STO1011 แคลคูลัสเบื้องต้น

อ.ดร.ธรรมรักษ์ ศรีมารุต

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

<u>ลิมิตของฟังก์ชั่น</u>

ให้ f(x) เป็นฟังก์ชัน และ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \to a} f(x) = L$

แสดงว่า f(x) มีลิมิตที่ a (ลิมิตทางซ้าย เท่ากับ ลิมิตทางขวา)

$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ แสดงว่า f(x) ไม่มีลิมิตที่ a

ตัวอย่างที่ 1 ให้ f(x) = 4x – 3 จงหา $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(4x-3\right) = 4(2)-3 = 8-3 = 5$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(4x-3\right) = 4(2)-3 = 5$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ f(x) = | x-3 | จงหา $\lim_{x \to 3^-} f(x)$, $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก f(x) เป็นค่าสัมบูรณ์ ค่า x ภายในค่าสัมบูรณ์มี 2 ค่า

$$|x| = \begin{cases} +x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & , x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ -(x-3) & , x-3 < 0 \Rightarrow x < 3 \end{cases}$$

$\rightarrow$ เข้าทางขวา , ทางด้านบวก

$\rightarrow$ เข้าทางซ้าย , ทางด้านลบ

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} |x-3| = \lim_{x \to 3^-} -(x-3) = -(3-3) = 0$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} |x-3| = \lim_{x \to 3^+} \left(x-3\right) = 3-3 = 0$$

ตัวอย่างที่ 3 ถ้า $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x>1 \\ x-1 & ,0<x\le 1 \\ 0 & ,x\le 0 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x^2 = 1^2 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x-1\right)=0-1=-1$$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> ถ้า $f(x)=\frac{2}{x}$ จงหา $\lim_{x\to 4} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$

<u>วิธีทำ</u>

(1) $$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{2}{x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}=\frac{2}{0}$$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> ถ้า $f(x) = x^2 + 5x - 4$ จงหา $\lim_{x \to 3} f(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}(x^2 + 5x - 4) = 3^2 + 5(3) - 4 = 20$$

กรณี ผลของ ลิมิต ออกมาในรูปของ $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \to a} f(x)$ อาจหาค่าได้ โดยพยายามเปลี่ยนรูปของ f(x) ใหม่เพื่อให้สามารถตัดทอนกันและหาค่าลิมิตได้โดยตรง

การเปลี่ยนรูปของ f(x) มีวิธีการหลายวิธี ดังนี้

- แยกตัวประกอบ
- ใช้คอนจูเกต (conjugate) คูณทั้งเศษและส่วน
- กฎของโลปิตาล (L ‘ Hopital ‘ Rule)
- $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> ถ้า $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x^2-2x-3}$ จงหา $\lim_{x\to 3} f(x)$

<u>วิธีทำ</u> นำ x = 3 แทนใน f(x) จะได้ $f(3)=\dfrac{3^3-27}{3^2-2(3)-3}=\dfrac{27-27}{9-6-3}=\dfrac{0}{0}$

เปลี่ยนรูปโดยการแยกตัวประกอบ

$$x^3-27 = (x-3)(x^2+3x+9)$$

$$x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$$

จะได้

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x^2+3x+9)}{(x+1)} = \frac{3^2+3(3)+9}{3+1} = \frac{27}{4}$$

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> ถ้า $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

<u>วิธีทำ</u> นำ x = 1 แทนใน f(x) จะได้ $f(1)=\dfrac{1^2-1}{2(1^2)-1-1}=\dfrac{0}{0}$

เปลี่ยนรูปโดยการแยกตัวประกอบ

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

$$2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$$

จะได้ $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)}{(2x+1)} = \frac{1+1}{2(1)+1} = \frac{2}{3}$$

ดังนั้น $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{2}{3}$$

Assignment

จงหา $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-1)}$

จงหา $\lim_{x \to (-2)} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 4}$

จงหา $\lim_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt{x+6}\right) - 3}{x - 3}$