คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 9
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสันฐาน และริง **สัปดาห์ที่** 10 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$ นิยามโดย $\varphi(x) = (\bar{x})^3$ จงพิสูจน์ว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) และใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง แสดงว่า $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3$

วิธีทำ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ แล้ว

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= (\overline{x+y})^3 = (\bar{x}+\bar{y})^3 \\ &= (\bar{x})^3 + 3(\bar{x})^2\bar{y} + 3\bar{x}(\bar{y})^2 + (\bar{y})^3 \\ &= (\bar{x})^3 + (\bar{y})^3 \\ &= \varphi(x) + \varphi(y)\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = \bar{0}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : (\bar{x})^3 = \bar{0}\} \\ &= 3\mathbb{Z}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\varphi(0) = (\bar{0})^3 = \bar{0}$, $\varphi(1) = (\bar{1})^3 = \bar{1}$ และ $\varphi(2) = (\bar{2})^3 = \bar{2}$

$$\text{Ran}(\varphi) = \mathbb{Z}_3$$

โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสันฐานบทที่หนึ่ง จะได้ว่า $\mathbb{Z}/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Ran}(\varphi)$ นั่นคือ

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3$$

2. จงแสดงว่า $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ โดยใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่งสำหรับกรุป

วิธีทำ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = (\bar{x}, \bar{x}) \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{Z}$$

ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\varphi(x+y) = (\overline{x+y}, \overline{x+y}) = (\bar{x}+\bar{y}, \bar{x}+\bar{y}) = (\bar{x}, \bar{x}) + (\bar{y}, \bar{y}) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = (\bar{0}, \bar{0})\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : (\bar{x}, \bar{x}) = (\bar{0}, \bar{0})\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x \text{ และ } 3 \mid x\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\} \\ &= 6\mathbb{Z}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\varphi(0)=(\bar{0},\bar{0})$, $\varphi(1)=(\bar{1},\bar{1})$, $\varphi(2)=(\bar{0},\bar{2})$, $\varphi(3)=(\bar{1},\bar{0})$, $\varphi(4)=(\bar{0},\bar{1})$ และ $\varphi(5)=(\bar{1},\bar{2})$

$$\mathsf{Ran}(\varphi)=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$$

โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง จะได้ว่า $\mathbb{Z}/\mathsf{Ker}(\varphi)\cong\mathsf{Ran}(\varphi)$ นั่นคือ

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$$

3. ให้ R เป็นริงซึ่งมียูนิตี จงแสดงว่า $(\mathcal{U}(R),\cdot)$ เป็นกรุป

บทพิสูจน์ . ให้ $a,b\in\mathcal{U}(R)$ จะได้ว่ามี $x,y\in R$ ซึ่ง

$$ax=1=xa\qquad\text{และ}\qquad by=1=yb$$

จะได้ว่า

$$(ab)(yx)=a(by)x=a1x=ax=1$$
$$(yx)(ab)=y(xa)b=y1b=yb=1$$

ดังนั้น ab เป็นหน่วย นั่นคือ $ab\in\mathcal{U}(R)$ เห็นได้ชัด $1\cdot1=1$ ฉะนั้น $1\in\mathcal{U}(R)$
ให้ $a\in\mathcal{U}(R)$ จะได้ว่ามี $x\in R$ ซึ่ง $ax=1=xa$ นั่นคือ x เป็นตัวผกผันการคูณของ a และ a เป็นตัวผกผันการคูณของ x ดังนั้น $x\in\mathcal{U}(R)$ สรุปได้ว่า $(\mathcal{U}(R),\cdot)$ เป็นกรุป $\square$

4. ให้ R และ S เป็นริง จงพิสูจน์ว่า $R\times S$ เป็นริง นิยามโดย

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\odot(c,d)=(a\cdot c,b\cdot d)$$

บทพิสูจน์ . ให้ $(a,b),(x,y),(s,t)\in R\times S$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(a,b)\oplus((x,y)\oplus(s,t))&=(a,b)\oplus(x+s,y+t)\\&=(a+(x+s),b+(y+t))=((a+x)+s,(b+y)+t)\\&=(a+x,b+y)\oplus(s,t)=((a,b)\oplus(x,y))\oplus(s,t)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\oplus$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม จะเห็นได้ว่า

$$(a,b)\oplus(0_R,0_S)=(a+0_R,b+0_S)=(a,b)=(0_R+a,0_S+b)=(0_R,0_S)\oplus(a,b)$$

นั่นคือ $(0_R,0_S)$ เป็นเอกลักษณ์ใน $R\times S$ และสำหรับ $(a,b)\in R\times S$ แล้ว

$$(a,b)\oplus(-a,-b)=(a-a,b-b)=(0_R,0_S)=(-a+a,-b+b)=(-a,-b)\oplus(a,b)$$

ฉะนั้น $(-a,-b)$ เป็นตัวผกผันของ (a,b) สรุปได้ว่า $(R\times S,\oplus)$ เป็นกรุปอาบีเลียน พิจารณา

$$\begin{aligned}(a,b)\odot((x,y)\odot(s,t))&=(a,b)\odot(x\cdot s,y\cdot t)\\&=(a\cdot(x\cdot s),b\cdot(y\cdot t))=((a\cdot x)\cdot s,(b\cdot y)\cdot t)\\&=(a\cdot x,b\cdot y)\odot(s,t)=((a,b)\odot(x,y))\odot(s,t)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\odot$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม นั่นคือ $(R\times S,\odot)$ เป็นกึ่งกรุป และมีสมบัติการแจกแจงเนื่องจาก

$$\begin{aligned}(a,b)\odot((x,y)\oplus(s,t))&=(a,b)\odot(x+s,y+t)=(a\cdot(x+s),b\cdot(y+t))\\&=(a\cdot x+a\cdot s,b\cdot y+b\cdot t)\\&=(a\cdot x,b\cdot y)\oplus(a\cdot s,b\cdot t)\\&=((a,b)\odot(x,y))\oplus((a,b)\odot(s,t))\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $(\mathbb{R},\oplus,\odot)$ เป็นริง $\square$

5. ให้ R และ S เป็นริงซึ่งมียูนิตี จงพิสูจน์ว่า

ถ้า R และ S มีหน่วย (unit) แล้ว $R \times S$ มีหน่วย

บทพิสูจน์. สมมติว่า R และ S เป็นริงซึ่งมี 1_R และ 1_S เป็นยูนิตี ตามลำดับ โดยที่ R และ S มีหน่วย จะได้ว่ามี $a \in R$ และ $b \in S$ ซึ่ง $ax = 1_R = xa$ และ $by = 1_S = yb$ สำหรับบาง $x \in R$ และ $y \in S$ แล้ว

$$(a,b) \cdot (x,y) = (ax, by) = (1_R, 1_S) = (xa, yb) = (x,y) \cdot (a,b)$$

ดังนั้น (x,y) เป็นตัวผกผันของ (a,b) ใน $(R \times S, \cdot)$ ดังนั้น (x,y) เป็นหน่วย □

6. ให้ R และ S เป็นริงซึ่งมียูนิตี จงตรวจสอบว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่

ถ้า $R \times S$ มีหน่วย (unit) แล้ว R และ S มีหน่วย

ถ้าจริงจงพิสูจน์ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

บทพิสูจน์. ให้ R และ S เป็นริงซึ่งมียูนิตี ให้ 1_R และ 1_S เป็นยูนิตี ตามลำดับ
สมมติว่า (a,b) เป็นหน่วยใน $R \times S$ จะได้ว่ามี $(x,y) \in R \times S$

$$(a,b) \cdot (x,y) = (ax, by) = (1_R, 1_S) = (xa, yb) = (x,y) \cdot (a,b)$$

ดังนั้น $ax = 1_R = xa$ และ $by = 1_S = yb$ สรุปได้ว่า x และ y เป็นหน่วยใน R และ S ตามลำดับ □

7. ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$a \oplus b = a + b - 1 \qquad \text{และ} \qquad a \odot b = ab - (a+b) + 2$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ เป็นริงสลับที่ซึ่งมียูนิตีหรือไม่

บทพิสูจน์. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a \oplus (b \oplus c) &= a \oplus (b + c - 1) \\ &= a + (b + c - 1) - 1 = (a + b - 1) + c - 1 \\ &= (a \oplus b) + c - 1 = (a \oplus b) \oplus c \\ a \oplus b &= a + b - 1 = b + a - 1 = b \oplus a \end{aligned}$$

ดังนั้น $\oplus$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มและสลับที่ จะเห็นได้ว่า

$$a \oplus 1 = a + 1 - 1 = a = 1 + a - 1 = 1 \oplus a$$

นั้นคือ 1 เป็นเอกลักษณ์ใน $\mathbb{R}$ และสำหรับ $a \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$a \oplus (2 - a) = a + (2 - a) - 1 = 1 = (2 - a) + a - 1 = (2 - a) \oplus a$$

ฉะนั้น $2 - a$ เป็นตัวผกผันของ a สรุปได้ว่า $(\mathbb{R}, \oplus)$ เป็นกรุปอาบีเลียน พิจารณา

$$\begin{aligned} a \odot (b \odot c) &= a \odot (bc - (b + c) + 2) \\ &= a(bc - (b + c) + 2) - (a + bc - (b + c) + 2) + 2 \\ &= abc - ab - ac + a - bc + b + c \\ (a \odot b) \odot c &= (ab - (a + b) + 2) \odot c \\ &= (ab - (a + b) + 2)c - (ab - (a + b) + 2 + c) + 2 \\ &= abc - ac - bc + c - ab + a + b \end{aligned}$$

ดังนั้น $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$

$$a \odot b = ab - (a+b) + 2 = ba - (b+a) + 2 = b \odot a$$
$$2 \odot a = 2a - (a+2) + 2 = a = a2 - (2+a) + 2 = a \odot 2$$

นั่นคือ $(\mathbb{R}, \odot)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีสมบัติสลับที่และมียูนิตีคือ 2

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a \odot (b + c - 1) = a(b+c-1) - (a+b+c-1) + 2 \\ &= ab + ac - 2a - b - c + 3 \\ (a \odot b) \oplus (a \odot c) &= (ab - (a+b) + 2) \oplus (ac - (a+c) + 2) \\ &= (ab - (a+b) + 2) + (ac - (a+c) + 2) - 1 \\ &= ab - 2a - b + ac - c + 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$
สรุปได้ว่า $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ เป็นริงสลับที่ซึ่งมียูนิตี $\square$

8. ให้ $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{a + b\sqrt{-2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ เป็นริงสลับที่ซึ่งมีหนึ่ง
จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a และ b จะได้ว่า

$$a + b\sqrt{-2} \quad \text{เป็นหน่วย (unit) ก็ต่อเมื่อ } a^2 + 2b^2 = 1$$

บทพิสูจน์ . ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$
สมมติว่า $a^2 + 2b^2 = 1$ จะได้ว่า

$$(a + b\sqrt{-2})(a - b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2 = 1$$

ดังนั้น $a + b\sqrt{-2}$ เป็นหน่วย ในทางกลับกันให้ $a + b\sqrt{-2}$ เป็นหน่วย จะได้ว่ามี $c, d \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง

$$(a + b\sqrt{-2})(c + d\sqrt{-2}) = 1$$
$$(ac - 2bd) + (bc + ad)\sqrt{-2} = 1$$

ดังนั้น $ac - 2bd = 1$ และ $bc + ad = 0$ ทำให้ได้ด้วยว่า

$$(a - b\sqrt{-2})(c - d\sqrt{-2}) = (ac - 2bd) - (bc + ad)\sqrt{-2} = 1 - 0 = 1$$

ฉะนั้น

$$1 = 1 \cdot 1 = (a + b\sqrt{-2})(c + d\sqrt{-2})(a - b\sqrt{-2})(c - d\sqrt{-2}) = (a^2 + 2b^2)(c^2 + 2d^2)$$

เนื่องจาก $a^2 + 2b^2$ และ $c^2 + 2d^2$ เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $a^2 + 2b^2 = 1$ $\square$