คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2568

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1302	แคลคูลัส ๑	เวลา 17:00 - 20:00 วันจันทร์ ที่ 8 กันยายน 2568	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**...................................... **หมู่เรียน**........................

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 16 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
    - **ตอนที่ 1** ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
    - **ตอนที่ 2** ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
    - **ตอนที่ 3** ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ จำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								รวม
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริงโดยที่ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. $f(0)=0$

ข. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

ค. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)}=1$

ง. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

จ. $|f(0)|=0$

2. กำหนดให้ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax-a}{x-1}=2$ แล้ว a มีค่าเท่ากับข้อใดต่อนี้

ก. 1

ข. 2

ค. 3

ง. 4

จ. 5

3. ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยจาก 0 ถึง 1 เท่ากับ 2 แล้วข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ถูกต้อง**

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ขณะ $x = 1$ เท่ากับ 2

ข. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ $x = 1$ เท่ากับ 2

ค. $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$

ง. $f(0) = 0$ และ $f(1) = 2$

จ. $f(1) - f(0) = 2$

4. ฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้ มีจุดเปลี่ยนเว้า (inflection point) ที่ไม่เท่ากับ 0

ก. $f(x) = x^2 + 1$

ข. $f(x) = x^2 + x$

ค. $f(x) = x^3 + x^2$

ง. $f(x) = x^4 + x$

จ. $f(x) = x^5 + 1$

5. กำหนดให้ $f(x) = e^{-x}$ ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ถูกต้อง**

   ก. $f^{(2564)}(x) = f(x)$

   ข. $f^{(2565)}(x) = f(x)$

   ค. $f^{(2566)}(x) = -f(x)$

   ง. $f^{(2567)}(x) = f(x)$

   จ. $f^{(2568)}(x) = -f(x)$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายมือ) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ______________________

ลิมิต $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^6 + x^4 + 1}}{x^3 + x^2 + 1}$ มีค่าเท่าใด

7. ______________________

กำหนดให้

$$f(6x+8) = x \cdot g(x) \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

ถ้า $g(0) = 12$ แล้ว $f'(8)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

8. ____________________

กำหนดให้

$$f(x) = \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \cdots + \sin^{2025} x$$

จงหาค่าของ $f'(0)$

9. ____________________

จงหา **ความชัน (slope)** ของกราฟที่มีสมการคือ

$$(x-y)(x+y) = xy - 1$$

ที่จุด $(1, 1)$

10. ____________________________

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และมี $x = 1, 2, 3$ เป็นจุดวิกฤต โดยที่

$$f''(1) = 0 \qquad \text{และ} \qquad f''(2) = 1 \qquad \text{และ} \qquad f''(3) = -1$$

แล้วฟังก์ชัน f มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์อยู่ที่จุดใด (ตอบในรูป x เท่ากับ)

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล**

11.1 **(5 คะแนน)** $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^3 - 8}$

11.2 **(5 คะแนน)** $\lim_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^2 - 1}$

12. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล**

12.1 **(4 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \sin x}{x\cos x + x^2}$

12.2 **(6 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + x}\right)$

13. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

13.1 **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ a ที่ทำให้

$$f(x) = \begin{cases} |a|x^2 - 4 & \text{เมื่อ } x \geq 2 \\ x + |a| & \text{เมื่อ } x < 2 \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริง

13.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนจำนวนจริงโดยที่

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{f(x)} = 3, \qquad f(1) = 0 \qquad \text{และ} \qquad g(x) = f(x) + x^2 - 1$$

จงหา $g'(1)$

14. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

14.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$y = \arctan u, \qquad u = xe^x \qquad \text{และ} \qquad x = 1 - \frac{1}{t^2}$$

จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

14.2 **(5 คะแนน)** จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x^{\ln 2x}$ เมื่อ $x > 0$

15. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

15.1 **(5 คะแนน)** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \ln\left(\dfrac{\arctan x^2}{\tan x^2}\right)$

15.2 **(5 คะแนน)** จงหา y' ในรูป x, y เมื่อกำหนดให้

$$e^{xy} = e^x + e^y$$

16. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

16.1 **(5 คะแนน)** จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าของ $\dfrac{1}{\sqrt{3.98}}$
และการประมาณค่านี้มีความถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่เท่าไร เมื่อค่าจริงคือ 0.5012547071...

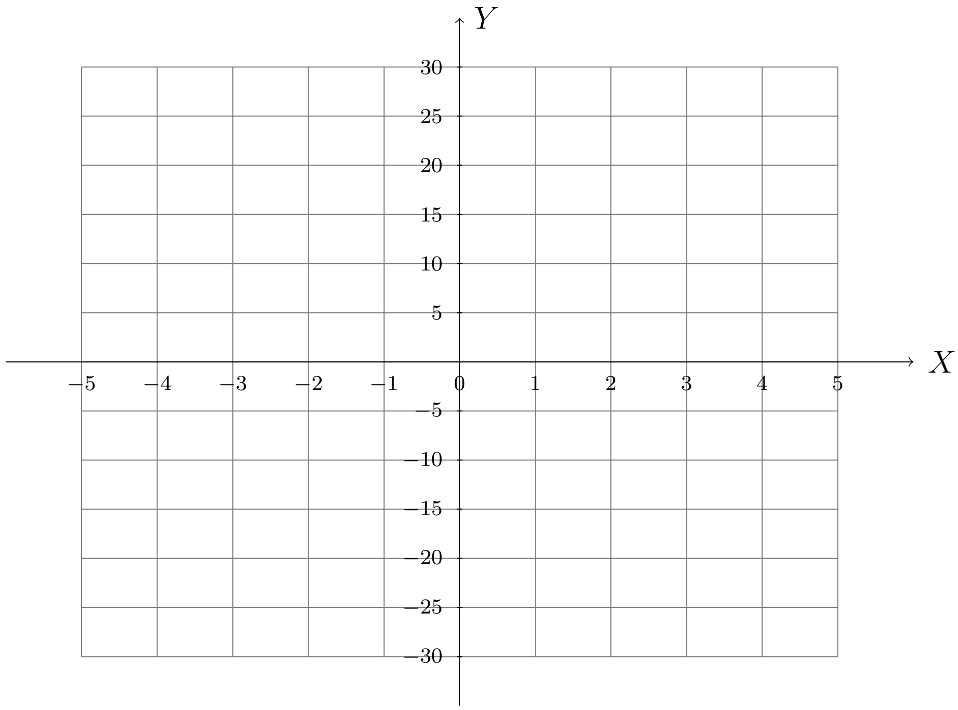
16.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1} \qquad \text{เมื่อ} \qquad x \in [-2, 2]$$

จงหาค่าสูงสุดและต่ำสุด (สัมบูรณ์) ของ f บนช่วง $[-2, 2]$

17. **(10 คะแนน)** จงร่างกราฟ $y=-x^4+4x^3$ พร้อมเติมคำตอบในช่องว่างให้สมบูรณ์ (ถ้าไม่มีคำตอบให้เขียนว่า *ไม่มี*)

โดเมน	
จุดตัดแกน X และแกน Y	
สมการเส้นกำกับแนวยืน	
สมการเส้นกำกับแนวนอน	
จุดวิกฤต	
จุดสูงสุดสัมพัทธ์ (ตอบเป็นคู่อันดับ)	
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (ตอบเป็นคู่อันดับ)	
f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง	
f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง	
จุดเปลี่ยนเว้า	
f มีความเว้าอยู่บน บนช่วง	
f มีความเว้าอยู่ล่าง บนช่วง	


Y
X
30
25
20
15
10
5
−5
−10
−15
−20
−25
−30
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5

18. **(10 คะแนน)** จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

18.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 3\sin x - \cos x}{x \tan x}$

18.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์

เฉลยข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2568

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1302	แคลคูลัส ๑	เวลา 17:00 - 20:00 วันจันทร์ ที่ 8 กันยายน 2568	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (20 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริง โดยที่ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. $f(0)=0$

   ข. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

   ค. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)}=1$

   ง. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ Answer

   จ. $|f(0)|=0$

   ตอบข้อ ง. ลิมิตที่กำหนดหาค่าได้ ดังนั้นต้องอยู่ในรูป $I.F.\frac{0}{0}$ นั่นคือ $f(0)=0$ จะได้ว่า $|f(0)|=0$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ โดยสมบัติของลิมิต

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{f(x)}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

   ดังนั้น ง. ไม่ถูกต้อง

2. กำหนดให้ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax-a}{x-1}=2$ แล้ว a มีค่าเท่ากับข้อใดต่อนี้

   ก. 1

   ข. 2 Answer

   ค. 3

   ง. 4

   จ. 5

   ตอบข้อ ข. พิจารณา

$$2=\lim_{x\to 1}\frac{ax-a}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1} a=a$$

3. ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยจาก 0 ถึง 1 เท่ากับ 2 แล้วข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ถูกต้อง**

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ขณะ $x = 1$ เท่ากับ 2

ข. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ $x = 1$ เท่ากับ 2

ค. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$

ง. $f(0) = 0$ และ $f(1) = 2$

จ. $f(1) - f(0) = 2$ Answer

ตอบข้อ จ. เนื่องจากอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f จาก 0 ถึง 1 เท่ากับ 2 หมายถึง

$$2 = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0)$$

4. ฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้ มีจุดเปลี่ยนเว้า (inflection point) ที่ไม่เท่ากับ 0

ก. $f(x) = x^2 + 1$

ข. $f(x) = x^2 + x$

ค. $f(x) = x^3 + x^2$ Answer

ง. $f(x) = x^4 + x$

จ. $f(x) = x^5 + 1$

ตอบข้อ ค.

ก. $f''(x) = 2 \neq 0$ ไม่มีเป็นจุดเปลี่ยนเว้า

ข. $f''(x) = 2 \neq 0$ ไม่มีเป็นจุดเปลี่ยนเว้า

ค. $f''(x) = 6x + 2 = 0$ นั่นคือ $x = -3$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

ง. $f''(x) = 12x^2 = 0$ นั่นคือ $x = 0$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

จ. $f''(x) = 20x^3 = 0$ นั่นคือ $x = 0$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

5. กำหนดให้ $f(x) = e^{-x}$ ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ถูกต้อง**

ก. $f^{(2564)}(x) = f(x)$ Answer

ข. $f^{(2565)}(x) = f(x)$

ค. $f^{(2566)}(x) = -f(x)$

ง. $f^{(2567)}(x) = f(x)$

จ. $f^{(2568)}(x) = -f(x)$

ตอบข้อ ก. พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^{-x}(-x)' = e^{-x}(-1) = -e^{-x} = -f(x) \\
f''(x) &= -e^{-x}(-x)' = -e^{-x}(-1) = e^{-x} = f(x) \\
f'''(x) &= e^{-x}(-x)' = e^{-x}(-1) = -e^{-x} = -f(x) \\
f^{(4)}(x) &= -e^{-x}(-x)' = -e^{-x}(-1) = e^{-x} = f(x) \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \begin{cases} -f(x) & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ f(x) & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f^{(2564)}(x) = f(x)$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายมือ) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. **ตอบ** -1

ลิมิต $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^6+x^4+1}}{x^3+x^2+1}$ มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^6+x^4+1}}{x^3+x^2+1} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^6(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6})}}{x^3(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^6}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}}}{x^3(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x^3|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}}}{x^3(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}}}{x^3(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+0+0}}{1+0+0} = -1 \quad \#
\end{aligned}
$$

7. **ตอบ** 2

กำหนดให้

$$f(6x+8) = x \cdot g(x) \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

ถ้า $g(0) = 12$ แล้ว $f'(8)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

แนวคำตอบ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
[f(6x+8)]' &= [x \cdot g(x)]' \\
f'(6x+8) \cdot (6x+8)' &= (x)' \cdot g(x) + x \cdot g'(x) \\
f'(6x+8) \cdot 6 &= 1 \cdot g(x) + x \cdot g'(x) \\
f'(6x+8) \cdot 6 &= g(x) + x \cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

แทน $x = 0$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f'(0+8) \cdot 6 &= g(0) + 0 \cdot g'(0) = g(0) = 12 \\
f'(8) &= \frac{12}{6} = 2 \quad \#
\end{aligned}
$$

8. **ตอบ** 1

กำหนดให้

$$f(x) = \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \cdots + \sin^{2025} x$$

จงหาค่าของ $f'(0)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x + 2(\sin x)\cos x + 3(\sin x)^2 \cos x + \cdots + 2025(\sin x)^{2024} \cos x \\ f'(0) &= 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(0) = 1 \quad \#$

9. **ตอบ** $\frac{1}{3}$

จงหา **ความชัน (slope)** ของกราฟที่มีสมการคือ

$$(x-y)(x+y) = xy - 1$$

ที่จุด $(1,1)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} (x-y)(x+y) &= xy - 1 \\ x^2 - y^2 &= xy - 1 \\ (x^2 - y^2)' &= (xy-1)' \\ 2x - 2yy' &= xy' + (x)'y \\ 2x - 2yy' &= xy' + (1)y \\ 2x - 2yy' &= xy' + y \end{aligned}$$

แทน $x = 1, y = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2(1) - 2(1)y' &= (1)y' + (1) \\ 2 - 2y' &= y' + 1 \\ 3y' &= 1 \\ y' &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น **ความชัน**ของเส้นสัมผัสเส้นโค้งนี้ที่จุด $(1,1)$ เท่ากับ $\frac{1}{3} \quad \#$

10. **ตอบ** $x = 3$

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และมี $x = 1, 2, 3$ เป็นจุดวิกฤต โดยที่

$$f''(1) = 0 \quad \text{และ} \quad f''(2) = 1 \quad \text{และ} \quad f''(3) = -1$$

แล้วฟังก์ชัน f มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์อยู่ที่จุดใด (ตอบในรูป x เท่ากับ)

แนวคำตอบ โดยการทดสอบอนุพันธ์อันดับสอง (SDT) จะได้ว่า

$$f''(3) = -1 < 0 \text{ แสดงว่า } x = 3 \text{ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ } f \qquad \#$$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล**

11.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^3-8}$

แนวคำตอบ เนื่องจากลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $I.F.\frac{0}{0}$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^3-8} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x^3-2^3} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x^2+2x+2^2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x^2+2x+4} \\
&= \frac{5}{4+4+4} = \frac{5}{12} \quad \#
\end{aligned}$$

11.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$

แนวคำตอบ เนื่องจากลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $I.F.\frac{0}{0}$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1} &= \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{(\sqrt{x^2+3})^2-2^2}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{(x^2+3)-4}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{1}{\sqrt{x^2+3}+2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+3}+2} = \frac{1}{4} \quad \#
\end{aligned}$$

12. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล**

12.1 **(4 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin x}{x\cos x + x^2}$

แนวคำตอบ เนื่องจากลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $I.F.\frac{0}{0}$ พิจารณาลิมิตโดยใช้กฎ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin x}{x\cos x + x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\frac{\sin x}{x})}{x(\cos x + x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{\cos x + x} \\
&= \frac{1+1}{1+0} = 2 \quad \#
\end{aligned}$$

12.2 **(6 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2+x}\right)$

แนวคำตอบ เนื่องจากลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $I.F.\infty - \infty$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2+x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2+x}\right) \cdot \frac{2x+\sqrt{4x^2+x}}{2x+\sqrt{4x^2+x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(2x)^2 - (\sqrt{4x^2+x})^2}{2x+\sqrt{4x^2+x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - (4x^2+x)}{2x+\sqrt{4x^2+x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{2x+\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x})}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{2x+\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{2x+|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{2x+x\sqrt{4+\frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x}}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{2+\sqrt{4+\frac{1}{x}}} \\
&= \frac{-1}{2+\sqrt{4+0}} = -\frac{1}{4} \quad \#
\end{aligned}$$

13. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

13.1 **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ a ที่ทำให้

$$f(x) = \begin{cases} |a|x^2 - 4 & \text{เมื่อ } x \geq 2 \\ x + |a| & \text{เมื่อ } x < 2 \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริง

แนวคำตอบ เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^+} f(x) \\ \lim_{x \to 2^-} (x + |a|) &= \lim_{x \to 2^+} (|a|x^2 - 4) \\ 2 + |a| &= 4|a| - 4 \\ 6 &= 3|a| \\ 2 &= |a| \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = -2, 2 \quad \#$

13.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนจำนวนจริงโดยที่

$$\lim_{x \to 1} \frac{g(x)}{f(x)} = 3, \qquad f(1) = 0 \qquad \text{และ} \qquad g(x) = f(x) + x^2 - 1$$

จงหา $g'(1)$

แนวคำตอบ จาก $f(1) = 0$ จะได้ว่า

$$g(1) = f(1) + 1^2 - 1 = f(1) = 0$$

$$\begin{aligned} 3 = \lim_{x \to 1} \frac{g(x)}{f(x)} &= \lim_{x \to 1} \frac{g(x) - 0}{f(x) - 0} = \lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{f(x) - f(1)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}}{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}} = \frac{\lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}}{\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}} = \frac{g'(1)}{f'(1)} \end{aligned}$$

นั่นคือ $g'(1) = 3f'(1)$ พิจารณา

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) + 2x \\ g'(1) &= f'(1) + 2 \\ 3f'(1) &= f'(1) + 2 \\ 2f'(1) &= 2 \\ f'(1) &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g'(1) = 3(1) = 3 \quad \#$

14. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

14.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$y = \arctan u, \qquad u = xe^x \qquad \text{และ} \qquad x = 1 - \frac{1}{t^2}$$

จงหา $\frac{dy}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $y = y(u), u = u(x)$ และ $x = x(t)$ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \\
&= \frac{d}{du}(\arctan u)\cdot\frac{d}{dx}(xe^x)\cdot\frac{d}{dt}\left(1-\frac{1}{t^2}\right) \\
&= \frac{1}{1+u^2}\cdot(xe^x+e^x)\cdot\frac{2}{t^3}
\end{aligned}$$

แทน $t = 1$ จะได้ว่า $x = 1 - \frac{1}{1^2} = 0$ และ $u = 0e^0 = 0$ ดังนั้น

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} \frac{1}{1+0^2}\cdot(0e^0+e^0)\cdot\frac{2}{1^3} = 1(1)(2) = 2 \quad \#$$

14.2 **(5 คะแนน)** จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x^{\ln 2x}$ เมื่อ $x > 0$

แนวคำตอบ พิจารณา $x > 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln x^{\ln 2x} = \ln 2x \cdot \ln x \\
\frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{d}{dx}\ln 2x\cdot\ln x \\
\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= (\ln 2x)'\cdot\ln x + \ln 2x\cdot(\ln x)' \\
\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2x}(2x)'\cdot\ln x + \ln 2x\cdot\frac{1}{x} \\
\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2x}(2)\cdot\ln x + \frac{\ln 2x}{x} \\
\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln 2x}{x} \\
\frac{dy}{dx} &= y\left[\frac{\ln x + \ln 2x}{x}\right] = y\cdot\frac{\ln(x\cdot 2x)}{x} = y\cdot\frac{\ln(2x^2)}{x} \\
&= x^{\ln 2x}\cdot\frac{\ln(2x^2)}{x} \\
&= x^{\ln 2x - 1}\cdot\ln(2x^2) \quad \#
\end{aligned}$$

15. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

15.1 **(5 คะแนน)** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \ln\left(\dfrac{\arctan x^2}{\tan x^2}\right)$

แนวคำตอบ โดยใช้สมบัติลอการิทึม

$$f(x) = \ln\left(\frac{\arctan x^2}{\tan x^2}\right) = \ln(\arctan x^2) - \ln(\tan x^2)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\arctan x^2} \cdot (\arctan x^2)' - \frac{1}{\tan x^2} \cdot (\tan x^2)' \\ &= \frac{1}{\arctan x^2} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot (x^2)' - \frac{1}{\tan x^2} \cdot \sec^2 x^2 \cdot (x^2)' \\ &= \frac{1}{\arctan x^2} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x - \frac{1}{\tan x^2} \cdot \sec^2 x^2 \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{(1+x^4)\arctan x^2} - \frac{2x\sec^2 x^2}{\tan x^2} \qquad \# \end{aligned}$$

15.2 **(5 คะแนน)** จงหา y' ในรูป x, y เมื่อกำหนดให้

$$e^{xy} = e^x + e^y$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} [e^{xy}]' &= [e^x + e^y]' \\ e^{xy} \cdot (xy)' &= e^x + e^y y' \\ e^{xy}(xy' + 1 \cdot y) &= e^x + e^y y' \\ xe^{xy}y' + ye^{xy} &= e^x + e^y y' \\ xe^{xy}y' - e^y y' &= e^x - ye^{xy} \\ (xe^{xy} - e^y)y' &= e^x - ye^{xy} \\ y' &= \frac{e^x - ye^{xy}}{xe^{xy} - e^y} \qquad \# \end{aligned}$$

16. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

16.1 **(5 คะแนน)** จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าของ $\dfrac{1}{\sqrt{3.98}}$
และการประมาณค่านี้มีความถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่เท่าไร เมื่อค่าจริงคือ 0.5012547071...

แนวคำตอบ พิจารณา ให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ จะได้ว่า $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$
พิจารณา $x = 4$ และ $dx = -0.02$ จาก

$$f(x+dx) \approx f(x) + f(x)dx$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3.98}} = f(3.98) &= f(4-0.02)\\ &\approx f(4) + f'(4)\cdot(-0.02)\\ &= \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{2\sqrt{4^3}}\cdot(-0.02)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 8}\cdot 0.02\\ &= 0.5 + 0.00125 = 0.50125 \quad \#\end{aligned}$$

ค่าประมาณมีความถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 5

16.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1} \qquad \text{เมื่อ} \qquad x \in [-2,2]$$

จงหาค่าสูงสุดและต่ำสุด (สัมบูรณ์) ของ f บนช่วง $[-2,2]$
แนวคำตอบ หาจุดวิกฤตได้จาก

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(x^2+1)(4x)' - (4x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{(x^2+1)(4)-(4x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2+4-8x^2}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{4-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2} = 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $x = -1, 1$ เป็นจุดวิกฤตของ f หาค่าหาค่าสูงสุดและต่ำสุดโดยพิจารณาค่าของจุดวิกฤตและจุดขอบของโดเมนคือ $x = -2, 2$

$$\begin{aligned}f(-2) &= \frac{4(-2)}{(-2)^2+1} = -\frac{8}{5}\\ f(-1) &= \frac{4(-1)}{(-1)^2+1} = -2\\ f(1) &= \frac{4(1)}{1^2+1} = 2\\ f(2) &= \frac{4(2)}{2^2+1} = \frac{8}{5}\end{aligned}$$

ดังนั้น f มีค่าต่ำสุดเท่ากับ -2 เมื่อ $x = -1$ และมีค่าสูงสุดที่จุด 2 เมื่อ $x = 1 \quad \#$

17. **(10 คะแนน)** จงร่างกราฟ $y = -x^4 + 4x^3$ พร้อมเติมคำตอบในช่องว่างให้สมบูรณ์ (ถ้าไม่มีคำตอบให้เขียนว่า *ไม่มี*)

แนวคำตอบ

โดเมน	$\mathbb{R}$
จุดตัดแกน X และแกน Y	$(0,0),(4,0)$
สมการเส้นกำกับแนวยืน	ไม่มี
สมการเส้นกำกับแนวนอน	ไม่มี
จุดวิกฤต	$x = 0, 3$
จุดสูงสุดสัมพัทธ์ (ตอบเป็นคู่อันดับ)	$(3, 27)$
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (ตอบเป็นคู่อันดับ)	ไม่มี
f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง	$(-\infty, 3)$
f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง	$(3, \infty)$
จุดเปลี่ยนเว้า	$x = 0, 2$
f มีความเว้าอยู่บน บนช่วง	$(0, 2)$
f มีความเว้าอยู่ล่าง บนช่วง	$(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

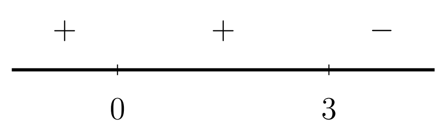
1. พิจารณา $y = -x^4 + 4x^3$ โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ ไม่มีเส้นกำกับเนื่องจากไม่อยู่ในรูปผลหาร
2. ถ้า $x = 0$ จะได้ $y = 0$ ดังนั้น $(0, 1)$ เป็นจุดตัดแกน Y สำหรับ ถ้า $y = 0$ จะได้

$$0 = -x^4 + 4x^3 = -x^3(x - 4)$$

นั่นคือ $x = 0, 4$ จะได้ตัดแกน X คือ $(0, 0)$ และ $(4, 0)$
3. พิจารณา

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 = -4x^2(x - 3)$$

ดังนั้น $x = 0, 3$ เป็นจุดวิกฤต จะได้ $f(0) = 0$ และ $f(3) = 27$
เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย f' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

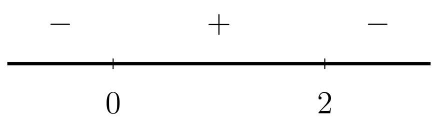


และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty, 3)$ และเป็นฟังก์ชันลดบน $(3, \infty)$

4. พิจารณา

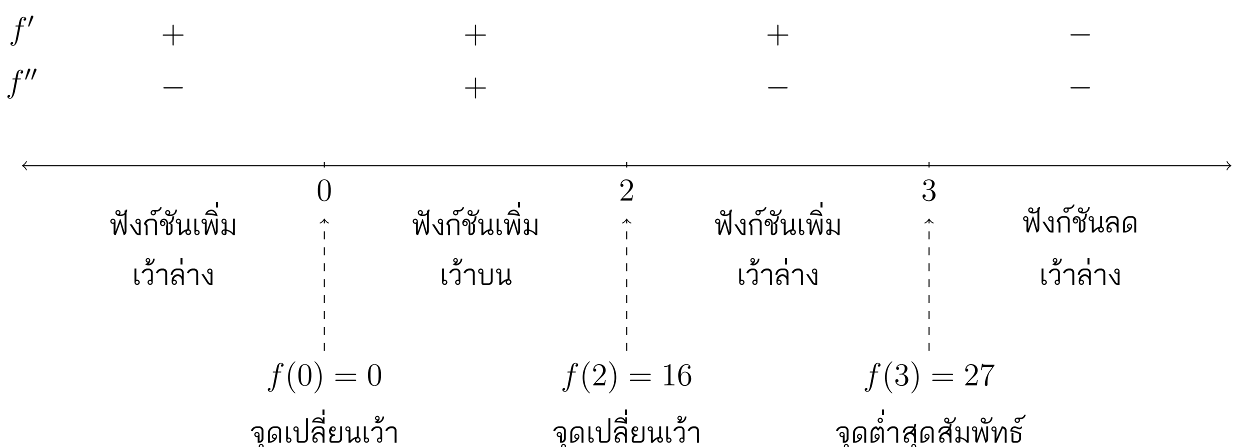
$$f''(x) = -12x^2 + 24x = -12x(x-2)$$

ดังนั้น $x = 0, 2$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า จะได้ $f(0) = 0$ และ $f(2) = 16$
เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย f' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

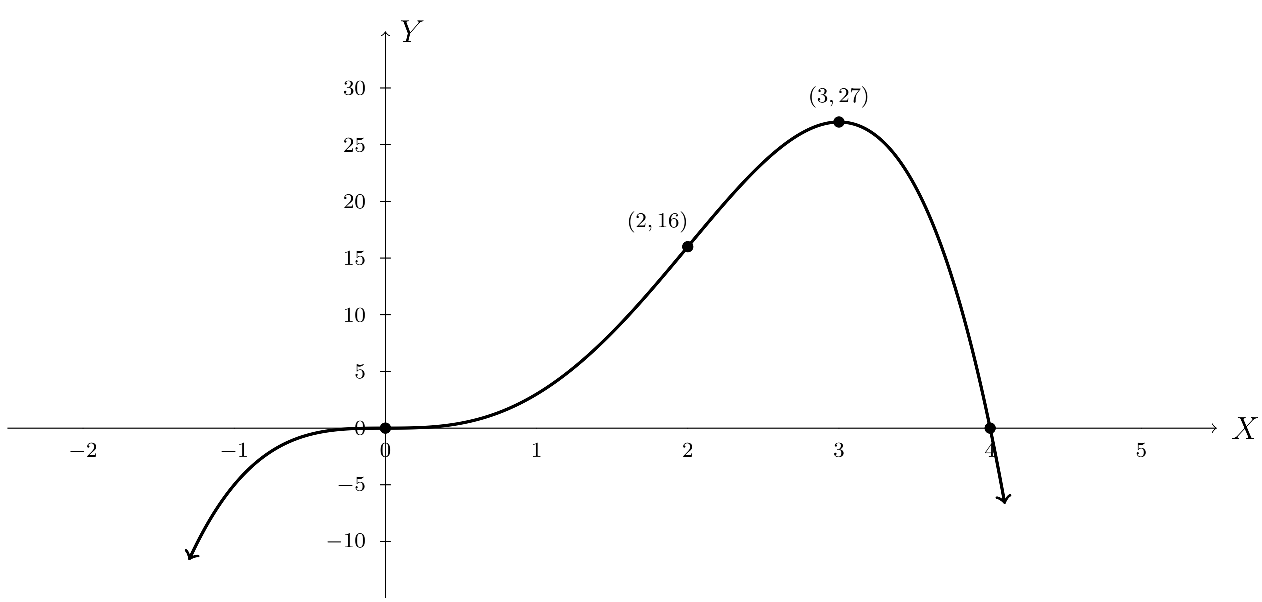


f มีความเว้าอยู่บนบน $(0, 2)$ และความเว้าอยู่ล่างบน $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

5. นำข้อมูลที่ได้มาสรุปบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้



18. **(10 คะแนน)** จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

18.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3\sin x-\cos x}{x\tan x}$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ I.F.$\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3\sin x-\cos x}{x\tan x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-3\sin x-\cos x)'}{(x\tan x)'} && (\text{ L'Hospital's law})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3\cos x+\sin x}{x\sec^2 x+\tan x} && (\text{I.F.}\frac{0}{0})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(3e^{3x}-3\cos x+\sin x)'}{(x\sec^2 x+\tan x)'} && (\text{ L'Hospital's law})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}+3\sin x+\cos x}{(x\cdot 2\sec x\cdot\sec x\tan x+\sec^2 x)+\sec^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}+3\sin x+\cos x}{2x\sec^2 x\tan x+2\sec^2 x}\\
&= \frac{9+0+1}{0+2}=5 \quad \#
\end{aligned}$$

18.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ 0^0 ให้ $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ จะได้ว่า

$$\ln y=\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\ln y &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x} && (\text{I.F.}\frac{\infty}{\infty})\\
\ln\left(\lim_{x\to\infty} y\right) &= \frac{[\ln\left(\frac{1}{x}\right)]'}{(x)'} && (\text{ L'Hospital' Law})\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{1}\\
&= \lim_{x\to\infty} x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x}=0\\
\ln\left(\lim_{x\to\infty} y\right) &= 0\\
\lim_{x\to\infty} y &= e^0=1
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=1 \quad \#$$