คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2568

รหัสวิชา	**ชื่อวิชา**	**วันเวลาสอบ**	**คะแนนเต็ม**
MAI1303	แคลคูลัส ๒	เวลา 15:00 - 18:00 วันอังคาร ที่ 2 กันยายน 2568	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล... **รหัสนักศึกษา**............................... **หมู่เรียน**............

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 16 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
    - **ตอนที่** 1 ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
    - **ตอนที่** 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
    - **ตอนที่** 3 ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ จำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								**รวม**
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad R = 1$$

$$\ell\text{n}(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad R = 1$$

1. $\dfrac{d}{dx} e^x = e^x$
2. $\dfrac{d}{dx} \ell\text{n} x = \dfrac{1}{x}$
3. $\dfrac{d}{dx} \sin x = \cos x$
4. $\dfrac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
5. $\dfrac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
6. $\dfrac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
7. $\dfrac{d}{dx} \arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8. $\dfrac{d}{dx} \arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องลำดับ

$$2,\, 3,\, 6,\, 9,\, 36,\, x,\, y, \ldots$$

แล้ว $x + y$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 278

ข. 287

ค. 782

ง. 728

จ. 827

2. ข้อใดต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่ออก (divergent)

ก. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$

ข. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

ค. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

ง. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2}$

จ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

3. ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. ถ้า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ข. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $p > 1$

ค. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $|x| < 1$

ง. ถ้า $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

จ. ถ้า $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ แล้ว $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

4. เวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\langle 2, 6, 8\rangle$

ก. $\langle -1, 2, 0\rangle$

ข. $\langle 1, -2, 1\rangle$

ค. $\langle -2, 1, 0\rangle$

ง. $\langle 2, -2, 1\rangle$

จ. $\langle -2, 2, 1\rangle$

5. จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรง L ที่มีสมการคือ

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$$

ก. $(5, 2, 2)$

ข. $(2, 2, 5)$

ค. $(5, 2, 5)$

ง. $(2, 5, 5)$

จ. $(5, 5, 2)$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ____________________

ถ้า $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k+a) = 135$ แล้ว a มีค่าเท่าใด

7. ____________________

ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{4^n}$ มีค่าเท่าใด

8. ______________________

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหา $\|7\vec{u} - 24\vec{v}\|$

9. ______________________

จงหามุม (ในหน่วยองศา) ระหว่างระนาบ $x + 2y + z = 6$ กับระนาบ $-x + y + 2z = 9$

10. ______________________________

กำหนดให้ $A(0,0,0)$, $B(1,2,0)$ และ $C(-2,0,2)$ เป็นจุดในปริภูมิสามมิติ จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** กำหนดให้

$$A = \sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2, \qquad B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n} \qquad \text{และ} \qquad C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}$$

จงหาค่าของ $A + 2B + C$

12. **(10 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

12.1 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+n+1}$

12.2 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^2}{2^n}$

13. **(10 คะแนน)** จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-3)^n}{3^n}$$

14. **(10 คะแนน)** ให้ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ จงประมาณค่าของ

$$\sqrt[3]{1.3}$$

โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด 1 ของ f (ตอบในรูปทศนิยม 5 ตำแหน่ง)

15. **(10 คะแนน)** จงใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์ (หน้า 2) หาฟังก์ชันผลบวก $f(x)$ ของอนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(4n+3)x^{4n+3}}{2n+1}$$

16. **(10 คะแนน)** ให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในปริภูมิสามมิติ โดยที่

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$$

จงหา $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

17. **(10 คะแนน)** จงหาสมการเส้นตรง (รอยตัดของระนาบ) ที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ

$$x + 2y + z = 6 \qquad \text{และ} \qquad -x + y + 2z = 9$$

18. **(10 คะแนน)** จงหา เวกเตอร์สัมผัสหน่วย ($\vec{T}$) เวกเตอร์ฉากหน่วย ($\vec{N}$) และเวกเตอร์แนวฉากคู่ ($\vec{B}$) ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 3\sin t, 3\cos t, 4t \rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = 0$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์

เฉลยข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2568

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1303	แคลคูลัส ๒	เวลา 15:00 - 18:00 วันอังคาร ที่ 2 กันยายน 2568	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (20 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องลำดับ

$$2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 36,\ x,\ y, \ldots$$

แล้ว $x + y$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 278

ข. 287 Answer

ค. 782

ง. 728

จ. 827

ตอบข้อ ข. พิจารณาความสัมพันธ์แต่ละพจน์ดังนี้

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_2 &= a_1 + 1 = 2 + 1 = 3 \\
a_3 &= a_2 \times 2 = 3 \times 2 = 6 \\
a_4 &= a_3 + 3 = 6 + 3 = 9 \\
a_5 &= a_4 \times 4 = 9 \times 4 = 36 \\
x = a_6 &= a_5 + 5 = 36 + 5 = 41 \\
y = a_7 &= a_6 \times 6 = 41 \times 6 = 246
\end{aligned}$$

ดังนั้น $x + y = 41 + 246 = 287 \quad \#$

2. ข้อใดต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่ออก (divergent)

ก. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$

ข. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

ค. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ Answer

ง. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2}$

จ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

ตอบข้อ ค. พิจารณา

ก. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ลู่เข้าเพราะเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $r = \frac{1}{2}$

ข. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมเทเลสโคปิค)

ค. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่ออก เพราะเป็นอนุกรมพี ที่ $p = \frac{1}{2}$

ง. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2}$ ลู่เข้า ตรวจสอบโดยใช้ root test $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^{-n^2}|} = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0 < 1$

จ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ลู่เข้า โดยการทดสอบอนุกรมสลับ (AST)

3. ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า Answer

ข. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $p > 1$

ค. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $|x| < 1$

ง. ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

จ. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ตอบข้อ ก. ไม่สอดคล้องกับทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ มีตัวอย่างค้านคือ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

4. เวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\langle 2, 6, 8\rangle$

ก. $\langle -1, 2, 0\rangle$

ข. $\langle 1, -2, 1\rangle$

ค. $\langle -2, 1, 0\rangle$

ง. $\langle 2, -2, 1\rangle$ Answer

จ. $\langle -2, 2, 1\rangle$

ตอบข้อ ง. พิจารณาจากผลคูณเชิงสเกลาร์

ก. $\langle -1, 2, 0\rangle \cdot \langle 2, 6, 8\rangle = -2 + 12 + 0 = 10$

ข. $\langle 1, -2, 1\rangle \cdot \langle 2, 6, 8\rangle = 2 - 12 + 8 = -2$

ค. $\langle -2, 1, 0\rangle \cdot \langle 2, 6, 8\rangle = -4 + 6 + 0 = 2$

ง. $\langle 2, -2, 1\rangle \cdot \langle 2, 6, 8\rangle = 4 - 12 + 8 = 0$

จ. $\langle -2, 2, 1\rangle \cdot \langle 2, 6, 8\rangle = -4 + 12 + 8 = 16$

5. จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรง L ที่มีสมการคือ

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$$

ก. $(5, 2, 2)$

ข. $(2, 2, 5)$

ค. $(5, 2, 5)$

ง. $(2, 5, 5)$

จ. $(5, 5, 2)$ Answer

ตอบข้อ จ. จุด $(5, 5, 2)$ สอดคล้องสมการของเส้นตรงนั่นคือ

$$\frac{5-1}{2} = \frac{5+1}{3} = 2 \quad \text{เป็นจริง}$$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ตอบ 8

ถ้า $\sum_{k=1}^{10}(k+a) = 135$ แล้ว a มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ พิจารณา

$$135 = \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} a = \frac{10 \cdot 11}{2} + a \cdot 10 = 55 + 10a$$

ดังนั้น $a = \dfrac{135-55}{10} = 8 \quad \#$

7. ตอบ 6

ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{4^n}$ มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{4^n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n}{4^n} + \frac{2^n}{4^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-\frac{3}{4}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4 + 2 = 6 \quad \#\end{aligned}$$

8. ตอบ 25

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหา $\|7\vec{u} - 24\vec{v}\|$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\|7\vec{u} - 24\vec{v}\|^2 &= \|7\vec{u}\|^2 - 2(7\vec{u}) \cdot (24\vec{v}) + \|24\vec{v}\|^2 \\ &= 7^2\|\vec{u}\|^2 - 336\vec{u} \cdot \vec{v} + 24^2\|\vec{v}\|^2 \\ &= 7^2(1^2) - 336 \cdot 0 + 24^2(1^2) \\ &= 49 - 0 + 576 = 625\end{aligned}$$

ดังนั้น $\|7\vec{u} - 24\vec{v}\| = \sqrt{625} = 25 \quad \#$

9. **ตอบ** 60 องศา

จงหามุม (ในหน่วยองศา) ระหว่างระนาบ $x + 2y + z = 6$ กับระนาบ $-x + y + 2z = 9$

แนวคำตอบ จะได้ว่า $\vec{N}_1 = \langle 1, 2, 1 \rangle$ และ $\vec{N}_2 = \langle -1, 1, 2 \rangle$ แล้ว

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\|\|\vec{N}_2\|} = \frac{-1+2+2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \theta &= 60^\circ \end{aligned}$$

ดังนั้นมุมระหว่างระนาบ $x + 2y + z = 6$ กับระนาบ $-x + y + 2z = 9$ เท่ากับ 60° #

10. **ตอบ** 3

กำหนดให้ $A(0,0,0)$, $B(1,2,0)$ และ $C(-2,0,2)$ เป็นจุดในปริภูมิสามมิติ จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\overrightarrow{AB} = \langle 1, 2, 0 \rangle \qquad \text{และ} \qquad \overrightarrow{AB} = \langle -2, 0, 2 \rangle$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \langle 4, -2, 4 \rangle \qquad \# \end{aligned}$$

ดังนั้นพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{16+4+16} = 3 \qquad \#$$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** กำหนดให้

$$A = \sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2, \qquad B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n} \qquad \text{และ} \qquad C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}$$

จงหาค่าของ $A + 2B + C$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2 = \sum_{k=0}^{10} (4k^2 - 4k + 1) \\
&= 4\sum_{k=0}^{10} k^2 - 4\sum_{k=0}^{10} k + \sum_{k=0}^{10} 1 \\
&= 4 \cdot \frac{10(11)(21)}{6} - 4 \cdot \frac{10(21)}{2} + 1 \cdot 10 \\
&= 1540 - 220 + 10 = 1330 \\
B &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{}{3^n} + \frac{2^n}{3^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2} \\
C &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1}} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 - 0 = 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$A + 2B + C = 1330 + 2 \cdot \frac{9}{2} + 1 = 1330 + 9 + 1 = 1340 \qquad \#$$

12. **(10 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

12.1 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+1}$

แนวคำตอบ ให้ $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+n+1}$ เลือก $b_n = \dfrac{1}{n}$ นั่นคือ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก (อนุกรมพี $p = 1$)

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+n+1} \cdot \frac{n}{1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{1+0}{1+0+0} = 1 > 0
\end{aligned}$$

โดยการทดสอบโดยการใช้การเปรียบเทียบลิมิต $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก #

12.2 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{2^n}$

แนวคำตอบ ให้

$$a_n = \frac{(-1)^n \cdot n^2}{2^n}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-1)^n n^2}\right| \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}(1+0+0) = \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

โดยการทดสอบอัตราส่วน สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ #

13. **(10 คะแนน)** จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-3)^n}{3^n}$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x-3)^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n(x-3)^n}\right| &= \frac{1}{3}|x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\\ &= \frac{1}{3}|x-3|\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{3}|x-3|\cdot 1\\ &= \frac{1}{3}\,|x-3| < 1\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$|x-3| < 3$$

ดังนั้นอนุกรมนี้มีศูนย์กลางอยู่ที่ 3 และรัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 3 พิจารณา

$$\begin{aligned}-3 < x-3 < 3\\ 0 < x < 6\end{aligned}$$

พิจารณา

กรณี $x=0$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-3)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$ ลู่ออก โดยการทดสอบอนุกรมลู่ออก (Divergent test)

กรณี $x=6$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-3)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n$ ลู่ออก โดยการทดสอบอนุกรมลู่ออก

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 3 ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $(0,6)$ $\#$

14. **(10 คะแนน)** ให้ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ จงประมาณค่าของ

$$\sqrt[3]{1.3}$$

โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด 1 ของ f (ตอบในรูปทศนิยม 5 ตำแหน่ง)

แนวคำตอบ **แนวคำตอบ** พิจารณา

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{\frac{1}{3}} && \longrightarrow & f(1) &= 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} && \longrightarrow & f'(1) &= \frac{1}{3} \\
f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} && \longrightarrow & f''(1) &= -\frac{2}{9} \\
f'''(x) &= \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} && \longrightarrow & f'''(1) &= \frac{10}{27}
\end{aligned}$$

จะได้ว่าพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด 1 ของ f ดังนี้

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\
&= 1 + \frac{1}{3}\cdot(x-1) - \frac{2}{9\cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27\cdot 3!}(x-1)^3 \\
&= 1 + \frac{1}{3}\cdot(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3
\end{aligned}$$

ประมาณค่า $\sqrt[3]{1.3}$ โดยแทน $x = 1.3$ ใน $T_3(x)$ จะได้

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1.3} = f(1.3) &\approx T_3(1.3) \\
&= 1 + \frac{1}{3}(1.3-1) - \frac{1}{9}(1.3-1)^2 + \frac{5}{81}(1.3-1)^3 \\
&= 1 + \frac{1}{3}(0.3) - \frac{1}{9}(0.3)^2 + \frac{5}{81}(0.3)^3 \\
&= 1 + \frac{0.3}{3} - \frac{0.09}{9} + \frac{0.135}{81} \\
&= 1 + 0.1 - 0.01 + 0.00167 \\
&= 1.09167 \quad \#
\end{aligned}$$

15. **(10 คะแนน)** จงใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์ (หน้า 2) หาฟังก์ชันผลบวก $f(x)$ ของอนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)x^{4n+3}}{2n+1}$$

แนวคำตอบ จากตารางอนุกรมเทย์เลอร์ (หน้า 2) พิจารณาอนุกรมของฟังก์ชัน $\arctan x$ เมื่อ $R=1$ หรือ $|x|<1$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\\
\arctan(x^2) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2)^{2n+1}}{2n+1}\\
\arctan(x^2) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2n+1}\\
x\cdot\arctan(x^2) &= x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+3}}{2n+1}\\
\frac{d}{dx}\left(x\cdot\arctan(x^2)\right) &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+3}}{2n+1}\\
x\cdot\frac{d}{dx}\arctan(x^2)+\arctan(x^2)\cdot\frac{d}{dx}x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)x^{4n+2}}{2n+1}\\
x\cdot\frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2x+\arctan(x^2)\cdot 1 &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)x^{4n+2}}{2n+1}\\
\frac{2x^2}{1+x^4}+\arctan(x^2) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)x^{4n+2}}{2n+1}\\
x\left[\frac{2x^2}{1+x^4}+\arctan(x^2)\right] &= x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)x^{4n+2}}{2n+1}\\
\frac{2x^3}{1+x^4}+x\cdot\arctan(x^2) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)x^{4n+3}}{2n+1}
\end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชันผลบวกของ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)x^{4n+3}}{2n+1}$ คือ

$$f(x)=\frac{2x^3}{1+x^4}+x\cdot\arctan(x^2) \qquad \text{เมื่อ} \quad |x|<1$$

16. **(10 คะแนน)** ให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในปริภูมิสามมิติ โดยที่

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$$

จงหา $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) &= \vec{u}\cdot\vec{0}\\
\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} &= 0\\
\|\vec{u}\|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} &= 0\\
1^2+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} &= 0\\
\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} &= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) &= \vec{v}\cdot\vec{0}\\
\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{w} &= 0\\
\vec{v}\cdot\vec{u}+\|\vec{v}\|^2+\vec{v}\cdot\vec{w} &= 0\\
\vec{v}\cdot\vec{u}+1^2+\vec{v}\cdot\vec{w} &= 0\\
\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{w} &= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{w}\cdot(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) &= \vec{w}\cdot\vec{0}\\
\vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{w} &= 0\\
\vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}+\|\vec{w}\|^2 &= 0\\
\vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}+1^2 &= 0\\
\vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v} &= -1
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
(\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{w})+(\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{w})+(\vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}) &= -1-1-1\\
2\vec{u}\cdot\vec{v}+2\vec{u}\cdot\vec{w}+2\vec{v}\cdot\vec{w} &= -3\\
\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w} &= -\frac{3}{2} \quad \#
\end{aligned}$$

17. **(10 คะแนน)** จงหาสมการเส้นตรง (รอยตัดของระนาบ) ที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ

$$x + 2y + z = 6 \qquad \text{และ} \qquad -x + y + 2z = 9$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}(x + 2y + z) + (-x + y + 2z) &= 6 + 9 \\ 3y + 3z &= 15 \\ y + z &= 5\end{aligned}$$

เลือก $y = 0$ และ $z = 5$ จะได้ $x + 0 + 5 = 6$ แล้ว $x = 1$ ดังนั้น $(1, 0, 5)$ เป็นจุดบนระนาบทั้งสอง
เวกเตอร์แนวฉากของ $x + 2y + z = 6$ และ $-x + y + 2z = 9$ คือ

$$\vec{N}_1 = \langle 1, 2, 1\rangle \quad \text{และ} \quad \vec{N}_2 = \langle -1, 1, 2\rangle \text{ ตามลำดับ}$$

ดังนั้น $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงนี้ นั่นคือ

$$\begin{aligned}\vec{A} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \langle 3, -3, 3\rangle\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการของเส้นตรงนี้คือ $\begin{cases} x &= 1 + 3t \\ y &= 0 - 3t \\ z &= 5 + 3t \end{cases} \quad \#$

18. **(10 คะแนน)** จงหา เวกเตอร์สัมผัสหน่วย ($\vec{T}$) เวกเตอร์ฉากหน่วย ($\vec{N}$) และเวกเตอร์แนวฉากคู่ ($\vec{B}$) ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 3\sin t, 3\cos t, 4t\rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = 0$$

แนวคำตอบ
เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เมื่อ $t = 0$

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \langle 3\cos t, -3\sin t, 4\rangle \\
\|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2 t + 16} \\
&= \sqrt{9(\cos^2 t + \sin^2 t) + 16} \\
&= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\
\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{5}\langle 3\cos t, -3\sin t, 4\rangle \\
\vec{T}(0) &= \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากหน่วย เมื่อ $t = 0$

$$\begin{aligned}
\vec{T}'(t) &= \frac{1}{5}\langle -3\sin t, -3\cos t, 0\rangle \\
\|\vec{T}'(t)\| &= \frac{1}{5}\sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 0} \\
&= \frac{1}{5}\sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \frac{1}{5}\sqrt{9} = \frac{3}{5} \\
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{5}\langle -3\sin t, -3\cos t, 0\rangle \\
&= \langle -\sin t, -\cos t, 0\rangle \\
\vec{N}(\pi) &= \langle 0, -1, 0\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากคู่ เมื่อ $t = 0$ คือ

$$\begin{aligned}
\vec{B}(0) &= \vec{T}(0) \times \vec{N}(0) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \left\langle \frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$