เฉลย Assignment 13
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ โดเมนซึ่งแยกตัวประกอบได้เพียงอย่างเดียว **สัปดาห์ที่** 14 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ในริง $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ จงแสดงว่า

(a) 3 ลดทอนไม่ได้ (irreducible)

วิธีทำ ให้ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $3 = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})$ จะได้ว่า

$$(ac + 5bd) + (ad + bc)\sqrt{-5} = 1 - \sqrt{-5}$$

ดังนั้น $ac + 5bd = 3$ และ $ad + bc = 0$ แล้ว

$$(a - b\sqrt{-5})(c - d\sqrt{-5}) = (ac + 5bd) - (bc + ad)\sqrt{-5} = 3 - 0\sqrt{-5} = 3$$

ฉะนั้น

$$(a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2) = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})(a - b\sqrt{-5})(c - d\sqrt{-5}) = 3 \cdot 3 = 9$$

ถ้า $a^2 + 5b^2 = 3$ แล้ว $3 - a^2 = 5b^2 \geq 0$ นั่นคือ $a^2 \leq 2$ ดังนั้น $a = 0, \pm 1$ จะได้ว่า $5b^2 = 1, 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $a^2 + 5b^2$ และ $c^2 + 5d^2$ เป็นจำนวนเต็มบวก พิจารณาเพียง 2 กรณีดังนี้

กรณี 1. $a^2 + 5b^2 = 1$ และ $c^2 + 5d^2 = 9$ จะได้ $a + b\sqrt{-5}$ เป็นหน่วย

กรณี 2. $a^2 + 5b^2 = 9$ และ $c^2 + 5d^2 = 1$ จะได้ว่า $c + d\sqrt{-5}$ เป็นหน่วย

สรุปได้ว่า 3 ลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

(b) $1 - \sqrt{-5}$ ลดทอนไม่ได้

วิธีทำ ให้ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $1 - \sqrt{-5} = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})$ จะได้ว่า

$$(ac + 5bd) + (ad + bc)\sqrt{-5} = 1 - \sqrt{-5}$$

ดังนั้น $ac + 5bd = 1$ และ $ad + bc = -1$ แล้ว

$$(a - b\sqrt{-5})(c - d\sqrt{-5}) = (ac + 5bd) - (bc + ad)\sqrt{-5} = 1 + \sqrt{-5}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned}(a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2) &= (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})(a - b\sqrt{-5})(c - d\sqrt{-5}) \\ &= (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) \\ &= 6\end{aligned}$$

ถ้า $a^2 + 5b^2 = 2$ แล้ว $2 - a^2 = 5b^2 \geq 0$ นั่นคือ $a^2 \leq 2$ ดังนั้น $a = 0, \pm 1$ จะได้ว่า $5b^2 = 1, 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ถ้า $a^2 + 5b^2 = 3$ แล้ว $3 - a^2 = 5b^2 \geq 0$ นั่นคือ $a^2 \leq 3$ ดังนั้น $a = \pm 1$ จะได้ว่า $5b^2 = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $a^2 + 5b^2$ และ $c^2 + 5d^2$ เป็นจำนวนเต็มบวก พิจารณาเพียง 2 กรณีดังนี้

กรณี 1. $a^2 + 5b^2 = 1$ และ $c^2 + 5d^2 = 6$ จะได้ $a + b\sqrt{-5}$ เป็นหน่วย

กรณี 2. $a^2 + 5b^2 = 6$ และ $c^2 + 5d^2 = 1$ จะได้ว่า $c + d\sqrt{-5}$ เป็นหน่วย

สรุปได้ว่า $1 - \sqrt{-5}$ ลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

2. จงตรวจสอบว่า 2 เป็น **สมาชิกเฉพาะ (prime element)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ หรือไม่
วิธีทำ จะได้ว่า 2 ลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$
ต่อไปจะแสดงว่า 3 ไม่เป็นสมาชิกเฉพาะของ $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ จะเห็นว่า

$$2 \cdot 3 = 6 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

จะได้ว่า $2 \mid (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$ ถ้า $2 \mid (1+\sqrt{-5})$ จะได้ว่ามี $x, y \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง

$$2(x+y\sqrt{-5}) = 1+\sqrt{-5}$$

ทำให้ได้ว่า $2x = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะว่า $x \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $2 \nmid (1+\sqrt{-5})$ ในทำนองเดียวกัน $2 \nmid (1+\sqrt{-5})$
สรุปได้ว่า 3 ไม่เป็นสมาชิกเฉพาะของ $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

3. จงหา **หน่วย (unit)** ทั้งหมดใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$
วิธีทำ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า $a + b\sqrt{-1}$ เป็นหน่วย ก็ต่อเมื่อ $a^2 + b^2 = 1$
จะได้ว่า $a = \pm 1$ และ $b = 0$ หรือ $a = 0$ และ ± 1 นั่นคือ

$$\pm 1 \text{ และ } \pm\sqrt{-1} \text{ เป็นหน่วยทั้งหมดใน } \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$$

4. จงยกตัวอย่างสมาชิกที่**ลดทอนไม่ได้ (irreducible)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$
วิธีทำ ให้ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $2 = (a+b\sqrt{-3})(c+d\sqrt{-3})$ จะได้ว่า

$$(ac+3bd) + (ad+bc)\sqrt{-3} = 2$$

ดังนั้น $ac + 3bd = 2$ และ $ad + bc = 0$ แล้ว

$$(a-b\sqrt{-3})(c-d\sqrt{-3}) = (ac+3bd) - (bc+ad)\sqrt{-3} = 2 + 0\sqrt{-3} = 2$$

ฉะนั้น

$$(a^2+3b^2)(c^2+3d^2) = (a+b\sqrt{-3})(c+d\sqrt{-3})(a-b\sqrt{-3})(c-d\sqrt{-3}) = 2 \cdot 2 = 4$$

ถ้า $a^2 + 3b^2 = 2$ แล้ว $2 - a^2 = 3b^2 \geq 0$ นั่นคือ $a^2 \leq 2$ ดังนั้น $a = 0, \pm 1$ จะได้ว่า $3b^2 = 1, 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้
เนื่องจาก $a^2 + 5b^2$ และ $c^2 + 5d^2$ เป็นจำนวนเต็มบวก พิจารณาเพียง 2 กรณีดังนี้

กรณี 1. $a^2 + 3b^2 = 1$ และ $c^2 + 3d^2 = 4$ จะได้ $a + b\sqrt{-3}$ เป็นหน่วย
กรณี 2. $a^2 + 3b^2 = 4$ และ $c^2 + 3d^2 = 1$ จะได้ว่า $c + d\sqrt{-3}$ เป็นหน่วย

สรุปได้ว่า 2 ลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

5. จงแสดงว่า $1 - \sqrt{-7}$ **ลดทอนไม่ได้ (irreducible)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$
วิธีทำ ให้ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $1 - \sqrt{-5} = (a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-7})$ จะได้ว่า

$$(ac+7bd) + (ad+bc)\sqrt{-7} = 1 - \sqrt{-7}$$

ดังนั้น $ac + 7bd = 1$ และ $ad + bc = -1$ แล้ว

$$(a-b\sqrt{-7})(c-d\sqrt{-7}) = (ac+7bd) - (bc+ad)\sqrt{-7} = 1 + \sqrt{-7}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned}(a^2+7b^2)(c^2+7d^2) &= (a+b\sqrt{-7})(c+d\sqrt{-7})(a-b\sqrt{-7})(c-d\sqrt{-7}) \\ &= (1+\sqrt{-7})(1-\sqrt{-7}) \\ &= 8\end{aligned}$$

ถ้า $a^2+7b^2=2$ แล้ว $2-a^2=7b^2\geq 0$ นั่นคือ $a^2\leq 2$ ดังนั้น $a=0,\pm 1$
จะได้ว่า $7b^2=1,2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้
ถ้า $a^2+7b^2=4$ แล้ว $4-a^2=7b^2\geq 0$ นั่นคือ $a^2\leq 4$ ดังนั้น $a=0,\pm 1,\pm 2$
จะได้ว่า $7b^2=3,4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ และถ้า $a=\pm 2$ แล้ว $b^2=0$ ทำให้ได้ว่า $a^2+7b^2=4$
ฉะนั้น $4(c^2+7d^2)=8$ เป็นผลให้ได้ว่า $c^2+7d^2=2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้
เนื่องจาก a^2+7b^2 และ c^2+7d^2 เป็นจำนวนเต็มบวก พิจารณาเพียง 2 กรณีดังนี้

กรณี 1. $a^2+7b^2=1$ และ $c^2+7d^2=8$ จะได้ $a+b\sqrt{-7}$ เป็นหน่วย

กรณี 2. $a^2+7b^2=8$ และ $c^2+7d^2=1$ จะได้ว่า $c+d\sqrt{-7}$ เป็นหน่วย

สรุปได้ว่า $1-\sqrt{-7}$ ลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$

6. จงตรวจสอบว่า 4 เป็น **สมาชิกเฉพาะ (prime element)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ หรือไม่

วิธีทำ จะเห็นว่า
$$4\cdot 1=4=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$$
จะได้ว่า $4\mid(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$
สมมติว่า $4\mid(1+\sqrt{-3})$ จะได้ว่ามี $x,y\in\mathbb{Z}$ ซึ่ง
$$\begin{aligned}4(x+y\sqrt{-3})&=1+\sqrt{-3}\\4x+4y\sqrt{-3}&=1+\sqrt{-3}\end{aligned}$$
ทำให้ได้ว่า $4x=1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะว่า $x\in\mathbb{Z}$ ดังนั้น $4\nmid(1+\sqrt{-3})$
ในทำนองเดียวกัน $4\nmid(1-\sqrt{-3})$
สรุปได้ว่า 4 ไม่เป็นสมาชิกเฉพาะของ $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$