คือ $\overrightarrow{BD}$

5. นิเสธของ $\overrightarrow{AB}$ คือ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DE}$

5.6 การบวกเวกเตอร์ การบวกเวกเตอร์สองเวกเตอร์มีหลักดังนี้

1. ถ้า $\vec{u}$, $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ จุดเริ่มต้นของ $\vec{v}$ เป็นจุดเดียวกันกับจุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$ แล้ว $\vec{u} + \vec{v}$ คือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ และมีจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{v}$

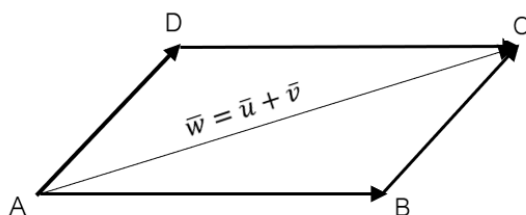


$\vec{w}$ เป็นผลบวกของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

หมายเหตุ $\vec{u}$, $\vec{v}$ มีทิศทางวนตามกัน แต่ $\vec{w}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

2. ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน แล้วผลบวกของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ หาได้จาก “ขนาดของ $\vec{w}$ ซึ่งเป็นเส้นทแยงมุมของ ซึ่งมีขนาดของ $\vec{u}$, $\vec{v}$ เป็นด้านประชิด” จุดเริ่มต้นของ $\vec{w}$ คือจุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ และจุดสิ้นสุดของ $\vec{w}$ คือจุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เช่นกัน

พิจารณารูปภาพประกอบ

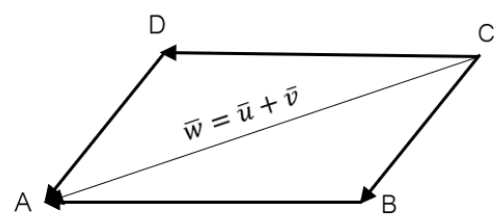


$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

แต่ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$$



$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$$

แต่ $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

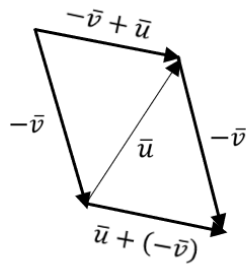
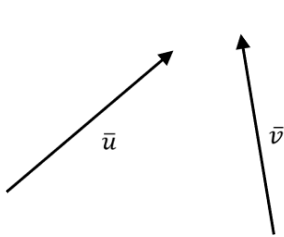
$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$$

$$\therefore \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$$

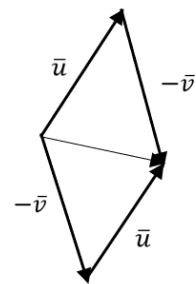
5.7 การลบเวกเตอร์

ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ แล้ว $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ หรือ $\vec{u} - \vec{v}$ เท่ากับ $\vec{u}$ บวกกับนิเสธของ $\vec{v}$

พิจารณารูปภาพประกอบ



รูปแบบการบวกที่ 1



รูปแบบการบวกที่ 2

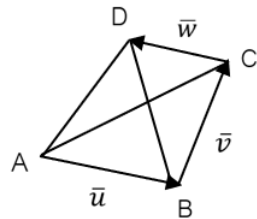
$$\begin{aligned}\vec{u} - \vec{v} &= \vec{u} + (-\vec{v}) \\ &= (-\vec{v}) + \vec{u}\end{aligned}$$

5.8 คุณสมบัติของการบวกเวกเตอร์

ให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

- $\vec{u} + \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ คุณสมบัติปิด
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ คุณสมบัติการสลับที่
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
- $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0}$ เมื่อ $\vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์ คุณสมบัติการมีเอกลักษณ์
- สำหรับทุกๆ $\vec{u}$ จะมี $-\vec{u}$ ซึ่ง $(-\vec{u} + \vec{u}) = \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ คุณสมบัติมีอินเวอร์ส

ตัวอย่างที่ 5.4 ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมใดๆ ให้หาผลรวมของเวกเตอร์ต่อไปนี้



1. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD}$
2. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$
3. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$

แนวคิด 1. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

$$\therefore (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

2. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

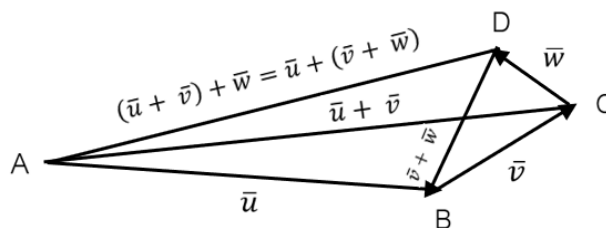
$$\therefore (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \vec{0}$$

3. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

ตัวอย่างที่ 5.5 ให้ ABCD เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่ง $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{w}$

จงพิสูจน์ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$



แนวคิด ในการพิสูจน์ $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \quad \dots\dots\dots(1)$$

และ $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$\therefore$ จาก (1) และ (2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

ตัวอย่างที่ 5.6 จงแสดงว่า $-(\bar{u} + \bar{v}) = -\bar{u} - \bar{v}$

$$\begin{aligned}
 \text{แนวคิด พิสูจน์ } (-\bar{u} - \bar{v}) + (\bar{u} + \bar{v}) &= [(-\bar{u}) + (-\bar{v})] + (\bar{u} + \bar{v}) \\
 &= (-\bar{u}) + [(-\bar{v}) + (\bar{u} + \bar{v})] && \text{การจัดกลุ่มการบวก} \\
 &= (-\bar{u}) + [(-\bar{v}) + (\bar{v} + \bar{u})] && \text{การสลับที่การบวก} \\
 &= (-\bar{u}) + [(-\bar{v} + \bar{v}) + \bar{u}] && \text{การจัดกลุ่มการบวก} \\
 &= (-\bar{u}) + [\bar{0} + \bar{u}] && \text{อินเวอร์สการบวก} \\
 &= (-\bar{u}) + \bar{u} && \text{เอกลักษณ์การบวก} \\
 &= \bar{0} && \text{เอกลักษณ์การบวก} \\
 \therefore (-\bar{u} - \bar{v}) + (\bar{u} + \bar{v}) &= \bar{0} \\
 \text{แต่ } -(\bar{u} + \bar{v}) + (\bar{u} + \bar{v}) &= \bar{0} && \text{อินเวอร์สการบวก} \\
 \therefore (-\bar{u} - \bar{v}) + (\bar{u} + \bar{v}) &= -(\bar{u} + \bar{v}) + (\bar{u} + \bar{v}) \\
 \text{นั่นคือ} &&& -\bar{u} - \bar{v} = -(\bar{u} + \bar{v}) \\
 \text{หรือ} &&& -(\bar{u} + \bar{v}) = -\bar{u} - \bar{v}
 \end{aligned}$$

5.9 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ a เป็นเลขจำนวนจริง

1. ถ้า $a > 0$ แล้ว $a\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด $a|\bar{u}|$ มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$
2. ถ้า $a < 0$ แล้ว $a\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด $a|\bar{u}|$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$
3. ถ้า $a = 0$ แล้ว $a\bar{u} = \bar{0}$
4. $a(\bar{u} + \bar{v}) = a\bar{u} + a\bar{v}$ เมื่อ $\bar{u} \neq \bar{0}, \bar{v} \neq \bar{0}$ และ $a \neq 0$
5. ถ้า $a, b \in R, \bar{u} \neq \bar{0}, \bar{v} \neq \bar{0}, \bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$ และ $a\bar{u} + b\bar{v} = \bar{0}$
แล้ว $a = 0$ และ $b = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{เช่น } 5(6\bar{v}) &= 30\bar{v} \\
 -2(5\bar{v}) &= -10\bar{v} \\
 3(2\bar{v} + \bar{u}) &= 6\bar{v} + 3\bar{u} \\
 3(2\bar{v} - \bar{u}) &= 6\bar{v} + 3(-\bar{u}) = 6\bar{v} - 3\bar{u} \\
 8\bar{w} &= 5\bar{w} + 3\bar{w}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.7 จงหาความยาวของเส้นมัธยฐานของ Δ ใดๆ

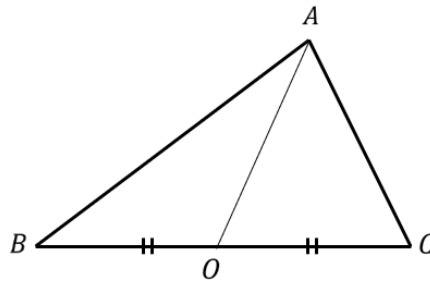
แนวคิด ให้ AO เป็นเส้นมัธยฐานของ ΔABC

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= 2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ &= 2\overrightarrow{AO} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BO}) = 2\overrightarrow{AO} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

$$|\overrightarrow{AO}| = \left| \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} \right|$$



ตัวอย่างที่ 5.8 กำหนด $|\vec{u}| = 13$, $|\vec{v}| = 2$, $|\vec{u} + \vec{v}| = 14$ จงหา $2 \vec{u} \cdot \vec{v}$

แนวคิด $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$

$$(14)^2 = \vec{u}\vec{u} + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{v}$$

$$196 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

$$196 = 169 + 2\vec{u}\vec{v} + 4$$

$$2\vec{u}\vec{v} = 23$$

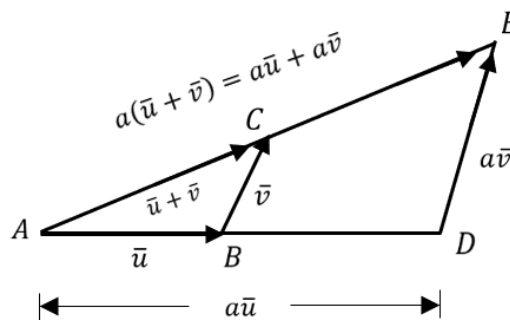
ตัวอย่างที่ 5.9 จงแสดงว่า $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

แนวคิด ถ้า $a > 0$ จากรูป $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{BC} = \vec{v}$ (ใน $\triangle ABC$)

$$\therefore \vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$$

ต่อ AB ออกไปถึง D ให้ AD ยาวเท่ากับ $a\vec{u}$ ลาก $DE \parallel BC$ ลาก AC ต่อกออกไปตัดกับ DE ที่ E

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$ จะได้ว่า ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากัน ย่อมเป็นสัดส่วนต่อเนื่องกัน



จะได้ $\vec{DE} = a\vec{v}$ และ $\vec{AE} = a(\vec{u} + \vec{v})$ (1)

แต่ $a\vec{u} + a\vec{v} = \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AE}$ (ใน $\triangle ADE$)

$$\therefore \vec{AE} = a\vec{u} + a\vec{v} \quad \text{..... (2)}$$

นั่นคือ $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ (จาก (1), (2))

ถ้า $a < 0$ จากรูป $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$ (ใน $\triangle ABC$)

โดยการสร้างรูปช่วยเหมือนกับการพิสูจน์ตอนแรกทีกล่าวนมา

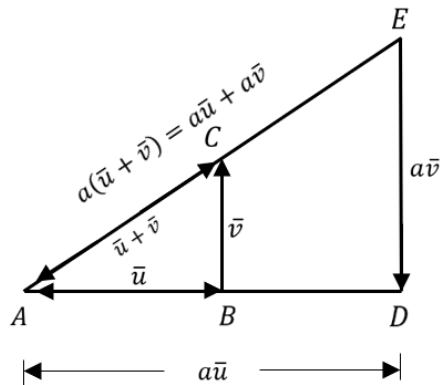
จะได้ $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{AC} = \vec{EA}$ (3)

แต่ $a\vec{u} + a\vec{v} = \vec{DA} + \vec{ED} = \vec{EA}$ (4)

นั่นคือ $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ (จาก (3), (4))

ถ้า $a = 0$ $a\vec{u} = \vec{0}$, $a\vec{v} = \vec{0}$ และ $a(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0}$

นั่นคือ $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$



$$\therefore a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v} \quad \text{ทุกค่าของ } a \text{ ที่เป็นจำนวนจริง}$$

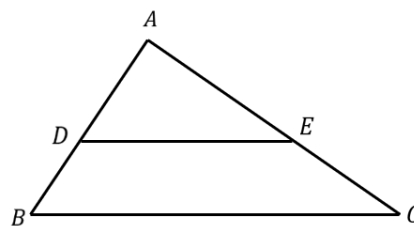
5.10 การใช้เวกเตอร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทในเรขาคณิต

เวกเตอร์ช่วยในการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิตบางบทให้ง่ายแก่การทำความเข้าใจ และง่ายต่อการพิสูจน์

ตัวอย่างที่ 5.10 จงพิสูจน์ว่าถ้าลากเส้นตรงจากจุดกึ่งกลางของด้านหนึ่งของสามเหลี่ยม ให้ขนานกับอีกด้านหนึ่ง ไปตัดด้านที่เหลือ ย่อมแบ่งครึ่งด้านที่เหลือ

แนวคิด ของการพิสูจน์ ให้ ABC เป็น Δ D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB ลาก DE ขนานกับ BC

ตัด AC ที่ E



จะต้องพิสูจน์ว่า E เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

เนื่องจาก $\overrightarrow{DE}$ ขนานกับ $\overrightarrow{BC}$ ให้ $\overrightarrow{DE} = a\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{EA}$ ขนานกับ $\overrightarrow{CA}$ ให้ $\overrightarrow{EA} = b\overrightarrow{CA}$

$$\overrightarrow{DA} \text{ ขนานกับ } \overrightarrow{BA} \text{ ให้ } \overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

$$\text{แต่ } \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{CA}$$

$$\text{และ } \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{CA} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{เห็นได้ว่า } \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{CA}$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 2a\overrightarrow{BC} + 2b\overrightarrow{CA} \quad \text{หรือ} \quad (2a-1)\overrightarrow{BC} + (2b-1)\overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

$$\text{แต่ } \overrightarrow{BC} \neq \vec{0}, \overrightarrow{CA} \neq \vec{0} \text{ และ } \overrightarrow{BC} \text{ ไม่ขนานกับ } \overrightarrow{CA}$$

$$\therefore 2a-1=0 \text{ ได้ } a=\frac{1}{2} \text{ และ } 2b-1=0 \text{ ได้ } b=\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ และ } \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

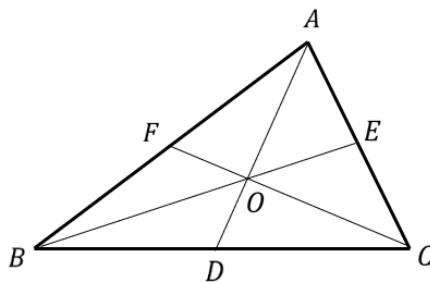
นั่นคือ E เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

ตัวอย่างที่ 5.11 ถ้า O เป็นจุดตัดของเส้นมัธยฐานของ $\triangle ABC$ แล้ว $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

แนวคิด เนื่องจาก $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

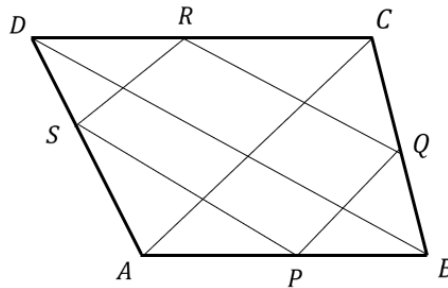
$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AO} &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันอาจแสดงได้ว่า $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ และ $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$



$$\therefore \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

ตัวอย่างที่ 5.12 กำหนด P, Q, R และ S เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC, CD และ DA ของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $PQRS$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน



แนวคิด ในการพิสูจน์

เนื่องจาก $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ และ } \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$$

นั่นคือ $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ และ } \overrightarrow{SR} \parallel \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ} \text{ และ } \overrightarrow{SR} \parallel \overrightarrow{PQ} \text{ ด้วย} \quad \dots\dots\dots (1)$$

และเนื่องจาก $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \text{ และ } \overrightarrow{QR} \parallel \overrightarrow{BD} \text{ นั่นคือ } \overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \text{ และ } \overrightarrow{PS} \parallel \overrightarrow{BD}$$

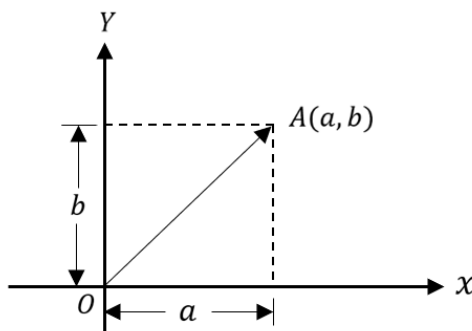
$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR} \text{ และ } \overrightarrow{PS} \parallel \overrightarrow{QR} \text{ ด้วย} \quad \dots\dots\dots (2)$$

นั่นคือ $\overrightarrow{PS}$ ขนาน $\overrightarrow{QR}$ และเท่ากัน, $\overrightarrow{PQ}$ ขนาน $\overrightarrow{SR}$ และเท่ากัน

ดังนั้น $PQRS$ เป็นด้านขนาน

5.11 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

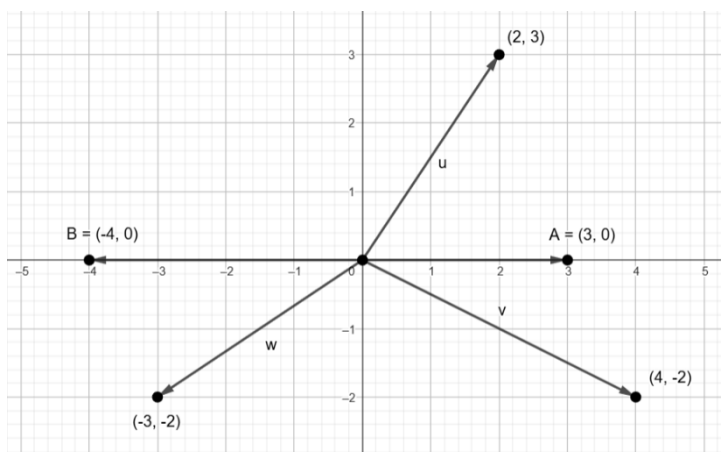
1. ถ้า a, b เป็นจำนวนจริง แกน xox' และ yoy' ตั้งฉากซึ่งกันและกัน (a, b) แทนค่าเลขคู่อันดับ แล้ว $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ แทนเวกเตอร์ โดย a แทนได้ด้วยระยะทาง $|a|$ หน่วย ตามแนวนอนไปทางขวาเมื่อ $a > 0$ และไปทางซ้ายเมื่อ $a < 0$ b แทนได้ด้วยระยะทาง $|b|$ หน่วยตามแนวตั้งไปด้านบนเมื่อ $b > 0$ และไปด้านล่างเมื่อ $b < 0$



$\vec{OA}$ เป็นเวกเตอร์ที่มี 0 เป็นจุดเริ่มต้น และมี $A(a, b)$ เป็นจุดสิ้นสุด เขียนแทนได้ด้วย สัญลักษณ์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

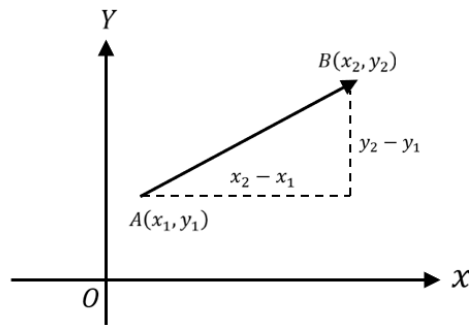
เช่น $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{OA} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{OB} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

แต่ละเวกเตอร์สามารถแสดงบนพิกัดได้ดังรูป



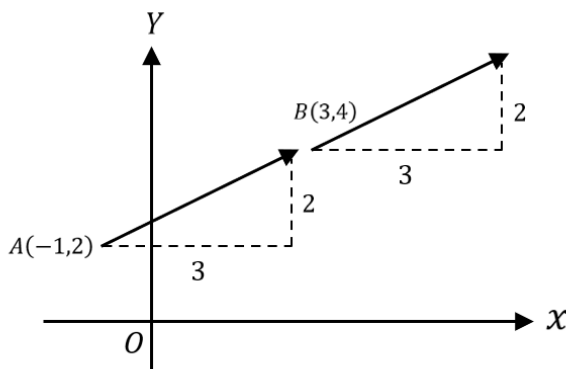
2. ถ้า $A(x_1, y_1)$ เป็นจุดเริ่มต้น และ $B(x_2, y_2)$ เป็นจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์แล้ว

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$



ตัวอย่างที่ 5.13 ให้ $A(-1, 2)$ และ $B(3, 4)$ จงแสดงตำแหน่งของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ซึ่งมี A, B เป็นจุดเริ่มต้น

แนวคิด $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีค่าความยาวตามแนวระดับจากจุดเริ่มต้นเป็น 3 และตามแนวตั้งจากจุดเริ่มต้นเป็น 2



.....) , $D(-3, -2)$ จงหาเวกเตอร์

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$

แนวคิด $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 0 + 2 \\ 3 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} -3 & -0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$; $\overrightarrow{DA} = \begin{bmatrix} 1 + 3 \\ 5 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

5.12 การบวกเวกเตอร์และการลบเวกเตอร์

$$\text{ถ้า } \vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - c \\ b - d \end{bmatrix}$$

$$\text{เวกเตอร์ศูนย์ } \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{เวกเตอร์นิเสธ} \quad \text{เวกเตอร์นิเสธของ } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ คือ } -\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$$

5.13 ขนาดของเวกเตอร์ (Magnitude of Vector)

$$1. \text{ ถ้า } \vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ แล้วขนาดของ } \vec{u} \text{ นิยามว่า } |\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$2. \text{ ถ้า } \vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \text{ แล้วขนาดของ } \vec{v} \text{ นิยามว่า } |\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

5.14 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit of Vector)

คือเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยได้แก่ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\text{ให้ } \vec{i} \text{ แทน } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad -\vec{i} \text{ แทน } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{j} \text{ แทน } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad -\vec{j} \text{ แทน } \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{พิจารณา } \vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = ai + bj$$

$$\text{ถ้า } \vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq \vec{0} \text{ แล้ว}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \frac{1}{(a^2+b^2)} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{(a^2+b^2)} \\ \frac{b}{(a^2+b^2)} \end{bmatrix}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ $-\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = -\frac{1}{(a^2+b^2)} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a}{(a^2+b^2)} \\ \frac{-b}{(a^2+b^2)} \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 5.15

ก. จงหา $|\vec{u}|$ เมื่อ $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ข. จงหาเวกเตอร์ 1 หน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ค. จงหาเวกเตอร์ 1 หน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

ง. จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น 5 และมีทิศทางเดียวกันกับ $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$

จ. จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

แนวคิด ก. $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \therefore |\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

ข. เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$

ค. เนื่องจาก $|\vec{v}|$ คือ $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$\therefore$ เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ คือ $-\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

ง. เนื่องจาก $|\vec{w}|$ คือ $|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $|\vec{w}| = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{68}} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{68}} \\ \frac{8}{\sqrt{68}} \end{bmatrix}$

$\therefore$ เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น 5 และมีทิศทางเดียวกันกับ $\vec{w}$ คือ

$$5 \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{68}} \\ \frac{8}{\sqrt{68}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{68}} \\ \frac{40}{\sqrt{68}} \end{bmatrix}$$

จ. เนื่องจากขนาดของ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \sqrt{5}$ และขนาดของ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ คือ $-\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

$\therefore$ เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ และมีขนาดเท่ากับ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ คือ

$$5 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

5.15 เวกเตอร์อิสระ (Free Vector)

คือ เวกเตอร์ที่ไม่กำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด ได้แก่ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ ฯลฯ

5.16 ผลคูณเชิงสเกลาร์ มีคุณสมบัติสำคัญดังต่อไปนี้

1. ถ้า $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ แล้ว $\vec{u} \cdot \vec{v} = (a_1 b_1 + a_2 b_2)$
2. $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 = \vec{j} \cdot \vec{j}$ และ $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 = \vec{j} \cdot \vec{i}$
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
5. ถ้า $\vec{u}$, $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ และ $m \in R$ $(m\vec{u})\vec{v} = \vec{u}(m\vec{v}) = m(\vec{u}\vec{v})$
6. $\vec{u}$, $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง $\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$
7. ถ้า $\vec{u} \neq 0$ และ $\vec{v} \neq 0$ แล้ว $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}\vec{v} = 0$

ตัวอย่างที่ 5.16 จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$ จาก

ก. $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$

ข. $\vec{u} = -6\vec{i} + 9\vec{j}$, $\vec{v} = 9\vec{i} - 6\vec{j}$

ค. $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{0}$

แนวคิด

ก. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = (3 \times 4) + (2 \times 5) = 12 + 10 = 22$

ข. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix} = (-6 \times 9) + (9 \times -6) = -54 - 54 = -108$

ค. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

ตัวอย่างที่ 5.17 กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

จงหา $(\vec{u} + \vec{v})\vec{w}$, $\vec{u}(\vec{v} - \vec{w})$, $[(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})]$ และ $[(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})]\vec{w}$

แนวคิด

$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$; $\vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}$

$\vec{v} - \vec{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$

$\therefore (\vec{u} + \vec{v})\vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 - 27 = -25$

$\vec{u}(\vec{v} - \vec{w}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix} = -6 + 20 = 14$

$[(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})] = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} = -7 - 45 = -52$

$[(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})]\vec{w}$ ไม่มีนิยามจึงไม่สามารถหาค่าได้

ตัวอย่างที่ 5.18 ถ้า $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ และ $|\vec{u} - \vec{v}| = 7$ แล้ว จงหา $|\vec{u} + \vec{v}|$

แนวคิด เนื่องจาก

$$\begin{aligned} |\vec{u} + \vec{v}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v})\vec{u} + (\vec{u} + \vec{v})\vec{v} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v}\vec{u} + \vec{u}\vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } |\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

$$\text{แทนค่า } 49 = 9 - 2\vec{u}\vec{v} + 25$$

$$2\vec{u}\vec{v} = -49 + 9 + 25 = -15$$

$$\text{แต่ } |\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 9 - 15 + 25 = 19$$

$$\text{นั่นคือ } |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{19}$$

ตัวอย่างที่ 5.19 กำหนดให้ ABC เป็น Δ $A(5,2)$ $B(8,7)$ และ $C(3,10)$

จงแสดงว่า ABC เป็น Δ มุมฉาก

แนวคิด จะได้ $\overrightarrow{AB} = (8 - 5)\vec{i} + (7 - 2)\vec{j} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$

$$\overrightarrow{BC} = (3 - 8)\vec{i} + (10 - 7)\vec{j} = -5\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (3)(-5) + (5)(3) = -15 + 15 = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \text{ ตั้งฉาก } \overrightarrow{BC} \text{ นั่นคือ } \Delta ABC \text{ เป็น } \Delta \text{ มุมฉาก}$$

5.17 เวกเตอร์สเปซ

มีคุณสมบัติดังนี้

กำหนดให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ a และ b เป็นจำนวนจริง และ R เป็นเซตของเวกเตอร์ในสเปซ

1. $\bar{u} + \bar{v} \in R$ คุณสมบัติของการปิด
2. $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$ คุณสมบัติของการจัดหมู่
3. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$ คุณสมบัติของการสลับที่
4. $a\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ ซึ่งเป็นสมาชิกของ R ด้วย
5. $a(\bar{u} + \bar{v}) = a\bar{u} + a\bar{v}$
6. $(a + b)\bar{u} = a\bar{u} + b\bar{u}$
7. $1\bar{u} = \bar{u}$ มี 1 เป็นเอกลักษณ์

5.18 ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ครอสโปรดักส์ (Cross product) หรือ ผลคูณไขว้ เป็นการดำเนินการบนเวกเตอร์สองตัว ในปริภูมิสามมิติ ซึ่งให้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ใหม่ที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ต้นฉบับทั้งสอง โดยมีขนาดเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจากเวกเตอร์ทั้งสอง และทิศทางที่กำหนดโดย กฎมือขวา ผลคูณไขว้ถูกใช้ในวิชาฟิสิกส์และคณิตศาสตร์ประยุกต์ เช่น การคำนวณโมเมนต์ของแรง

ความหมายและคุณสมบัติ:

ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์:

ต่างจากผลคูณจุด (dot product) ที่ให้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ ผลคูณไขว้จะให้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์เสมอ

ตั้งฉากกับเวกเตอร์ต้นฉบับ:

เวกเตอร์ผลลัพธ์จะตั้งฉากกับเวกเตอร์ตั้งต้นทั้งสองตัว

ใช้ในปริภูมิสามมิติ:

การดำเนินการนี้มีนิยามเฉพาะในปริภูมิสามมิติเท่านั้น

กฎมือขวา:

ทิศทางของเวกเตอร์ผลลัพธ์ถูกกำหนดโดยกฎมือขวา เมื่อกำมือขวาตามทิศทางของเวกเตอร์ตัวแรกไปยังเวกเตอร์ตัวที่สอง นิ้วหัวแม่มือจะชี้ไปตามทิศทางของเวกเตอร์ผลลัพธ์

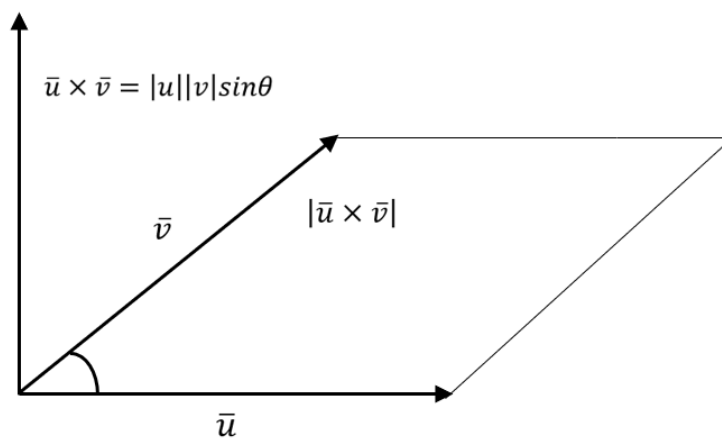
ขนาด:

ขนาดของเวกเตอร์ผลลัพธ์เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เวกเตอร์ทั้งสองตัวครอบคลุม หรือ $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin\theta$

โดยที่ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ คือเวกเตอร์ตั้งต้น และ θ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

สัญลักษณ์:

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนผลคูณไขว้คือเครื่องหมาย "×" เช่น $\vec{u} \times \vec{v}$



การหาผลคูณไขว้ โดยใช้เมทริกซ์ (Cross Product Using Matrix Notation)

กำหนด $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ และ $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

จะได้ว่า $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{c} = \hat{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{c} = \hat{i}|a_2b_3 - a_3b_2| - \hat{j}|a_1b_3 - a_3b_1| + \hat{k}|a_1b_2 - a_2b_1|$$

5. 19 การนำความรู้เรื่องเวกเตอร์ไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์

1. สถานการณ์จำลอง: การเคลื่อนที่ของเรือ

นายกานต์ขับเรืออยู่กลางทะเล เขาเปิดเครื่องยนต์ที่ทำให้เรือมีความเร็ว 20 กิโลเมตร/ชั่วโมง ไปทางทิศเหนือ จากนั้นมีลมพัดมาทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ (ทำมุม 45° กับทิศเหนือ) ทำให้เรือเคลื่อนที่ไปตามลมด้วยความเร็ว 5 กิโลเมตร/ชั่วโมง” เรือของนายกานต์กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วและทิศทางรวมเท่าไร

แนวคิดและหลักการทางฟิสิกส์

1. กำหนดเวกเตอร์ความเร็ว

-เวกเตอร์ความเร็วของเรือ (V_1) : เรือเคลื่อนที่ไปทางทิศเหนือ (แกน y) ด้วยความเร็ว 20 km/h

$$V_1 = 0i + 20j \text{ km/h}$$

-เวกเตอร์ความเร็วของลม (V_2): ลมพัดมาทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ (ทำมุม 45° กับทิศเหนือ) ด้วยความเร็ว 5 km/h

-ต้องหาค่าประกอบของเวกเตอร์ลมในแนวแกน x และ y โดยใช้ตรีโกณมิติ:

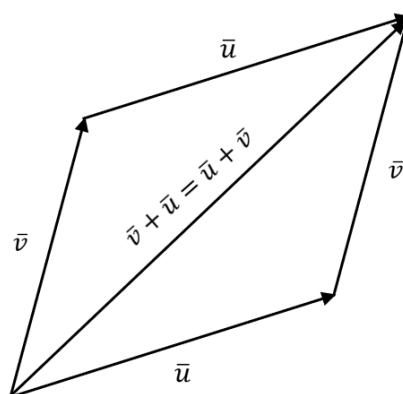
-องค์ประกอบในแนวแกน x :

$$V_{2x} = 5\cos 45^\circ = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 3.54 \text{ km/h}$$

-องค์ประกอบในแนวแกน y :

$$V_{2y} = 5\sin 45^\circ = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 3.54 \text{ km/h}$$

$$V_2 = 3.54i + 3.54j \text{ km/h}$$



2. การบวกเวกเตอร์เพื่อหาความเร็วรวม (Resultant Velocity)

หลักการทางฟิสิกส์: ความเร็วรวม (Resultant Velocity) ของเรือคือผลรวมเวกเตอร์ของความเร็วจากเครื่องยนต์และความเร็วจากลม

$$V_{total} = V_1 + V_2$$

$$V_{total} = (0i + 20j) + (3.54i + 3.54j)$$

$$V_{total} = (0 + 3.54)i + (20 + 3.54j)$$

$$V_{total} = 3.54i + 23.54j \text{ km/h}$$

3. การหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ความเร็วรวม

ขนาด (Magnitude): คืออัตราเร็วรวมของเรือ ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$V_{total} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$V_{total} = \sqrt{(3.54)^2 + (23.54)^2}$$

$$V_{total} = \sqrt{12.53 + 554.13}$$

$$V_{total} = \sqrt{566.66} \approx 23.8 \text{ km/h}$$

ทิศทาง (Direction): หาจากมุม θ ที่ทำกับแกน $+x$ (ทิศตะวันออก)

$$\tan(\theta) = \frac{V_y}{V_x} = \frac{23.54}{3.54} \approx 6.65$$

$$\arctan(6.65) \approx 81.4^\circ$$

สรุปคำตอบ เรือของนายกานต์กำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วรวมประมาณ 23.8 กิโลเมตร/ชั่วโมง ในทิศทาง 81.4° จากทิศตะวันออก (หรือประมาณ 8.6° จากทิศเหนือ)

2. สถานการณ์จำลอง: การลากกระเป๋าเดินทาง

นักท่องเที่ยวคนหนึ่งกำลังลากกระเป๋าเดินทาง โดยออกแรงดึง 20 นิวตัน และทำมุม 60° กับพื้น ทำให้กระเป๋าเคลื่อนที่ไปบนพื้นผิวเรียบเป็นระยะทาง 10 เมตร นักท่องเที่ยวคนนี้ทำงาน (ออกแรง) ไปเท่าไรในการเคลื่อนย้ายกระเป๋าไปนี้

แนวคิดและหลักการทางฟิสิกส์

1. กำหนดเวกเตอร์

1.1 เวกเตอร์แรง (F): คือเวกเตอร์ของแรงที่นักท่องเที่ยวออกแรงดึง

ขนาด : $|F| = 20$ นิวตัน

ทิศทาง : ทำมุม 60° กับแนวระดับ

1.2 เวกเตอร์การกระจัด (d): คือเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ของกระเป๋า

ขนาด : $|d| = 10$ เมตร

ทิศทาง : ไปตามแนวระดับ (ทำมุม 0° กับพื้น)

2. การคูณเวกเตอร์เพื่อหางาน

หลักการทางฟิสิกส์: งาน (W) เป็นปริมาณสเกลาร์ที่บอกพลังงานที่ถูกถ่ายโอนเมื่อมีแรงกระทำและทำให้วัตถุเคลื่อนที่ งานหาได้จากการคูณเวกเตอร์เชิงสเกลาร์ (dot product) ระหว่างเวกเตอร์แรงกับการกระจัด

$$W = F \cdot d$$

การหางานจากขนาดและมุม:

$$W = |F| |d| \cos(\theta)$$

* เมื่อ θ คือมุมระหว่าง $|d|$ และ $|F|$ จากโจทย์ $\theta = 60^\circ$

$$W = (20 \text{ N}) \times (10 \text{ m}) \times \cos(60^\circ)$$

$$W = (200) \times (0.5)$$

$$W = 100 \quad \text{จูล (J)}$$

สรุปคำตอบ นักท่องเที่ยวทำงานไป 100 จูล ในการเคลื่อนย้ายกระเป๋าเดินทางไปนี้

ตัวอย่างการนำความรู้เรื่องการคูณเวกเตอร์เชิงเวกเตอร์ (cross product) มาใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์โดยเฉพาะในวิชาฟิสิกส์ เรื่องทอร์ก (Torque)

3. สถานการณ์จำลอง: การเปิดประตูบานใหญ่

พ่อกำลังจะเปิดประตูบ้านที่บานพับอยู่ทางซ้ายมือ พ่อใช้มือดันที่ลูกบิดประตูซึ่งห่างจากบานพับ 1 เมตร โดยออกแรงผลัก 10 นิวตัน ในทิศทางที่ตั้งฉากกับระนาบของประตูพอดี อยากทราบว่าพ่อสร้างทอร์กเท่าไรในการเปิดประตู และทิศทางของทอร์กเป็นอย่างไร

แนวคิดและหลักการทางฟิสิกส์

1. กำหนดเวกเตอร์

1.1 เวกเตอร์ตำแหน่ง (r): คือเวกเตอร์จากจุดหมุน (บานพับ) ไปยังจุดที่ออกแรง (ลูกบิดประตู)

ขนาด : $|r| = 1$ เมตร

ทิศทาง : ไปตามความยาวของประตู

1.2 เวกเตอร์แรง (F): คือเวกเตอร์ของแรงที่กระทำ

ขนาด : $|F| = 10$ นิวตัน

ทิศทาง : ตั้งฉากกับระนาบของประตู

2. การคูณเวกเตอร์เพื่อหาทอร์ก

2.1 หลักการทางฟิสิกส์: ทอร์ก (τ) คือปริมาณเวกเตอร์ที่ทำให้วัตถุหมุนได้ ทอร์กหาได้จากการคูณเวกเตอร์เชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ตำแหน่งและเวกเตอร์แรง ($\tau = r \times F$)

การหาขนาดของทอร์ก: เราใช้สูตร $|\tau| = |r| |F| \sin\theta$

แทนค่า จะได้ $|\tau| = (1\text{ m})(10\text{ N})\sin(90^\circ) = (10)(1)$

$|\tau| = 10$ นิวตัน-เมตร ($\text{N} \cdot \text{m}$)

3. การหาทิศทางของทอร์กด้วยกฎมือขวา (Right-Hand Rule)

กฎมือขวา: ใช้เพื่อกำหนดทิศทางของทอร์กที่เกิดจากการหมุน วางมือขวาตามแนวเวกเตอร์แรก (r) คือตามแนวประตูจากบานพับไปยังลูกบิด ม้วนนิ้วทั้งสี่ตามทิศทางของเวกเตอร์ที่สอง (F) คือทิศทางที่ผลักประตู ทิศทางของนิ้วหัวแม่มือที่ชี้ขึ้นจะบอกทิศทางของทอร์ก (τ)

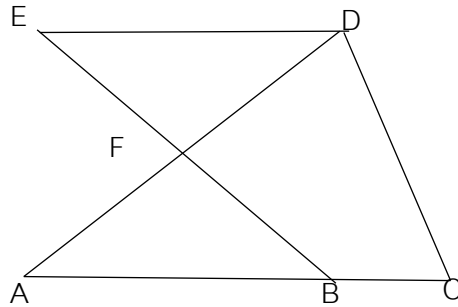
จากสถานการณ์นี้ เมื่อเราผลักประตูไปข้างหน้า ทิศทางของทอร์กจะพุ่งขึ้นในแนวแกนเดียวกับบานพับ

สรุปคำตอบ เราสร้างทอร์กขนาด 10 นิวตัน-เมตร และทิศทางของทอร์กพุ่งขึ้นไปในแนวตั้ง (ตามแกนของบานพับประตู)

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1. จากรูปกำหนดให้ F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BE}$ และ $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} = 2\vec{a}$

จงหาเวกเตอร์ต่อไปนี้ ในรูปของ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$



1.1 $\overrightarrow{BF}$

1.2 $\overrightarrow{AE}$

1.3 $\overrightarrow{CE}$

1.4 $\overrightarrow{CF}$

2. กำหนด $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ และ $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j}$ แล้ว จงหาค่าของ

2.1 $\vec{u} \cdot \vec{v}$

2.2 $\vec{u} \cdot \vec{u}$

2.3 $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

2.4 $(\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v}$

2.5 $\vec{u} \cdot \vec{v} + 7$

2.6 $\vec{i} \cdot \vec{i}$

2.7 $\vec{j} \cdot \vec{j}$

2.8 $\vec{i} \cdot \vec{j}$

2.9 $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}$

2.10 $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$

3. กำหนด $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

จงหาค่าของ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ถ้ากำหนด θ เป็น

3.1 60°

3.2 90°

3.3 120°

4. กำหนด $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ แล้ว มุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเท่าใด

5. จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากและมีขนาดเท่ากับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

5.1 $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

5.2 $\vec{u} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$

5.3 $\vec{u} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$

5.4 $\vec{u} = -5\vec{i} - 3\vec{j}$

5.5 $\vec{u} = 3\vec{i}$

5.6 $\vec{u} = -5\vec{j}$

6. กำหนดให้เวกเตอร์ดังต่อไปนี้ เวกเตอร์คู่ใดบ้างที่ขนานกันและทิศทางที่ขนานกันไปทางเดียวกันหรือตรงกันข้าม

$$\text{ก) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ข) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{ค) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ง) } \vec{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

7. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2,1)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{i} + 3\vec{j}$

8. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, -1)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{i} + 3\vec{j}$

9. กำหนด $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ และ $\vec{v} = \frac{2}{5}\vec{i} + \frac{1}{5}\vec{j}$ ถ้า $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ แล้ว $|\vec{v} + \vec{w}|$ มีค่าเท่าใด

10. กำหนดให้มุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เป็น 60° และ $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 8$ แล้ว จงหา

$$10.1 \quad |\vec{u} + \vec{v}|$$

$$10.2 \quad |\vec{u} - \vec{v}|$$

11. กำหนด $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ และ $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ จงหา $\vec{u} \times \vec{v}$

12. กำหนด $A(1,2,1), B(3,0,2), C(1,1,0)$ และ จงหา $D(0,5,1)$

12.1 พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC

12.2 พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ACD

12.3 พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD

บทที่ 6

สถิติเบื้องต้น

6.1 ความหมายของสถิติ

สถิติ (Statistics) มีความหมายหลักอยู่ 2 ประการ คือ:

1. ข้อมูลตัวเลข (Numerical Facts) สถิติในความหมายนี้หมายถึง ข้อมูลหรือตัวเลขที่รวบรวมไว้เพื่อแสดงข้อเท็จจริง เกี่ยวกับเรื่องใดเรื่องหนึ่ง เช่น สถิติอุบัติเหตุบนท้องถนน สถิติปริมาณน้ำฝนรายปี สถิติจำนวนประชากร เป็นต้น

2. ศาสตร์หรือวิชา (The Science/Discipline) สถิติในความหมายนี้คือ ศาสตร์ที่เป็นระบบหรือระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์ ที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการทั้งหมดในการจัดการข้อมูล เพื่อให้สามารถสรุปผลและตัดสินใจได้อย่างมีเหตุผล ประกอบด้วยขั้นตอนหลัก ๆ ได้แก่ การเก็บรวบรวมข้อมูล การจัดระเบียบและนำเสนอข้อมูล การวิเคราะห์ข้อมูล และการตีความหมายและการสรุปผล

สถิติศาสตร์แบ่งออกเป็น 2 ประเภทหลัก ได้แก่:

1. สถิติเชิงพรรณนา (Descriptive Statistics): ใช้อธิบายและสรุปลักษณะของข้อมูลชุดที่มีอยู่เท่านั้น เช่น การหาค่าเฉลี่ย มัธยฐาน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

2. สถิติเชิงอนุมาน (Inferential Statistics): ใช้วิเคราะห์ข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่างเพื่ออนุมาน (Infer) หรือสรุปผลอ้างอิงไปยังลักษณะของประชากรทั้งหมด เช่น การทดสอบสมมติฐาน และการประมาณค่าต่างๆ

6.2 ระเบียบวิธีวิจัยทางสถิติ

ระเบียบวิธีวิจัยทางสถิติ (Statistical Methodology) คือ กระบวนการที่เป็นระบบและเป็นขั้นตอน ในการใช้หลักการทางสถิติเพื่อศึกษาปรากฏการณ์หรือตอบคำถามวิจัย โดยเริ่มตั้งแต่การวางแผนการเก็บข้อมูลไปจนถึงการสรุปผลและตีความหมาย เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่น่าเชื่อถือและสามารถนำไปอ้างอิงหรือใช้ในการตัดสินใจได้

ระเบียบวิธีทางสถิติหลัก ๆ แบ่งออกเป็น 4 ขั้นตอน สำคัญ ดังนี้:

1. การเก็บรวบรวมข้อมูล (Collection of Data) เป็นขั้นตอนแรกที่สำคัญที่สุด โดยเป็นการรวบรวมข้อมูลดิบ (Raw Data) ที่เกี่ยวข้องกับวัตถุประสงค์ของการวิจัย สิ่งที่ต้องพิจารณา:

แหล่งข้อมูล: ข้อมูลปฐมภูมิ (Primary Data) คือข้อมูลที่เก็บใหม่โดยตรงจากแหล่งกำเนิด (เช่น การสำรวจ, การทดลอง) หรือ ข้อมูลทุติยภูมิ (Secondary Data) คือข้อมูลที่มีผู้เก็บไว้แล้ว (เช่น รายงาน, ฐานข้อมูล)

ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง: การกำหนดขอบเขตของกลุ่มที่ศึกษา (ประชากร) และการเลือกวิธีการสุ่มตัวอย่างที่เหมาะสมเพื่อให้กลุ่มตัวอย่างเป็นตัวแทนที่ดีของประชากร

เครื่องมือ: การเลือกใช้เครื่องมือที่เหมาะสม (เช่น แบบสอบถาม, แบบทดสอบ, การสัมภาษณ์) และการตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือ (ความเที่ยงตรงและความน่าเชื่อถือ)

2. การนำเสนอข้อมูล (Presentation of Data) เป็นการนำข้อมูลดิบที่รวบรวมมาได้มาจัดระเบียบและสรุปให้อยู่ในรูปแบบที่เข้าใจง่ายและสะดวกต่อการวิเคราะห์ วิธีการนำเสนอ เช่น ตารางแจกแจงความถี่ (Frequency Distribution) แผนภาพ/แผนภูมิ (Graphs/Charts) เช่น ฮิสโตแกรม (Histogram), แผนภูมิแท่ง (Bar Chart), แผนภูมิวงกลม (Pie Chart), แผนภาพการกระจาย (Scatter Plot) เป็นต้น

3. การวิเคราะห์ข้อมูล (Analysis of Data) เป็นขั้นตอนการประมวลผลข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ รูปแบบ หรือแนวโน้มต่าง ๆ เพื่อตอบคำถามวิจัย โดยใช้เทคนิคทางสถิติที่เหมาะสม ประเภทของการวิเคราะห์หลัก

สถิติเชิงพรรณนา (Descriptive Statistics) ใช้อธิบายลักษณะของชุดข้อมูลที่ศึกษาเท่านั้น โดยไม่ได้อ้างอิงไปยังประชากร เช่น การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง (Central Tendency): ค่าเฉลี่ย ($\bar{x}$), มัธยฐาน (Med), ฐานนิยม (Mo) การวัดการกระจาย (Dispersion): ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD), พิสัย (Range)

สถิติเชิงอนุมาน (Inferential Statistics) ใช้ข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่างเพื่อสรุปอ้างอิง (Infer) หรือคาดการณ์คุณลักษณะของประชากรทั้งหมด เช่น การทดสอบสมมติฐาน (Hypothesis Testing) เช่น t-test, F-test (ANOVA), χ^2 -test (Chi-Square) การประมาณค่า (Estimation) การประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากร

4. การตีความหมายและการสรุปผล (Interpretation and Conclusion) เป็นการแปลผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติ และนำมาสรุปเป็นข้อค้นพบเพื่อตอบวัตถุประสงค์และสมมติฐานของการวิจัย การแปลผล เป็นการอธิบายความหมายของค่าสถิติที่คำนวณได้ โดยเชื่อมโยงกับบริบทของปัญหาการวิจัย สรุปผลด้วยการสรุปว่าผลลัพธ์ที่ได้สนับสนุนหรือปฏิเสธสมมติฐานการวิจัยอย่างไร และให้ข้อเสนอแนะ เพื่อบอกแนวทางนำผลการวิจัยไปใช้ประโยชน์ หรือเป็นแนวทางในการทำวิจัยต่อไป

6.3 ค่ากลางของข้อมูล

ค่ากลางของข้อมูล (Measures of Central Tendency) คือ ค่าสถิติที่ใช้เป็นตัวแทนของข้อมูลทั้งชุด เพื่อแสดงให้เห็นถึงจุดกึ่งกลางหรือค่าที่มักจะเกิดขึ้นบ่อยที่สุดในชุดข้อมูลนั้น ๆ ทำให้สามารถสรุปแนวโน้มหรือลักษณะโดยรวมของข้อมูลได้อย่างรวดเร็ว

ค่ากลางของข้อมูลที่นิยมใช้มี 3 ชนิดหลัก ๆ ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Mean), มัธยฐาน (Median) และ ฐานนิยม (Mode) รายละเอียดมีดังนี้

6.3.1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmetic Mean)

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต หรือที่เรียกสั้น ๆ ว่า ค่าเฉลี่ย ($\bar{x}$) เป็นค่ากลางที่ใช้กันแพร่หลายที่สุดหาได้จากนำผลรวมของค่าสังเกต (ข้อมูล) ทั้งหมดในชุดข้อมูล หารด้วยจำนวนของข้อมูลทั้งหมด

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต กรณีข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่

1) ข้อมูลแต่ละค่ามีน้ำหนักเท่ากัน สูตรค่าเฉลี่ยเลขคณิต ถ้ามีข้อมูล n ชุด โดยที่

x_i คือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดที่ i และ n_i คือ จำนวนข้อมูลในชุดที่ i

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_n}$$

หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์รวม (Summation notation) ได้เป็น

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)}{n}$$

เมื่อ $\sum_{i=1}^n (x_i)$ คือผลรวมของค่าข้อมูลทั้งหมด และ
 n คือจำนวนข้อมูลทั้งหมด

2) ข้อมูลแต่ละค่ามีน้ำหนักไม่เท่ากัน เรียกว่าข้อมูลแบบถ่วงน้ำหนัก สูตรค่าเฉลี่ยเลขคณิต ถ้ามีข้อมูล n ชุด โดยที่

x_i คือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดที่ i

w_i คือ จำนวนข้อมูลในชุดที่ i

$$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \dots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n}$$

หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์รวม (Summation notation) ได้เป็น

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (w_i x_i)}{\sum_{i=1}^n (w_i)}$$

เมื่อ $\sum_{i=1}^n (w_i x_i)$ คือผลรวมของผลคูณของน้ำหนักกับค่าข้อมูลทั้งหมด

$\sum_{i=1}^n (w_i)$ คือผลรวมของน้ำหนักทั้งหมด และ w_i คือน้ำหนักของข้อมูลแต่ละตัว

ตัวอย่าง 6.1 จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล 12 18 20 19 15 16

แนวคิด ข้อมูลมีทั้งหมด 6 ตัว ดังนั้นสามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ได้ดังนี้

$$\bar{x} = \frac{12 + 18 + 20 + 19 + 15 + 16}{6} = 16.67$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคือ 16.67

ตัวอย่าง 6.2 ข้อมูลชุดหนึ่งมี 7 จำนวน แต่หายไปจำนวนหนึ่งคงเหลือเพียง 35 29 28 28 32 31

ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เป็น 30 แล้ว ข้อมูลที่หายไปคือจำนวนใด

แนวคิด ให้ข้อมูลที่หายไปมีค่าเท่ากับ m

$$30 = \frac{35 + 29 + 28 + 28 + 32 + 31 + m}{7}$$

$$210 = 183 + m$$

$$m = 27$$

ดังนั้น ข้อมูลที่หายไปคือ 27

ตัวอย่าง 6.3 นิชาภามีผลสอบในภาคเรียนที่ 1 เป็น ดังนี้

วิชาคณิตศาสตร์ จำนวน 2.5 หน่วยกิต ได้ระดับคะแนน 4.0

วิชาฟิสิกส์ จำนวน 1.5 หน่วยกิต ได้ระดับคะแนน 3.5

วิชาเคมี จำนวน 1.0 หน่วยกิต ได้ระดับคะแนน 3.0

วิชาชีววิทยา จำนวน 2.0 หน่วยกิต ได้ระดับคะแนน 4.0

วิชาภาษาอังกฤษ จำนวน 1.5 หน่วยกิต ได้ระดับคะแนน 2.5

ระดับคะแนนโดยเฉลี่ยของนิชาภาเป็นเท่าใด

แนวคิด หน่วยการเรียนทั้งหมดของภาคเรียนนี้คือ $2.5 + 1.5 + 1.0 + 2.0 + 1.5 = 8.5$ หน่วยกิต

สามารถหาระดับคะแนนเฉลี่ย ได้ดังนี้

$$\bar{x} = \frac{(2.5 \times 4.0) + (1.5 \times 3.5) + (1.0 \times 3.0) + (2.0 \times 4.0) + (1.5 \times 2.5)}{2.5 + 1.5 + 1.0 + 2.0 + 1.5}$$

$$\bar{x} = \frac{(10) + (5.25) + (3) + (8) + (3.75)}{8.5}$$

$$\bar{x} = \frac{30}{8.5} = 3.52$$

ดังนั้น ระดับคะแนนเฉลี่ยคือ 3.52

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต กรณีข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว

สูตรค่าเฉลี่ยเลขคณิต ถ้ามีข้อมูล n ชุด โดยที่

x_i คือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดที่ i

f_i คือ จำนวนข้อมูลในชุดที่ i

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n}$$

หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์รวม (Summation notation) ได้เป็น

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (f_i x_i)}{\sum_{i=1}^n (f_i)}$$

เมื่อ $\sum_{i=1}^n (f_i x_i)$ คือผลรวมของผลคูณของจำนวนข้อมูลกับค่าข้อมูลทั้งหมด

$\sum_{i=1}^n (f_i)$ คือผลรวมของจำนวนข้อมูลทั้งหมด และ

f_i คือจำนวนข้อมูลแต่ละค่า

ตัวอย่าง 6.4 ผลสอบนักเรียน 10 คนในการสอบวิชาเคมี เป็นดังตาราง จงหาคะแนนเฉลี่ย (ค่าเฉลี่ยเลขคณิต)

คะแนน	จำนวน(คน)
35	3
39	2
40	2
41	1
43	1
50	1

แนวคิด กำหนดให้จำนวนคนในแต่ละชั้น แทนด้วย f และคะแนนสอบ แทนด้วย x

คะแนนเฉลี่ย(ค่าเฉลี่ยเลขคณิต) หาได้โดย

$$\bar{x} = \frac{(3 \times 35) + (2 \times 39) + (2 \times 40) + (1 \times 41) + (1 \times 43) + (1 \times 50)}{3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1}$$

$$\bar{x} = \frac{105 + 78 + 80 + 41 + 43 + 50}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{398}{10} = 39.8$$

ดังนั้น คะแนนเฉลี่ย(ค่าเฉลี่ยเลขคณิต) ของการสอบครั้งนี้คือ 39.8 คะแนน

ตัวอย่าง 6.5 ผลสอบนักเรียน -0 คนในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ เป็นดังตาราง จงหาคะแนนเฉลี่ย(ค่าเฉลี่ยเลขคณิต)

คะแนน	จำนวน(คน)
61-65	1
66-70	4
71-75	10
76-80	6
81-85	7
86-90	2

แนวคิด ให้ f แทน จำนวนคนในแต่ละช่วงคะแนน (อันตรภาคชั้น)

x แทน คะแนนสอบที่เป็นจุดกึ่งกลางของแต่ละช่วงคะแนน (อันตรภาคชั้น)

คะแนนเฉลี่ย(ค่าเฉลี่ยเลขคณิต) หาได้โดย

$$\bar{x} = \frac{(1 \times 63) + (4 \times 68) + (10 \times 73) + (6 \times 78) + (7 \times 83) + (2 \times 88)}{3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1}$$

$$\bar{x} = \frac{63 + 272 + 730 + 468 + 581 + 176}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{2290}{10} = 76.33$$

ดังนั้น คะแนนเฉลี่ย(ค่าเฉลี่ยเลขคณิต) ของการสอบครั้งนี้คือ 76.33 คะแนน

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม (Combined Arithmetic Mean) คือ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลทั้งหมดเมื่อนำข้อมูลจากหลาย ๆ ชุดมารวมกัน โดยที่ข้อมูลแต่ละชุดมีจำนวนและค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่ทราบอยู่แล้ว หลักการสำคัญคือ การหาผลรวมของข้อมูลทั้งหมดจากทุกชุด แล้วหารด้วยจำนวนข้อมูลทั้งหมด

สูตรค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม ถ้ามีข้อมูล n ชุด โดยที่

$\bar{x}_i$ คือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดที่ i และ N_i คือ จำนวนข้อมูลในชุดที่ i

สูตรค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม ($\bar{x}_C$) คือ:

$$\bar{x}_C = \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2 + N_3\bar{x}_3 + \dots + N_n\bar{x}_n}{N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_n}$$

หรือเขียนในรูปสัญลักษณ์รวม (Summation notation) ได้เป็น

$$\bar{x}_C = \frac{\sum_{i=1}^n (N_i \bar{x}_i)}{\sum_{i=1}^n (N_i)}$$

ตัวอย่าง 6.6 ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น ม.6 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง มีข้อมูลดังนี้:

กลุ่ม/ห้อง	จำนวนนักเรียน (N_i)	คะแนนเฉลี่ย ($\bar{x}_i$)
ม.6/1	40 คน	75 คะแนน
ม.6/2	30 คน	60 คะแนน

จงหา คะแนนเฉลี่ยรวม ของนักเรียนชั้น ม.6 ทั้งหมด

แนวคิด คำนวณผลรวมของคะแนนในแต่ละห้อง:

ห้อง ม.6/1: ผลรวมคะแนน $N_1\bar{x}_1 = 40 \times 75 = 3,000$ คะแนน

ห้อง ม.6/2: ผลรวมคะแนน $N_2\bar{x}_2 = 30 \times 60 = 1,800$ คะแนน

ผลรวมคะแนน $3,000 + 1,800 = 4,800$ คะแนน

จำนวนนักเรียนรวม: $N_1 + N_2 = 40 + 30 = 70$ คน

คำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม: $\bar{x}_c = \frac{4800}{70} = 68.57$ คะแนน

สรุป: ค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวมของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น ม.6 ทั้งหมดคือ 68.57 คะแนน

สมบัติของค่าเฉลี่ยเลขคณิต

- $N\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$
- $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$
- $\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$ มีค่าน้อยสุดเมื่อ $a = \bar{x}$
- ถ้า $y = ax + b$ แล้ว $\bar{y} = a\bar{x} + b$
- $x_{min} < \bar{x} < x_{max}$
- ถ้า $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ มีค่า $\bar{x} = k$ แล้ว $nx_1, nx_2, nx_3, \dots, nx_k$ มีค่า $\bar{x}_{new} = nk$

การนำค่าเฉลี่ยเลขคณิตไปใช้

- ข้อดี คือมีการใช้ข้อมูลทุกตัวในการคำนวณ จึงเป็นตัวแทนที่ดีในทางคณิตศาสตร์
- ข้อจำกัด คือ อ่อนไหวต่อค่าผิดปกติ (Outliers): หากมีข้อมูลที่มีค่าแตกต่างจากข้อมูลอื่น ๆ มาก (เช่น ค่าสูงมากหรือต่ำมาก) ค่าเฉลี่ยจะถูก "ดึง" ไปตามค่าผิดปกตินั้น ทำให้ไม่สามารถเป็นตัวแทนที่ดีของข้อมูลส่วนใหญ่ได้
- ความเหมาะสมในการใช้ เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบสมมาตร (Symmetrical distribution) หรือไม่มีค่าสูงมากหรือต่ำมาก

6.3.2 มัธยฐาน (Median)

มัธยฐาน (Med) คือค่าของข้อมูลที่อยู่ ตำแหน่งกึ่งกลางพอดี เมื่อได้ เรียงลำดับ ข้อมูลจากน้อยไปมากหรือมากไปน้อยแล้ว ค่านี้จะแบ่งชุดข้อมูลออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน โดยมีข้อมูลที่มากกว่าและน้อยกว่าค่ามัธยฐานอยู่ข้างละ 50 เปอร์เซ็นต์

มัธยฐาน กรณีข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่ มีขั้นตอนในการหาค่ามัธยฐาน ดังนี้

1. เรียงลำดับข้อมูลจากค่าน้อยที่สุดไปหาค่ามากที่สุด หรือเรียงจากค่ามากที่สุดไปหาน้อยที่สุดก็ได้

2. หาดำแหน่งมัธยฐาน ถ้าข้อมูลมี N ค่า ค่ามัธยฐานจะอยู่ที่ตำแหน่ง $\frac{N+1}{2}$

3. หาค่าข้อมูล ณ ตำแหน่งนั้น

-กรณีจำนวนข้อมูล (N) เป็นเลขคี่: มัธยฐานคือค่าที่อยู่ตรงกลางพอดี

-กรณีจำนวนข้อมูล (N) เป็นเลขคู่: มัธยฐานคือค่าเฉลี่ยของข้อมูลสองตัวที่อยู่ตรงกลาง

มัธยฐาน กรณีข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว มีขั้นตอนในการหาค่ามัธยฐาน ดังนี้

1. สร้างตารางแจกแจงความถี่สะสม

2. หาดำแหน่งมัธยฐาน ถ้าข้อมูลมี N ค่า ค่ามัธยฐานจะอยู่ที่ตำแหน่ง $\frac{N}{2}$

3. หาค่ามัธยฐานได้โดยการเทียบอัตราส่วนของความแตกต่างของความถี่สะสมกับความแตกต่างของค่า หรือใช้สูตร ดังนี้

$$Med = L + I \left(\frac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_{med}} \right)$$

เมื่อ L คือ ขอบล่างของอันตรภาคชั้นที่มีมัธยฐาน

I คือ ความกว้างของอันตรภาคชั้นที่มีมัธยฐานอยู่

f_{med} คือ ความถี่ของอันตรภาคชั้นที่มีมัธยฐานอยู่

$\sum f_L$ คือ ความถี่สะสมของชั้นที่อยู่ต่ำกว่าชั้นที่มีมัธยฐานอยู่ 1 ชั้น

การนำค่ามัธยฐานไปใช้

1. ข้อดี เหมาะกับข้อมูลที่สูงต่ำผิดปกติ เนื่องจากมัธยฐานพิจารณาจากตำแหน่ง จึงไม่ได้รับผลกระทบจากค่าที่สูงหรือต่ำมากเกินไป (Outliers) มากเท่ากับค่าเฉลี่ย

2. จุดด้อย การหามัธยฐานไม่ได้ใช้ค่าข้อมูลทุกตัวในการคำนวณ

3. ความเหมาะสมในการใช้ เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบเบ้ (Skewed distribution) หรือมีค่าผิดปกติ (Outliers)

ตัวอย่าง 6.7 มัธยฐานของข้อมูล 18 20 19 22 20 18 และ 19 เป็นเท่าไร

แนวคิด เรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก ได้ดังนี้

ตำแหน่งที่	1	2	3	4	5	6	7
ข้อมูล	18	18	19	19	20	20	22

ข้อมูลมี 7 ค่า ดังนั้น ค่ามัธยฐานจะอยู่ที่ตำแหน่ง $\frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

ดังนั้น ค่ามัธยฐานเท่ากับ 19

ตัวอย่าง 6.8 มัธยฐานของข้อมูล 17 18 16 18 19 19 20 16 21 และ 22 เป็นเท่าไร

แนวคิด เรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก ได้ดังนี้

ตำแหน่งที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ข้อมูล	16	16	17	18	18	19	19	20	21	22

ข้อมูลมี 10 ค่า ดังนั้น ค่ามัธยฐานจะอยู่ที่ตำแหน่ง $\frac{10+1}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$

นั่นคือ ค่ามัธยฐานจะอยู่ระหว่างตำแหน่งที่ 5 กับตำแหน่งที่ 6

จะได้ว่า ค่ามัธยฐาน $\frac{18+19}{2} = \frac{37}{2} = 18.5$

ดังนั้น ค่ามัธยฐานเท่ากับ 18.5

ตัวอย่าง 6.9 จากการสำรวจส่วนสูงของนักเรียนห้องหนึ่ง ดังตาราง

ส่วนสูง(เซนติเมตร)	124	126	130	132	135	140
จำนวนนักเรียน(คน)	8	3	6	9	3	1

จงหามัธยฐานของความสูงของนักเรียนห้องนี้

แนวคิด จากข้อมูลในตารางสร้างตารางความถี่สะสม ได้ดังนี้

ส่วนสูง(เซนติเมตร)	124	126	130	132	135	140
จำนวนนักเรียน(คน)	8	3	6	9	4	6
ความถี่สะสม	8 (คนที่ 1-8)	11 (คนที่ 9-11)	17 (คนที่ 12-17)	26 (คนที่ 18-26)	29 (คนที่ 27-29)	30 (คนที่ 30)

ข้อมูลมี 30 ค่า(คน) ดังนั้น ค่ามัธยฐานจะอยู่ที่ตำแหน่ง $\frac{30+1}{2} = 15.5$

นั่นคือ ค่ามัธยฐานจะอยู่ระหว่างตำแหน่งที่ 15 กับตำแหน่งที่ 16 ตรงความสูง 130 เซนติเมตร

ดังนั้น ค่ามัธยฐานเท่ากับ 130 เซนติเมตร

ตัวอย่าง 6.10 จากผลสำรวจคะแนนของนักเรียนห้องหนึ่ง ดังตาราง จงหามัธยฐานของคะแนนของนักเรียนห้องนี้

คะแนน	จำนวน(คน)
9-13	2
14-18	3
19-23	12
24-28	2
29-33	1

แนวคิด จากข้อมูลในตารางสร้างตารางความถี่สะสม ได้ดังนี้

คะแนน	จำนวน(คน)	ความถี่สะสม	
9-13	2	2	คนที่ 1 - 2
14-18	3	5	คนที่ 5 - 7
19-23	12	17	คนที่ 6 - 17
24-28	2	19	คนที่ 18 - 19
29-33	1	20	คนที่ 20

ข้อมูลมี 20 ค่า(คน) ดังนั้น ค่ามัธยฐานจะอยู่ที่ตำแหน่ง $\frac{20}{2} = 10$

นั่นคือ ค่ามัธยฐานจะอยู่ในอันตรภาคชั้น 19 - 23 คะแนน

$$\text{หาค่ามัธยฐานจากสูตร } Med = L + I \left(\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f_L}{f_{med}} \right)$$

แทนค่าในสูตรจะได้

$$Med = 19.5 + 5 \left(\frac{\frac{20}{2} - 7}{12} \right)$$

$$Med = 19.5 + 5 \left(\frac{3}{12} \right) = 19.5 + 1.25 = 20.75$$

ดังนั้น ค่ามัธยฐานเท่ากับ 20.75 คะแนน

6.3.3. ฐานนิยม (Mode)

ฐานนิยม (Mo) เป็นค่ากลางที่เน้นความถี่ของข้อมูล คือค่าของข้อมูลที่เกิดขึ้นบ่อยที่สุด หรือมี ความถี่สูงสุด ในชุดข้อมูลนั้น ๆ การคำนวณสำหรับข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่ จะพิจารณาว่าค่าใดปรากฏซ้ำกันมากที่สุดในชุดข้อมูล

ฐานนิยม กรณีข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่ ฐานนิยม คือข้อมูลที่ซ้ำกันมากที่สุด

1) กรณีที่ข้อมูลมีความถี่มากที่สุด มากกว่า 1 ค่า ให้ค่าของข้อมูลที่มีความถี่มากที่สุดมาตอบเป็นค่าฐานนิยมทุกค่า เช่น ข้อมูล 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 6 ฐานนิยมคือ 2, 3

2) กรณีที่ข้อมูลมีความถี่เท่ากันจะไม่มีฐานนิยม เช่น ข้อมูล 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5 ไม่มีฐานนิยม

ฐานนิยม กรณีข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว สามารถหาฐานนิยมได้ 3 วิธี

- 1) หาค่าฐานนิยมอย่างประมาณจากจุดกึ่งกลางชั้นที่มีความถี่สูงสุด
- 2) หาค่าฐานนิยมจาก Histogram
- 3) หาค่าฐานนิยมจากสูตร (ใช้กับข้อมูลที่มีอันตรภาคชั้นเท่ากัน)

$$Mo = L + I \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)$$

เมื่อ	L	คือ ขอบล่างของอันตรภาคชั้นที่มีค่าฐานนิยม
	I	คือ ความกว้างของอันตรภาคชั้นที่ฐานนิยมอยู่
	d_1	คือ ผลต่างของความถี่ระหว่างความถี่สูงสุดกับความถี่ของชั้นที่มีคะแนนต่ำกว่าที่อยู่ติดกัน
	d_2	คือ ผลต่างของความถี่ระหว่างความถี่สูงสุดกับความถี่ของชั้นที่มีคะแนนสูงกว่าที่อยู่ติดกัน

* กรณีที่ข้อมูลมีขนาดอันตรภาคชั้นไม่เท่ากันทุกชั้น ก่อนคำนวณหาฐานนิยมให้ทำดังนี้

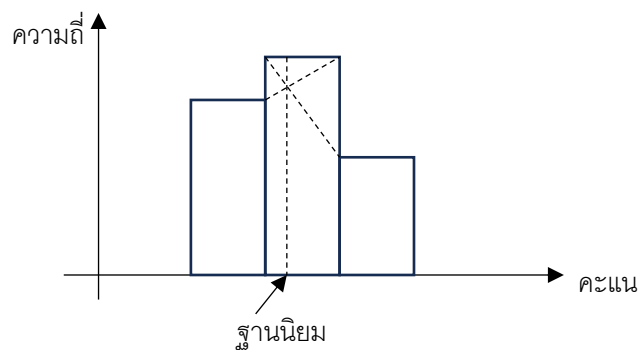
1) นำความถี่ของแต่ละอันตรภาคชั้นมาหารด้วยความกว้างของอันตรภาคชั้นนั้น ๆ ผลที่ได้ค่ามากที่สุดจากชั้นใด แสดงว่าฐานนิยมอยู่ในชั้นนั้น

2) คำนวณฐานนิยมจากสูตร $Mo = L + I \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)$

เมื่อ	L	คือ ขอบล่างของอันตรภาคชั้นที่มีค่าฐานนิยม
	I	คือ ความกว้างของอันตรภาคชั้นที่ฐานนิยมอยู่
	d_1 และ d_2	ต้องคำนวณจากความถี่ที่ได้จากการคำนวณในข้อ 1

การหาฐานนิยมจาก Histogram

- 1) เขียนพิกัดจาก กำหนดให้แกนนอนแทนคะแนน และแกนตั้งแทนความถี่
- 2) สร้าง Histogram
- 3) โยงเส้นตรง (ดังรูป) เพื่อหาจุดที่เส้นตรงตัดกัน *
- 4) ลากเส้นตรงจากจุดตัดให้ขนานกับแกนตั้งให้ไปตัดแกนนอน ตำแหน่งที่ตัดแกนนอนจะเป็นค่า ฐานนิยม คำอธิบายภาพ (จากขั้นตอนที่ 3 และ 4):



การนำฐานนิยมไปใช้

- 1) จุดเด่น คือการหาฐานนิยมทำได้ง่ายและรวดเร็ว เป็นค่ากลางเพียงชนิดเดียวที่สามารถใช้ได้กับ ข้อมูลเชิงคุณภาพ (Nominal Data) เช่น สีที่ชอบ เพศ
- 2) จุดด้อย ในข้อมูลบางข้อมูลอาจ不会有ฐานนิยม เลย (เมื่อข้อมูลทุกตัวมีความถี่เท่ากัน) หรืออาจจะมี ฐานนิยมหลายค่า (เมื่อมีข้อมูลมากกว่าหนึ่งค่าที่มีความถี่สูงสุดเท่ากัน) อาจไม่ใช่ค่าตัวแทนที่ดี หากความถี่สูงสุดไม่ได้โดดเด่นจากความถี่อื่น ๆ มากนัก
- 3) ความเหมาะสมในการใช้ ฐานนิยมเหมาะสำหรับข้อมูลเชิงคุณภาพ หรือเมื่อต้องการทราบว่าค่าใดเป็นค่าที่นิยมมากที่สุด

ตัวอย่าง 6.11 จงหาฐานนิยมของข้อมูลต่อไปนี้

1) 4, 8, 5, 6, 7, 8, 6, 7, 7, 9, 7, 7, 6, 7, 5

2) 13, 14, 14, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 18

แนวคิด เพื่อความสะดวก ควรทำตารางแจกแจงความถี่ ดังนี้

1)

x	4	5	6	7	8	9
f	1	2	3	6	2	1

จากตารางจะพบว่า ข้อมูลที่มีความถี่มากที่สุดคือ 7

ดังนั้น ฐานนิยม คือ 7

2)

x	13	14	15	16	17	18
f	1	2	3	4	1	1

จากตารางจะพบว่า ข้อมูลที่มีความถี่มากที่สุดคือ 16

ดังนั้น ฐานนิยม คือ 16

ตัวอย่าง 6.12 จากการสำรวจการเลี้ยงสัตว์ของเกษตรกรในหมู่บ้านแห่งหนึ่ง ได้ผลดังตาราง
ชุมชนแห่งนี้นิยมเลี้ยงสัตว์ชนิดใดมากที่สุด

สัตว์เลี้ยง	จำนวน(ครอบครัว)
เปิด	20
ไก่	32
หมู	17
วัว	50
ควาย	16
แพะ	4

จากข้อมูลนี้จะได้ว่า ฐานนิยมคือ วัว

ดังนั้น ชุมชนแห่งนี้นิยมเลี้ยง วัว มากที่สุด

ตัวอย่าง 6.13 จงหาฐานนิยมของคน 100 คน ที่มีข้อมูลดังตาราง

น้ำหนัก (กิโลกรัม)	จำนวน (คน)
60 - 62	5
63 - 65	18
66 - 68	42
69 - 71	27
72 - 74	6
75 - 77	2

แนวคิด จากตารางของข้อมูลพบว่ามีค่าที่เท่ากันทุกอันตรภาคชั้น

แต่ละชั้นมีความกว้างเท่ากับ 3 ชั้นฐานนิยม คือ 66 - 68 กิโลกรัม

ขอบล่างของอันตรภาคชั้นที่ฐานนิยมอยู่คือ 65.5

$$d_1 = 42 - 18 = 24$$

$$d_2 = 42 - 27 = 15$$

จากสูตรฐานนิยม $Mo = L + I \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)$

แทนค่าจะได้ $Mo = 65.5 + 3 \left(\frac{24}{24 + 15} \right)$
 $= 65.5 + 1.8 = 67.3$

ดังนั้น ฐานนิยมของน้ำหนักของคนกลุ่มนี้ คือ 67.3 กิโลกรัม

6.4 การวัดตำแหน่งที่ของข้อมูล

การวัดตำแหน่งที่ของข้อมูล คือ ค่าทางสถิติที่ใช้บอกตำแหน่งของข้อมูลแต่ละค่าว่าอยู่ ณ ตำแหน่งใดในชุดข้อมูลเมื่อเทียบกับข้อมูลทั้งหมดที่ถูกจัดเรียงลำดับแล้ว ช่วยให้เราเข้าใจว่าข้อมูลนั้น ๆ มีค่าสูงหรือต่ำกว่าข้อมูลส่วนใหญ่มากน้อยเพียงใด

การวัดตำแหน่งที่ของข้อมูลที่สำคัญ มี 3 ชนิด ได้แก่:

ควอร์ไทล์ (Quartiles: Q_k) เป็นค่าที่มีข้อมูลตัวอื่น ๆ น้อยกว่าหรือเท่ากับค่านี้อยู่ k ส่วน เมื่อแบ่งข้อมูลออกเป็น 4 ส่วน เท่า ๆ กัน

เดซิส์ (Deciles: D_k) เป็นค่าที่มีข้อมูลตัวอื่น ๆ น้อยกว่าหรือเท่ากับค่านี้อยู่ k ส่วน เมื่อแบ่งข้อมูลออกเป็น 10 ส่วน เท่า ๆ กัน

เปอร์เซ็นต์ไทล์ (Percentiles: P_k) เป็นค่าที่มีข้อมูลตัวอื่น ๆ น้อยกว่าหรือเท่ากับค่านี้อยู่ k ส่วน เมื่อแบ่งข้อมูลออกเป็น 100 ส่วน เท่า ๆ กัน

การหาควอร์ไทล์ เดซิส์ และเปอร์เซ็นต์ไทล์ของข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่

มีลำดับขั้นตอนการหาเหมือนวิธีการหามัธยฐาน คือ

1. เรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปมาก
2. หาตำแหน่งของหาควอร์ไทล์ (Q_k) เดซิส์ (D_k) และเปอร์เซ็นต์ไทล์ (P_k) ที่ต้องการ

จากสูตร

$$\text{ตำแหน่งของ } Q_k = \frac{k(N+1)}{4}$$

$$\text{ตำแหน่งของ } D_k = \frac{k(N+1)}{10}$$

$$\text{ตำแหน่งของ } P_k = \frac{k(N+1)}{100} \text{ เมื่อ } N \text{ เป็นจำนวนข้อมูล}$$

3. คำนวณหาควอร์ไทล์ (Q_k) เดซิส์ (D_k) และเปอร์เซ็นต์ไทล์ (P_k) ที่ต้องการ

ตัวอย่าง 6.14 ผลสอบของนักเรียน 20 คน เป็นดังนี้

10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 20, 22, 23, 25, 27, 28, 30, 30, 32, 35, 40

จงหา Q_3 , D_7 และ P_{50}

แนวคิด สิ่งแรกที่ต้องทำคือจัดเรียงข้อมูลจากค่าน้อยไปมากเสมอ (ซึ่งข้อมูลในตัวอย่างนี้ได้ถูกจัดเรียงไว้แล้ว)

หาค่าของ Q_3

$$1) \text{ หาตำแหน่ง } Q_3 = \frac{3(20+1)}{4} = 15.75$$

2) เทียบค่าของข้อมูลคะแนนสอบคนที่ 15 (X_{15}) กับ คะแนนสอบคนที่ 16 (X_{16})

$$Q_3 = X_{15} + (15.75 - 15)(X_{16} - X_{15})$$

$$Q_3 = 28 + (0.75)(30 - 28)$$

$$Q_3 = 28 + (0.75)(2) = 29.5 \text{ คะแนน}$$

หาค่าของ D_7

$$1) \text{ หาดำแหน่ง } D_7 = \frac{7(20+1)}{10} = 14.7$$

2) เทียบค่าของข้อมูลคะแนนสอบคนที่ 14 (X_{14}) กับ คะแนนสอบคนที่ 15 (X_{15})

$$D_7 = X_{14} + (14.7 - 14)(X_{15} - X_{14})$$

$$D_7 = 27 + (0.7)(28 - 27)$$

$$D_7 = 27 + (0.7)(1) = 27.7 \text{ คะแนน}$$

หาค่าของ P_{50}

$$1) \text{ หาดำแหน่ง } P_{50} = \frac{50(20+1)}{100} = 10.5$$

2) เทียบค่าของข้อมูลคะแนนสอบคนที่ 10 (X_{10}) กับ คะแนนสอบคนที่ 11 (X_{11})

$$P_{50} = X_{10} + (10.5 - 11)(X_{10} - X_{11})$$

$$P_{50} = 20 + (0.5)(20 - 22)$$

$$P_{50} = 20 + (0.5)(2) = 21 \text{ คะแนน}$$

สรุป $Q_3 = 29.5$ คะแนน, $D_7 = 27.7$ คะแนน และ $P_{50} = 21$ คะแนน

การหาควอร์ไทล์ เดไซล์ และเปอร์เซ็นต์ไทล์ของข้อมูลที่ได้แจกแจงความถี่

1. ข้อมูลที่ได้แจกแจงความถี่ของค่าแต่ละค่า ไม่ได้แบ่งเป็นอันตรภาคชั้น เช่น

ข้อมูล	ความถี่
8	3
9	2
10	1

ข้อมูลแบบนี้เราสามารถเขียนใหม่เป็นข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่ได้ การหาควอร์ไทล์ (Q_k) เดไซล์ (D_k) และเปอร์เซ็นต์ไทล์ (P_k) ของข้อมูลแบบนี้ จึงใช้วิธีเดียวกับกับการหาควอร์ไทล์ (Q_k) เดไซล์ (D_k) และเปอร์เซ็นต์ไทล์ (P_k) ของข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่

2. ข้อมูลที่เป็นอันตรภาคชั้น การหาควอร์ไทล์ (Q_k) เดไซล์ (D_k) และเปอร์เซ็นต์ไทล์ (P_k) แบบนี้มีขั้นตอนการหาเหมือนกับการหามัธยฐาน คือ

2.1 สร้างตารางแจกแจงความถี่สะสม

2.2 หาตำแหน่งของควอร์ไทล์ (Q_k) เดไซล์ (D_k) และเปอร์เซ็นต์ไทล์ (P_k) จากสูตร

$$\text{ตำแหน่งของ } Q_k = \frac{kN}{4}$$

$$\text{ตำแหน่งของ } D_k = \frac{kN}{10}$$

$$\text{ตำแหน่งของ } P_k = \frac{kN}{100} \quad \text{เมื่อ } N \text{ เป็นจำนวนข้อมูล}$$

2.3 คำนวณหาควอร์ไทล์ (Q_k) เดไซล์ (D_k) และเปอร์เซ็นต์ไทล์ (P_k) โดยการเทียบอัตราส่วนของความแตกต่างของความถี่สะสมกับความแตกต่างของค่า หรือใช้สูตร ดังนี้

$$Q_k = L + I \left(\frac{\frac{kN}{4} - \Sigma f_L}{f_{Q_k}} \right)$$

$$D_k = L + I \left(\frac{\frac{kN}{10} - \Sigma f_L}{f_{D_k}} \right)$$

$$P_k = L + I \left(\frac{\frac{kN}{100} - \Sigma f_L}{f_{P_k}} \right)$$

เมื่อ L คือ ขอบล่างของอันตรภาคชั้นที่มี Q_k หรือ D_k หรือ P_k

I คือ ความกว้างของอันตรภาคชั้นที่มี Q_k หรือ D_k หรือ P_k อยู่

f_{Q_k} คือ ความถี่ของอันตรภาคชั้นที่มี Q_k อยู่

Σf_L คือ ความถี่สะสมของอันตรภาคชั้นที่อยู่ต่ำกว่าชั้นที่มี Q_k หรือ D_k หรือ P_k อยู่

ตัวอย่าง 6.15 ผลสอบของนักเรียน 20 คน เป็นดังตาราง จงหา Q_3 , D_4 และ P_{50}

คะแนน (X_i)	ความถี่ (f_i)
10	1
15	2
20	3
25	5
30	4
35	3
40	2

แนวคิด สิ่งแรกที่ต้องทำคือสร้างตารางแจกแจงความถี่สะสม

คะแนน (X_i)	ความถี่ (f_i)	ความถี่สะสม (cf)
10	1	1
15	2	3
20	3	6
25	5	11
30	4	15
35	3	18
40	2	20 (N)

หาค่าของ Q_3

$$1) \text{ หาดำแหน่ง } Q_3 = \frac{3(20+1)}{4} = 15.75$$

2) หาค่า พิจารณาในคอลัมน์ cf ว่าตำแหน่งที่ 15.75 อยู่ที่ใด

$cf = 15$ ยังไม่ถึงตำแหน่งที่ 15.75 (คะแนน 30)

$cf = 18$ เกินตำแหน่งที่ 15.75 แล้ว (คะแนน 35)

ในกรณีนี้ ถือว่าค่า Q_3 ตกอยู่ในกลุ่มคะแนน 35 ซึ่งเป็นค่าแรกที่ทำให้ $cf \geq 15.75$

ดังนั้น $Q_3 = 35$ (หมายความว่า 75% ของนักเรียนได้คะแนน 35 หรือต่ำกว่า)

หาค่าของ D_4

1) หาดำแหน่ง $D_4 = \frac{4(20+1)}{10} = 8.4$

2) หาค่า ตำแหน่ง 8.4 อยู่ระหว่างข้อมูลลำดับที่ 8 และ 9

จากตาราง $cf = 6$ (คะแนน 20)

$cf = 11$ (คะแนน 25)

ตำแหน่งที่ 7, 8, 9, 10, 11 คือ คะแนน 25

เนื่องจากตำแหน่งที่ 8 และ 9 มีค่าคะแนนเท่ากัน คือ 25

$$D_4 = 25 \text{ คะแนน}$$

หาค่าของ P_{50}

1) หาดำแหน่ง $P_{50} = \frac{50(20+1)}{100} = 10.5$

2) หาค่า ตำแหน่ง 10.5 อยู่ระหว่างข้อมูลลำดับที่ 10 และ 11

จากตาราง $cf = 6$ (คะแนน 20)

$cf = 11$ (คะแนน 25)

ตำแหน่งที่ 7, 8, 9, 10, 11 คือ คะแนน 25

เนื่องจากตำแหน่งที่ 10 และ 11 มีค่าคะแนนเท่ากัน คือ 25

$$P_{50} = 25 \text{ คะแนน}$$

สรุป $Q_3 = 35$ คะแนน, $D_4 = 25$ คะแนน และ $P_{50} = 25$ คะแนน

ตัวอย่าง 6.16 ผลสอบของนักเรียน 50 คน เป็นดังตาราง จงหา Q_1 , D_6 และ P_{85}

ชั้นคะแนน	ความถี่ (f)
1 - 10	5
11 - 20	8
21 - 30	12
31 - 40	15
41 - 50	10

แนวคิด สิ่งแรกที่ต้องทำคือสร้างตารางแจกแจงความถี่สะสม

ชั้นคะแนน	ความถี่ (f)	ขอบเขตล่าง (L)	ความถี่สะสม (cf)
1-10	5	0.5	5
11-20	8	10.5	13
21-30	12	20.5	25
31-40	15	30.5	40
41-50	10	40.5	50 (N)

หาค่าของ Q_1

- 1) หาดำแหน่ง $Q_1 = \frac{1(50)}{4} = 12.5$
- 2) หาชั้นควอร์ไทล์ ตำแหน่งที่ 12.5 คือชั้น 11-20 ($cf = 13$)
- 3) แทนค่าในสูตร

$$L = 10.5 \text{ (ขอบเขตล่างของชั้น 11-20)}$$

$$\Sigma f_L = 5 \text{ (ความถี่สะสมของชั้นก่อนหน้า 1-10)}$$

$$f_{Q_k} = 8 \text{ (ความถี่ของชั้น 11-20)}$$

$$I = 10$$

$$\text{จาก } Q_k = L + I \left(\frac{\frac{kN}{4} - \Sigma f_L}{f_{Q_k}} \right)$$

$$\text{แทนค่าจะได้ } Q_1 = 10.5 + (10) \left(\frac{12.5 - 5}{8} \right)$$

$$Q_1 = 10.5 + (10) \left(\frac{7.5}{8} \right)$$

$$Q_1 = 10.5 + 9.375 = 19.88 \text{ คะแนน}$$

หาค่าของ D_6

- 1) หาดำแหน่ง $D_6 = \frac{6(50)}{10} = 30$
- 2) หาชั้นควอร์ไทล์ ตำแหน่งที่ 30 คือชั้น 31-40 ($cf = 40$)
- 3) แทนค่าในสูตร

$$L = 30.5 \text{ (ขอบเขตล่างของชั้น 31-40)}$$

$$\Sigma f_L = 25 \text{ (ความถี่สะสมของชั้นก่อนหน้า 21-30)}$$

$$f_{D_k} = 15 \text{ (ความถี่ของชั้น 31-40) และ } I = 10$$

$$\begin{aligned}
 \text{จาก} \quad D_k &= L + I \left(\frac{\frac{kN}{10} - \sum f_L}{f_{D_k}} \right) \\
 \text{แทนค่าจะได้} \quad D_6 &= 30.5 + (10) \left(\frac{30-25}{15} \right) \\
 D_6 &= 30.5 + (10) \left(\frac{5}{15} \right) \\
 D_6 &= 30.5 + 3.33 = 33.83 \quad \text{คะแนน}
 \end{aligned}$$

หาค่าของ P_{85}

- 1) หาดำแหน่ง $P_{85} = \frac{85(50)}{100} = 42.5$
- 2) หาชั้นควอร์ไทล์ ตำแหน่งที่ 42.5 คือชั้น 41-50 ($cf = 50$)
- 3) แทนค่าในสูตร

$$\begin{aligned}
 L &= 40.5 \text{ (ขอบเขตล่างของชั้น 41-50)} \\
 \sum f_L &= 40 \text{ (ความถี่สะสมของชั้นก่อนหน้า 31-40)} \\
 f_{D_k} &= 10 \text{ (ความถี่ของชั้น 41-50) และ } I = 10 \\
 \text{จาก} \quad P_k &= L + I \left(\frac{\frac{kN}{100} - \sum f_L}{f_{P_k}} \right) \\
 \text{แทนค่าจะได้} \quad D_6 &= 40.5 + (10) \left(\frac{42.5-40}{10} \right) \\
 D_6 &= 40.5 + (10) \left(\frac{2.5}{10} \right) \\
 D_6 &= 40.5 + 2.5 = 42.5 \quad \text{คะแนน}
 \end{aligned}$$

สรุป $Q_1 = 19.88$ คะแนน, $D_6 = 33.83$ คะแนน และ $P_{85} = 42.5$ คะแนน

6.5 การวัดการกระจายของข้อมูล

การวัดการกระจายของข้อมูล (Measures of Dispersion) คือ ค่าทางสถิติที่ใช้อธิบายให้ทราบว่าข้อมูลในชุดนั้น ๆ มีความแตกต่างกันหรือจัดกระจายไปจากค่ากลาง (เช่น ค่าเฉลี่ย) มากน้อยเพียงใด

ค่าการกระจายมาก หมายถึง ข้อมูลมีความแตกต่างกันมาก หรือไม่มีความสม่ำเสมอ

ค่าการกระจายน้อย หมายถึง ข้อมูลมีความคล้ายคลึงกันมาก หรือมีความสม่ำเสมอ

การวัดการกระจายแบ่งออกเป็น 2 ประเภทหลัก ได้แก่ การวัดการกระจายสัมบูรณ์

(Absolute Measures) และ การวัดการกระจายสัมพัทธ์ (Relative Measures)

1. การวัดการกระจายสัมบูรณ์ (Absolute Measures of Dispersion) เป็นการวัดการกระจายของข้อมูลเพียงชุดเดียว ผลลัพธ์ที่ได้จะมีหน่วยเดียวกันกับข้อมูลเดิม (เช่น ถ้าข้อมูลเป็นน้ำหนัก หน่วยของค่าการกระจายจะเป็นกิโลกรัม)

1.1 พิสัย (Range: R) พิสัยคือส่วนที่กว้างที่สุดของชุดข้อมูล เป็นค่าวัดที่ง่ายและรวดเร็วที่สุด พิสัยหาได้จากผลต่างระหว่างค่าสูงสุด (X_{max}) และค่าต่ำสุด (X_{min}) ของข้อมูล สูตรคือ

$$R = X_{max} - X_{min}$$

1.2 ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ (Quartile Deviation: Q.D.)

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

1.3 ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (Mean Deviation: M.D.)

$$M.D. = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{N}$$

1.4 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation: S หรือ σ) เป็นค่าวัดการกระจายที่นิยมใช้มากที่สุดและละเอียดที่สุด เนื่องจากใช้ข้อมูลทุกค่าในการคำนวณ บอกถึงค่าเฉลี่ยของความแตกต่างระหว่างข้อมูลแต่ละตัวกับค่าเฉลี่ยเลขคณิต

$$\text{สูตร (สำหรับตัวอย่างข้อมูล): } S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{หรือ} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

เมื่อ S คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง

x_i คือ ค่าของข้อมูลแต่ละตัว

$\bar{x}$ คือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของกลุ่มตัวอย่าง

n คือ จำนวนข้อมูล

1.5 ความแปรปรวน (Variance: s^2 หรือ σ^2) เป็นค่าวัดการกระจายที่สำคัญ เพราะเป็นรากฐานของการหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง $s = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$ หรือ $s = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}{n} - (\bar{x})^2$

ความแปรปรวนของประชากร $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$

ความแปรปรวนรวมของข้อมูล 2 ชุด $\sigma^2_{total} = \frac{N_1\sigma^2_1 + N_2\sigma^2_2}{N_1 + N_2}$

2. การวัดการกระจายสัมพัทธ์ (Relative Measures of Dispersion) เป็นการวัดการกระจายเพื่อใช้ เปรียบเทียบ การกระจายของข้อมูลตั้งแต่สองชุดขึ้นไปที่มีหน่วยวัดหรือค่าเฉลี่ยแตกต่างกัน ผลลัพธ์ที่ได้เป็นหน่วยที่ไม่มีหน่วยวัด (Unitless) นิยมแสดงเป็นร้อยละ

2.1 สัมประสิทธิ์ของพิสัย

$$\frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}}$$

2.2 สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์

$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

2.3 สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย

$$\frac{M.D.}{\bar{x}}$$

2.4 สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน (Coefficient of Variation: C.V.)

$$\frac{s}{\bar{x}}$$

ตัวอย่าง 6.17 ชุดข้อมูลตัวอย่าง (คะแนนสอบ 5 คน):

$$X = \{10, 12, 16, 20, 22\}$$

จงหา พิสัย และความแปรปรวน

แนวคิด

1. พิสัย (Range) พิสัยคือความแตกต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดในชุดข้อมูล

$$R = X_{max} - X_{min}$$

$$\text{แทนค่า } R = 22 - 10 = 12$$

2. ความแปรปรวน (Variance) ใช้สูตรสำหรับประชากร (Population):

ขั้นตอนที่ 1: หาค่าเฉลี่ย (μ)

$$\mu = \frac{\sum x}{N} = \frac{10+12+16+20+22}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

ขั้นตอนที่ 2: หาผลรวมของกำลังสองของผลต่าง $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$

x_i	$x_i - \mu (x_i - 16)$	$(x_i - \mu)^2$
10	-6	36
12	-4	16
16	0	0
20	4	16
22	6	36
รวม	0	104

ขั้นตอนที่ 3: คำนวณความแปรปรวน (σ^2)

สูตรความแปรปรวนประชากร $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$

แทนค่า จะได้

$$\sigma^2 = \frac{104}{5} = 20.8$$

ตัวอย่าง 6.18 จงเปรียบเทียบการกระจายของคะแนนสอบ 2 วิชา และหาความแปรปรวนรวม

วิชา	ค่าเฉลี่ย ($\bar{x}$)	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s)
คณิตศาสตร์	60 คะแนน	12 คะแนน
ภาษาอังกฤษ	85 คะแนน	14 คะแนน

แนวคิด

1) สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน (Coefficient of Variation – C.V.) คำนวณโดยใช้สูตร

$$C.V. = \frac{s}{\bar{x}}$$

1) คำนวณ C.V. ของวิชาคณิตศาสตร์:

$$C.V. = \frac{12}{60} = 0.2 = 20\%$$

2) คำนวณ C.V. ของวิชาภาษาอังกฤษ:

$$C.V. = \frac{14}{85} = 0.1647 = 16.47\%$$

สรุป C.V.คณิต(20%)>C.V.อังกฤษ(16.47%)

แสดงว่า คะแนนวิชาคณิตศาสตร์มีการกระจายตัวสูงกว่า เมื่อเทียบกับค่าเฉลี่ยของตัวเอง

6.6 การแจกแจงปกติมาตรฐาน

ค่ามาตรฐานและพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานเป็นเครื่องมือสำคัญในทางสถิติที่ช่วยให้เราสามารถ เปรียบเทียบข้อมูลที่มาจากชุดข้อมูลที่แตกต่างกัน และ หาความน่าจะเป็นหรือสัดส่วนของข้อมูล ได้

1. ค่ามาตรฐาน (Standard Score หรือ Z-score)

ค่ามาตรฐาน (Z) คือ ค่าที่บอกว่าข้อมูลตัวใดตัวหนึ่ง (x_i) อยู่ห่างจากค่าเฉลี่ย (μ) เป็นจำนวนกี่เท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) มีประโยชน์คือใช้ในการเปรียบเทียบข้อมูลจากชุดข้อมูลที่แตกต่างกัน โดยแปลงข้อมูลเหล่านั้นให้เป็นมาตรวัดเดียวกัน

$$Z = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

เมื่อ: Z คือ ค่ามาตรฐาน

x_i คือ ค่าข้อมูลที่ต้องการแปลง

μ (มิว) คือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของประชากร

σ (ซิกมา) คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร

ข้อสังเกต ถ้า Z เป็น บวก แสดงว่าค่า X สูงกว่า ค่าเฉลี่ย

ถ้า Z เป็น ลบ แสดงว่าค่า X ต่ำกว่า ค่าเฉลี่ย

ถ้า Z=0 แสดงว่าค่า X เท่ากับ ค่าเฉลี่ยพอดี

ตัวอย่าง 6.19 ผลการเรียนนิชาภา ดังตาราง นิชาภาเรียนวิชาใดได้ดีกว่า

วิชา	คะแนน	คะแนนเฉลี่ย ($\bar{x}$)	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s)
ภาษาไทย	75	80	12
คณิตศาสตร์	85	75	15
วิทยาศาสตร์	72	65	8

แนวคิด จากสูตร $Z = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$ เราสามารถหาคะแนนมาตรฐานในแต่ละวิชา ได้ดังนี้

$$Z_{\text{ไทย}} = \frac{75-80}{12} = -0.42$$

$$Z_{\text{คณิต}} = \frac{85-75}{15} = 0.67$$

$$Z_{\text{วิทย์}} = \frac{72-65}{8} = 0.88$$

สรุป นิชาภาเรียนวิชาวิทยาศาสตร์ได้ดีที่สุด

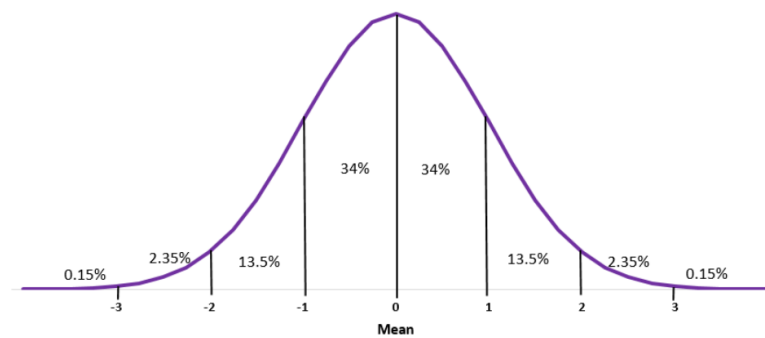
2. การแจกแจงปกติมาตรฐาน (Standard Normal Distribution) คือ การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่องที่มีรูปร่างเป็นระฆังคว่ำ (Bell Curve) ซึ่งถูกปรับให้มี ค่าเฉลี่ย (μ) เท่ากับ 0 และ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) เท่ากับ 1

การแจกแจงปกติมีความสำคัญอย่างยิ่งในการวิเคราะห์ทางสถิติ เนื่องจากช่วยให้เราสามารถเปรียบเทียบข้อมูลจากชุดการแจกแจงปกติใด ๆ ก็ตามได้ โดยการแปลงข้อมูลดิบเหล่านั้นให้เป็นค่ามาตรฐานที่เรียกว่า ค่า Z-score

สมบัติสำคัญของการแจกแจงปกติมาตรฐาน

การแจกแจงปกติมาตรฐานจะถูกกำหนดด้วยฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function) แต่มีสมบัติทางกราฟและทางคณิตศาสตร์ที่เข้าใจง่าย ดังนี้:

1. ลักษณะของโค้งการแจกแจง (The Curve)



รูปร่างสมมาตร: โค้งมีรูปร่างคล้ายระฆังคว่ำ (Bell-shaped) และมีความสมมาตรอย่างสมบูรณ์รอบจุดศูนย์กลาง

จุดศูนย์กลาง: จุดสูงสุดของโค้งคือค่าเฉลี่ย ซึ่งในการแจกแจงมาตรฐานคือ $\mu=0$

ค่ามัธยฐานและฐานนิยม: เนื่องจากโค้งสมมาตร ค่าเฉลี่ย (μ), มัธยฐาน (Median), และฐานนิยม (Mode) จะเท่ากันหมด คือ 0

**แกน x จะเข้าใกล้แกน x (แกนแนวนอน) แต่จะไม่สัมผัสหรือตัดแกนเลย

2. พารามิเตอร์ที่กำหนด ค่าเฉลี่ย (μ): ถูกกำหนดให้เท่ากับ 0 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ): ถูกกำหนดให้เท่ากับ 1

3. พื้นที่ใต้โค้ง (Area Under the Curve) พื้นที่รวม: พื้นที่ทั้งหมดใต้โค้งการแจกแจงปกติมาตรฐานมีค่าเท่ากับ 1 หรือ 100% เสมอ

สมมาตรของพื้นที่: เนื่องจากความสมมาตร พื้นที่ทางซ้ายของค่าเฉลี่ย ($\mu=0$) เท่ากับ 0.5 และพื้นที่ทางขวาของค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0.5

4. กฎ 68-95-99.7 (Empirical Rule) สมบัตินี้แสดงให้เห็นว่าข้อมูลส่วนใหญ่อัดแน่นอยู่รอบค่าเฉลี่ยอย่างไร:

พื้นที่ 68.27% ของข้อมูลทั้งหมดจะอยู่ภายใน 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของค่าเฉลี่ย (ระหว่าง $Z=-1$ ถึง $Z=1$)

พื้นที่ 95.45% ของข้อมูลทั้งหมดจะอยู่ภายใน 2 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของค่าเฉลี่ย (ระหว่าง $Z=-2$ ถึง $Z=2$)

พื้นที่ 99.73% ของข้อมูลทั้งหมดจะอยู่ภายใน 3 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของค่าเฉลี่ย (ระหว่าง $Z=-3$ ถึง $Z=3$)

5. การใช้ค่า Z-score ค่าบนแกนแนวนอนของโค้งปกติมาตรฐานคือ Z- score (ค่ามาตรฐาน)

Z-score บอกว่าคะแนนดิบอยู่ห่างจากค่าเฉลี่ยไปเป็นจำนวนกี่เท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

การแปลงข้อมูลเป็นการแจกแจงปกติมาตรฐานทำให้เราสามารถใช้อัตรา Z เพื่อหาความน่าจะเป็นหรือเปอร์เซ็นต์ไทล์ของคะแนนใด ๆ ได้อย่างง่ายดาย

ตัวอย่าง 6.20 ในการควบคุมคุณภาพในโรงงาน (Manufacturing Quality Control) ผู้จัดการโรงงานผลิตหลอดไฟต้องการตรวจสอบว่าหลอดไฟที่ผลิตออกมามีความทนทาน (อายุการใช้งานเป็นชั่วโมง) เป็นไปตามมาตรฐานที่กำหนดหรือไม่ จากการเก็บรวบรวมข้อมูลพบว่า อายุการใช้งานหลอดไฟมีการแจกแจงปกติ ค่าเฉลี่ยอายุการใช้งาน (μ)=1,000 ชั่วโมง ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ)=50 ชั่วโมง โรงงานต้องการทราบว่า มีหลอดไฟกี่เปอร์เซ็นต์ที่มีอายุใช้งานน้อยกว่า 900 ชั่วโมง (ซึ่งถือว่าต่ำกว่ามาตรฐานและอาจมีปัญหาด้านคุณภาพ)

แนวคิด คำนวณ Z-score: แปลงค่า 900 ชั่วโมง ให้เป็นค่ามาตรฐาน (Z-score)

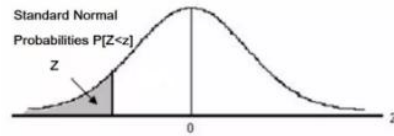
จากสูตร $Z = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$ แทนค่าจะได้

$$Z = \frac{900 - 1000}{50} = \frac{-100}{50} = -2.0$$

หาความน่าจะเป็น จาก $Z = -2.0$ หมายความว่า 900 ชั่วโมง อยู่ต่ำกว่าค่าเฉลี่ยไป 2 เท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

จากการเปิดตาราง Z หรือใช้กฎ 68- 95-99.7 พบว่าพื้นที่ทางซ้ายของ $Z = -2.0$ (คือความน่าจะเป็นที่ $X < 900$) มีค่าประมาณ 0.0228

ตารางสถิติ



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.50	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.40	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.30	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.20	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.10	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.00	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.90	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.80	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.70	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.60	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.50	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.40	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.30	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.20	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.10	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.00	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.90	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.80	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294

สรุปได้ว่า: ประมาณ 2.28% ของหลอดไฟที่ผลิตมามีอายุการใช้งานต่ำกว่า 900 ชั่วโมง
ผู้จัดการโรงงานสามารถใช้ตัวเลขนี้เพื่อ กำหนดเกณฑ์การรับประกันคุณภาพ หรือ ปรับ
กระบวนการผลิต เพื่อลดเปอร์เซ็นต์ของผลิตภัณฑ์ที่ต่ำกว่ามาตรฐานลง

6. 6 การนำความรู้เรื่องสถิติเบื้องต้นไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์

1. สถานการณ์: การทดสอบประสิทธิภาพของปุ๋ยเคมีชนิดใหม่

นักเรียนทำการทดลองเพื่อเปรียบเทียบว่า ปุ๋ยเคมีชนิดใหม่ (B) มีผลต่อความสูงของต้นกล้าดีกว่าหรือเท่ากับ ปุ๋ยเคมีมาตรฐาน (A) หรือไม่ (สมมติฐานทางสถิติที่สนใจคือ $\mu_B > \mu_A$) ในการออกแบบการทดลอง นักเรียนแบ่งต้นกล้าออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ 5 ต้น และให้ปุ๋ยแต่ละชนิดเป็นเวลา 1 เดือน จากนั้นวัดความสูงของต้นกล้าแต่ละต้น (หน่วยเป็นเซนติเมตร)

กลุ่ม (ปุ๋ย)	ความสูงของต้นกล้า (X_i) (ซม.)
A (มาตรฐาน)	18, 20, 21, 19, 22
B (ชนิดใหม่)	20, 23, 25, 22, 25

แนวคิด ขั้นตอนที่ 1: คำนวณค่ากลาง (ค่าเฉลี่ย: $\bar{x}$) และการกระจาย (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน: S)

กลุ่ม A (ปุ๋ยมาตรฐาน):

$$\text{ค่าเฉลี่ย } (\bar{x}_A) = \frac{18+20+21+19+22}{5} = 20 \text{ เซนติเมตร}$$

$$\text{หาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน } S_A = \sqrt{\frac{(18-20)^2+(20-20)^2+(21-20)^2+(19-20)^2+(22-20)^2}{5}}$$

$$= 1.58 \text{ เซนติเมตร}$$

กลุ่ม B (ปุ๋ยชนิดใหม่)

$$\text{ค่าเฉลี่ย } (\bar{x}_B) = \frac{20+23+25+22+25}{5} = 23 \text{ เซนติเมตร}$$

$$\text{หาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน } S_B = \sqrt{\frac{(20-23)^2+(23-23)^2+(25-23)^2+(22-23)^2+(25-23)^2}{5}}$$

$$= 2.12 \text{ เซนติเมตร}$$

ขั้นตอนที่ 2: สรุปและตีความผลลัพธ์ทางวิทยาศาสตร์

สถิติ	กลุ่ม A (มาตรฐาน)	กลุ่ม B (ชนิดใหม่)
$\bar{x}$ (ค่าเฉลี่ย)	20.0 ซม.	23.0 ซม.
S (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน)	1.58 ซม.	2.12 ซม.

การตีความ: การเปรียบเทียบค่ากลาง (ประสิทธิภาพ):

1) ต้นกล้าที่ใช้ปุ๋ยชนิดใหม่ (B) มีความสูงเฉลี่ย 23.0 ซม. ซึ่งสูงกว่าต้นกล้าที่ใช้ปุ๋ยมาตรฐาน (A) ที่มีความสูงเฉลี่ย 20.0 ซม. ผลการทดลองเบื้องต้นบ่งชี้ว่าปุ๋ยชนิดใหม่มีประสิทธิภาพดีกว่า

2) การเปรียบเทียบการกระจาย (ความสม่ำเสมอ/ความแปรปรวน) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่ม A คือ 1.58 ซม. ในขณะที่กลุ่ม B คือ 2.12 ซม. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่ม B มีค่าสูงกว่ากลุ่ม A แสดงว่าความสูงของต้นกล้าในกลุ่มที่ใช้ปุ๋ยชนิดใหม่มีความแตกต่างกัน (กระจาย) มากกว่า (คือมีทั้งต้นที่สูงมากและต้นที่ค่อนข้างเตี้ย) ส่วนกลุ่ม A มีความสม่ำเสมอมากกว่า

ข้อสรุป จากการวิเคราะห์เชิงพรรณนา (Descriptive Statistics) สรุปได้ว่า ปุ๋ยชนิดใหม่ (B) มีแนวโน้มที่จะทำให้ต้นกล้าสูงขึ้นโดยเฉลี่ย แต่มีผลลัพธ์ที่หลากหลายและไม่สม่ำเสมอเท่าปุ๋ยมาตรฐาน (A) การตัดสินใจว่าจะเลือกใช้ปุ๋ยชนิดใดอาจขึ้นอยู่กับความต้องการความสม่ำเสมอในการเติบโตด้วย

(หมายเหตุ: ในการวิจัยทางวิทยาศาสตร์จริง ๆ จะต้องใช้สถิติเชิงอนุมาน เช่น การทดสอบ t (t-test) เพื่อยืนยันว่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ย 3.0 ซม. นี้ เป็นความแตกต่างที่ "มีนัยสำคัญทางสถิติ" หรือไม่ ด้วยการเปรียบเทียบผลการทดลองสองกลุ่ม (ใช้ค่าเฉลี่ย)

2. สถานการณ์ทางวิทยาศาสตร์: ธรณีวิทยา/อุทกนิยมนิคมวิทยา

นักเรียนวัดอุณหภูมิที่จุดหนึ่งได้ 38°C และต้องการทราบว่าอุณหภูมินี้ "ร้อนผิดปกติ" เมื่อเทียบกับข้อมูลในอดีตหรือไม่ จากข้อมูลประวัติศาสตร์: μ (ค่าเฉลี่ยอุณหภูมิ) $= 32^{\circ}\text{C}$ และ σ (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน) $= 3^{\circ}\text{C}$

แนวคิด การเปรียบเทียบข้อมูลกับค่ามาตรฐาน (ใช้ค่ามาตรฐาน Z-score)

$$\text{ค่าที่วัดได้: } X = 38^{\circ}\text{C}$$

$$Z = \frac{38 - 32}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

ข้อสรุปทางวิทยาศาสตร์: ค่า $Z=2.0$ หมายความว่า อุณหภูมิ 38°C ที่วัดได้นั้น สูงกว่าค่าเฉลี่ยถึง 2 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ในการแจกแจงปกติ (ตามกฎเชิงประจักษ์ 68-95-99.7) ค่า $Z=2.0$ อยู่ในขอบเขตที่ค่อนข้างสูงมาก (มีข้อมูลเพียงประมาณ 2.5% เท่านั้นที่สูงกว่าค่านี้)

แสดงว่าอุณหภูมิ 38°C เป็นอุณหภูมิที่ "ร้อนผิดปกติ" เมื่อเทียบกับสถิติในอดีต

3. สถานการณ์การวิเคราะห์ทางสถิติเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ (น้ำหนัก) และระยะยืดของสปริงตามหลักการของกฎของฮุก (Hooke's Law)

นักวิทยาศาสตร์คนหนึ่งได้ทำการทดลองเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักที่แขวน (ซึ่งเทียบเท่ากับแรงกระทำ) และระยะยืดของสปริงตามกฎของฮุก โดยได้บันทึกผลการทดลอง 4 ครั้ง ดังตารางด้านล่างนี้

น้ำหนัก (กก.) (X)	ระยะยืด (ซม.) (Y)
1	2.1
2	3.9
3	6.2
4	8

จงตอบคำถามต่อไปนี้:

1) คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient, r) เพื่อวัดระดับความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างน้ำหนักและระยะยืดของสปริง

2) คำนวณหาสมการการถดถอยเชิงเส้น (Linear Regression Equation) ในรูป

$$\hat{Y} = a + bX$$

3) ตีความผลลัพธ์ ว่าความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักและระยะยืดเป็นไปตามกฎของฮุกหรือไม่ และถ้านักเรียนแขวนน้ำหนัก 5.0 กิโลกรัม สปริงจะยืดออกประมาณกี่เซนติเมตร

แนวคิด การคำนวณและวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น

X	Y	X ²	Y ²	XY
1	2.1	1	4.41	2.1
2	3.9	4	15.21	7.8
3	6.2	9	38.44	18.6
4	8	16	64	32
$\sum x=10$	$\sum y=20.2$	$\sum x^2=30$	$\sum y^2=122.06$	$\sum xy=60.5$

จากสูตรคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient, r)

$$r = \frac{N \sum xy - [(\sum x)(\sum y)]}{\sqrt{[N \sum x^2 - (\sum x)^2][N \sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

แทนค่า
$$r = \frac{4(60.5) - [(10)(220)]}{\sqrt{[4(30) - (10)^2][4(122.06) - (20.2)^2]}} \approx 0.99875$$

2. สมการการถดถอยเชิงเส้น ($\hat{Y} = a + bX$)

A. หาส่วนลดถอย (b) สูตร: $b = \frac{N \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$

แทนค่า
$$b = \frac{4(60.5) - [(10)(220)]}{4(30) - (10)^2} = \frac{40}{20} = 2$$

B. หาจุดตัดแกนตั้ง (a)

จากสูตร: $a = \bar{Y} - b\bar{X}$

จาก $\bar{Y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{20.2}{4} = 5.05$ และ $\bar{X} = \frac{\sum x}{N} = \frac{10}{4} = 2.5$

แทนค่าใน $a = \bar{Y} - b\bar{X}$ จะได้

$$a = 5.05 - (2)(2.5) = 0.05$$

จะได้สมการถดถอย $\hat{Y} = 0.05 + 2X$

3. การตีความผลลัพธ์และการทำนาย

ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ($r \approx 0.99875$): ค่านี้อยู่ใกล้ +1 มาก แสดงว่า น้ำหนักที่แขวนมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงในทิศทางบวกกับระยะยืดของสปริงในระดับที่สูงมาก (เกือบสมบูรณ์)

กฎของฮุกกล่าวว่า $F = kx$ หรือ $x = \frac{1}{k}F$ ซึ่งความสัมพันธ์เป็นเชิงเส้นตรงโดยมีจุดตัดแกนตั้งเป็น 0 สมการที่ได้คือ $\hat{Y} = 0.05 + 2X$ ซึ่งมีความชัน $b = 2.0$ และจุดตัดแกนตั้ง $a = 0.05$

เนื่องจากค่า $a = 0.05$ มีค่าน้อยมาก (ใกล้ 0) จึงสรุปได้ว่า ผลการทดลองนี้สอดคล้องกับกฎของฮุกอย่างยิ่ง โดยที่ระยะยืดเกือบจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับน้ำหนัก (แรง)

การทำนายระยะยืด ใช้สมการการถดถอยที่ได้เพื่อทำนายระยะยืด ($\hat{Y}$) เมื่อแขวนน้ำหนัก $X = 5.0$ กิโลกรัม:

$$\hat{Y} = 0.05 + 2(5.0) = 0.05 + 10 = 10.05 \text{ เซนติเมตร}$$

คำตอบ: ถ้าแขวนน้ำหนัก 5.0 กิโลกรัม สปริงจะยืดออกประมาณ 10.05 เซนติเมตร

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

1. สร้างตารางความถี่เพื่อจัดกลุ่มข้อมูล จากการสำรวจประชากรสัตว์ ซึ่งนักเรียนสำรวจน้ำหนัก (กรัม) ของปลาในบ่อ 20 ตัว จงใช้ตารางความถี่ช่วยให้เห็นภาพรวมได้อย่างรวดเร็วว่า ปลาส่วนใหญ่ มีน้ำหนักอยู่ในช่วงใด กำหนดช่วงน้ำหนัก (อันตรภาคชั้น) ให้ชั้นแรกเป็น 130-139 กรัม

105, 120, 115, 100, 130, 125, 112, 118, 107, 122,

116, 103, 135, 128, 110, 106, 123, 114, 108, 127

2. จากข้อมูลการทดลองปลูกต้นถั่ว วัดความสูงได้ข้อมูลดังตาราง อยากทราบว่าแสงสีน้ำเงิน มีผลต่อความสูงของต้นถั่วดีกว่าแสงสีแดง หรือไม่

กลุ่ม	ข้อมูลความสูง (ซม.)
แสงสีน้ำเงิน	15, 18, 17, 16, 19
แสงสีแดง	12, 14, 13, 15, 11

3. นักเรียนทำการทดลองหาความหนาแน่นของน้ำบริสุทธิ์ 5 ครั้ง ซึ่งค่าจริงคือ 1.000 g/mL

ครั้งที่	กลุ่ม A (ชั่งด้วยปิเกตอร์)	กลุ่ม B (ชั่งด้วยปิเปตต์)
1	1.05	1
2	0.92	1.01
3	1.1	0.99
4	0.98	1
5	1.01	1

การทดลองด้วยอุปกรณ์ใดมีความเที่ยง (Precision) สูงกว่า หรือผลการทดลองมีความสม่ำเสมอมากกว่า

4. เมล็ดพันธุ์ที่มีความเสถียรในการงอกสูง (มีความแปรปรวนต่ำ) จะสามารถงอกได้ดีอย่างสม่ำเสมอ ไม่ว่าจะอยู่ในสภาพแวดล้อมแบบใด จากข้อมูลผลการทดลองอัตราการงอกของเมล็ดพันธุ์ ทำการทดลองปลูกเมล็ดพันธุ์ 2 ชนิด ในแปลงทดลอง 5 แปลงต่อชนิด และบันทึกอัตราการงอกเป็นเปอร์เซ็นต์ เมล็ดพันธุ์ชนิดใดมีความสม่ำเสมอ (ความเที่ยง) ในการงอกมากกว่ากัน

เมล็ดพันธุ์	ค่าเฉลี่ยอัตราการงอก ($\bar{x}$)	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s)
ชนิด A (ดั้งเดิม)	80%	10%
ชนิด B (ปรับปรุง)	90%	11%

4. บริษัทผลิตอุปกรณ์กีฬาแห่งหนึ่งมีการจัดการคุณภาพของสินค้า คือ ยังต้องปรับปรุง สินค้าคุณภาพต่ำ และสินค้าคุณภาพมาตรฐาน ถ้าสินค้าคุณภาพต่ำมีค่ามาตรฐานอยู่ระหว่าง -1.5 และ 0.34 (กำหนด $Z = 0.34$) ตรงกับพื้นที่ $A = 0.1331$ และ $Z = 1.5$ ตรงกับ พื้นที่ $A = 0.4332$) จงหา
- (1) สินค้าที่ยังต้องปรับปรุงคิดเป็นกี่เปอร์เซ็นต์ของสินค้าทั้งหมด
 - (2) สินค้าที่มีคุณภาพต่ำคิดเป็นกี่เปอร์เซ็นต์ของสินค้าทั้งหมด
 - (3) สินค้าที่ได้มาตรฐานคิดเป็นกี่เปอร์เซ็นต์ของสินค้าทั้งหมด

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ความหมายของลิมิตด้านเดียวของฟังก์ชันเป็นดังนี้

ลิมิตซ้าย (Left-hand limits)

กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ และ a เป็นจำนวนจริง กล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายมือ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง L ที่ทำให้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายมือ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$f(x) = L$$

ลิมิตขวา (Right-hand limits)

กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ และ a เป็นจำนวนจริง กล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวามือ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง L ที่ทำให้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทางขวามือ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$f(x) = L$$

จงหา 1) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ 2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2) = (2)^2 = 4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1) = 2 + 1 = 3$$

$$\text{¶ 1.1) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \qquad \qquad \qquad \text{1.2) } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5) = 5$$

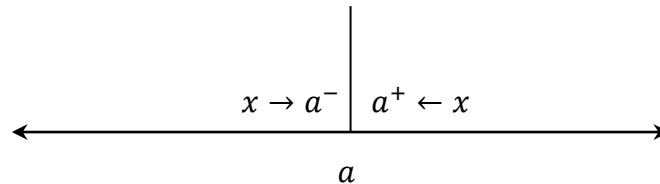
ตัวอย่างที่ 7.3 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}$

แนวคิด เพราะว่า $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = \begin{cases} -(x-2) & \text{เมื่อ } x < 2 \\ (x-2) & \text{เมื่อ } x \geq 2 \end{cases}$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 2^-} \left\{ \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left\{ \frac{-(x-2)}{x-2} \right\} = -1$$

1.2 ลิมิตสองด้าน (Two-sided limits)

เป็นการพิจารณาค่าของ $f(x)$ ในกรณีที่ x เข้าใกล้ a หมายถึง x เข้าใกล้ a ทั้งทางด้านซ้ายมือและทางด้านขวามือ



กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ และ a เป็นจำนวนจริงแล้ว ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ในกรณีที่ x เข้าใกล้ a มีค่าเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ในกรณีที่ x เข้าใกล้ a ทั้งทางด้านซ้ายมือและทางด้านขวามือของ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

หมายเหตุ 1. ในกรณีที่ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ โดยที่ $L_1 \neq L_2$ หรือ
 2. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ หาค่าไม่ได้ หรือ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้
 จะกล่าวว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 7.4 กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

แนวคิด $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

ตัวอย่างที่ 7.5 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x + 1, & x > 0 \end{cases}$

จงหา 1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(ให้นักศึกษาทำเอง)

1.3 นิยามของลิมิต

นิยาม 1 กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x)$ นิยามบนช่วงเปิดที่มี a จะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ L เมื่อ x เข้าใกล้ a เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกจำนวนจริงบวก ε (Epsilon) หรือ $\varepsilon > 0$ จะสามารถหาจำนวนจริงบวก δ (Delta) หรือ $\delta > 0$ ได้อย่างน้อยหนึ่งค่า ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ สำหรับทุกค่า x ที่ $0 < |x - a| < \delta$

สัญลักษณ์ $|f(x) - L| < \varepsilon$ หมายถึง $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$

นั่นคือ $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

สัญลักษณ์ $0 < |x - a| < \delta$ หมายถึง $-\delta < x - a < 0$ หรือ $0 < x - a < \delta$

นั่นคือ $a - \delta < x < a + \delta$ หรือ $x \neq a$

ซึ่งอาจกล่าวได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ หมายความว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ สามารถหา $\delta > 0$ ได้ค่าหนึ่งเสมอที่ทำให้ $f(x)$ อยู่ในช่วงเปิด $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วงเปิด $(a - \delta, a + \delta)$ และ $x \neq a$ ซึ่งจะเห็นว่า สำหรับ ε ที่มีค่าน้อยๆ และ $f(x)$ อยู่ในช่วงเปิด $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ $[f(x) \text{ เข้าใกล้ } L]$ จะสามารถเลือก $\delta > 0$ ที่น้อยเพียงพอที่ทำให้ได้ว่า ถ้า x อยู่ในช่วงเปิด $(a - \delta, a + \delta)$ และ $x \neq a$ แล้ว $f(x)$ อยู่ในช่วงเปิด $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

นิยาม 2 ลิมิตซ้าย (Left-hand limits)

ให้ f นิยามบนช่วงเปิด (c, a) จะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ M_1 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางซ้าย และ เขียน $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M_1$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกจำนวนจริงบวก $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ จะสามารถหาจำนวนจริงบวก $\delta (\delta > 0)$ ได้อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ทำให้ $|f(x) - M_1| < \varepsilon$ สำหรับทุกค่า x ที่ $a - \delta < x < a$ และเรียก M_1 ว่า ลิมิตซ้ายของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a

นิยาม 3 ลิมิตขวา (Right-hand limits)

ให้ f นิยามบนช่วงเปิด (a, b) จะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ M_2 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวา และ เขียน $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = M_2$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกจำนวนจริงบวก $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ จะสามารถหาจำนวนจริงบวก $\delta (\delta > 0)$ ได้อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ทำให้ $|f(x) - M_2| < \varepsilon$ สำหรับทุกค่า x ที่ $a < x < a + \delta$ และเรียก M_2 ว่า ลิมิตขวาของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a

1.4 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต (Theorems on limits)

กำหนดให้ a, c, A, B เป็นจำนวนจริง

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ แล้ว

$$1. \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cA$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} cx^n = ca^n \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A + B$$

$$7. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A - B$$

$$8. \lim_{x \rightarrow a} [c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0] = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_1 a + c_0$$

$$9. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$$

$$10. \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B} \text{ เมื่อ } B \neq 0$$

$$11. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = A^n \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{A} \text{ เมื่อ } \sqrt[n]{A} \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\frac{n}{m}} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\frac{n}{m}} = A^{\frac{n}{m}} \text{ เมื่อ } \sqrt[\frac{m}{n}]{A} \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

หมายเหตุ ทฤษฎีบทดังกล่าวเป็นจริง เมื่อแทนลิมิตของฟังก์ชันที่ a ด้วยลิมิตทางซ้าย

หรือแทนลิมิตของฟังก์ชันที่ a ด้วยลิมิตทางขวา

$$1. \text{ ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ แล้ว } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

$$2. \text{ ถ้า } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \text{ แล้ว } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ข้อควรระวัง ในการหา $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$ มีดังนี้

1. จะใช้ทฤษฎี 10 ในการหาลิมิตได้ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ หาค่าได้ และ ไม่เท่ากับ 0

2. กรณีที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้ และไม่เท่ากับ 0 แต่ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$ หาค่าไม่ได้

3. กรณีที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ เราเรียกรูปแบบ $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{0}{0}$ ว่า รูปแบบไม่กำหนด (Indeterminate Form) ในกรณีเช่นนี้

$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$ อาจหาค่าได้หรือหาค่าไม่ได้ขึ้นอยู่กับลักษณะของฟังก์ชัน

การหาลิมิตจึงจำเป็นต้องเปลี่ยนรูปฟังก์ชัน $\frac{f(x)}{g(x)}$ ใหม่ ในรูป $h(x)$ โดยที่ $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$

ทุกค่า x ในโดเมนของ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ยกเว้นเมื่อ $x = a$ โดยอาศัยความรู้ทางพีชคณิต

ดังนั้นจะได้

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

การเปลี่ยนรูปแบบฟังก์ชันใหม่ อาจใช้วิธีแยกตัวประกอบหรือหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปอัตราหะควรใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปรที่เหมาะสมหรือวิธีที่ทำให้ฟังก์ชันอัตราหะหายไปจากตัวเศษหรือตัวส่วน โดยใช้สังยุคของฟังก์ชันอัตราหะนั้นคุณทั้งเศษและส่วน

1.5 ลิมิตของฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง

สำหรับกรณีที่ฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วงจะต้องหาลิมิตทั้งสองด้านที่จุดซึ่งมีการเปลี่ยนแปลง
เงื่อนไขหรือสูตรฟังก์ชันนั้น และทำได้โดยการหาลิมิตแต่ละด้านที่จุดเปลี่ยนเงื่อนไขนั้นก่อน

ตัวอย่างที่ 7.6 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-5}{2-3x} & , x < -3 \\ \sqrt[3]{2+x} & , x \geq -3 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

$$\begin{aligned} \text{แนวคิด} \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^-} \left(\frac{2x-5}{2-3x} \right) = \frac{2(-3)-5}{2-3(-3)} = \frac{-6-5}{2+9} = \frac{-11}{11} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} (\sqrt[3]{2+x}) = \sqrt[3]{2+(-3)} = \sqrt[3]{-1} = -1 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= -1 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.7 กำหนดให้ $f(x) = 2 - |x^3 - 3|$, $g(x) = x^3$ และ $F(x) = f(g^{-1}(x))$

$$\begin{aligned} \text{จงหา} \quad & 1) \lim_{x \rightarrow 3^-} F(x) \text{ และ } \lim_{x \rightarrow 3^+} F(x) \\ & 2) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{F(x)-F(3)}{x-3} \text{ และ } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{F(x)-F(3)}{x-3} \end{aligned}$$

$$\text{แนวคิด จาก } g(x) = x^3 \text{ จะได้ } g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$\text{และ } F(x) = f(g^{-1}(x)) = 2 - |(\sqrt[3]{x})^3 - 3| = 2 - |x - 3|$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 2 + (x - 3); & x < 3 \\ 2 - (x - 3); & x \geq 3 \end{cases}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \{2 + (x - 3)\} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \{2 - (x - 3)\} = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3^-} \left\{ \frac{F(x)-F(3)}{x-3} \right\} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left\{ \frac{2+(x-3)-2}{x-3} \right\} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left\{ \frac{F(x)-F(3)}{x-3} \right\} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left\{ \frac{2-(x-3)-2}{x-3} \right\} = -1$$

2. ลิมิตอนันต์และลิมิตที่อนันต์

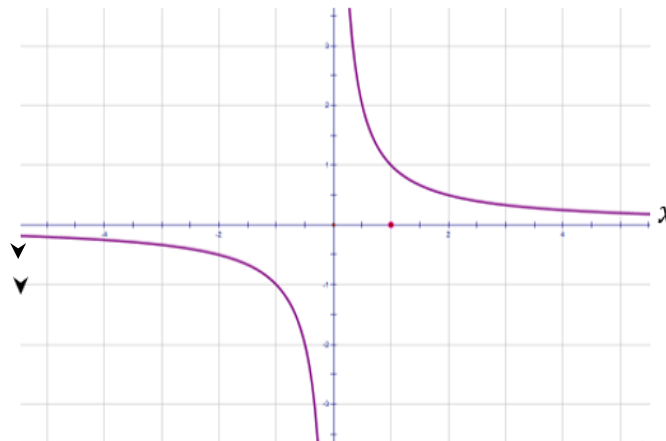
2.1 ลิมิตอนันต์ (Infinite limit)

พิจารณาฟังก์ชันที่มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่มีขอบเขตเมื่อตัวแปรอิสระมีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง ที่เป็นค่าคงตัวค่าหนึ่ง นั่นคือเป็นการพิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง a แล้วค่าของ $f(x)$ อาจเป็นค่าบวกเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ โดยไม่มีขอบเขต หรือเป็นค่าลบลดลงไปเรื่อยๆ โดยไม่มีขอบเขต เช่น

พิจารณา $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ค่าของ $f(x)$ เป็นดังตาราง และมีกราฟ

ดังรูปที่ 7.1

$x < 0$	-1	-0.5	-0.1	-0.01	$\dots \rightarrow 0$
$f(x)$	-1	-2	-10	-100	ลดลงโดยไม่มีขอบเขต ($-\infty$)
$x > 0$	1	0.5	0.1	0.01	$\dots \rightarrow 0$
$f(x)$	1	2	10	100	เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต (∞)



รูปที่ 7.1

จะเห็นว่า เมื่อ $x \rightarrow 0^-$ ค่าของ $f(x)$ ลดลงโดยไม่มีขอบเขต

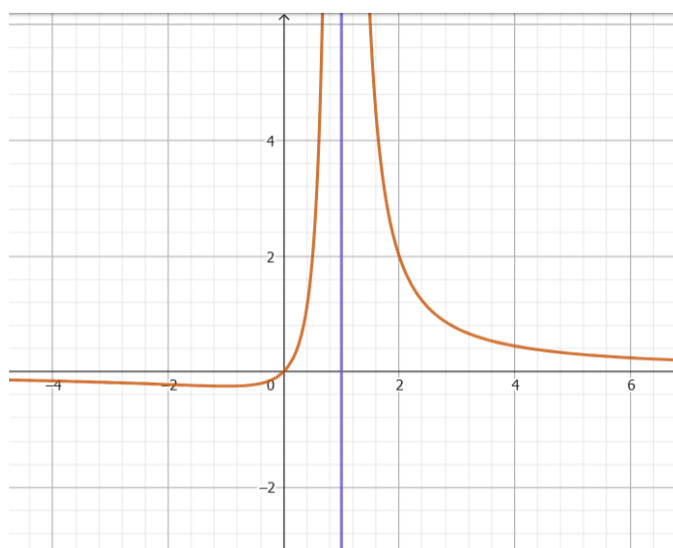
ลักษณะเช่นนี้เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

และเมื่อ $x \rightarrow 0^+$ ค่าของ $f(x)$ เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต ลักษณะเช่นนี้เขียนแทนด้วย

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ เราเรียกลิมิตทั้งสองแบบนี้ว่า **ลิมิตอนันต์**

หรือ $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ค่าของ $f(x)$ เป็นตารางและมีกราฟ ดังรูปที่ 7.2

$x < 1$	0	0.5	0.9	0.99	$\dots \rightarrow 1$
$f(x)$	0	2	90	9900	เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต (∞)
$x > 1$	2	1.5	1.1	1.01	$\dots \rightarrow 1$
$f(x)$	2	6	110	10100	เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต (∞)



รูปที่ 7.2

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ในลักษณะ $x < 1$ และ $x > 1$ จะเห็นว่า $f(x)$

มีค่าเป็นบวกเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต ลักษณะนี้เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ และกล่าวได้ว่า

ลิมิตของ $f(x)$ เป็นบวกอนันต์

นิยาม 4

1. ลิมิตของ $f(x)$ เป็นบวกอนันต์เมื่อ $x \rightarrow a$ และเขียน $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก M ที่กำหนดให้จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $f(x) > M$ สำหรับทุก x ที่ $0 < |x - a| < \delta$
2. ลิมิตของ $f(x)$ เป็นลบอนันต์เมื่อ $x \rightarrow a$ และเขียน $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก M ที่กำหนดให้จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $f(x) < -M$ สำหรับทุก x ที่ $0 < |x - a| < \delta$

ในกรณีที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (หรือ $-\infty$) หรือ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ (หรือ $-\infty$) หรือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (หรือ $-\infty$) เราเรียกเส้นตรง $x = a$ ว่าเป็น เส้นกำกับแนวตั้ง (Vertical asymptote) ของ f

ทฤษฎีบท กำหนดให้ a และ L เป็นจำนวนจริงของ f และ g

เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริงโดยที่

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ เมื่อ $L > 0$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \begin{cases} \infty & , g(x) \rightarrow 0^+ \\ -\infty & , g(x) \rightarrow 0^- \end{cases}$$
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ เมื่อ $L < 0$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

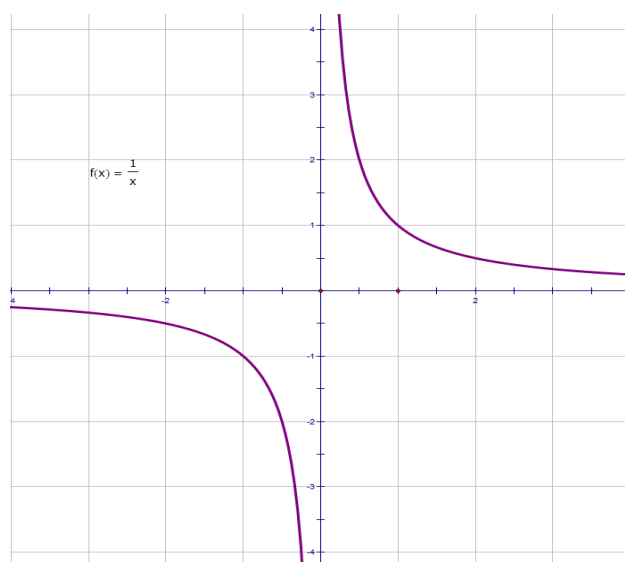
$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \begin{cases} -\infty & , g(x) \rightarrow 0^+ \\ \infty & , g(x) \rightarrow 0^- \end{cases}$$

2.2 ลิมิตที่อนันต์ (Limit at infinity)

พิจารณาลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อตัวแปรอิสระมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างใดอย่างหนึ่ง โดยไม่มีขอบเขต นั่นคือค่าของ $f(x)$ อาจจะมีค่าเข้าใกล้จำนวนจริงจำนวนหนึ่ง เมื่อ x มีค่าบวกเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต เขียนแทนด้วย $x \rightarrow \infty$ หรือเมื่อ x มีค่าลบลดลงโดยไม่มีขอบเขต เขียนแทนด้วย $x \rightarrow -\infty$

พิจารณา $f(x) = \frac{1}{x}$ ค่าของ $f(x)$ เป็นดังตาราง เมื่อกำหนดค่า x ต่างๆมาให้ และมีกราฟดังรูปที่ 7.3

$x > 0$	10	100	1000	10000	เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต (∞)
$\frac{1}{x}$	0.1	0.01	0.001	0.0001	$\dots \rightarrow 0$
$x < 0$	-10	-100	-1000	-10000	ลดลงโดยไม่มีขอบเขต ($-\infty$)
$\frac{1}{x}$	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	$\dots \rightarrow 0$



รูปที่ 7.3

1. ในขณะที่ $x > 0$ และ x มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต ($x \rightarrow \infty$) แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 ลักษณะเช่นนี้กล่าวได้ว่า “ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้อนันต์เท่ากับ 0” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

2. ในขณะที่ $x < 0$ และ x มีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขต ($x \rightarrow -\infty$) แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 ลักษณะเช่นนี้กล่าวได้ว่า “ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ลบอนันต์เท่ากับ 0” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

นิยาม 5

1. เรียกลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ L เมื่อ $x \rightarrow \infty$ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวนจริงบวก M ที่ทำให้ ถ้า $x > M$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$ และเขียนในรูป

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

2. เรียกลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ L เมื่อ $x \rightarrow -\infty$ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวนจริงบวก M ที่ทำให้ ถ้า $x < -M$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$ และเขียนในรูป

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

2.3 ทฤษฎีลิมิตที่อนันต์

กำหนดให้ c, A, B เป็นจำนวนจริง ถ้า f และ g

เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ และ

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = B$ แล้ว

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} c = c$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x} = 0, c \neq 0$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x} = 0, c \neq 0$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$ หรือ $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{h(x)} = 0, c \neq 0$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \infty$ หรือ $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{h(x)} = 0, c \neq 0$
7. ถ้า $x > 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงบวก
8. ถ้า $x < 0$ และ $x^n \in \mathbb{R}$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} \infty & , x^n > 0 \\ -\infty & , x^n < 0 \end{cases}$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงบวก
9. ถ้า $x > 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = 0, c \neq 0$ และ n เป็นจำนวนจริงบวก
10. ถ้า $x < 0$ และ $x^n \in \mathbb{R}$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^n} = 0, c \neq 0$ และ n เป็นจำนวนจริงบวก
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A + B$
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A - B$
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A \cdot B$
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = \frac{A}{B}$ เมื่อ $B \neq 0$
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} [cf(x)] = c \left[\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right] = cA$

หมายเหตุ ทฤษฎีบท 11-15 ยังคงเป็นจริง เมื่อเปลี่ยน $x \rightarrow \infty$ ด้วย $x \rightarrow -\infty$

ตัวอย่างที่ 7.8 จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3$	2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3}$
3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x}$	4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x}$
5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3x+4}$	6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^3}$
7) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{4}}$	8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{\frac{1}{3}}$
9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{x}}$	10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10}{x^{\frac{2}{3}}}$
11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} \right)$	

2.4 ลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะ เมื่อ $x \rightarrow \infty$ หรือ $x \rightarrow -\infty$

ในการหาลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะ เมื่อ $x \rightarrow \infty$ หรือ $x \rightarrow -\infty$ สามารถทำได้โดยการหารเศษและส่วนของฟังก์ชันตรรกยะ ด้วยตัวแปร (x) ที่มีกำลังสูงที่สุดที่ปรากฏในฟังก์ชัน หรือค่ามากที่สุดที่ปรากฏในฟังก์ชัน แล้วเทอมที่เป็นตัวแปร (x) กำลังต่างๆ จะเป็นค่าของตัวเลข หรืออยู่ในรูปกำลังต่างๆของ $\frac{1}{x}$ และสามารถใช้ทฤษฎี 9 และ 10 ได้

ตัวอย่างที่ 7.9 จงหา $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{6x+5} \right)$

แนวคิด ใช้วิธีหารทั้งเศษและส่วนด้วยพจน์ที่มีกำลังสูงสุดของตัวส่วน ซึ่งคือ x

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{6x+5} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{3}{x}}{\frac{6x}{x} + \frac{5}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{6 + \frac{5}{x}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{6x+5} \right) = \frac{1}{3}$

ตัวอย่างที่ 7.10 จงหา $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2-x-1}{2x^3-3x+5} \right)$ (ให้นักศึกษาทำเอง)

ตัวอย่างที่ 7.11 จงหา $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3+4x^2-2}{2x^2+3x+3} \right)$ (ให้นักศึกษาทำเอง)

3. ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

นิยาม 3.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง

และ $a \in R$ จะกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Function) ที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

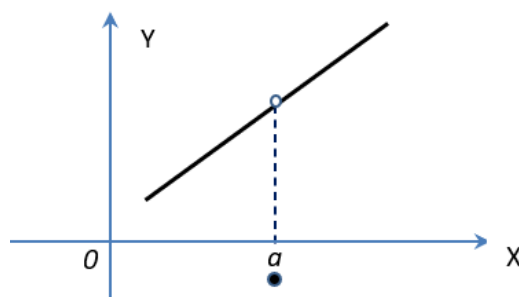
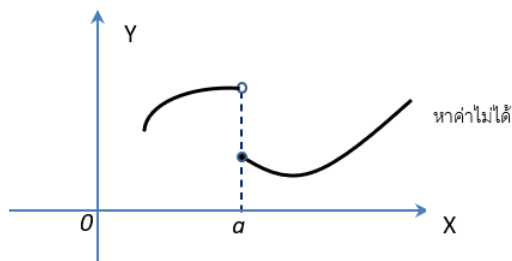
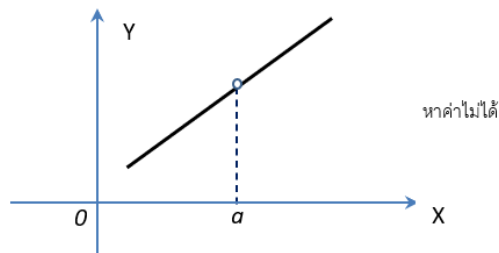
1. $f(a)$ หาค่าได้

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้

และ 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

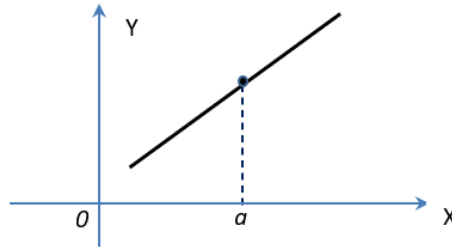
หมายเหตุ ถ้า f ขาดสมบัติข้อ 1, 2 หรือ 3 ในนิยามแม้แต่เพียงข้อเดียว เราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = a$

ฟังก์ชันที่มีกราฟดังรูปที่ 7.4 ไม่ต่อเนื่องที่ $x = a$



รูปที่ 7.4

ฟังก์ชันที่มีกราฟดังรูปที่ 1.11 ต่อเนื่องที่ $x = a$



รูปที่ 7.5

ตัวอย่างที่ 7.12 กำหนด $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1}, & 1 < x \leq 2 \\ 3-x, & x > 2 \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

- ก. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แต่ต่อเนื่องที่ $x = 2$
- ข. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$
- ค. f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และต่อเนื่องที่ $x = 2$
- ง. f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

แนวคิด พิจารณาที่ $x = 1$ จะได้ว่า

$$1) f(1) = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} \text{ หาค่าไม่ได้}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ หาค่าไม่ได้}$$

แสดงว่า $f(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

พิจารณาที่ $x = 2$ จะได้ว่า

$$1) f(2) = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3-x) = 3-2 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

$$3) \text{ จะได้ว่า } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

แสดงว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ ดังนั้น ข้อ ก. ถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 7.13 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$ จงแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$
(ให้นักศึกษาทำเอง)

ทฤษฎีบท 3.1

ฟังก์ชันพหุนาม $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ หรือกล่าวได้ว่า ฟังก์ชันพหุนามมีความต่อเนื่องที่ทุกๆจำนวนจริง

เช่น $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 3x - 6$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

ทฤษฎีบท 3.2 ฟังก์ชันตรรกยะ $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ โดยที่ $g(x) \neq 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $g(a) \neq 0$ หรือกล่าวได้ว่า

ฟังก์ชันตรรกยะมีความต่อเนื่องที่ทุกๆจำนวนจริงในโดเมนของฟังก์ชัน

เช่น $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-9}$ จะเห็นว่า $x^2 - 9 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 3, -3$ จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่ทุกๆจำนวนจริง ยกเว้นที่ $x = 3$ และ $x = -3$

ตัวอย่างที่ 7.14 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & , x \neq -3 \\ -6 & , x = -3 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = -3$ หรือไม่

แนวคิด พิจารณาที่ $x = -3$ จะได้ว่า

$$1) f(-3) = -6$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x^2-9}{x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{(x+3)(x-3)}{x+3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} (x-3) = (-3-3) = -6 \end{aligned}$$

$$3) \text{ จะได้ว่า } f(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$

แสดงว่า $f(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = -3$

ทฤษฎีบท 3.3 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ และถ้า c เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

1. $f + g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
2. $f - g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
3. $f \cdot g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
4. $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ $g(a) \neq 0$
5. cf เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$

เช่น $f(x) = x \cdot 2^x$ จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยสมมติให้ $g(x) = x$ และ $h(x) = 2^x$ จะพบว่า g และ h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เนื่องจาก $f = g \cdot h$ จากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

ทฤษฎีบท 3.4 ความต่อเนื่องของฟังก์ชันประกอบ (นิยามโดย $(f \circ g)(x) = f(g(x))$) ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = f(a)$ แล้ว $g \circ f$ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$

นั่นคือถ้าให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิดที่บรรจุจำนวน L และถ้าลิมิต $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ มีจริง

$$\text{แล้ว } \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f \cdot L$$

3.1 ฟังก์ชันต่อเนื่องด้านเดียว

การพิจารณาฟังก์ชันต่อเนื่อง ต้องใช้การตรวจสอบลิมิตทั้งสองด้านที่ $x = a$ แต่กรณีนี้ถึงจะไม่ต่อเนื่อง(สองด้าน) ที่ $x = a$ ก็อาจจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเพียงด้านเดียว

นิยาม 3.2 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

นิยาม 3.3 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

3.2 ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง

นิยาม 3.4 ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง (a, b) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกๆ จุดในช่วง (a, b) หรืออาจกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a, b) ก็ต่อเมื่อ $c \in (a, b)$ แล้ว

1. $f(c)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

นิยาม 3.5 ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a, b)
2. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่ $x = a$
3. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x = b$

หรืออาจกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ

1. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
3. $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

ตัวอย่างที่ 7.15 กำหนด $f(x) = \sqrt{x}$ จงแสดงว่า

- 1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่ $x = 0$
- 2) f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$

แนวคิด

- 1) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่ $x = 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$1. f(0) = \sqrt{0} = 0 \text{ หาค่าได้}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x}) = \sqrt{0} = 0 \text{ หาค่าได้}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่ $x = 0$

- 2) พิจารณา f เป็นฟังก์ชันที่ $x = 0$

$$1. f(0) = \sqrt{0} = 0 \text{ หาค่าได้}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x}) = \sqrt{0} = 0 \text{ แต่ } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ หาค่าไม่ได้}$$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้

สรุป f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$

ตัวอย่างที่ 7.16 กำหนด $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & , 5 < x \leq 8 \\ 10 & , x = 5 \end{cases}$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[5,8]$

แนวคิด ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $[5,8]$ ก็ต่อเมื่อ

$$1. \text{ ให้ } c \in (5,8) \text{ จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{x^2-25}{x-5} \right) = \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow c} (x+5) = c+5$$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(5,8)$

2. ตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่ $x = 5$ หรือไม่

$$2.1) f(5) = 10$$

$$2.2) \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \left(\frac{x^2-25}{x-5} \right) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \left(\frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 5^+} (x+5) = 5+5 = 10$$

$$2.3) f(5) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 10$$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่ $x = 5$

3. ตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x = 8$ หรือไม่

$$3.1) f(8) = \left(\frac{8^2-25}{8-5}\right) = \left(\frac{64-25}{3}\right) = \frac{39}{3} = 13$$

$$3.2) \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} \left(\frac{x^2-25}{x-5}\right) = \lim_{x \rightarrow 8^-} \left(\frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)}\right) \\ = \lim_{x \rightarrow 8^-} (x+5) = 8+5 = 13$$

$$3.3) f(8) = \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 13$$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x = 8$

สรุปได้ว่า ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $[5,8]$

4. การนำความรู้เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์

1. สถานการณ์: การหาความเร็วขณะหนึ่งของยานพาหนะ

สถานการณ์ปัญหา วิศวกรการบินต้องการหา ความเร็วทันที (Instantaneous Velocity) ของโดรน
สำรวจที่กำลังเร่งความเร็ว สูตรที่ใช้อธิบายตำแหน่งของโดรน (s) ที่เวลา (t) ใด ๆ ถูกกำหนดโดย

$$\text{ฟังก์ชัน } s(t) = 5t^2 + 20t \text{ (หน่วยเป็นเมตร)}$$

คำถาม: ความเร็วขณะหนึ่งของโดรนที่เวลา $t = 3$ วินาที มีค่าเท่าใด? (ความเร็วขณะหนึ่งคือนิยามของอนุพันธ์ ซึ่งหาได้จากลิมิตของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย)

แนวคิด ความเร็วขณะหนึ่ง $v(t)$ คือลิมิตของความเร็วเฉลี่ย $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ เมื่อช่วงเวลา Δt เข้าใกล้ศูนย์:

$$v(t) = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

การคำนวณที่ $t = 3$ วินาที:

$$1. \text{ หา } s(3) = 5(3)^2 + 20(3) = 5(9) + 60 = 45 + 60 = 105$$

$$2. \text{ หา } s(3 + \Delta t) = 5(3 + \Delta t)^2 + 20(3 + \Delta t)$$

$$= 5(9 + 6\Delta t + (\Delta t)^2) + 60 + 20\Delta t$$

$$= 45 + 30\Delta t + 5(\Delta t)^2 + 60 + 20\Delta t$$

$$= 105 + 50\Delta t + 5(\Delta t)^2$$

3. หาลิมิต

$$v(3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{105 + 50\Delta t + 5(\Delta t)^2 - 105}{\Delta t} \right)$$

$$v(3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{50\Delta t + 5(\Delta t)^2}{\Delta t} \right)$$

$$v(3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (50 + 5\Delta t) = 50 + 5(0) = 50$$

คำตอบ: ความเร็วขณะหนึ่งของโดรนที่เวลา $t = 3$ วินาที คือ 50 เมตรต่อวินาที (m/s)

2. สถานการณ์: การวิเคราะห์อุณหภูมิของสารเมื่อเกิดปฏิกิริยา

สถานการณ์ปัญหา ในห้องปฏิบัติการ ฟังก์ชันอุณหภูมิ (T) ของสารเคมีที่กำลังเกิดปฏิกิริยา ขึ้นอยู่กับเวลา (t) (หน่วยเป็นนาที) กำหนดโดยฟังก์ชันหลายช่วง:

$$T(t) = \begin{cases} 20 + 3t^2, & 0 \leq t < 5 \\ 65 + 5t, & t \geq 5 \end{cases}$$

คำถาม: ปฏิกิริยาเคมีมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ ต่อเนื่อง ที่เวลา $t=5$ นาทีหรือไม่ หากไม่ต่อเนื่อง การเปลี่ยนแปลงที่จุดนี้อาจก่อให้เกิดความเสียหายต่ออุปกรณ์ได้

แนวคิด ฟังก์ชัน $T(t)$ จะต่อเนื่องที่จุด $t = c$ ก็ต่อเมื่อเข้าเงื่อนไข 3 ข้อ คือ:

1. $T(c)$ หาค่าได้
2. $\lim_{t \rightarrow c} T(t)$ หาค่าได้ (ลิมิตซ้าย = ลิมิตขวา)
3. $\lim_{t \rightarrow c} T(t) = T(c)$

ตรวจสอบความต่อเนื่องที่ $t = 5$

1. หา $T(5)$: ใช้ฟังก์ชันสำหรับ $t \geq 5$:

$$\begin{aligned} T(t) &= 65 + 5t \\ T(5) &= 65 + 5(5) = 65 + 25 = 90 \end{aligned}$$

2. หา $\lim_{t \rightarrow 5} T(t)$

ลิมิตซ้าย $\lim_{t \rightarrow 5^-} T(t)$ ใช้ฟังก์ชันสำหรับ $t < 5$: $T(t) = 20 + 3t^2$

$$\lim_{t \rightarrow 5^-} (20 + 3t^2) = 20 + 3(5)^2 = 20 + (75) = 95$$

ลิมิตขวา $\lim_{t \rightarrow 5^+} T(t)$ ใช้ฟังก์ชันสำหรับ $t < 5$: $T(t) = 65 + 5t$

$$\lim_{t \rightarrow 5^+} (65 + 5t) = 65 + 5(5) = 65 + (25) = 90$$

เนื่องจากลิมิตซ้าย ไม่เท่ากับ ลิมิตขวา ($95 \neq 90$) ดังนั้น $\lim_{t \rightarrow 5} T(t)$ หาค่าไม่ได้

3. สรุป: เงื่อนไขความต่อเนื่องข้อที่ 2 ไม่ผ่าน

คำตอบ: ฟังก์ชันอุณหภูมิ $T(t)$ ไม่ต่อเนื่อง ที่เวลา $t = 5$ นาที นั้นหมายความว่าอุณหภูมิมีการ "เพิ่มขึ้น" อย่างทันทีจาก 95°C (ค่าลิมิตซ้าย) ไปที่ 90°C (ค่าฟังก์ชัน) ณ จุดเปลี่ยนเวลา ซึ่งอาจบ่งชี้ถึงปัญหาในการควบคุมปฏิกิริยาหรือการวัดที่ผิดพลาด

3. สถานการณ์: การเจือจางสารเคมีในน้ำ

สถานการณ์ปัญหา : นักเคมีต้องการตรวจสอบปริมาณสารพิษในน้ำที่ถูกปล่อยสู่แหล่งน้ำธรรมชาติ โดยมีการกำหนดให้ปริมาณสารพิษเป็นฟังก์ชันขึ้นอยู่กับระยะทาง (x) จากจุดปล่อย (หน่วยเป็นกิโลเมตร) กำหนดโดย:

$$C(x) = \frac{500x}{x^2+1} \text{ (หน่วยเป็น มิลลิกรัม/ลิตร)}$$

ปริมาณสารพิษในระยะทางที่ไกลมาก ๆ จากจุดปล่อย (คือเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้อนันต์) จะมีแนวโน้มเข้าใกล้เท่าใด การตรวจสอบปริมาณสารพิษในระยะไกลมีความสำคัญต่อการกำหนดค่าปลอดภัยในแหล่งน้ำ

แนวคิด การหาพฤติกรรมของฟังก์ชันเมื่อตัวแปรที่มีค่ามาก ๆ สอดคล้องกับการหาลิมิตที่อนันต์

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{500x}{x^2+1} \right)$$

1. ใช้วิธีการทั้งเศษและส่วนด้วยพจน์ที่มีกำลังสูงสุดของตัวส่วน ซึ่งคือ x^2

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{500x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{500x}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$$

ใช้ทฤษฎีลิมิตที่ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{x^n} \right) = 0$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่และ $n > 0$:

$$L = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{500x}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)} = \frac{0}{1+0} = 0$$

คำตอบ: ปริมาณสารพิษในระยะทางที่ไกลมาก ๆ จากจุดปล่อยจะเข้าใกล้ 0 มิลลิกรัม/ลิตร (mg/L) ซึ่งหมายความว่าสารพิษจะถูกเจือจางจนแทบไม่มีผลกระทบต่อในระยะทางที่ไกลพอ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

1. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1) $\lim_{x \rightarrow 2} 4$

2) $\lim_{x \rightarrow 3} x$

3) $\lim_{x \rightarrow -1} x^3$

4) $\lim_{x \rightarrow 2} 4x^3$

5) $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 + 5x)$

6) $\lim_{x \rightarrow -1} (4x^3 - 6x^2 - 9x + 1)$

7) $\lim_{x \rightarrow 2} ((x^3 + 2x - 5)(x^2 - 3x))$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x^2 - 3x + 1}{2x - 1} \right)$

9) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{4x^3 - 3x + 3}{x^2 + 2x + 1} \right)$

10) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^2 - 16}{x - 4} \right)$

11) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} \right)$

12) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} \right)$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+16} - 4}{x} \right)$

14) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} \right)$

15) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 7x - 2)^4$

16) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 + 5}$

17) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (4x^2 + 4x + 9)^{\frac{2}{3}}$

18) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\sqrt[3]{\frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}} \right)$

19) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \right)$

20) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} \right)$

21) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} \right)$

22) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} \right)$

2. จงหาลิมิตอนันต์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยระบุว่า เป็น ∞ หรือ $-\infty$

1) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{x^3}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x^3}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x^2}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x^2}$

5) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x - 2}$

6) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x - 2}$

7) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x - 1}$

8) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1}$

9) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{\sqrt{-x}}$

10) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} \right)$

11) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \left(\frac{x^2 - 3}{(x - 5)^2} \right)$

12) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{-1}{\sqrt{3 - x}} \right)$

3. จงหาลิมิตที่อนันต์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ (ถ้ามีลิมิตจริง)

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} 40$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} 40$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x+3}{2x-1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2-6x+1}{2x^3-x+3} \right)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+1}{4x^2-1} \right)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^3-2}{4x+1} \right)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{6x^3-x}{2x^{10}+5x+8} \right)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4+1066x^2-1492}{3x^4-2001} \right)$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} \right)$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} \right)$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2-1})$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-5x+6} - x)$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} (x)(\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{9x^2+x+3}}{6x} \right)$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{4x^2+x}}{\sqrt{9x^2-3}} \right)$$

4. กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ ฟังก์ชันไม่มีความต่อเนื่องที่ใดบ้าง พร้อมให้เหตุผลประกอบ

$$1) f(x) = \begin{cases} 3x-1 & , x < 2 \\ 4-x^2 & , x \geq 2 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & , x < 4 \\ \sqrt{x-4} & , x \geq 4 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} |x+2| & , x \neq -2 \\ 3 & , x = -2 \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \sin x & , x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & , x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} |x-3| & , x \neq 3 \\ 2 & , x = 3 \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

5. จงหาช่วงที่ฟังก์ชันมีความต่อเนื่อง

$$1) f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-2}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x \leq -1 \\ 4-x^2 & , \quad -1 < x \leq 2 \\ \frac{x}{2} - 1 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} 1-x & , x \leq 2 \\ x-1 & , x > 2 \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{|x-2|} & , x \neq 2 \\ 10 & , x = 2 \end{cases}$$

6. กำหนด $f(x) = \frac{2}{x+5}$ จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องบนช่วงต่อไปนี้หรือไม่
 $[-6,4], (-5, \infty), [-5, \infty), [-10, -5)$

7. กำหนด $g(x) = \begin{cases} 2x-3 & , \quad x < -2 \\ x-5 & , \quad -2 \leq x \leq 1 \\ 3-x & , \quad x > 1 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า g มีความต่อเนื่อง
บนช่วงต่อไปนี้หรือไม่ $(-\infty, 1), (-2, \infty), (-2, 1), [-2, 1), [-2, 1]$

8. วิศวกรการบินต้องการหาความเร็วทันทีของจรวดขณะทะยานขึ้นสู่ชั้นบรรยากาศ สูตรแสดงตำแหน่งของจรวด (s) ในหน่วยกิโลเมตร ที่เวลา (t) ในหน่วยวินาที ถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน

$$s(t) = 0.5t^2 + 10t$$

จงหา ความเร็วขณะหนึ่ง (Instantaneous Velocity) ของจรวดที่เวลา $t = 10$ วินาที

9. นักฟิสิกส์ต้องตรวจสอบความต่อเนื่องของอุณหภูมิในเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ อุณหภูมิ (T) ในหน่วยองศาเซลเซียส เปลี่ยนแปลงตามปริมาณเชื้อเพลิง (x) ในหน่วยกิโลกรัม ถูกกำหนดโดยฟังก์ชันหลายช่วง:

$$T(x) = \begin{cases} kx^2 + 15 & , x < 2 \\ 5x + 3 & , x \geq 2 \end{cases}$$

จงหาค่าของ k ที่ทำให้อุณหภูมิของเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์เป็น ฟังก์ชันต่อเนื่อง ที่จุดเปลี่ยนปริมาณเชื้อเพลิง $x = 2$ กิโลกรัม เพื่อป้องกันความเสียหาย

10. นักอุตุนิยมวิทยากำลังสร้างแบบจำลองการเจือจางของมลพิษทางอากาศที่ถูกปล่อยออกจากปล่องโรงงาน ความเข้มข้นของมลพิษ (P) ในหน่วยไมโครกรัม/ลูกบาศก์เมตร ขึ้นอยู่กับเวลา (t) ในหน่วยชั่วโมง หลังจากการปล่อย ถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน:

$$P(t) = \frac{1000t^2 + 500}{2t^2 + 5t + 100}$$

ความเข้มข้นของมลพิษในบรรยากาศจะมีแนวโน้มเข้าใกล้ค่าคงที่ใดใน ระยะยาว (Long Run) เมื่อเวลาผ่านไปนานมาก ๆ ($t \rightarrow \infty$) ค่านี้คือระดับมลพิษคงที่ที่ชุมชนโดยรอบจะต้องเผชิญ

บทที่ 8

แคลคูลัสเบื้องต้น(อนุพันธ์)

1. อัตราการเปลี่ยนแปลง (Rate of Change)

บทนิยาม 1 ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนเป็น $x + h$ โดยที่ $h \neq 0$ ค่าของ y เปลี่ยนจาก $f(x)$ เป็น $f(x + h)$ แล้ว

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใดๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

สำหรับการเคลื่อนที่ในแนวตรง ถ้าวัตถุมีการเคลื่อนที่คือ $S = f(t)$ แล้ว ความเร็ว (velocity) ขณะเวลา t ใดๆ เท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ เขียนแทนด้วย v หมายถึง

1. สำหรับฟังก์ชัน $y = f(x)$ เมื่ออัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นจำนวนบวก แสดงว่า เมื่อค่า x เพิ่มขึ้น ค่าของ y จะเพิ่มขึ้น และเมื่ออัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นจำนวนลบ แสดงว่า เมื่อค่า x เพิ่มขึ้น ค่าของ y จะลดลง

2. สำหรับความเร็วขณะเวลา t ใดๆ ซึ่งเขียนแทนด้วย v

ถ้า v เป็นจำนวนบวก แสดงว่า เมื่อค่า t เพิ่มขึ้น ค่าของ S จะเพิ่มขึ้น

ถ้า v เป็นจำนวนลบ แสดงว่า เมื่อค่า t เพิ่มขึ้น ค่าของ S จะลดลง

ตัวอย่างที่ 8.1 กำหนดให้ $f(x) = -\frac{1}{x}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง x ถึง $x + h$

แนวคิด อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในช่วง x ถึง $x + h$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{x+h}\right) - \left(-\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \frac{-x+x+h}{x(x+h) \cdot h}$$

$$= \frac{1}{x(x+h)}$$

2. บทนิยามของอนุพันธ์

บทนิยามที่ 2 ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $y = f(x)$ จะเรียก $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$ เมื่อลิมิตมีค่าว่า **อนุพันธ์** ของ f เทียบกับ x และจะกล่าวว่า f มีอนุพันธ์ที่ x เขียนแทนด้วย

สัญลักษณ์ $f'(x)$ หรือ $\frac{d}{dx} f(x)$ หรือ $D_x f(x)$ หรือ y' หรือ $\frac{dy}{dx}$

นั่นคือ $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$ เมื่อลิมิตมีค่า

ถ้าให้ $\Delta x = h$ จะได้ $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$ เมื่อลิมิตมีค่า

ถ้า $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$ มีค่า จะเรียกลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ทางซ้ายของ f ที่ x และ

ถ้า $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$ มีค่า จะเรียกลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ทางขวาของ f ที่ x

ใช้สัญลักษณ์ $f'(x^-)$ และ $f'(x^+)$ แทนอนุพันธ์ของทางซ้ายและอนุพันธ์ทางขวาตามลำดับ

$f'(x)$ จะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $f'(x^-) = f'(x^+)$ และได้ $f'(x) = f'(x^-) = f'(x^+)$

อนุพันธ์ของ f ที่ $x = a$ เขียนแทนด้วย $f'(a)$ โดยที่ $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$ เมื่อลิมิตมีค่า

สูตรของอนุพันธ์

กำหนด $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ และ c เป็นค่าคงตัวใดๆ และ n เป็นจำนวนจริง

ถ้า u และ v มีอนุพันธ์ที่ x แล้วจะได้สูตรของอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1. \frac{dc}{dx} = 0$$

$$2. \frac{dx}{dx} = 1$$

$$3. \frac{d}{dx} (cu) = c \left(\frac{du}{dx} \right)$$

$$4. \frac{d}{dx} (u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$5. \frac{d}{dx} (u \cdot v) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$6. \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}, v \neq 0$$

$$7. \frac{dv^n}{dx} = nv^{n-1} \left(\frac{dv}{dx} \right)$$

ตัวอย่างที่ 8.2 กำหนดให้ $f(x) = \frac{3x^{\frac{7}{3}} - 12x^{\frac{5}{3}} - 24x^{\frac{4}{3}}}{x^2}$ ค่าของ $\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\}$ เมื่อ $x = 8$ มีค่าเท่าใด

แนวคิด เพราะว่า
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x^{\frac{7}{3}} - 12x^{\frac{5}{3}} - 24x^{\frac{4}{3}}}{x^2} \\ &= 3x^{\frac{7}{3}-2} - 12x^{\frac{5}{3}-2} - 24x^{\frac{4}{3}-2} \\ &= 3x^{\frac{1}{3}} - 12x^{-\frac{1}{3}} - 24x^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

และ
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\}$$

หาอนุพันธ์โดยใช้สูตร จะได้
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \left(\frac{1}{3} \right) x^{\frac{1}{3}-1} - 12 \left(-\frac{1}{3} \right) x^{-\frac{1}{3}-1} - 24 \left(-\frac{2}{3} \right) x^{-\frac{2}{3}-1} \\ &= x^{-\frac{2}{3}} + 4x^{-\frac{4}{3}} + 16x^{-\frac{5}{3}} \\ &= \frac{1}{\left(x^{\frac{1}{3}} \right)^2} + \frac{4}{\left(x^{\frac{1}{3}} \right)^4} + \frac{16}{\left(x^{\frac{1}{3}} \right)^5} \end{aligned}$$

เมื่อ $x = 8$ จะได้
$$\begin{aligned} f'(8) &= \frac{1}{4} + \frac{4}{16} + \frac{16}{32} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8.3 กำหนดให้ $f(x) = (3x - 2)^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}$ จงหาค่าของ $f'(x^2) - f'(1)$

แนวคิด เพราะว่า
$$f(x) = (3x - 2)^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$= 9x^2 - 12x + 4 + 4x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 18x + 12 + 0 + 4 \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$= 18x - 12 - \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

$$f'(x^2) = 18x^2 - 12 - \frac{2}{x^3} \quad \dots\dots\dots (1)$$

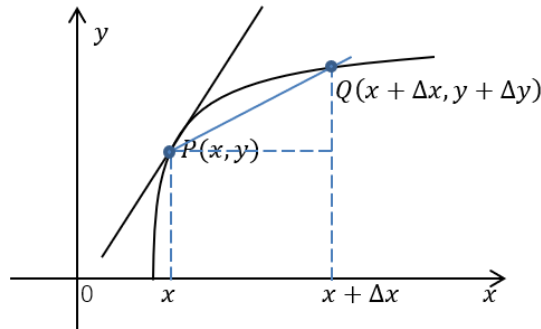
$$f'(1) = 18 - 12 - 2 = 4 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(1)-(2) \text{ จะได้ } \therefore f'(x^2) - f'(1) = 18x^2 - 16 - \frac{2}{x^3}$$

3. ความชันของเส้นโค้ง (ความหมายของอนุพันธ์ในเชิงเรขาคณิต)

กำหนด $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$

ให้ $P(x, y)$ และ $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ เป็นจุดสองจุดบนเส้นโค้ง ดังภาพ 8.1



รูป 8.1

เมื่อเคลื่อน Q ไปตามเส้นโค้งให้เข้าใกล้ P จะได้ว่าเส้นตรง PQ จะเคลื่อนเข้าสู่ตำแหน่งของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P นั่นเอง

นั่นคือ เมื่อ Δx เข้าใกล้ 0 ความชันของเส้นตรง PQ จะเข้าใกล้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P นั่นเอง

$$\text{เนื่องจากความชันของเส้นตรง } PQ = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P คือ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \text{ เมื่อลิมิตมีค่า}$$

บางครั้งเรียกความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P ว่าความชันของเส้นโค้ง ณ จุด P

สรุปเกี่ยวกับความชันของเส้นโค้ง

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง และถ้า f มีอนุพันธ์ที่ $x = a$ แล้ว จะได้ว่า

1) ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(a, b) = f'(a)$

2) ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(a, b) = f'(a)$

สมการของเส้นตรงสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (a, b) คือ $y - b = f'(a)(x - a)$

ตัวอย่างที่ 8.4 ให้ L เป็นเส้นตรงซึ่งสัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{2x^3-3}{x^2}$, $x > 0$ ที่จุด $(1, -1)$ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับ L ณ จุดสัมผัสจะตัดกับพาราโบลา $x = y^2$ ที่จุดใด

แนวคิด โจทย์กำหนดสมการเส้นโค้ง $y = \frac{2x^3-3}{x^2}$

$$\text{จัดรูปใหม่ } y = 2x - 3x^{-2}$$

$$\text{จะได้ } y' = 2 + \frac{6}{x^3}$$

$$\text{ดังนั้น ความชันของ } L \text{ ณ จุด } (1, -1) = 2 + \frac{6}{(1)^3} = 8$$

ให้ L_1 ตั้งฉากกับ L ที่จุด $(1, -1)$

$$\text{จะได้ ความชันของ } L_1 = -\frac{1}{8}$$

(เพราะว่า ผลคูณของความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกันจะมีค่าเท่ากับ -1)

$$\text{ดังนั้น สมการของ } L_1 \text{ คือ } y - (-1) = -\frac{1}{8}(x - 1)$$

$$\text{หรือ } 8y + 8 = -x + 1$$

$$x + 8y = -7 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{สมการพาราโบลา คือ } x = y^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

แทนค่า $x = y^2$ ใน (1) จะได้

$$y^2 + 8y + 7 = 0$$

$$(y + 1)(y + 7) = 0$$

$$y = -1, -7$$

$$\text{แทนค่าใน (2) จะได้ } x = 1, 49$$

ดังนั้น จุดตัดของ L_1 กับพาราโบลา $x = y^2$ คือ $(1, -1)$ และ $(49, -7)$

4. ความเร็ว

ถ้าให้ s เป็นระยะทางที่วัตถุอยู่ห่างจากจุดตั้งต้น ณ เวลา t ใดๆ จะได้ s เป็นฟังก์ชันของ t คือ $s = f(t)$

ณ เวลา $t + \Delta t$ วัตถุอยู่ห่างจากจุดตั้งต้น $s + \Delta s$ โดยที่

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t)$$

จะได้ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในช่วงเวลา Δt เป็น

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

ความเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่จากเวลา t ถึง $t + \Delta t$ คือ

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ดังนั้นความเร็วชั่วขณะ ณ เวลา t ใดๆ คือ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right) \text{ เมื่อลิมิตมีค่า}$$

นั่นคือ
$$V(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right) \text{ เมื่อลิมิตมีค่า}$$

การหาความเร็วและความชันของเส้นโค้ง ก็คือการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของสมการการเคลื่อนที่หรือสมการเส้นโค้งนั่นเอง

5. กฎลูกโซ่ (Chain Rule)

กำหนด $y = f(u)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ u และ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ในกรณีที่ฟังก์ชันหลายฟังก์ชันซึ่งสามารถหาฟังก์ชันประกอบได้ เช่น $y = f(u)$,

$u = g(v)$ และ $v = h(x)$ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

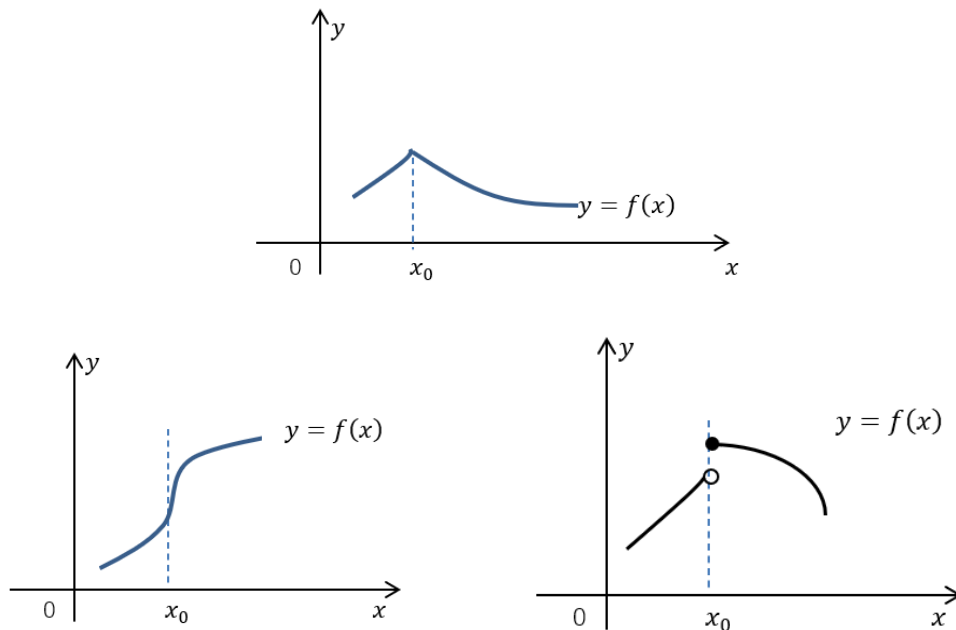
6. ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f จะนิยามที่จุด ซึ่งลิมิตจากนิยาม $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ หาค่าได้ถ้าจุดนั้นคือ x_0 เรากล่าวว่า f สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ x_0 หรือ f มีอนุพันธ์ที่ x_0 หรืออาจกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่าโดเมนของ f' ประกอบด้วย จุดที่ f หาอนุพันธ์ได้

และกล่าวว่า f หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b) ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่แต่ละจุดใน (a, b) และกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ถ้า f หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $(-\infty, +\infty)$

แต่ถ้า f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุดต่างๆ ได้ จะกล่าวว่า อนุพันธ์ของ f ไม่มีที่จุดนั้น ซึ่งเราอาจแบ่งกลุ่มของจุดที่ทำให้ไม่สามารถหาอนุพันธ์ของ f ได้ 3 กลุ่มดังนี้

1. จุดที่ทำให้กราฟหักจนเกิดมุมหรือเป็นเหลี่ยม
2. จุดที่เส้นสัมผัสกราฟตั้งฉากกับแกน x

3. จุดที่กราฟของ f ไม่ต่อเนื่องหรือเป็นจุดขาดตอน

รูป 8.2

7. ความสัมพันธ์ระหว่างการมีอนุพันธ์กับความต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด x_0 แล้ว f จะมีความต่อเนื่องที่จุด x_0 ด้วย

หมายเหตุ จากทฤษฎีบทจะได้ว่า ถ้า f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด x_0 แล้ว f จะหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด x_0 แต่ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่จุด x_0 อาจจะหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด x_0

8. อนุพันธ์อันดับสูง

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x จะได้อนุพันธ์คือ

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ เมื่อลิมิตมีค่า เราเรียก } f'(x) \text{ ว่า อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ } f(x)$$

ถ้า $f'(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x จะเรียกอนุพันธ์ของ $f'(x)$ ว่า อนุพันธ์อันดับที่สองของ $f(x)$

และเขียนแทนด้วย $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ หรือ y''

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \text{ เมื่อลิมิตมีค่า โดยทั่วไป } \frac{d^ny}{dx^n} \text{ ก็คืออนุพันธ์ของ } \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \text{ โดย } \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h} \text{ เมื่อลิมิตมีค่า และ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

นั่นคือ ถ้า $y = f(x)$

อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อลิมิตมีค่า

อนุพันธ์อันดับที่สอง $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x))$

อนุพันธ์อันดับที่สาม $\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = \frac{d}{dx}(f''(x))$

.

.

.

อนุพันธ์อันดับที่ n $\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}(f^{(n-1)}(x))$

9. ความเร่ง (Acceleration)

ความเร่ง (a) ของวัตถุขณะเวลา t ใด คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (v) เทียบกับเวลา t ใดๆ

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ตามสมการการเคลื่อนที่ คือ $S = f(t)$ เมื่อ S คือระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในเวลา t จะได้

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ และ } v = \frac{dS}{dt} \quad \text{ดังนั้น } a = \frac{d}{dt} \left(\frac{dS}{dt} \right) = \frac{d^2S}{dt^2}$$

**ถ้าความเร่งเป็นจำนวนบวก แสดงว่าเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ความเร็วจะเพิ่มขึ้น และถ้าความเร่งเป็นจำนวนลบ แสดงว่าเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ความเร็วจะลดลง

10. อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สรุปสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ดังนี้

$$1. \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$2. \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$3. \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$4. \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$5. \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$6. \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

11. การประยุกต์ของอนุพันธ์

11.1 อัตราสัมพันธ์ (Relate rates)

อัตราสัมพันธ์ (Related Rates) คือ การประยุกต์ใช้อนุพันธ์เพื่อหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณหนึ่ง ซึ่งมีความสัมพันธ์กับปริมาณอื่นที่กำลังเปลี่ยนแปลงอยู่ตามเวลา กล่าวคือ เมื่อมีปริมาณ A และปริมาณ B ที่ทั้งคู่ขึ้นอยู่กับเวลา t และมีความสัมพันธ์กันตามสมการใดสมการหนึ่ง หากเราทราบอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณหนึ่ง (เช่น $\frac{dA}{dt}$), เราสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของอีกปริมาณหนึ่ง ($\frac{dB}{dt}$) ได้

แนวคิดหลักของอัตราสัมพันธ์

1) ความสัมพันธ์ตามเวลา: ทุกปริมาณที่เกี่ยวข้องถือว่าเป็นฟังก์ชันของเวลา (t) โดยปริยาย

2) สมการความสัมพันธ์: ปริมาณเหล่านี้ถูกเชื่อมโยงด้วยสมการทางเรขาคณิตหรือฟิสิกส์ (เช่น สูตรปริมาตร, กฎพีทาโกรัส, สูตรพื้นที่)

3) การหาอนุพันธ์โดยปริยาย (Implicit Differentiation): เราหาอนุพันธ์ของสมการความสัมพันธ์เทียบกับตัวแปรเวลา (t) ตลอดทั้งสมการ ซึ่งจะทำให้เกิดอัตราการเปลี่ยนแปลง (อนุพันธ์เทียบกับเวลา) ของแต่ละตัวแปรขึ้นมาในสมการใหม่

ตัวอย่าง เป่าลมใส่ลูกโป่งทรงกลม

ปริมาณที่ 1: รัศมี (r) ของลูกโป่ง

ปริมาณที่ 2: ปริมาตร (V) ของลูกโป่ง

$$\text{สมการความสัมพันธ์: } V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

ถ้าเราต้องการทราบว่าอัตราที่รัศมีกำลังเพิ่มขึ้น ($\frac{dr}{dt}$) เป็นเท่าใด ในขณะที่เราทราบ อัตราที่ปริมาตรกำลังเพิ่มขึ้น ($\frac{dV}{dt}$) (คืออัตราการเป่าลมเข้า) ใช้เทคนิคอัตราสัมพันธ์:

1. หาอนุพันธ์เทียบกับ t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(\frac{4}{3}\pi r^3)}{dt}$$

2. ใช้กฎลูกโซ่ (Chain Rule):

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(\frac{4}{3}\pi r^3)}{dt} = (\frac{4}{3}\pi)(3r^2)(\frac{dr}{dt})$$

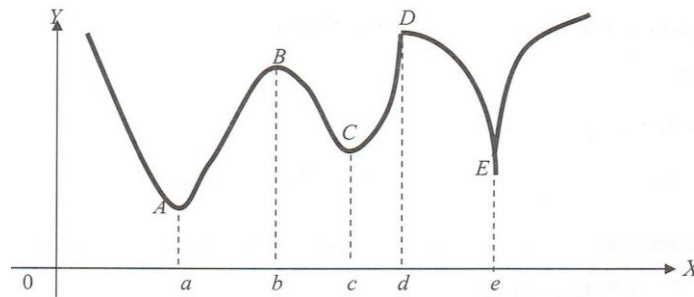
ในสมการสุดท้ายนี้ $\frac{dV}{dt}$ และ $\frac{dr}{dt}$ คือ อัตราสัมพันธ์ ที่เราใช้ในการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์หรือ

วิศวกรรมต่อไป

11.2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (Relative Maximum and Relative Minimum)

บทนิยาม 1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบนเซต S และ $c \in S$ เราจะกล่าวว่า

1. $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน S ก็ต่อเมื่อมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก $x \in S \cap (c - \delta, c + \delta)$ ในกรณีนี้เรากล่าวว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์บน S ที่ c
2. $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน S ก็ต่อเมื่อมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in S \cap (c - \delta, c + \delta)$ ในกรณีนี้เรากล่าวว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์บน S ที่ c
3. $f(c)$ เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (Relative Extreme) ของ f บน S ก็ต่อเมื่อ $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน S หรือ $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน S



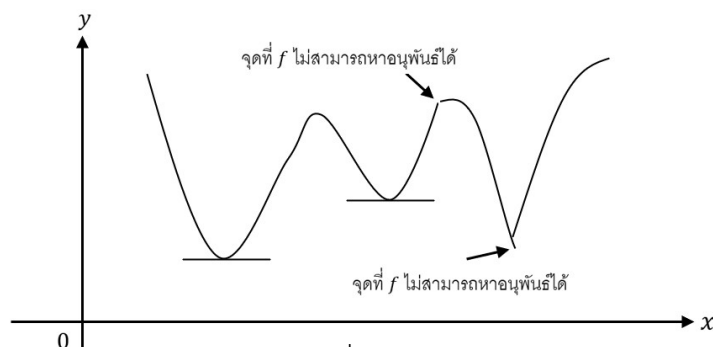
รูป 8.3

ทฤษฎีบท 2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบนช่วง (a, b) ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ c เมื่อ $c \in (a, b)$ และ $f'(c)$ มีค่าแล้ว $f'(c) = 0$

ทฤษฎีบท 3 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบนช่วง (a, b) ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ c เมื่อ $c \in (a, b)$ แล้ว $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า

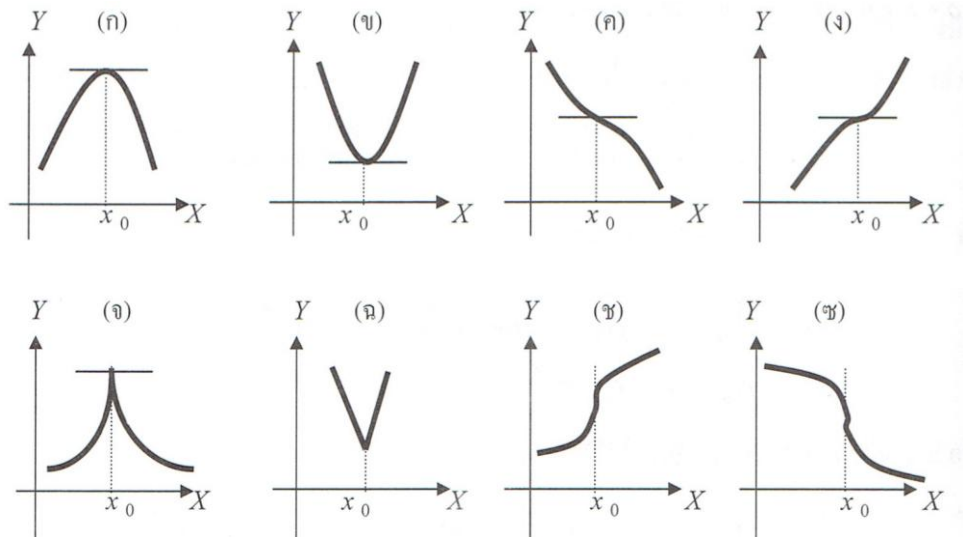
จุดวิกฤต (Critical Points)

จุดที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เป็นจุดที่แบ่งบริเวณที่กราฟมีค่าเพิ่มขึ้นกับบริเวณที่กราฟมีค่าลดลง ดังรูป 8.4 ซึ่งจะเห็นว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ของ f เกิดที่จุดซึ่งกราฟ มีเส้นสัมผัสในแนวนอน หรือจุดที่ f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้



รูป 8.4

ทฤษฎีบท 4 ให้ f เป็นฟังก์ชันและ $(a, b) \subseteq D_f$ และ $c \in (a, b)$ เราเรียก c ว่าจุดวิกฤต ของฟังก์ชัน f ก็ต่อเมื่อ $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า



รูป 8.5

การพิจารณาว่า $y = f(x)$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ใด

การทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ทฤษฎีบท 5

1. จาก $f'(x) = 0$ หา c ที่ทำให้ $f'(c) = 0$ เรียก c ว่า ค่าวิกฤต
2. ถ้า $f'(x) > 0$ เมื่อ x น้อยกว่า c เล็กน้อย แต่ $f'(x) < 0$ เมื่อ x มากกว่า c เล็กน้อย แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
3. ถ้า $f'(x) < 0$ เมื่อ x น้อยกว่า c เล็กน้อย แต่ $f'(x) > 0$ เมื่อ x มากกว่า c เล็กน้อย แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

การทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง

ทฤษฎีบท 6 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง S ใดๆ และ c เป็นค่าวิกฤตของ f ซึ่ง $f'(c) = 0$

1. ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
2. ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

หมายเหตุ กรณี $f''(c) = 0$ เราไม่สามารถสรุปได้ว่า $f(c)$ จะเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ถ้าต้องการตรวจสอบให้ใช้วิธีการทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง

11.3 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (Absolute Maximum and Absolute Minimum)

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบนเซต S และ $c \in S$ เราจะกล่าวว่า

1. $f(c)$ เป็น **ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** ของ f บน S ก็ต่อเมื่อ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก $x \in S$

ในกรณีนี้เรากล่าวว่า f มีค่าสูงสุดบน S ที่ c

2. $f(c)$ เป็น **ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** ของ f บน S ก็ต่อเมื่อ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in S$

ในกรณีนี้เรากล่าวว่า f มีค่าต่ำสุดบน S ที่ c

3. $f(c)$ เป็น **ค่าสุดขีดสัมบูรณ์** ของ f บน S ก็ต่อเมื่อ $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดของ f บน S

12. การประยุกต์ความรู้เรื่องอนุพันธ์ในการสอนวิทยาศาสตร์

สถานการณ์ 1. นักวิทยาศาสตร์การบินต้องการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของจรวดทดลองขนาดเล็กที่ปล่อยขึ้นในแนวตั้ง โดยทราบว่า ฟังก์ชันแสดงตำแหน่ง (*Position function*) ของจรวดจากพื้นดินในหน่วยเมตร (s) ณ เวลาใด ๆ ในหน่วยวินาที (t) สามารถประมาณได้ด้วยสมการ:

$$s(t) = -4.9t^2 + 100t$$

นักวิทยาศาสตร์ต้องการทราบข้อมูลสำคัญ 2 ประการ เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของจรวด:

1. อัตราเร็ว (*Velocity*) ของจรวด ณ วินาทีที่ 5 ($t=5$)
2. อัตราเร่ง (*Acceleration*) ของจรวด ณ วินาทีที่ 5 ($t=5$)

แนวคิด

1. การหา**อัตราเร็ว** (*Velocity*) ในทางฟิสิกส์ อัตราเร็วชั่วขณะ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งต่อเวลา ซึ่งสามารถหาได้จากการ หาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (*First Derivative*) ของฟังก์ชันตำแหน่งเทียบกับเวลา (t)

$$\text{ฟังก์ชันตำแหน่ง: } s(t) = -4.9t^2 + 100t$$

$$\text{ฟังก์ชันอัตราเร็ว: } v(t) = \frac{ds}{dt}$$

$$v(t) = \frac{d(-4.9t^2 + 100t)}{dt} = -4.9(2t) + 100 = -9.8t + 100$$

เมื่อต้องการหาอัตราเร็ว ณ วินาทีที่ 5 ($t=5$):

$$v(5) = -9.8(5) + 100 = -49 + 100 = 51 \text{ m/s}$$

ผลลัพธ์: จรวดมีความเร็ว 51 เมตร/วินาที ณ วินาทีที่ 5 (อัตราเร็วเป็นบวก แสดงว่าจรวดยังคงเคลื่อนที่ขึ้น)

2. การหาอัตราเร่ง (Acceleration) อัตราเร่งชั่วขณะ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงอัตราเร็วต่อเวลา ซึ่งสามารถหาได้จากการ หาอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivative) ของฟังก์ชันตำแหน่ง หรือ หาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ของฟังก์ชันอัตราเร็ว เทียบกับเวลา (t)

$$\text{ฟังก์ชันอัตราเร็ว: } v(t) = -9.8t + 100$$

$$\text{ฟังก์ชันอัตราเร่ง: } a(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$a(t) = \frac{d(-9.8t+100)}{dt} = -9.8 \text{ m/s}^2$$

เมื่อต้องการหาอัตราเร่ง ณ วินาทีที่ 5 ($t=5$):

$$a(5) = -9.8 \text{ m/s}^2$$

ผลลัพธ์: จรวดมีอัตราเร่ง -9.8 m/s^2 ณ วินาทีที่ 5 (อัตราเร่งเป็นลบและมีค่าคงที่ ซึ่งสอดคล้องกับค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงโลก $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ ที่ดึงจรวดลงมา)

สถานการณ์ที่ 2 นักชีววิทยาการเกษตรต้องการเพิ่มผลผลิตของพืชชนิดหนึ่ง โดยพบว่า ผลผลิตต่อต้น (P) ในหน่วยกิโลกรัม สัมพันธ์กับ จำนวนต้นต่อพื้นที่ (x) ในหน่วยต้น/ตารางเมตร

ตามฟังก์ชัน: $P(x) = 20 + 40x - 2x^2$ นักชีววิทยาต้องการทราบว่า ควรปลูกพืชกี่ต้นต่อตารางเมตร จึงจะทำให้ ผลผลิตต่อต้นมีค่าสูงสุด (ไม่ใช่รวมรวม)

แนวคิด การแก้ปัญหาโดยใช้ค่าสูงสุด (Optimization) การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันทำได้โดยการ

หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งแล้วกำหนดให้เท่ากับศูนย์ ($\frac{dP}{dx} = 0$) เพื่อหาจุดวิกฤต (Critical Point)

หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันผลผลิต:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d(20 + 40x - 2x^2)}{dx} = 40 - 4x$$

กำหนดให้ $\frac{dP}{dx} = 0$ เพื่อหาจำนวนต้นที่ให้ผลผลิตสูงสุด:

$$0 = 40 - 4x$$

$$x = 10$$

ตรวจสอบว่าเป็นค่าสูงสุดจริงหรือไม่ (โดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง):

$$\frac{d(P')}{dx} = \frac{d(40 - 4x)}{dx} = -4$$

เนื่องจากอนุพันธ์อันดับสองเป็นค่า ลบ ($-4 < 0$) แสดงว่า ณ $x = 10$ ฟังก์ชันมีค่า สูงสุด

สรุป: ควรปลูกพืช 10 ต้นต่อตารางเมตร จึงจะทำให้ผลผลิตต่อต้นมีค่าสูงสุด

ผลผลิตต่อต้นมีค่าสูงสุด $P(10) = 20 + 40(10) - 2(10)^2$

$$= 20 + 400 - 200 = 220 \text{ กิโลกรัม/ต้น}$$

สถานการณ์ที่ 3 ชายคนหนึ่งกระชียงเรือในทะเล ห่างจากจุด A บนฝั่ง เป็นระยะทางที่สั้นที่สุดเท่ากับ 5 ไมล์ เขาจะต้องขึ้นฝั่งห่างจาก A กี่ไมล์แล้วเดินไปยัง B จึงใช้เวลาน้อยที่สุด ถ้าเขากระชียงได้เร็วชั่วโมงละ 2 ไมล์ เดินได้เร็วชั่วโมงละ 4 ไมล์ และ B อยู่ห่างจาก A เป็นระยะทาง 6 ไมล์

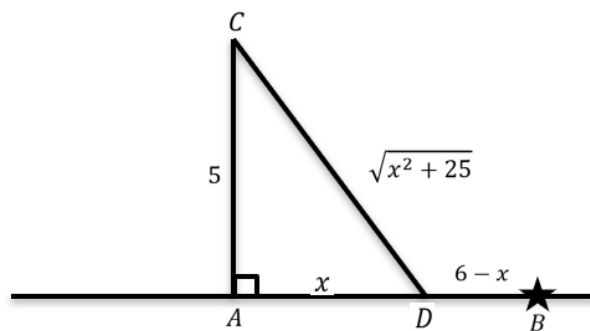
1. 2.5 ไมล์

2. 2.7 ไมล์

3. 2.89 ไมล์

4. 2.96 ไมล์

แนวตอบ ข้อ 3



สมมติให้กระชียงเรือไปขึ้นฝั่งที่จุด D ซึ่งระยะทาง $AD = x$ ไมล์

ให้ y แทนเวลาที่เขาให้เดินทางจาก C ไปยัง B (ผ่าน D)

$\therefore y = \text{เวลาที่ใช้ในช่วง } CD + \text{เวลาที่ใช้ในช่วง } DB$

$$= \frac{\sqrt{x^2+25}}{2} + \frac{6-x}{4}$$

$$y' = \frac{2x}{4(\sqrt{x^2+25})} - \frac{1}{4}$$

$\therefore$ ใช้เวลาน้อยที่สุด $\therefore y' = 0$ จะได้

$$\frac{2x}{4(\sqrt{x^2+25})} - \frac{1}{4} = 0$$

$$x = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$= 2.886 \text{ ไมล์}$$

$$x \approx 2.89 \text{ ไมล์}$$

เวลาช่วง CD (กระชียงเรือ)

2 ไมล์ ใช้เวลา 1 ชม.

$\sqrt{x^2+25}$ ไมล์ ใช้เวลา $\frac{\sqrt{x^2+25}}{2}$ ชม.

เวลาช่วง DB (เดิน)

4 ไมล์ ใช้เวลา 1 ชม.

$6-x$ ไมล์ ใช้เวลา $\frac{6-x}{4}$ ชม.

เขาต้องขึ้นฝั่งห่างจากจุด A ประมาณ 2.89 ไมล์ จึงจะใช้เวลาน้อยที่สุด

สถานการณ์ที่ 4 จะต้องล้อมรั้วรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารอบแปลงทดลองที่เป็นสวนผักริมแม่น้ำให้มีขนาดเท่าใด ซึ่งจะทำให้สวนผักมีพื้นที่มากที่สุด โดยใช้แนวแม่น้ำเป็นด้านหนึ่งของรั้ว (ถือว่าแนวแม่น้ำตรง ที่จะล้อมรั้วเป็นเส้นตรง)



1. $\frac{a^2}{2}$ ตร.ม
3. $\frac{a^2}{8}$ ตร.ม

2. $\frac{a^2}{4}$ ตร.ม
4. $\frac{a^2}{16}$ ตร.ม

แนวตอบ ข้อ 3

ให้ความยาวทั้งสามด้านที่ต้องการล้อมรั้วยาว a เมตร

ด้านกว้าง กว้างด้านละ x เมตร

ดังนั้น ด้านยาวยาวด้านละ $a - 2x$ เมตร

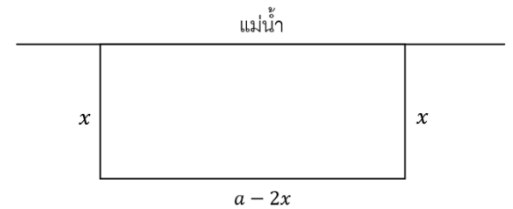
และให้ y แทน พื้นที่ของสวนผัก

$$y = \text{ความกว้าง} \times \text{ความยาว}$$

$$y = x(a - 2x)$$

$$y = ax - 2x^2$$

$$y' = a - 4x$$



เนื่องจาก y มีค่ามากที่สุด ดังนั้น $y' = 0$

$$0 = a - 4x$$

$$x = \frac{a}{4}$$

ด้านกว้าง $= \frac{a}{4}$ เมตร

ด้านยาว $= a - 2 \cdot \frac{a}{4} = \frac{a}{2}$ เมตร

ดังนั้น ต้องล้อมรั้วให้รั้วมีขนาดกว้าง $\frac{a}{4}$ และยาว $\frac{a}{2}$ เมตร หรือ

ต้องล้อมรั้วให้มีขนาด $\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1) f(x) = \frac{1}{3}x^{12} + 3x^5 - 8x^2 + 5$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

$$3) f(x) = 4\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$4) f(x) = 5x\sqrt{x} + x(3x^2 + 4) - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

$$5) f(x) = \sqrt{x}(x^4 + 3)$$

$$6) f(x) = \frac{3-2x}{3+2x}$$

$$7) f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1}$$

$$8) y = (x^5 + 1)(4x^2 + 7x - 9)$$

$$9) y = \frac{x^3}{1+\sqrt{x}}$$

$$10) y = \sqrt{x^2 + 6x + 3}$$

$$11) y = (t^3 + \sqrt{t^2 + 1})^{10}$$

$$12) \text{ ถ้า } y = u^3 \text{ และ } u = x^2 - 3x + 1 \text{ แล้ว จงหา } \frac{dy}{dx}$$

$$13) \text{ ถ้า } y = x^2 - 2x \text{ และ } x = 2t^2 + 1 \text{ จงหา } \frac{dy}{dt} \text{ เมื่อ } t = \sqrt{2}$$

$$14) \text{ กำหนดให้ } x = y + 4 \text{ จงหา } \frac{dy}{dx}$$

$$15) \text{ กำหนดให้ } x = y\sqrt{1-y^2} \text{ จงหา } \frac{dy}{dx}$$

$$16) \text{ จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง } x = y^2 - 4y \text{ ที่จุดตัดบนแกน } y$$

2. จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$ ของฟังก์ชัน

$$1) x^3 + y^3 = 1$$

$$2) 2xy - y^2 = 3$$

$$3) x^2 + 3y^2 = 12$$

$$4) x^3 - 3xy + y^3 = 1$$

3. จงหาอนุพันธ์ตามที่ระบุในแต่ละข้อ

$$1) y = 3x^4 - 2x^2 + x + 5; y''$$

$$2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}; f^{(4)}(x)$$

$$3) y = \sqrt{2 - 3x^2}; y''$$

$$4) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}; f''(x)$$

$$5) f(x) = \frac{1}{x}; f^{(3)}(x)$$

$$6) f(x) = \frac{1}{x^2}; f^{(4)}(x)$$

$$7) f(x) = \frac{1}{3x+2}; f^{(5)}(x)$$

4. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1) 8x^2 + y^2 = 20$$

$$2) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

$$3) \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$$

$$4) \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8$$

$$5) x = y + y^5$$

$$6) 2x^3 + x^2y + y^3 = 1$$

$$7) x^2y + 3xy^3 - x = 3$$

$$8) 6x + \sqrt{xy} - 3y = 4$$

$$9) 3x^2 + \sqrt[3]{xy} = 2y^2 + 20$$

$$10) (y^2 - 9)^4 = (4x^2 + 3x - 1)^2$$

5. วิศวกรด้านพลังงานกำลังออกแบบกังหันลมขนาดเล็กสำหรับใช้ในฟาร์ม โดยต้องการหา รัศมีใบพัดที่เหมาะสมที่สุด เพื่อให้กังหันผลิตกำลังไฟฟ้าได้สูงสุด จากการทดลองจำลองพบว่า กำลังไฟฟ้าที่ผลิตได้ (P) ในหน่วยวัตต์ (Watts) มีความสัมพันธ์กับ รัศมีใบพัด (r) ในหน่วยเมตร ตามสมการทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย ดังนี้:

$$P(r) = 100r - 10r^2$$

วิศวกรต้องการหาว่า รัศมีใบพัดควรเป็นกี่เมตร จึงจะทำให้กังหันลมนี้ผลิตกำลังไฟฟ้าได้ สูงสุด

6. นักชีวเคมีต้องการเพิ่มปริมาณการผลิตสารตั้งต้นของยาปฏิชีวนะชนิดหนึ่งในเครื่องปฏิกรณ์ชีวภาพ (Bioreactor) โดยพบว่า ปริมาณยาปฏิชีวนะที่ผลิตได้ต่อเซลล์ (ความเข้มข้น, P) ขึ้นอยู่กับความเข้มข้นของสารอาหารเริ่มต้น (x) ซึ่งต้องใช้ในการเลี้ยงเซลล์

กำหนดให้:

- 1) การผลิตจะเริ่มขึ้นเมื่อความเข้มข้นสารอาหารขั้นต่ำคือ 12 หน่วย (mg/L).
- 2) ถ้าความเข้มข้นของสารอาหารไม่เกิน 12 หน่วย จะได้ผลผลิตต่อเซลล์คงที่ 1,200

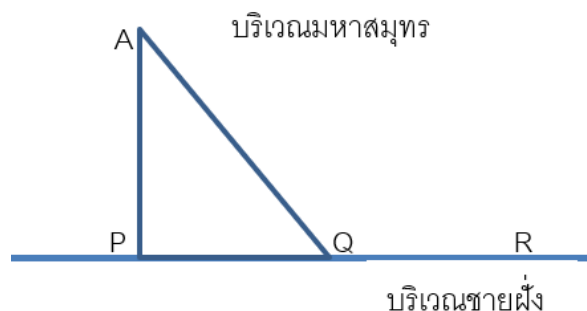
หน่วย (หน่วยผลผลิต/เซลล์).

3) ถ้าความเข้มข้นของสารอาหาร มากกว่า 12 หน่วย ทุกๆ 1 หน่วย ที่เพิ่มขึ้นจาก 12 หน่วย จะทำให้ผลผลิตต่อเซลล์ ลดลง 20 หน่วย เนื่องจากผลกระทบจากความเป็นพิษของสารอาหารส่วนเกิน (Substrate Inhibition).

- 4) ความเข้มข้นของสารอาหารที่ใช้ได้สูงสุดคือ 36 หน่วย (mg/L).

จงหาว่า ความเข้มข้นของสารอาหารเริ่มต้นควรเป็นกี่หน่วย บริษัทจึงจะได้ ปริมาณยาปฏิชีวนะรวมต่อการอบการผลิต (Total Yield) สูงที่สุด (สมมติให้ปริมาณเซลล์ทั้งหมดเป็น 1,000,000 เซลล์)

7. ป่อน้ำมันนอกชายฝั่งตั้งอยู่ที่จุด A ในมหาสมุทร ซึ่งอยู่ห่างจากจุด P บนชายฝั่งที่อยู่ใกล้ที่สุดเป็นระยะทาง 5 กิโลเมตร ดังรูป น้ำมันถูกส่งมาตามท่อไปยังจุด R บนฝั่งซึ่งอยู่ห่างจาก P เป็นระยะทาง 8 กิโลเมตร การส่งน้ำมันตามท่อจะส่งจากจุด A ตามท่อใต้น้ำในแนวเส้นตรงมายังจุด Q ที่อยู่ระหว่างจุด P กับจุด R แล้วส่งไปยังจุด R ตามท่อบนชายฝั่ง ถ้าค่าใช้จ่ายในการวางท่อใต้น้ำเป็นเงิน 400,000 บาทต่อกิโลเมตร และวางท่อเหนือพื้นดินเป็นเงิน 200,000 บาทต่อกิโลเมตร ควรจะตั้งจุด Q อยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะทางกี่กิโลเมตร จึงจะเสียค่าใช้จ่ายในการวางท่อน้อยที่สุด (ควรตั้งจุด Q อยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะทาง $\frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2.89$ กิโลเมตร จะเสียค่าใช้จ่ายประมาณ 3,332,000 บาท)

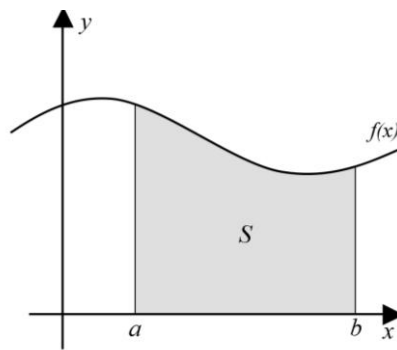


บทที่ 9

แคลคูลัสเบื้องต้น(ปริยานุพันธ์)

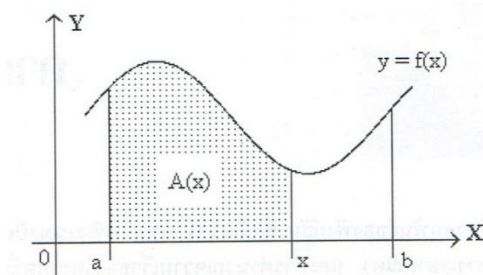
1. ปริยานุพันธ์ (Antiderivative)

จากแนวคิดของนิเวศน์และไลบ์นิตซ์ที่อาศัยความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันหาพื้นที่ของอาณาบริเวณ ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x เส้นตรง $x = a$ และเส้นตรง $x = b$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันที่มี ความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $f(x) \geq 0$ ทุก $x \in [a, b]$ ซึ่งจะเรียกพื้นที่นี้ว่า พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน x บนช่วง $[a, b]$ สมมติว่า f มีกราฟดังรูปที่ 8.1



รูปที่ 8.1

พิจารณาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน x บนช่วง $[a, x]$ จุดปลายทางขวาของช่วงเป็นตัวแปร x ซึ่งทำให้ได้ว่า พื้นที่ดังกล่าวเป็นฟังก์ชันของ x โดยที่ $x \in [a, b]$ ดังรูปที่ 8.2

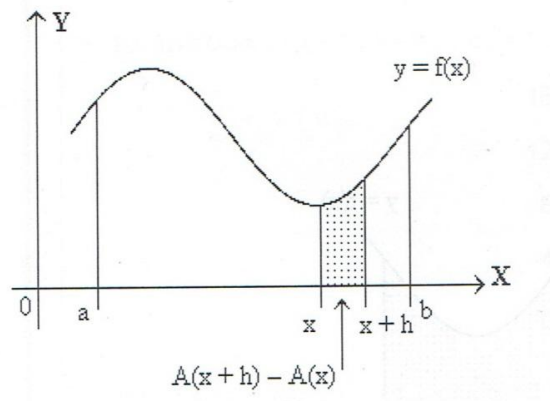


รูปที่ 8.2

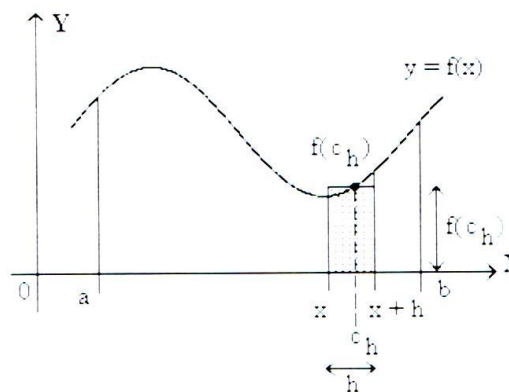
ให้ $A(x)$ เป็นพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน x บนช่วง $[a, x]$ เมื่อ $x \in [a, b]$ ในการหา $A(x)$ นี้เราจะอาศัยความหมายของอนุพันธ์ของ $A(x)$ กล่าวคือ $A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$ เมื่อลิมิตมีค่า

เมื่อ $h > 0$ จะเห็นว่า $A(x+h) - A(x)$ คือพื้นที่ของส่วนที่แรเงาในรูปที่ 8.3 ซึ่งมีค่าเท่ากับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในรูปที่ 8.4 โดยมีฐานยาว h และสูง $f(c_h)$ สำหรับ $c_h \in [x, x+h]$

เพราะฉะนั้น $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \frac{f(c_h) \cdot h}{h} = f(c_h)$



รูปที่ 8.3



รูปที่ 8.4

และในลักษณะคล้ายกัน เราจะแสดงได้ว่า $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(c_h)$ เมื่อ $h < 0$ เพราะฉะนั้น

$$A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) \text{ เมื่อลิมิตมีค่า}$$

เพราะว่า $x \leq c_h \leq x+h$ เพราะฉะนั้น $\lim_{h \rightarrow 0} c_h = x$

เพราะว่า f มีความต่อเนื่องที่ x เราจึงได้ว่า $\lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) = f(x)$

เพราะฉะนั้น $A'(x) = f(x)$

จะเห็นว่า สูตรนี้แสดงวิธีหาพื้นที่ที่ต้องการโดยจะต้องหาสูตรของฟังก์ชัน (คือฟังก์ชัน A) ที่มีอนุพันธ์เป็นฟังก์ชัน f การหาฟังก์ชัน A โดยกำหนดอนุพันธ์ของ A (คือฟังก์ชัน f) เป็นการ **ดำเนินการที่ย้อนกลับกับการหาอนุพันธ์** จึงเรียกรหา A ว่า **การหาปริยานุพันธ์** (antidifferentiation) หรือ **การอินทิเกรต** (integration)

นอกจากการหาพื้นที่ที่กล่าวมาข้างต้น การหาปริยานุพันธ์ยังเป็นวิธีใช้หาสิ่งอื่นได้อีกเช่น หาสมการของเส้นโค้งเมื่อทราบความชันของเส้นโค้ง และหาตำแหน่งของวัตถุเมื่อทราบความเร็ว เป็นต้น

บทนิยาม 8.1 ฟังก์ชัน $f(x)$ ที่มีความต่อเนื่อง จะมีปริยานุพันธ์ของ f เมื่อ $F'(x) = f(x)$

สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของ f

ดังนั้นรูปทั่วไปของการหาปริยานุพันธ์ของ $f(x)$ คือ $F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ นั่นคือ

$$f(x) = F(x) + c$$

สมบัติของปริยานุพันธ์ของ $f(x)$

1. ทุกๆฟังก์ชัน $f(x)$ ที่มีความต่อเนื่อง จะมีปริยานุพันธ์ของ $f(x)$ เป็นจำนวนไม่จำกัด
2. ถ้า $F_1(x), F_2(x)$ ต่างเป็นปริยานุพันธ์ของ $f(x)$ ความแตกต่างของ $F_1(x)$ และ $F_2(x)$ คือค่าคงตัว นั่นคือ $F_1(x) - F_2(x) = c$
3. ถ้า $F(x)$ เป็นปริยานุพันธ์ของ $f(x)$ จะได้ว่า $F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว จะเป็นปริยานุพันธ์ของ $f(x)$ ด้วย จึงเขียนปริยานุพันธ์ทั้งหมดของ $f(x)$ เป็น $F(x) + c$

2. อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral)

รูปทั่วไปของการหาปริยานุพันธ์ของ $f(x)$ สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)dx$

สัญลักษณ์ $\int$ เรียกว่า เครื่องหมายอินทิกรัล (Integral sign)

$f(x)$ เรียกว่า ตัวถูกอินทิเกรต (Integrand)

x เรียกว่า ตัวแปรของการอินทิเกรต (Variable of integration)

$\int f(x)dx$ เรียกว่า อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน $f(x)$ เทียบกับตัว

แปร x

ดังนั้น ถ้า $F'(x) = f(x)$ แล้ว จะได้ว่า $\int f(x) dx = F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

บทนิยาม 8.2 เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง และ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $\int f(x)dx$ โดยที่ $\int f(x) dx = F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

สูตรการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

1. $\int k dx = kx + c$ เมื่อ k และ c เป็นค่าคงตัว
2. $\int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$ และ c เป็นค่าคงตัว
3. $\int k u dx = k \int u dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
4. $\int [u + v] dx = \int u dx + \int v dx$
5. $\int [u - v] dx = \int u dx - \int v dx$
6. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ และ $f(1) = 8$ จงหา $f(2)$

แนวคิด
$$\begin{aligned} \int (f'(x)) &= \int (3x^2 - 4x + 1) dx \\ f(x) &= \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + x + c \\ &= x^3 - 2x^2 + x + c \end{aligned}$$

จะได้
$$\begin{aligned} f(1) &= (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + c \\ 8 &= 1 - 2 + 1 + c \\ c &= 8 \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 + x + 8 \\ f(2) &= (2)^3 - 2(2)^2 + 2 + 8 \\ f(2) &= 8 - 8 + 2 + 8 = 10 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ และกราฟของฟังก์ชัน f นี้ผ่านจุด $(1, -3)$

จงหา $f(x)$

แนวคิด $\int(f'(x)) = \int(3x^2 - 2x + 1) dx$

$$f(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + c$$

$$f(x) = y = x^3 - x^2 + x + c \dots\dots\dots(1)$$

กราฟของฟังก์ชัน f นี้ผ่านจุด $(1, -3)$ แทนค่า $x = 1$ และ $y = -3$ ในสมการ (1)

จะได้ $-3 = (1)^3 - (1)^2 + 1 + c$

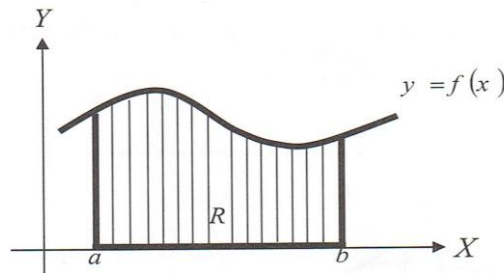
$$c = 2$$

ดังนั้น $f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$

3. อินทิกรัลจำกัดเขต

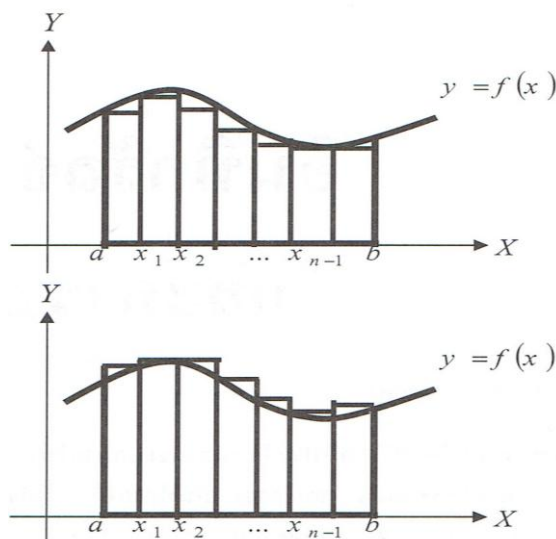
3.1 การหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง

ให้ R เป็นบริเวณที่ปิดด้านล่างโดยแกน X ด้านข้างปิดด้วยเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ และด้านบนปิดด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ เมื่อ f ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $f(x) > 0$ สำหรับทุก x ใน $[a, b]$ ดังรูป 8.5



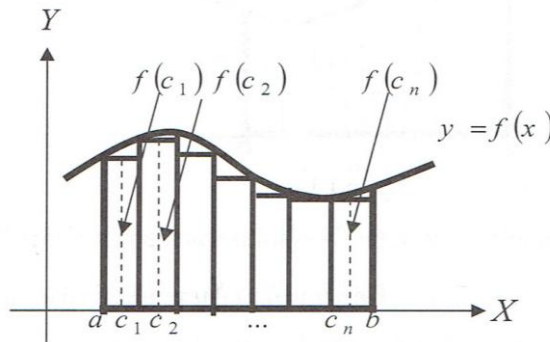
รูปที่ 8.5

แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วงย่อย โดยที่แต่ละช่วงย่อยกว้างเท่ากับ $\frac{b-a}{n}$ เท่ากันหมด ซึ่งให้มีจุดแบ่งอยู่ที่จุด $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ ที่อยู่ห่างกันเป็นระยะเท่ากัน แล้วลากเส้นตั้งผ่านจุด $a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, b$ ซึ่งเรียกว่าพาร์ติชัน (Partition) เพื่อแบ่งบริเวณ R ออกเป็น n แท่งที่มีความกว้างเท่ากัน ได้ 2 แบบ ดังรูปที่ 8.6



รูปที่ 8.6

ถ้าใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนบใน จะได้ความสูงของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะเป็นค่าต่ำสุดของ $f(x)$ ในแต่ละช่วงย่อย สมมติให้เกิดขึ้นที่จุด $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ และความสูงของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนบในจะเป็น $f(c_1), f(c_2), f(c_3), \dots, f(c_n)$ ดังรูปที่ 8.7



รูปที่ 8.7

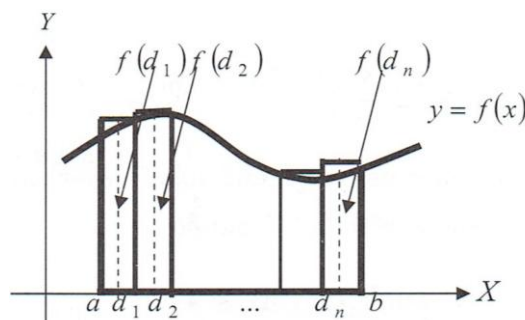
ถ้าแทนความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแต่ละช่วงที่เท่ากันด้วย Δx ซึ่ง $\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ แล้วผลรวมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะสร้าง R_n (พื้นที่บริเวณ R) ขึ้นมานั้นคือ พื้นที่บริเวณ R หาได้จาก

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } (R_n) &= f(c_1) \Delta x + f(c_2) \Delta x + f(c_3) \Delta x + \dots + f(c_n) \Delta x \\ &= \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x \end{aligned}$$

ถ้าให้ n มีค่าเพิ่มมากขึ้น จะทำให้ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กลงหรือ Δx เล็กลงจะทำให้แบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าได้มากขึ้น ทำให้การประมาณพื้นที่ใกล้เคียงพื้นที่จริงที่สุด ซึ่งเขียนพื้นที่ A ของ R ในรูปลิมิตได้ดังนี้

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{พื้นที่ } (R_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x \end{aligned}$$

ถ้าใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนบนอก จะได้ความสูงของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะเป็นค่าสูงสุดของ $f(x)$ ในแต่ละช่วงย่อย สมมติให้เกิดขึ้นที่จุด $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ และความสูงของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนบนอกจะเป็น $f(d_1), f(d_2), f(d_3), \dots, f(d_n)$ ดังรูปที่ 8.8



รูปที่ 8.8

ในทำนองเดียวกันกับผลรวมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนบใน เราจะได้พื้นที่จาก

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ } (R_n) &= f(d_1) \Delta x + f(d_2) \Delta x + f(d_3) \Delta x + \dots + f(d_n) \Delta x \\ &= \sum_{k=1}^n f(d_k) \Delta x\end{aligned}$$

และได้พื้นที่ A ของ R ในรูปลิมิตดังนี้

$$\begin{aligned}A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{พื้นที่ } (R_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(d_k) \Delta x\end{aligned}$$

เราอาจสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความสูงระหว่างความสูงของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนบใน และรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนบนอกได้ โดยสมมติในแต่ละช่วงย่อย โดยเลือกความสูงอยู่ที่จุด

$$x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*$$

เนื่องจาก $f(c_k)$ และ $f(d_k)$ เป็นค่าน้อยสุดและค่าสูงสุดของ $f(x)$ บนช่วงย่อยที่ k ดังนั้น

$$\text{จะได้ } f(c_k) \leq f(x_k^*) \leq f(d_k)$$

$$\text{แล้ว } f(c_k) \Delta x \leq f(x_k^*) \Delta x \leq f(d_k) \Delta x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(d_k) \Delta x$$

นั่นคือเมื่อ $n \rightarrow \infty$ ผลบวกด้านนอกของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าของอสมการนี้มีค่าเข้าใกล้ A

และผลบวกด้านในของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าของอสมการนี้มีค่าเข้าใกล้ A ด้วย นั่นคือ

$$A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \leq A$$

$$\text{และ } A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x$$

นิยาม 8.2 ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องและหาค่าได้บนช่วง $[a, b]$ และถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก x

ในช่วง $[a, b]$ แล้ว พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ บนช่วง $[a, b]$ นิยามโดย

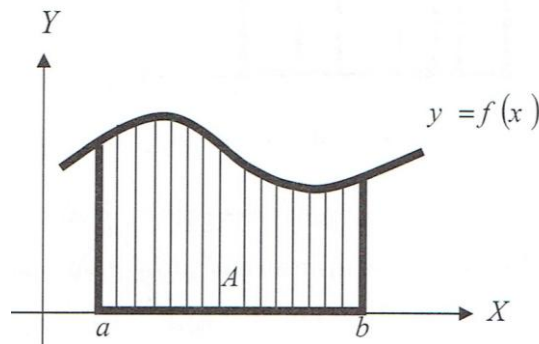
$$A = \lim_{\max(x_k) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x$$

สัญลักษณ์คือ

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max(x_k) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x$$

และจะได้ว่าพื้นที่ A ภายใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ เหนือแกน X และอยู่ระหว่าง เส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ สามารถเขียนในรูปสัญลักษณ์อินทิกรัลจำกัดเขตได้เป็น $A = \int_a^b f(x) dx$

รูปที่ 8.9

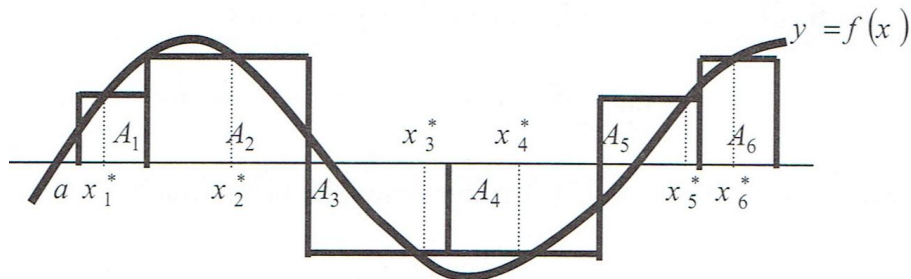


รูปที่ 8.9

เรียกผลบวก $\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x$ ว่า **ผลบวกรีมันน์** (Riemann sum) เพื่อเป็นเกียรติให้แก่ เบร์นาร์ด รีมันน์ (Bernhard Riemann) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันที่เป็นบุคคลแรก ที่ได้สร้างแนวคิดเกี่ยวกับอินทิกรัลจำกัดเขต

3.2 อินทิกรัลจำกัดเขต

พิจารณาได้จากผลบวกรีมันน์ ดังรูปที่ 8.10



รูปที่ 8.10

จากรูปผลบวกรีมันน์ จะมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 f(x_k^*) \Delta x &= f(x_1^*) \Delta x_1 + f(x_2^*) \Delta x_2 + f(x_3^*) \Delta x_3 + \dots + f(x_6^*) \Delta x_6 \\ &= A_1 + A_2 - A_3 - A_4 + A_5 + A_6 \\ &= (A_1 + A_2 + A_5 + A_6) - (A_3 + A_4) \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (The Fundamental Theorem of Calculus)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ F เป็นปริยานุพันธ์ของ f บนช่วง $[a, b]$ โดยที่ $F'(x) = f(x)$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
 ใช้สัญลักษณ์ $F(x)\Big|_a^b$ แทน $F(b) - F(a)$

ขั้นตอนหา $\int_a^b f(x)dx$

1. หา $F(x)$ ซึ่งเป็นปริยานุพันธ์ของ $f(x)$
2. $F(b) - F(a)$

สมบัติบางประการของอินทิกรัลจำกัดเขต

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก x ในช่วง $[a, b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุก x ในช่วง $[a, b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
3. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ เมื่อ k คือค่าคงตัว
5. $\int_a^a f(x)dx = 0$
6. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $c \in [a, b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

3.4 การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by part)

ถ้า $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ เป็นฟังก์ชันสองฟังก์ชันใดๆ ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้แล้ว จากหลักการดิฟเฟอเรนเชียลของผลคูณ $d(uv) = u dv + v du$ เมื่อทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างจะได้

$$\begin{aligned} \int d(uv) &= \int v du + \int u dv \\ uv + c &= \int v du + \int u dv \\ \text{หรือ} \quad \int u dv &= uv - \int v du + c \\ \text{หรือ} \quad \int u dv &= uv - \int v du \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\int_1^4 (3x^2) dx$

แนวคิด
$$\begin{aligned}\int_1^4 (3x^2) dx &= \left. \frac{3x^3}{3} \right|_1^4 = x^3 \Big|_1^4 \\ &= (4^3 + c) - (1^3 + c) = 64 - 1 = 63\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\int_0^3 (3 - 2x + x^2) dx$

แนวคิด
$$\begin{aligned}\int_0^3 (3 - 2x + x^2) dx &= \left(3x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 \\ &= \left(3(3) - (3)^2 + \frac{3^3}{3} \right) - (0) \\ &= 9 - 9 + \frac{27}{3} = 9\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 4x - x^2$ กับแกน X

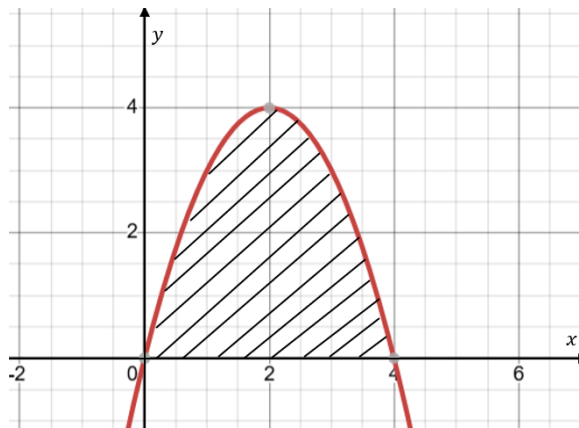
แนวคิด กราฟ $y = 4x - x^2$ เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำ หาจุดตัดแกน X (แทน $y = 0$)

$$\text{จะได้ } 0 = 4x - x^2$$

$$0 = x(4 - x)$$

$$\text{จะได้ } x = 0 \text{ และ } x = 4$$

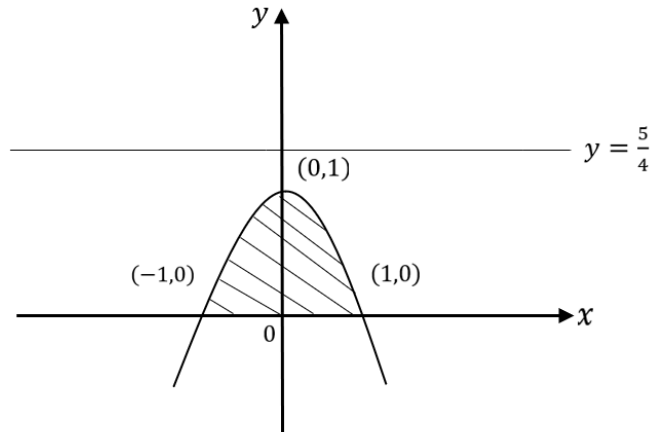
พื้นที่ที่โจทย์ต้องการ คือพื้นที่ใต้โค้งในช่วง $x = 0$ ถึง $x = 4$



$$\begin{aligned}\text{จะได้ } A &= \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 \\ &= \left(2(4)^2 - \frac{(4)^3}{3} \right) - 0 \\ &= \frac{32}{3} \approx 10.67 \text{ ตารางหน่วย}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6 ให้ f มีกราฟเป็นรูปพาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุด $(0,1)$ และเส้นตรง $y = \frac{5}{4}$ เป็นเส้นไคเรตริกซ์ จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$

แนวคิด



โจทย์กำหนด จุดยอด $(0,1)$ ไคเรตริกซ์คือ $y = \frac{5}{4}$

$$\therefore c = -\frac{1}{4} \quad (\text{เพราะว่ากราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ})$$

$$\text{สมการคือ } (x - 0)^2 = 4\left(-\frac{1}{4}\right)(y - 1)$$

$$\text{หรือ } x^2 = -y + 1$$

$$\text{หรือ } y = 1 - x^2$$

กราฟตัดแกน x ที่จุด $(-1,0)$ กับ $(1,0)$

จะได้พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยโค้ง $y = 1 - x^2$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$ และแกน x คือ

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 - \left(\frac{(-1)^3}{3} \right) \right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{3} \approx 1.33 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7 ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุดใดๆ มีค่าเป็น $x - 1$ และ เส้นโค้งมีความชัน 1 ณ จุด $(-1,0)$ จงหาสมการของเส้นโค้งนี้

แนวคิด ให้ $m =$ ความชันของเส้นโค้ง

$$\text{โจทย์กำหนด } \frac{dm}{dx} = x - 1$$

$$\therefore \int dm = \int (x - 1) dx$$

$$m = \frac{x^2}{2} - x + c_1$$

$$\text{โจทย์กำหนด } m = 1 \text{ ณ จุด } (-1,0)$$

$$\text{แทนค่า } 1 = \frac{(-1)^2}{2} - (-1) + c_1$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{แต่ } m = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + c_2$$

$$\text{โจทย์กำหนดเส้นโค้งผ่านจุด } (-1,0)$$

$$\text{จะได้ } 0 = \frac{(-1)^3}{6} - \frac{(-1)^2}{2} - \frac{1}{2}(-1) + c_2$$

$$c_2 = \frac{1}{6}$$

นั่นคือ สมการของเส้นโค้ง คือ

$$y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$$

3.5 ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบ (Volume of a Solid of Revolution)

3.5.1 ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นที่ภาคตัดได้

ให้ S เป็นรูปทรงตันใน R^3 ซึ่งมีภาพฉายบนแกน X คือช่วง $[a, b]$ และ $A(x)$ เป็นพื้นที่ภาคตัดของ S ที่เกิดจากการตัด S ด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกน X ที่ x ใดๆ โดยที่ A เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ จะได้ว่า

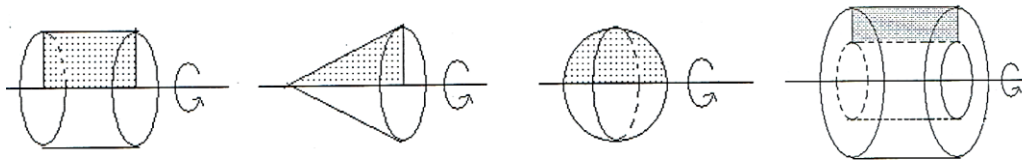
$$V = \int_a^b A(x) dx$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า S เป็นรูปทรงตันที่มีภาพฉายบนแกน Y คือช่วง $[c, d]$ และ $A(y)$ เป็นพื้นที่ภาคตัดของ S ที่เกิดจากการตัด S ด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกน Y ที่ y ใดๆ โดยที่ A เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[c, d]$ จะได้ว่า

$$V = \int_c^d A(y) dy$$

3.5.2 ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน

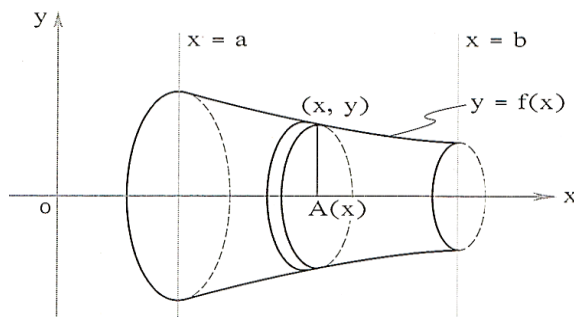
รูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน คือ รูปทรงตันที่ได้จากการหมุนอาณาบริเวณในระนาบรอบเส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งอยู่ในระนาบเดียวกัน โดยจะเรียกเส้นตรงดังกล่าวว่าแกนหมุน ดังรูปที่ 8.11



รูปที่ 8.11

การหาปริมาตรของรูปทรงตันแบบจาน (Plane Slicing)

ให้ V แทนปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่อยู่ภายใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ เส้นตรง $x = a$, $x = b$ และแกน X รอบแกน X ดังรูปที่ 8.12



รูปที่ 8.12

ภาคตัดที่ตั้งฉากกับแกนหมุนที่ x ใดๆ เป็นรูปวงกลมซึ่งมีรัศมีเท่ากับ y หรือ $f(x)$ ดังนั้นพื้นที่ภาคตัดมีค่าเท่ากับ πy^2 หรือ $\pi[f(x)]^2$

นั่นคือ ถ้า $A(x)$ แทนพื้นที่ภาคตัดที่ตั้งฉากกับแกน X ที่ x ใดๆ จะได้ว่า

$$A(x) = \pi y^2 \quad \text{หรือ} \quad A(x) = \pi[f(x)]^2$$

จะได้ว่า
$$V = \int_a^b A(x) dx$$

หรือ
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ V แทนปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่อยู่ภายใต้เส้นโค้ง $x = F(y)$ เส้นตรง $y = c, y = d$ และแกน Y รอบแกน X

จะได้
$$V = \int_c^d A(y) dy$$

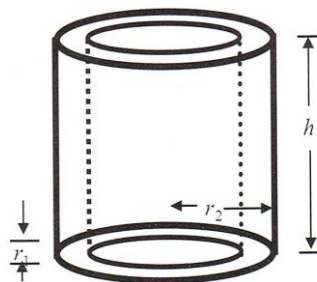
โดยที่ $A(y)$ แทนพื้นที่ภาคตัดที่ตั้งฉากกับแกน Y ที่ y ใดๆ นั่นคือ

$$A(y) = \pi x^2 = \pi[F(y)]^2$$

หรือ
$$V = \pi \int_c^d [F(y)]^2 dy$$

การหาปริมาตรของรูปทรงตันแบบเปลือกทรงกระบอก (Shell Method)

รูปทรงกระบอกกลวง เป็นรูปทรงสามมิติที่ปิดล้อมด้วยรูปทรงกระบอกกลวงตรง ที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน 2 รูป ดังรูปที่ 8.13



รูปที่ 8.13

ปริมาตร V ของรูปทรงกระบอกกลวง ที่มีรัศมีภายในเท่ากับ r_1 รัศมีภายนอกเท่ากับ r_2 และมีความสูงเท่ากับ h เขียนได้ดังนี้

$$V = \text{พื้นที่ตัดส่วนขวาง} \times \text{ความสูง}$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad V &= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)(h) \\
 &= \pi(r_2^2 - r_1^2)(h) \\
 &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)(h) \\
 &= 2\pi \left(\frac{1}{2}(r_2 + r_1) \right) (h)(r_2 - r_1)
 \end{aligned}$$

โดยที่ $\frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ คือ ค่าเฉลี่ยของรัศมีของรูปทรงกระบอกกลวง
 $(r_2 - r_1)$ คือ ความหนา

ดังนั้น $V = 2\pi$ (รัศมีเฉลี่ย)(ความสูง)(ความหนา)

สรุปวิธีการหาปริมาตรโดยวิธีเปลือกทรงกระบอก

- เขียนรูปทรงตันที่ต้องการหาปริมาตร เช่นเดียวกับการหาปริมาตรโดยวิธีจาน
- เขียนรูปทรงตันในลักษณะที่ขนานกับแกนหมุน โดยแสดงรอยตัดเป็นตัวอย่างหนึ่งของรูปที่แสดงรัศมี ความสูง และความหนา โดยที่

รัศมี คือ ระยะจากแกนหมุนไปยังผิวของรูป

ความสูง คือ ความสูงแถบสี่เหลี่ยมผืนผ้ารอยตัด

ความหนา คือ $\Delta x \approx dx$ ในกรณีที่หมุนบริเวณ R รอบแกน Y
 หรือ $\Delta y \approx dy$ ในกรณีที่หมุนบริเวณ R รอบแกน X

- หาปริมาตรเช่นเดียวกันกับการหาปริมาตรโดยวิธีจาน

- หาปริมาตรโดยแทนค่าสูตรดังนี้

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_a^b x[f(x)] dx \\
 V &= 2\pi \int_c^d y[u(y)] dy
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างการหาปริมาตรของวัตถุขึ้นเดียวกันโดยใช้ทั้งวิธี จาน/แผ่น (Disk/Washer Method) และวิธี เปลือกทรงกระบอก (Cylindrical Shell Method)

ตัวอย่างที่ง่ายและคลาสสิกที่สุดคือการหาปริมาตรของ กรวย (Cone) ที่เกิดจากการหมุน พื้นที่ใต้เส้นตรงรอบแกนใดแกนหนึ่ง

สถานการณ์: การหาปริมาตรกรวย พิจารณาพื้นที่ R ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นตรง $y = 2x$, แกน x ($y = 0$), และเส้นตรง $x = 3$ ในจุดภาคที่หนึ่ง เมื่อหมุนพื้นที่ R นี้รอบ แกน x จะเกิดเป็น รูปทรงกรวยที่มีรัศมี $R = 6$ และความสูง $H = 3$

1. **การอินทิเกรตแบบจาน/แผ่น (Disk Method)** เนื่องจากการหมุนรอบ แกน x เราจะใช้การอินทิเกรตเทียบกับ x (แนวตั้งฉากกับแกนหมุน)

องค์ประกอบ: จานวงกลมที่มีความหนา Δx

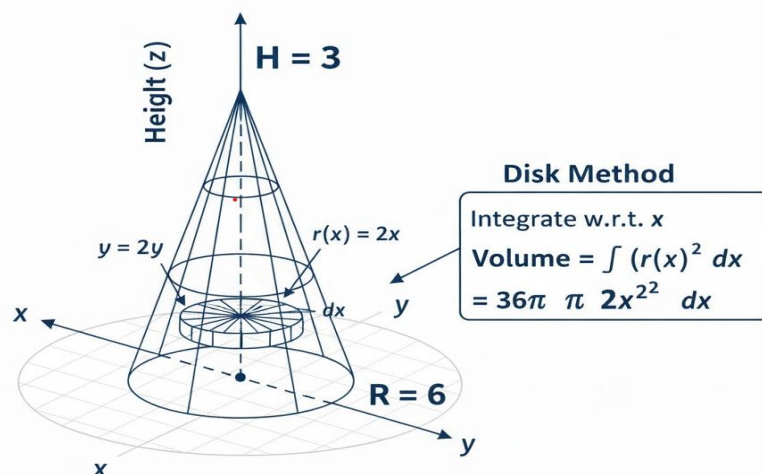
รัศมี (r): ระยะจากแกนหมุน ($y = 0$) ไปถึงเส้นโค้ง คือ $r(x) = y = 2x$

สูตรปริมาตร (V): $V = \int_a^b \pi[r(x)]^2 dx$

ขอบเขต (a ถึง b): จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$

การคำนวณ:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \pi(2x)^2 dx \\ &= \int_0^3 \pi(4)x^2 dx \\ &= 4\pi \int_0^3 \left(\frac{x^3}{3}\right) dx \\ &= 4\pi \left(\frac{(x)^3}{3} \Big|_0^3\right) = 4\pi \left(\frac{(3)^3}{3} - 0\right) \\ &= 4\pi(9 - 0) = 36\pi \end{aligned}$$



2. การอินทิเกรตแบบเปลือกทรงกระบอก (Cylindrical Shell Method)

เมื่อหมุนรอบ แกน x เราจะใช้การอินทิเกรตเทียบกับ y (ขนานกับแกนหมุน)

องค์ประกอบ: เปลือกทรงกระบอกที่มีความหนา Δx

รัศมี (r): ระยะจากแกนหมุน (x - axis) ไปถึงเปลือก คือ $r(y) = y$

ความสูง (h): ความยาวของเปลือก (ขนานกับแกน x) คือ $h(y) = 3 - x$

จาก $y = 2x$ เราจัดรูปได้เป็น $x = \frac{y}{2}$ ดังนั้น $h(y) = 3 - \frac{y}{2}$

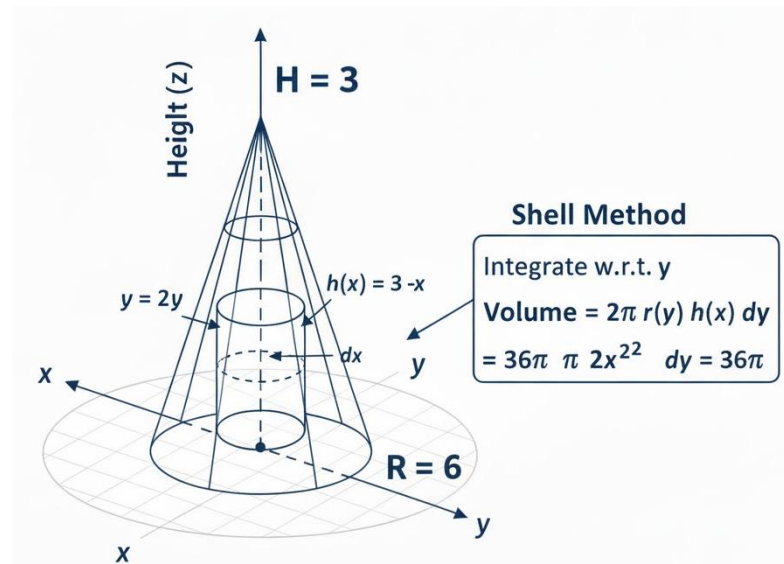
สูตรปริมาตร (V): $V = \int_c^d 2\pi(r(y))(h(y)) dy$

ขอบเขต (c ถึง d): จาก $y = 0$ ถึง $y = 6$

(หาค่า y สูงสุดจาก $y = 2x$ เมื่อ $x = 3$ คือ $y = 2(3) = 6$)

การคำนวณ:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^6 2\pi(y)\left(3 - \frac{y}{2}\right) dy \\ &= 2\pi \int_0^6 \left(3y - \frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= 2\pi \left(\frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right) \Big|_0^6 \\ &= 2\pi \left[\left(\frac{3(6)^2}{2} - \frac{(6)^3}{6}\right) - 0\right] \\ &= 2\pi \left(\frac{3(36)}{2} - \frac{216}{6}\right) \\ &= 2\pi(54 - 36) = 2\pi(18) = 36\pi \end{aligned}$$



บทสรุป ไม่ว่าจะใช้วิธี จาน (Disk Method) อินทิเกรตเทียบกับ x หรือวิธี เปลือก (Shell Method)

อินทิเกรตเทียบกับ y จะได้ปริมาตรของกรวยเท่ากันคือ 36π ลูกบาศก์หน่วย ซึ่งสอดคล้องกับสูตร

ปริมาตรกรวยทั่วไป $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi(6)^2(3) = \frac{1}{3}\pi(36)(3) = 36\pi$

การประยุกต์ความรู้เรื่องอินทิกรัลจำกัดเขตไปใช้ในการสอนวิทยาศาสตร์

สถานการณ์ 1 อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่จากจุดหนึ่ง เมื่อเวลาผ่านไป t วินาที อนุภาคมีความเร็ว $v(t) = 4t^3 + 2t - 1$ เมตร/วินาที ขณะที่เริ่มจับเวลาอนุภาคเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 4 เมตร จงหา ระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ในวินาทีที่ 3

แนวคิด โจทย์กำหนด $v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t^3 + 2t - 1$

$$\int ds = \int (4t^3 + 2t - 1) dt$$

$$\text{จะได้ } s(t) = t^4 + t^2 - t + c$$

แต่โจทย์กำหนดว่า $s = 4$ เมื่อ $t = 0$

$$\text{แทนค่า } 4 = 0 + 0 - 0 + c$$

$$\text{จะได้สมการเคลื่อนที่ของวัตถุคือ } s(t) = t^4 + t^2 - t + 4$$

$$\text{เมื่อ } t = 3 \text{ จะได้ } s(3) = (3)^4 + (3)^2 - (3) + 4$$

$$s(3) = 91 \text{ เมตร}$$

ดังนั้น วินาทีที่ 3 อนุภาคเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 91 เมตร

สถานการณ์ 2 วิศวกรต้องการออกแบบระบบกันสะเทือนโดยใช้สปริงชนิดพิเศษที่มีค่าคงที่สปริง

(k) เท่ากับ 200 N/m ตามกฎของฮุก แรงที่ใช้ดึงสปริงจะแปรผันตามระยะยืด $F(x) = kx$

วิศวกรต้องการทราบว่าต้องใช้พลังงาน (งาน) เท่าใด ในการดึงสปริงนี้จากระยะยืดเริ่มต้น

$x_1 = 0.05$ เมตร ไปจนถึงระยะยืดสุดท้าย $x_2 = 0.15$ เมตร

แนวคิด หลักการ: งาน (W) ที่ทำโดยแรงแปรผัน $F(x)$ ในการเคลื่อนวัตถุจากตำแหน่ง a ไปยัง b คือ อินทิกรัลจำกัดเขต:

$$W = \int_a^b F(x) dx$$

ฟังก์ชันแรง: $F(x) = 200x$

ขอบเขต: $a = 0.05 \text{ m}$ ไปยัง $b = 0.15 \text{ m}$

$$W = \int_{0.05}^{0.15} (200x) dx$$

$$W = \left(\frac{200(x)^2}{2} \right) \Big|_{0.05}^{0.15} = (100(x)^2) \Big|_{0.05}^{0.15}$$

$$W = (100 \times 0.0225) - (100 \times 0.0025)$$

$$W = 2.25 - 0.25 = 2.0$$

ดังนั้น งานที่ต้องใช้ในการดึงสปริงคือ 2.0 จูล (Joules)

สถานการณ์ 3 เภสัชกรกำลังศึกษาการกระจายตัวของยาปฏิชีวนะในหลอดเลือด ยาจะมีความเข้มข้นไม่สม่ำเสมอตามความยาวของหลอดเลือด เนื่องจากการดูดซึม สมมติให้หลอดเลือดมีความยาว 5 เซนติเมตร และฟังก์ชันความหนาแน่นของมวล (Mass Density, ρ) ของยาตามความยาว x (เป็นเซนติเมตร) คือ:

$$\rho(x) = 3x^2 + 2$$

โดยมีหน่วยเป็น มิลลิกรัม/เซนติเมตร

เภสัชกรอยากทราบว่า มีปริมาณมวลยา รวม (Total Mass) ทั้งหมดที่อยู่ในหลอดเลือดเท่าใด

แนวคิด หลักการ: มวลรวม (M) ของวัตถุที่มีความหนาแน่นไม่สม่ำเสมอตามความยาว L สามารถคำนวณได้จากอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันความหนาแน่น:

$$M = \int_0^L \rho(x) dx$$

ฟังก์ชันความหนาแน่น: $\rho(x) = 3x^2 + 2$

ขอบเขต: $L = 5$ เซนติเมตร แทนค่าจะได้

$$M = \int_0^5 (3x^2 + 2) dx$$

$$M = \left(\frac{3(x)^3}{3} + 2x \right) \Big|_0^5 = ((x)^3 + 2x) \Big|_{0.05}^{0.15}$$

$$M = ((5)^3 + 2(5)) - 0$$

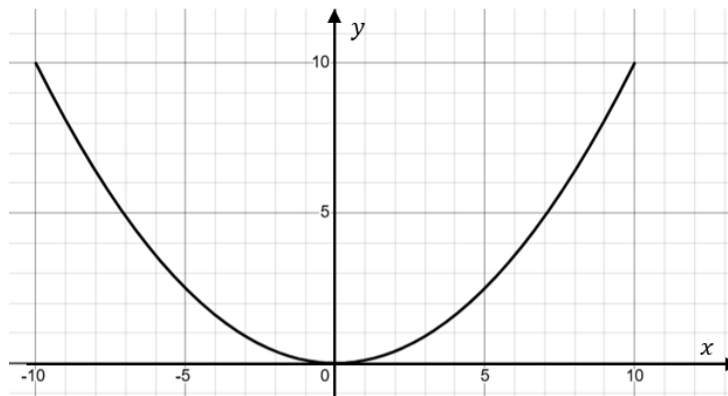
$$M = 125 + 10 = 135$$

ดังนั้น: ปริมาณมวลยา รวมทั้งหมดที่อยู่ในหลอดเลือดคือ 135 มิลลิกรัม

สถานการณ์ 4 นักวิทยาศาสตร์ต้องการประเมินความจุของอ่างเก็บน้ำใหม่ที่ถูกออกแบบให้มีลักษณะสมมาตรเหมือนภาชนะหมุน (Volume of Revolution) โดยมีขอบเขตถูกกำหนดโดยฟังก์ชันความลึก $y = f(x)$ ถ้าอ่างเก็บน้ำมีความลึก 10 เมตร และรูปทรงของอ่างเมื่อตัดครึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชัน: $x = \sqrt{10y}$ เมื่อ x คือรัศมี (เมตร) และ y คือความลึก (เมตร) จากด้านบน อยากทราบว่า ปริมาตรความจุรวมของอ่างเก็บน้ำนี้เป็นเท่าใด

แนวคิด: หลักการ: ปริมาตรของรูปทรงที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ใต้กราฟรอบแกน y (วิธีจาน/แผ่นบาง) สามารถคำนวณได้จากอินทิกรัล:

$$V = \int_a^b \pi(x(y))^2 dy$$



การตั้งสมการ: ฟังก์ชันรัศมี: $x(y) = \sqrt{10y}$

ขอบเขต (ความลึก): $a = 0$ เมตร ถึง $b = 10$ เมตร

แทนค่า $(x(y))^2 = (\sqrt{10y})^2 = 10y$

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{10} \pi(x(y))^2 dy \\
 &= \int_0^{10} \pi(10y) dy \\
 &= 10\pi \int_0^{10} (y) dy \\
 &= 10\pi \left(\frac{(y)^2}{2} \right) \Big|_0^{10} = 10\pi \left(\frac{(10)^2}{2} - 0 \right) \\
 &= 10\pi(50) = 500\pi \approx 1570.8
 \end{aligned}$$

ดังนั้น: ปริมาตรความจุรวมของอ่างเก็บน้ำคือ 500π ลูกบาศก์เมตร (หรือประมาณ 1570.8 m^3)

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8-2

1. กำหนด $f'(x) = 3x^2 - \frac{4}{x^2} - 2$ และ $f(2) = 8$ จงหา $f(1)$

คำตอบคือ 5

2. จงหา $\int (2x + x^{-2})dx$ ให้ c เป็นค่าคงตัว

คำตอบคือ $x^2 + x^{-1} + c$

3. จงหา $\int 2x^2(4x^3 + 3x^{-4})dx$ ให้ c เป็นค่าคงตัว

คำตอบคือ $\frac{4}{3}x^6 - \frac{6}{x} + c$

4. จงหา $\int (3x - 1)(x + 1)dx$ ให้ c เป็นค่าคงตัว

คำตอบคือ $x^3 + x^2 - x + c$

5. จงหา $\int (3x - 1)(3x + 1)dx$ ให้ c เป็นค่าคงตัว

คำตอบคือ $3x^3 - x + c$

6. ถ้า $f'(x) = 3x^2 - 2$ และ $f(1) = 2$ จงหา $y = f(x)$ ให้ c เป็นค่าคงตัว

คำตอบคือ $y = x^3 - 2x + 3$

7. $\int_{-1}^2 (3x^2 - 1)dx$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

คำตอบคือ 6

8. $\int_{-1}^1 \left(\frac{3x^5 - x}{x^3} \right) dx$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

คำตอบคือ 4

9. $\int_1^4 \sqrt{y}(1 - y\sqrt{y}) dy$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

คำตอบคือ $-\frac{49}{3}$

10. $\int_0^1 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

คำตอบคือ 0

11. $\int_3^{10} (x^2 + x + 1) dx$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

คำตอบคือ $376\frac{5}{6}$

12. กำหนดให้ $\int_0^1 f(x) dx = 4$, $\int_0^3 f(x) dx = 6$ และ $\int_3^5 f(x) dx = 2$ ค่าของ

$\int_0^5 f(x) dx + \int_1^0 f(x) dx$ เท่ากับเท่าใด

คำตอบคือ 4

13. จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^3 - 4x$ กับแกน X

คำตอบคือ 8

14. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $y = x$ และแกน x ในช่วง $[-1, 2]$ มีค่ากี่ตารางหน่วย

คำตอบคือ 2.5

15. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$ มีค่ากี่ตารางหน่วย

คำตอบคือ 9

16. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 9 - x^2$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 2$ มีค่ากี่ตารางหน่วย

คำตอบคือ 24

17. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 2$ แกน x , แกน y และเส้นตรง $x = 3$ เท่ากับกี่ตารางหน่วย (คำตอบคือ 15)

บรรณานุกรม

- กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2562). *หลักคณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ช่อเอื้อง อุทิศสาร. (2566). *หลักการคณิตศาสตร์*. เอกสารประกอบการสอน. คณะครุศาสตร์มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.
- ช่อเอื้อง อุทิศสาร. (2568). *คณิตศาสตร์สำหรับการสอนวิทยาศาสตร์*. เอกสารประกอบการสอน. คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.
- ธัญยศ จำปาหวาย. (2559). *เอกสารประกอบการสอนรายวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู*. คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา. กรุงเทพมหานคร.
- พัศนี อุดมกะวานิช. (2559). *หลักคณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. (2560). *การพิสูจน์*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ไพโรจน์ เยียระยง. (2559). *ตรรกศาสตร์และทฤษฎีเซต*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

