



ทฤษฎีเซต Set Theory

ธนัชชยศ จำปาหวาย

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

2561

MAP1404

ทฤษฎีเซต

Set Theory

อาจารย์ ดร.ธนชัย จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
เอกสารประกอบการสอนวิชาทฤษฎีเซต ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2561

สารบัญ

1	ความรู้เบื้องต้น	1
1.1	ตรรกศาสตร์เชิงสัญลักษณ์	1
1.2	วิธีการพิสูจน์	15
1.3	ปฏิทรรศน์	35
2	สัจพจน์ของทฤษฎีเซต	39
2.1	ประวัติและการเขียนเซต	39
2.2	สัจพจน์การเท่ากัน	47
2.3	สัจพจน์เกี่ยวกับการดำเนินการ	55
2.4	สัจพจน์ของเซตกาลัง	66
2.5	สัจพจน์ของเซตอนันต์	72
3	ความสัมพันธ์	75
3.1	เซตของคู่อันดับ	75
3.2	ความสัมพันธ์	85
3.3	ความสัมพันธ์สมมูล	96
4	ฟังก์ชัน	101
4.1	ฟังก์ชัน	101
4.2	ฟังก์ชันผกผันและฟังก์ชันประกอบ	113
4.3	ภาพและภาพผกผัน	123
4.4	เซตตรรกนิ	130
5	การเรียงอันดับบางส่วน	139
5.1	เซตซึ่งเรียงอันดับบางส่วนได้	139
5.2	เซตที่เป็นอันดับดีแล้ว	151
5.3	สัจพจน์ของการเลือก	157
6	จำนวนธรรมชาติ	161
6.1	สัจพจน์เปอาโน	161
6.2	การดำเนินการบนจำนวนธรรมชาติ	167
6.3	การเป็นอันดับของจำนวนธรรมชาติ	176

7	ระบบจำนวน	181
7.1	จำนวนเต็ม	181
7.2	จำนวนตรรกยะ	189
7.3	จำนวนจริง	198
8	เซตจำกัดและเซตอนันต์	207
8.1	การเทียบเท่าของเซต	207
8.2	เซตจำกัด	215
8.3	เซตอนันต์	222
8.4	เซตนับได้	225
9	จำนวนเชิงการนับ	233
9.1	จำนวนเชิงการนับ	233
9.2	การดำเนินการของจำนวนเชิงการนับ	238
9.3	จำนวนเชิงอันดับ	243

บทที่ 1

ความรู้เบื้องต้น

1.1 ตรรกศาสตร์เชิงสัญลักษณ์

ข้อความที่ตัดสินใจได้ว่า ต้องเป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น จะเป็นทั้งสองอย่างไม่ได้ กล่าวคือถ้าข้อความใดไม่เป็นจริงแล้วข้อความนั้นต้องเป็นเท็จ ในนัยกลับกัน ถ้าข้อความใดไม่เป็นเท็จแล้วข้อความนั้นต้องเป็นจริง (พัฒน์ อุดมกะวานิช. 2559. หน้า 2) เรียกข้อความหรือประโยคเหล่านั้นว่า **ประพจน์ (proposition หรือ statement)**

บทนิยาม 1.1.1 ประพจน์ คือประโยคหรือข้อความที่มีค่าความจริง (truth value) เป็นจริง (true) หรือค่าความจริงเป็นเท็จ (false) อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว

ตัวอย่าง 1.1.2 จงพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้นี้เป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นประพจน์ให้บอกค่าความจริงของประพจน์เหล่านั้น

1. พระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก
2. เขาเป็นคนอังกฤษ
3. กรุณา เปิดหน้าต่างให้ฉันหน่อย
4. คุณทำอะไรที่นี่
5. จังหวัดเลยไม่อยู่ในภาคเหนือของประเทศไทย
6. คุณพระช่วย !
7. พี่ต้องพาฉันไปดูหนังนะ
8. $x > 1$

บทนิยาม 1.1.3 ประโยคเปิด คือประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปร (variable) เมื่อแทนที่ตัวแปรด้วยสมาชิกในขอบเขตที่กำหนด แล้วประโยคนั้นจะเป็นประพจน์

1. และ (and)	เขียนแทนด้วย	$\wedge$
2. หรือ (or)	เขียนแทนด้วย	$\vee$
3. ถ้า...แล้ว (if...then)	เขียนแทนด้วย	$\rightarrow$
4. ก็ต่อเมื่อ (if and only if)	เขียนแทนด้วย	$\leftrightarrow$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

p	$\neg p$
T	F
F	T

จากประพจน์ที่ว่า $p \leftrightarrow q$ มีความหมายว่า $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ดังนั้น

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

ดังนั้น $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ เราเรียกสมบัตินี้ว่ากฎแย้งสลับที่ (contrapositive law) ตัวอย่างเช่น "ถ้าแดงไปโรงเรียนแล้วแดงจะได้กินขนม" โดยใช้กฎแย้งสลับที่ที่สมมูลกับประพจน์ "ถ้าแดงไม่ได้กินขนมแล้วแดงไม่ไปโรงเรียน" เป็นต้น

เมื่อกำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใด ๆ จะได้สมมูลดังต่อไปนี้

$$(E1) \quad p \wedge p \equiv p$$

กฎนิจพล (Idempotent law)

$$p \vee p \equiv p$$

$$(E2) \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

กฎการสลับที่ (Commutative law)

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$(E3) \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative law)

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$(E5) \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

กฎการแจกแจง (Distributive law)

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$(E6) \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's law)

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$(E7) \quad \neg(\neg p) \equiv p$$

กฎนิเสธซ้อน (Double negation law)

$$(E8) \quad p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

กฎแย้งสลับที่ (contrapositive law)

$$(E9) \quad p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$(E10) \quad p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (q \leftrightarrow p)$$

$$(E11) \quad p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$$

$$(E12) \quad p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$$

$$(E13) \quad p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

$$(E14) \quad p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$$

$$(E15) \quad (p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$

$$(E16) \quad (p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

บทนิยาม 1.1.6 ประพจน์ที่มีรูปแบบที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอเราจะเรียกว่า **สัจนิรันดร์** (tautology) และเรียกนิเสธของสัจนิรันดร์ว่า **ข้อความขัดแย้ง** (contradiction)

ตัวอย่าง 1.1.7 จงแสดงว่าประพจน์ $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

ดังนั้น $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์ เราเรียกว่าการเพิ่ม (addition)

ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ เมื่อให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใด ๆ

- (T1) $p \wedge p \leftrightarrow p$ กฎนิจพล (Idempotent law)
 $p \vee q \leftrightarrow p$
- (T2) $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ กฎการสลับที่ (Commutative law)
 $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
- (T3) $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative law)
 $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
- (T4) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ กฎการแจกแจง (Distributive law)
 $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- (T5) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's law)
 $\neg(p \wedge) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
- (T6) $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$ กฎนิเสธซ้อน (Double negation law)
- (T7) $\neg p \vee p$ หรือ $\neg(\neg p \wedge p)$
- (T8) $p \rightarrow p$
- (T9) $p \rightarrow p \vee q$ Addition
- (T10) $p \wedge q \rightarrow p$ Simplification
 $p \wedge q \rightarrow q$
- (T11) $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ Modus ponens
- (T12) $\neg q \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$ Modus tollens
- (T13) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ Hypothetical syllogism
- (T14) $(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$ Disjunctive syllogism
 $(p \vee q) \wedge \neg q \rightarrow p$
- (T15) $(\neg p \rightarrow c) \rightarrow p$

ให้ p แทนประพจน์ $x > 2$ เมื่อ $x \in \{1, 2, 3, 4\}$

x	$p: x > 2$	ค่าความจริง
1	$1 > 2$	F
2	$2 > 2$	F
3	$3 > 2$	T
4	$4 > 2$	T

จากตารางจะเห็นได้ว่าค่าความจริงของประพจน์ p เปลี่ยนไปตามค่า x นิยมใช้ $p(x)$ แทนประพจน์ p และเรียก $\{1, 2, 3, 4\}$ ว่า เอกภพสัมพัทธ์ (universe) นิยมเขียนแทนด้วย $\mathcal{U}$ เมื่อกล่าวว่

" มี x ใน $\mathcal{U}$ ที่สอดคล้อง $p(x)$ "

ประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นจริงเพราะว่ามี $x = 3$ ซึ่งทำให้ $p(3)$ มีค่าความจริงเป็นจริง เขียนแทนคำว่า "มี" ด้วย $\exists$ ดังนั้นเขียนประพจน์ดังกล่าวได้เป็น $\exists x \in \mathcal{U}, p(x)$ ในทำนองเดียวกัน ถ้ากล่าวว่า

" ทุก ๆ x ใน $\mathcal{U}$ ที่สอดคล้อง $p(x)$ "

ประพจน์นี้จะมีค่าความจริงเป็นเท็จเพราะว่ามี $x = 1$ ที่ทำให้ $p(1)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เขียนแทนคำว่า "ทุก ๆ" ด้วย $\forall$ ดังนั้นเขียนประพจน์ดังกล่าวได้เป็น $\forall x \in \mathcal{U}, p(x)$ เรียก 2 สัญลักษณ์ว่า **ตัวบ่งปริมาณ (quantifier)** และเรียกวิธีการนี้ว่า **วิธีบ่งปริมาณ (quantification)** ซึ่งมีได้ 2 แบบ ดังนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1.8 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $p(x)$ เป็นประพจน์

แบบที่ 1 นำหน้า $p(x)$ ด้วยวลีบ่งปริมาณ

ทุก x ใน $\mathcal{U}$ / สำหรับแต่ละ x ใน $\mathcal{U}$ / ไม่ว่า x จะเป็นอะไรก็ตามใน $\mathcal{U}$

สำหรับแต่ละ x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติ $p(x)$ เขียนแทนด้วย

$$\forall x \in \mathcal{U} [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \forall x [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \forall x \in \mathcal{U}, p(x)$$

เรียก $\forall$ ว่า **ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด (universal quantifier)**

แบบที่ 2 นำหน้า $p(x)$ ด้วยวลีบ่งปริมาณ

มี x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่ง / บาง x ใน $\mathcal{U}$ มีสมบัติว่า

มีบาง x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติ $p(x)$ เขียนแทนด้วย

$$\exists x \in \mathcal{U} [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \exists x [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \exists x \in \mathcal{U}, p(x)$$

เรียก $\exists$ ว่า **ตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่ง (existential quantifier)** เรียกสั้น ๆ ว่า **มี**

เพื่อความสะดวกในการเขียนตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ กำหนดให้

$\mathbb{C}$ แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน

$\mathbb{Q}^c$ แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ

$\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

$\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม

$\mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

$\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับ

ตัวอย่าง 1.1.9 จงเขียนข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์พร้อมบอกเอกภพสัมพัทธ์ในแต่ละข้อ

1. มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x^2 = x$
2. ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม จะได้ว่า $x > 0$
3. จำนวนจริงทุกจำนวนมีค่าเป็นลบเสมอ
4. มีจำนวนตรรกยะที่มีค่าเป็นลบ
5. จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ

ตัวอย่าง 1.1.10 จงเปลี่ยนสัญลักษณ์ต่อไปนี้ในรูปข้อความ

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$
2. $\exists x \in \mathbb{Z}, (x \neq 1) \rightarrow (x^2 > 1)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+, (x < 1) \leftrightarrow (x^2 < x)$

บทนิยาม 1.1.11 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $p(x)$ เป็นประพจน์

ข้อความ $\forall x \in \mathcal{U}, p(x)$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

ไม่ว่า x จะเป็นอะไรก็ตามใน $\mathcal{U}$ $p(x)$ มีค่าความเป็นจริง นอกนั้นข้อความนี้เป็นเท็จ

ข้อความ $\exists x \in \mathcal{U}, p(x)$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวใน $\mathcal{U}$ ทำให้ $p(x)$ มีค่าความเป็นจริง นอกนั้นข้อความนี้เป็นเท็จ

ตัวอย่าง 1.1.12 ให้ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณาค่าความจริงของ

$$\forall x \in \mathcal{U}, x > 0$$

x	ข้อความ $x > 0$	ค่าความจริง
1		
2		
3		
4		

$$\exists x \in \mathcal{U}, x < 2$$

x	ข้อความ $x < 2$	ค่าความจริง
1		
2		
3		
4		

ตัวอย่าง 1.1.13 ให้เอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

$$1. \forall x \in \mathcal{U}, (x^2 = x) \rightarrow (x > 0)$$

x	ข้อความ $(x^2 = x) \rightarrow (x > 0)$	ค่าความจริง
-2		
-1		
0		
1		
2		

$$2. [\forall x \in \mathcal{U}, x^2 = x] \rightarrow [\forall x \in \mathcal{U}, x > 0]$$

x	ข้อความ $x^2 = x$	ค่าความจริง		ข้อความ $x > 0$	ค่าความจริง
-2					
-1					
0					
1					
2					

หลายครั้งมักจะพบประพจน์ที่ซับซ้อนมากขึ้นเช่น "มีจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งซึ่งบวกกับทุกจำนวนเต็มแล้วเท่ากับศูนย์" เขียนสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}, x + y = 0$$

ประพจน์ลักษณะนี้กล่าวได้ว่ามีตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว

ตัวอย่าง 1.1.14 จงแปลงประพจน์ต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์

1. ทุกจำนวนจริง x มีจำนวนจริง y ซึ่ง $x + y = 0$
2. สำหรับจำนวนนับ n และ m จะได้ว่า $n + m > 1$
3. มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x = y + 1$ ทุก ๆ จำนวนเต็ม y
4. มีจำนวนจริง x และ y ถ้า $x > 0$ และ $y > 0$ แล้ว $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

ตัวอย่าง 1.1.15 ให้ $\mathcal{U} = \{-1, 0, 1\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณาข้อความ $x + y = 0$ โดยสร้างแผนภาพต้นไม้ได้ดังนี้

x	y	$x + y = 0$	ค่าความจริง
-1	-1	$-1 + (-1) = 0$	F
	0	$-1 + 0 = 0$	F
	1	$-1 + 1 = 0$	T
0	-1	$0 + (-1) = 0$	F
	0	$0 + 0 = 0$	T
	1	$0 + 1 = 0$	F
1	-1	$1 + (-1) = 0$	T
	0	$1 + 0 = 0$	F
	1	$1 + 1 = 0$	F

ให้ $p(x, y)$ แทนประพจน์ $x + y = 0$ เขียนตารางได้ดังนี้

-1	○	○	●
0	○	●	○
1	●	○	○
	-1	0	1

จะเรียกตารางนี้ว่า **ตารางจุด (Dot table)** โดยให้แนวนอนเป็นค่า x และแนวตั้งเป็นค่า y จงตรวจสอบค่าความจริงของประพจน์ $\forall x \in \mathcal{U} \exists y \in \mathcal{U}, x + y = 0$ และ $\exists x \in \mathcal{U} \forall y \in \mathcal{U}, x + y = 0$

ตัวอย่าง 1.1.16 ให้ $\mathcal{U} = \{-1, -2, 0, 1, 2\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณาข้อความ

$$p(x, y) : |x| + y \geq x + |y|$$

จงตรวจสอบค่าความจริงของประพจน์

1. $\forall x \in \mathcal{U} \forall y \in \mathcal{U}, p(x, y)$
2. $\forall x \in \mathcal{U} \exists y \in \mathcal{U}, p(x, y)$
3. $\exists x \in \mathcal{U} \forall y \in \mathcal{U}, p(x, y)$
4. $\exists x \in \mathcal{U} \exists y \in \mathcal{U}, p(x, y)$

ต่อมาจะกล่าวถึงการหานิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ เช่น "ไม่มีจำนวนเต็ม x ใดเลขที่สอดคล้อง $x^2 + x + 1 = 0$ " เขียนเป็นสัญลักษณ์คือ

$$\neg \exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + x + 1 = 0$$

หมายถึง "ทุกจำนวนเต็ม x จะสอดคล้อง $x^2 + x + 1 \neq 0$ " เขียนเป็นสัญลักษณ์คือ

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 + x + 1 \neq 0$$

สรุปได้ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1.17 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ของประพจน์ $p(x)$ นิเสธของตัวบ่งปริมาณนิยามโดย

$$\text{นิเสธของ } \forall x \in \mathcal{U}, p(x) \text{ คือ } \neg \forall x \in \mathcal{U}, p(x) \equiv \exists x \in \mathcal{U}, \neg p(x)$$

$$\text{นิเสธของ } \exists x \in \mathcal{U}, p(x) \text{ คือ } \neg \exists x \in \mathcal{U}, p(x) \equiv \forall x \in \mathcal{U}, \neg p(x)$$

ตัวอย่าง 1.1.18 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

$$1. \exists x, x^2 = x$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}, x = x + 0$$

$$3. \forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}, xy > 0 \rightarrow x + y > 0$$

$$4. \text{ไม่ว่า } x \text{ เป็นจำนวนจริงใดก็ตาม ถ้า } x \neq 0 \text{ แล้ว } x^2 > 0$$

$$5. \text{ไม่ว่า } x \text{ จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม } x > 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } x^2 > 0$$

ตัวอย่าง 1.1.19 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. มีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง $xy = 1$

2. ผลบวกของจำนวนตรรกยะเป็นจำนวนตรรกยะ

ตัวอย่าง 1.1.20 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\exists x \in \mathcal{U}, p(x) \rightarrow q(x)$

2. $\forall x \in \mathcal{U}, p(x) \vee q(x)$

3. $\exists x \in \mathcal{U} \forall y \in \mathcal{U}, \neg p(x, y) \rightarrow q(x, y)$

4. $\forall x \in \mathcal{U} \forall y \in \mathcal{U}, p(x, y) \leftrightarrow q(x, y)$

5. $\exists x \in \mathcal{U}, p(x) \rightarrow \forall x \in \mathcal{U}, q(x)$

แบบฝึกหัด 1.1

1. พิจารณาประโยคต่อไปนี้ว่าเป็น ประพจน์ หรือ ประโยคเปิด หรือไม่เป็นทั้งสองอย่าง
 - 1.1 ห้ามเดินลัดสนาม
 - 1.2 ปีปัจจุบันเป็นปีระกา
 - 1.3 น่านเป็นจังหวัดในภาคใต้
 - 1.4 มีจำนวนนับที่น้อยกว่า 1
 - 1.5 5 หาร 11 ลงตัว
 - 1.6 ใครเป็นคนนัดพวกเราที่สยามพารากอน
 - 1.7 รถไฟมีสองหัว
 - 1.8 ถ้า $1 > 1$ แล้วประเทศไทยจะมี 100 จังหวัด
2. จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

2.1 ถ้า $2^0 = 0^2$ แล้ว $2 = 0$	2.4 ถ้า $2 \neq 9$ แล้ว นกขมิ้นบินไม่ได้
2.2 ปูม้าไม่มีขาที่ต่อเมื่อลิงไม่มีหู	2.5 ถ้าช้างเป็นสัตว์ปีกแล้วช้างเป็นตุ๊กแตน
2.3 จำนวนนับเป็นจำนวนเต็มหรือตรรกยะ	2.6 กระต่ายไม่มีฟัน ก็ต่อเมื่อ $1 > 2$
3. จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

3.1 $(p \rightarrow \neg q) \vee (q \rightarrow p)$	3.3 $\neg[\neg p \wedge (q \rightarrow \neg r)] \rightarrow (p \wedge \neg r)$
3.2 $p \wedge (\neg q \rightarrow r) \leftrightarrow (r \vee q)$	3.4 $\neg p \wedge (q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow r \wedge s)$
4. ประพจน์ p, q, r, s มีค่าความจริงเป็น T, F, F, T ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
 - 4.1 $p \rightarrow (q \vee \neg(p \wedge r))$
 - 4.2 $\neg[(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow \neg r)] \rightarrow \neg s$
 - 4.3 $\neg(r \wedge \neg s) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$
 - 4.4 $[(\neg p \vee (\neg p \rightarrow (q \wedge r) \vee s) \rightarrow p) \wedge r] \leftrightarrow p$
5. กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ใด จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่ โดยใช้ตารางค่าความจริง

5.1 q และ $\neg p \vee (p \wedge q)$	5.4 $p \leftrightarrow (q \vee r)$ และ $(p \vee r) \leftrightarrow q$
5.2 $\neg p \rightarrow q$ และ $\neg q \rightarrow p$	5.5 $(p \vee q) \leftrightarrow r$ และ $p \vee (q \leftrightarrow r)$
5.3 $(p \vee r) \rightarrow q$ และ $p \rightarrow (q \vee r)$	5.6 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ และ $p \wedge q \rightarrow r$
6. ให้ p, q, r เป็นประพจน์ใด ๆ จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่ ถ้าสมมูลกันจงแสดงโดยใช้ทฤษฎีบท ถ้าไม่สมมูลจงยกตัวอย่างค้าน

- | | |
|---|---|
| 6.1 $\neg(p \rightarrow \neg q)$ และ $p \wedge (p \rightarrow q)$ | 6.5 $p \rightarrow (q \vee r)$ และ $\neg(\neg r \rightarrow q) \rightarrow \neg p$ |
| 6.2 $p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$ และ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$ | 6.6 $\neg(p \wedge \neg q)$ และ $\neg q \rightarrow \neg p$ |
| 6.3 $p \wedge (q \vee r)$ และ $(p \wedge q) \vee r$ | 6.7 $\neg p \rightarrow q$ และ $(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$ |
| 6.4 $p \leftrightarrow \neg q$ และ $\neg p \leftrightarrow q$ | 6.8 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ และ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ |

7. จงหาคุณสมบัติของประพจน์ต่อไปนี้

- 7.1 รองเท้าเป็นเครื่องแต่งกายชนิดหนึ่ง
 7.2 ถ้าแดงไปโรงเรียน แล้วดำจะไม่ทำการบ้าน
 7.3 $2 > 4$ และ $3 = 5$
 7.4 $x + 1 = 3$ หรือ π เป็นจำนวนตรรกยะ
 7.5 ถ้า 2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว 1 เป็นจำนวนเฉพาะ
 7.6 5 เป็นจำนวนเต็มบวก ก็ต่อเมื่อ e เป็นจำนวนอตรรกยะ
 7.7 $ab = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$ หรือ $b = 0$
 7.8 ถ้า $xy > 0$ แล้ว $(x > 0$ และ $y > 0)$ หรือ $(x < 0$ และ $y < 0)$
 7.9 $x + y = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = -y$ หรือ $y = -x$
 7.10 ถ้า 2 หาร x ลงตัว หรือ 3 หาร x ลงตัว แล้ว 6 หาร x ลงตัว

8. จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยใช้ตารางค่าความจริง

- | | |
|---|--|
| 8.1 $(p \vee q) \vee \neg(p \wedge q)$ | 8.4 $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q$ |
| 8.2 $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$ | 8.5 $(\neg p \rightarrow \neg q) \vee (p \leftrightarrow q)$ |
| 8.3 $\neg p \rightarrow (p \vee q)$ | 8.6 $(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)$ |

9. จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีบท

- | | |
|--|---|
| 9.1 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$ | 9.6 $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow (p \rightarrow r)$ |
| 9.2 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$ | 9.7 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$ |
| 9.3 $\neg(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \wedge q)$ | 9.8 $[\neg p \vee (r \rightarrow s)] \leftrightarrow [(r \vee s) \rightarrow p]$ |
| 9.4 $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$ | 9.9 $[p \rightarrow (r \rightarrow s)] \leftrightarrow [(\neg r \wedge s) \rightarrow p]$ |
| 9.5 $(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$ | 9.10 $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)]$ |

10. จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยใช้วิธีขัดแย้ง

- | | |
|--|--|
| 10.1 $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$ | 10.7 $(p \wedge q) \vee \neg(p \vee q)$ |
| 10.2 $[p \rightarrow (q \rightarrow p)] \rightarrow p$ | 10.8 $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ |
| 10.3 $\neg p \wedge q \rightarrow p$ | 10.9 $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow q)$ |
| 10.4 $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ | 10.10 $\neg[p \vee (\neg p \wedge q)] \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ |
| 10.5 $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \vee r)$ | 10.11 $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ |
| 10.6 $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$ | 10.12 $(p \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)]$ |

11. จงเขียนข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์พร้อมบอกเอกภพสัมพัทธ์ในแต่ละข้อ

11.1 มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $|x| = x$

11.2 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตามจะได้ $x^2 > 0$

11.3 จำนวนนับทุกจำนวนมีค่ามากกว่า 1

11.4 ไม่มีจำนวนตรรกยะใดเลยที่เป็นจำนวนบวก

11.5 มีจำนวนจริง x และ y ซึ่ง $x + y > 0$

11.6 มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $m > n$ ทุก ๆ จำนวนเต็ม n

12. ให้ $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $C = \{1, 2, 3, 4\}$ พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

12.1 $\forall x \in A [x + 1 \geq x]$

12.4 $\forall x \in A \forall y \in A [x \neq y \rightarrow x > y]$

12.2 $\exists x \in C [x(x + 1) = x]$

12.5 $\forall x \in B \exists y \in B [xy = 1]$

12.3 $\forall x \in B [x > 0 \rightarrow x^2 > x]$

12.6 $\exists x \in C \exists y \in C [x + y < xy]$

13. ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง จงหาเงื่อนไขของข้อความต่อไปนี้

13.1 $\forall x [\sqrt{x} \geq 0]$

13.4 $\forall x \forall y [xy > 0 \rightarrow \frac{x}{y} > 0]$

13.2 $\forall x [x = 1 \rightarrow |x| > 2]$

13.5 $\exists x \forall y [x = y \leftrightarrow x^2 = y^2]$

13.3 $\exists x [(x < 3) \wedge (x > 3)]$

13.6 $\exists x \exists y [(xy = 10 \wedge x > 5) \rightarrow y > 2]$

14. ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง จงหาเงื่อนไขของข้อความต่อไปนี้

14.1 ไม่มีจำนวนจริงใดเลยที่มากกว่าศูนย์

14.2 มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x + y = y$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง y

14.3 ทุก ๆ จำนวนเต็ม m, n ถ้า $m + n = mn$ แล้ว $n^m = 1$

1.2 วิธีการพิสูจน์

ผู้เขียนจะมีการนำเสนอวิธีการพิสูจน์ไว้ทั้งหมด 6 วิธี ประกอบไปด้วย

1. การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข
2. การพิสูจน์โดยการแจกแจงกรณี
3. การพิสูจน์ข้อความแบบผกกลับได้
4. การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง
5. การพิสูจน์ข้อความซึ่งเป็นไปได้โดยตรง
6. การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

1. การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข

การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูปแบบ $p \rightarrow q$ เรียกว่า **การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข (proof of conditional statements)** ต้องการแสดงว่า $p \rightarrow q$ เป็นจริง ต้องแสดงให้เห็นได้ว่าเมื่อไรก็ตามที่ p เป็นจริง ต้องแสดงให้เห็นได้ว่า q เป็นจริงด้วย เขียนเป็นโครงพิสูจน์ได้ดังนี้

สมมติ	p	เป็นจริง	
	$\vdots$		
ดังนั้น	q	เป็นจริง (ข้อสรุป)	□

จะเรียกวิธีนี้ว่า**การพิสูจน์โดยวิธีตรง (direct proof)** นิยมใช้เครื่องหมาย □ วางไว้บรรทัดสุดท้ายเพื่อบอกว่าจบการพิสูจน์ ในส่วนที่เว้นว่างไว้นั้นคือส่วนที่จะเติมรายละเอียดให้สมบูรณ์ อาจจะได้จากนิยาม ทฤษฎีบทที่พิสูจน์มาก่อนหน้า หรือสัญพจน์ เพื่อให้นำไปสู่ข้อสรุปอย่างเป็นเหตุเป็นผลกัน เพื่อใช้ในการพิสูจน์ในตัวอย่างต่อไปจากนี้ จะนิยาม

บทนิยาม 1.2.1 เรียกจำนวนเต็ม a ที่ไม่ใช่ศูนย์ว่าหารจำนวนเต็ม b ลงตัว เขียนแทนด้วย $a \mid b$

ถ้ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $b = ak$

และเรียก a ว่า**ตัวหาร (divisor)** หรือ**ตัวประกอบ (factor)** ของ b ถ้า a หาร b ไม่ลงตัวเขียนแทนด้วย $a \nmid b$

บทนิยาม 1.2.2 จำนวนคู่ (even number) คือจำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว หรือกล่าวได้ว่า

ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $2 \mid a$ หรือมีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a = 2k$

และจำนวนเต็ม a ที่มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a = 2k + 1$ เรียกว่า **จำนวนคี่ (odd number)**

ตัวอย่าง 1.2.3 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่ "

ตัวอย่าง 1.2.4 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว $m + n$ เป็นจำนวนคู่ "

ตัวอย่าง 1.2.5 จงพิสูจน์ว่า "สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ซึ่ง $a \neq 0$ ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (2b + 3c)$ "

ตัวอย่าง 1.2.6 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า n^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว n เป็นจำนวนคู่"
แนวคิด มีโครงพิสูจน์ดังนี้

สมมติ n^2 เป็นจำนวนคู่
 $\vdots$
 ดังนั้น n เป็นจำนวนคู่ $\square$

จะเห็นได้ว่าการพิสูจน์โดยวิธีตรงนี้ทำไม่ได้ แต่สามารถทำได้โดยใช้กฎแย้งสลับที่ซึ่งมีความหมายเดียวกับข้อความที่ต้องการจะพิสูจน์คือ $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ ดังนั้นจะทำการพิสูจน์

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \text{ เป็นจำนวนคี่} \rightarrow n^2 \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ สมมติว่า n เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$ แล้ว

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

ให้ $p = 2k^2 + 2k$ เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น p เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือมีจำนวนเต็ม p ซึ่งทำให้ $n^2 = 2p + 1$ สรุปได้ว่า n^2 เป็นจำนวนคี่ $\square$

การพิสูจน์ $p \rightarrow q$ ในตัวอย่าง 1.2.6 เรียกว่า **การพิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่ (contrapositive proof)** มีโครงการพิสูจน์ดังนี้

สมมติ $\neg q$ เป็นจริง
 $\vdots$
 ดังนั้น $\neg p$ เป็นจริง $\square$

หนึ่งในกรณีที่พยายามใช้ทั้ง 2 วิธีแล้วแต่ยังไม่สามารถพิสูจน์ได้ยังมีอีกหนึ่งวิธีคือ **วิธีขัดแย้ง (contradiction)** ซึ่งจะกล่าวในวิธีที่ 4 ดังนั้นการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $p \rightarrow q$ ได้ 3 วิธีคือ

1. พิสูจน์โดยวิธีตรง (direct proof)
2. พิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่ (contrapositive proof)
3. พิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง (proof by contradiction)

ตัวอย่าง 1.2.7 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า n^3 เป็นจำนวนคู่ แล้ว n เป็นจำนวนคู่"

การพิสูจน์ข้อความ $p \rightarrow (q \vee r)$ เนื่องจาก $p \rightarrow (q \vee r) \equiv p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)$ ดังนั้น

สมมติ p และ $\neg q$ เป็นจริง

$\vdots$

ดังนั้น r เป็นจริง

ตัวอย่าง 1.2.8 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า $m + n$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว m หรือ n เป็นจำนวนคี่ "

ตัวอย่าง 1.2.9 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า mn เป็นจำนวนคู่ แล้ว m หรือ n เป็นจำนวนคู่ "

การพิสูจน์ข้อความ $p \rightarrow (q \wedge r)$ เนื่องจาก $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ ดังนั้น ต้องพิสูจน์ว่าทั้ง 2 ข้อความเป็นจริง

$$1. p \rightarrow q$$

$$2. p \rightarrow r$$

สมมติ	p	เป็นจริง
	$\vdots$	
ดังนั้น	q	เป็นจริง

สมมติ	p	เป็นจริง
	$\vdots$	
ดังนั้น	r	เป็นจริง

ตัวอย่าง 1.2.10 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $4|a^2$ และ $a^2 + 1$ เป็นจำนวนคี่ "

ตัวอย่าง 1.2.11 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า m เป็นจำนวนคี่ แล้ว $4|(m^2 + 3)$ และ $4|(m^2 - 1)$ "

ตัวอย่าง 1.2.12 ข้อความ "ถ้า $m + n$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว m และ n เป็นจำนวนคู่" เป็นจริงหรือเท็จ

2. การพิสูจน์โดยการแจกแจงกรณี

จะกล่าวถึงการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $(p \vee q) \rightarrow r$ เนื่องจาก $(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ ดังนั้นต้องพิสูจน์ทั้ง 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 $p \rightarrow r$

สมมติ	p	เป็นจริง
	$\vdots$	
ดังนั้น	r	เป็นจริง

กรณีที่ 2 $q \rightarrow r$

สมมติ	q	เป็นจริง
	$\vdots$	
ดังนั้น	r	เป็นจริง $\square$

เรียกว่าการพิสูจน์โดยแจกแจงกรณี (proof by cases) ดังจะยกตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.2.13 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า a เป็นจำนวนคู่ หรือ a เป็นจำนวนคี่ แล้ว $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่"

ตัวอย่าง 1.2.14 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $n^2 + 3n + 4$ เป็นจำนวนคู่"

สำหรับจำนวนเต็มแล้วไม่จำเป็นต้องแบ่งเป็น 2 กรณีคือจำนวนคู่และจำนวนคี่ บางครั้งอาจจะแบ่งมากกว่า 2 กรณี เช่นกรณีจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มลบ และจำนวนเต็มศูนย์ แบ่งเป็น 3 กรณี หรือจะแบ่งเป็นหลาย ๆ กรณีขึ้นอยู่กับข้อความที่ต้องการพิสูจน์โดยมีหลักว่าต้องพิจารณาให้ครบทุกกรณี ในกรณีอื่น ๆ ที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม ย่อมสามารถพิจารณาโดยใช้หลักเดียวกัน

สำหรับกรณีทั่วไป $(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow r$ ต้องพิสูจน์ว่าทั้ง n กรณีเป็นจริง

กรณีที่ 1 $p_1 \rightarrow r$

กรณีที่ 2 $p_2 \rightarrow r$

$\vdots$

กรณีที่ n $p_n \rightarrow r$

3. การพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้

การพิสูจน์ในรูปแบบ $p \leftrightarrow q$ ซึ่งทำ 2 ขั้นตอนดังนี้

1. $p \rightarrow q$ เรียกว่าขั้น sufficient part (p เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับ q)
2. $q \rightarrow p$ เรียกว่าขั้น necessary part (p เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ q)

เหตุผลที่ต้องพิสูจน์ทั้ง 2 ขั้นตอนเพราะว่า $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ และเรียกว่า การพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้ (proof of biconditional statements)

ตัวอย่าง 1.2.15 จงพิสูจน์ว่า "จำนวนเต็ม a ใด ๆ a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ $a + 3$ เป็นจำนวนคี่"

ตัวอย่าง 1.2.16 จงพิสูจน์ว่า

"สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ ab เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ a และ b เป็นจำนวนคี่"

การพิสูจน์ข้อความ $p \leftrightarrow q$ โดยการสร้างข้อความที่สมมูลต่อเนื่องกันจากข้อความ p ไปยังข้อความ q

$p \leftrightarrow p_1$	เขียนแทนด้วย	$p \leftrightarrow q_1$
$q_1 \leftrightarrow q_2$		$\leftrightarrow q_2$
$q_2 \leftrightarrow q_3$		$\leftrightarrow q_3$
$\vdots$		$\vdots$
$q_n \leftrightarrow q$		$\leftrightarrow q$

เรียกวิธีการพิสูจน์นี้ว่า **iff-string**

ต่อไปจะกล่าวถึงการพิสูจน์ข้อความที่สมมูลกันเป็นคู่ เช่น

$$(p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3) \wedge (p_3 \leftrightarrow p_1)$$

สามารถพิสูจน์ได้จาก

$$(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge (p_3 \rightarrow p_1)$$

ตัวอย่าง 1.2.17 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกันทุกคู่

p_1 : a เป็นจำนวนคู่

p_2 : a^2 หารด้วย 4 ลงตัว

p_3 : a^2 เป็นจำนวนคู่

4. การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง

ถ้าการพิสูจน์ข้อความโดยวิธีต่าง ๆ ที่ผ่านมาแล้วไม่สามารถทำได้ ในหัวข้อนี้จะนำเสนอทางเลือกอีกวิธีหนึ่ง ถ้าต้องการพิสูจน์ p เป็นจริงโดยการสมมติว่า $\neg p$ เป็นจริง แล้วนำไปสู่ข้อความขัดแย้ง c หรือเกิดประพจน์ $r \wedge \neg r$ การพิสูจน์แบบนี้ได้จากสัจนิรันดร์ (T15) $(\neg p \rightarrow c) \rightarrow p$ เรียกวิธีนี้ว่า **การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง (proof by contradiction)** มีโครงการพิสูจน์ดังนี้

สมมติ $\neg p$ เป็นจริง
 $\vdots$
 ดังนั้น เกิดข้อขัดแย้ง $\square$

ตัวอย่าง 1.2.18 จงพิสูจน์ว่า "ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตามที่ไม่ใช่ศูนย์ จะได้ว่า $x^{-1} \neq 0$ "

แนวคิด ให้ p แทนข้อความ $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \rightarrow x^{-1} \neq 0$ สมมติว่า $\neg p$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\exists x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \wedge x^{-1} = 0$$

บทพิสูจน์. สมมติว่า มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x \neq 0$ และ $x^{-1} = 0$

เนื่องจาก $x \neq 0$ โดยสมบัติจำนวนจริงจะได้ว่า $x(x^{-1}) = 1$ แต่จากการสมมติ $x^{-1} = 0$ จะได้ว่า

$$1 = x(x^{-1}) = x(0) = 0$$

เกิดขัดแย้ง ดังนั้นข้อความนี้เป็นจริง $\square$

ตัวอย่าง 1.2.19 จงพิสูจน์ว่า "ไม่มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x^2 + x = 1$ "

ตัวอย่าง 1.2.20 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า x, y เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $x^2 - 4y \neq 2$ "

ตัวอย่าง 1.2.21 จงพิสูจน์ $\forall a \in \mathbb{R}, (\forall \epsilon > 0, a < \epsilon) \rightarrow (a = 0)$

ตัวอย่าง 1.2.22 จงพิสูจน์ $\forall a, b \in \mathbb{R}, (\forall \epsilon > 0, a \leq b + \epsilon) \rightarrow (a \leq b)$

บทนิยาม 1.2.23 จะเรียกจำนวนเต็มบวก p ที่มากกว่า 1 ว่าเป็นจำนวนเฉพาะ (prime number) ก็ต่อเมื่อ ตัวหารของ p มีแค่ 1 กับ p เท่านั้น

ตัวอย่าง 1.2.24 จงพิสูจน์ว่า " มีจำนวนเฉพาะเป็นจำนวนอนันต์ "

5. การพิสูจน์ข้อความซึ่งเป็นไปได้โดยตรง

ข้อความที่เป็นไปได้โดยตรงเท่านั้นเขียนแทนด้วย $\exists! x \in \mathcal{U}, p(x)$ ข้อความนี้สมมูลกับ

$$(\exists x \in \mathcal{U}, p(x)) \wedge (\forall x, y \in \mathcal{U}, p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y)$$

ดังนั้นการพิสูจน์ $\exists! x \in \mathcal{U}, p(x)$ แบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ส่วนคือ

1. $\exists x \in \mathcal{U}, p(x)$ แสดงว่ามี $x \in \mathcal{U}$ อย่างน้อยหนึ่งตัว (existence)
2. $\forall x, y \in \mathcal{U}, p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y$ แสดงว่ามี $x \in \mathcal{U}$ เพียงหนึ่งตัวเท่านั้น (uniqueness)

ตัวอย่าง 1.2.25 จงพิสูจน์ว่า "มีจำนวนจริง x เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $2^x = 1$ "

แนวคิด เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น $\exists! x \in \mathbb{R}, 2^x = 1$

บทพิสูจน์. ขั้นที่ 1 มีอย่างน้อยหนึ่งตัว เลือก $x = 0$ จะได้ว่า

$$2^x = 2^0 = 1$$

ขั้นที่ 2 มีเพียงตัวเดียว ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ สมมติ $2^x = 1$ และ $2^y = 1$ แล้ว

$$2^x = 1 = 2^y \quad \text{ดังนั้น} \quad 2^x = 2^y$$

จากสมบัติของเลขยกกำลังจะได้ว่า $x = y$ □

ตัวอย่าง 1.2.26 จงพิสูจน์ว่า "มีจำนวนจริง x เพียงตัวเดียวที่ทำให้ $x^3 + 1 = 0$ "

ตัวอย่าง 1.2.27 จงพิสูจน์ว่า "ทุก ๆ จำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x + y = 1$ "

ตัวอย่าง 1.2.28 จงพิสูจน์ว่า "ทุก ๆ จำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x + y = 1$ "

ตัวอย่าง 1.2.29 จงพิสูจน์ว่า

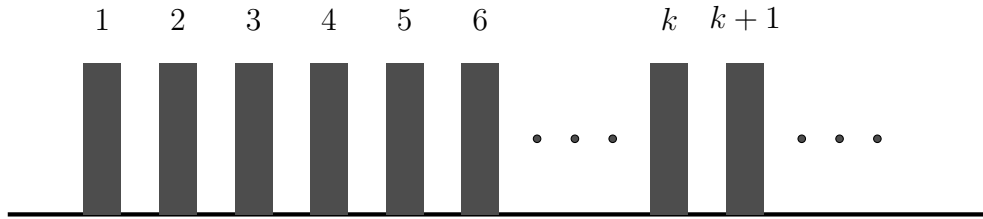
"มีจำนวนจริง x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $x + y = y$ สำหรับทุกจำนวนจริง y "

ตัวอย่าง 1.2.30 พิจารณาค่าความจริงของ $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$

ตัวอย่าง 1.2.31 จงพิสูจน์ว่า $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ เป็นเท็จ

6. การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

หลักโดมิโน (domino principle) มีวิธีการก็คือต้องผลักชิ้นแรกให้ล้มเสียก่อน เรียกขั้นนี้ว่าขั้นฐาน (basic step) จากนั้นต้องตรวจสอบว่าแต่ละชิ้นจะล้มไปไม่มีที่สิ้นสุดจริงหรือไม่ ด้วยการตรวจสอบขั้นที่ 2 คือตรวจสอบโดมิโนทุก ๆ คู่ โดยที่ขั้นที่ k ต้องล้มไปทับขั้นที่ $k+1$ เสมอเรียกขั้นนี้ว่าขั้นอุปนัย (inductive step) ดังรูป



การเปรียบเทียบหลักโดมิโนกับหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

การพิสูจน์ประพจน์ $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ เป็นจริงทำได้ 2 ขั้นตอน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2.32 ให้ $P(n)$ เป็นประโยคเปิด ถ้า

1. ขั้นฐาน : $P(1)$ เป็นจริง และ
2. ขั้นอุปนัย : $\forall k \in \mathbb{N}, P(k) \rightarrow P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 1.2.33 จงแสดงว่า $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

ตัวอย่าง 1.2.34 จงแสดงว่า $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

ตัวอย่าง 1.2.35 จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in \mathbb{N}, 4 \mid (5^n - 1)$ สำหรับจำนวนนับ n

ตัวอย่าง 1.2.36 จงแสดงว่า $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n < 2^{n+1}$

ต่อไปจะกล่าวถึงการพิสูจน์แบบอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่เริ่มขั้นฐานด้วย n_0

ทฤษฎีบท 1.2.37 ให้ $n_0 \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ เป็นประโยคเปิด ถ้า

1. **ขั้นฐาน** : $P(n_0)$ เป็นจริง
2. **ขั้นอุปนัย** : $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq n_0, P(k) \rightarrow P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n)$ เป็นจริง หรือ $P(n)$ เป็นจริงทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$

ตัวอย่าง 1.2.38 จงหาจำนวนนับเริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริงพร้อมทั้งพิสูจน์ $2^n \geq n^2$

ตัวอย่าง 1.2.39 จงหาจำนวนนับเริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริงพร้อมทั้งพิสูจน์ $2^n \leq n!$

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยเลือกวิธีพิสูจน์ที่เหมาะสม
 - 1.1 ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^4 เป็นจำนวนคู่
 - 1.2 ถ้า x เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3x$ เป็นจำนวนคู่
 - 1.3 ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3n + 5m$ เป็นจำนวนคู่
 - 1.4 ถ้า m เป็นจำนวนคู่ และ n เป็นจำนวนคี่ แล้ว nm เป็นจำนวนคู่
 - 1.5 ถ้า $3mn$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว m เป็นจำนวนคู่ หรือ n เป็นจำนวนคู่
 - 1.6 ถ้า m^3 เป็นจำนวนคี่ แล้ว m เป็นจำนวนคี่
 - 1.7 สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ที่ไม่ใช่ศูนย์ ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$
 - 1.8 สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ที่ไม่ใช่ศูนย์ ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (b + c)$
 - 1.9 สำหรับจำนวนจริง x และ y ถ้า $xy = 0$ และ $x \neq 0$ แล้ว $y = 0$
 - 1.10 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $7n^2 + n + 2$ เป็นจำนวนคู่
 - 1.11 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $n^2 + n + 1$ เป็นจำนวนคี่
 - 1.12 ไม่ว่า m จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม $m^3 - m + 3 + 1$ เป็นจำนวนคี่
 - 1.13 ไม่ว่า m จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม $m^2 - m$ เป็นจำนวนคู่
2. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน
 - 2.1 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $n^3 - n$ เป็นจำนวนคู่
 - 2.2 ถ้า m เป็นจำนวนเต็ม และ $4m$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3m$ เป็นจำนวนคู่
 - 2.3 ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว $n - m$ เป็นจำนวนคู่
 - 2.4 ถ้า m เป็นจำนวนเต็ม และ $4m$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3m$ เป็นจำนวนคู่
 - 2.5 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม และ $n^5 - n$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว n เป็นจำนวนคู่
 - 2.6 สำหรับจำนวนเต็ม m, n ถ้า $m^2 + n^2$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว m เป็นจำนวนคู่ หรือ n เป็นจำนวนคู่
 - 2.7 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $n^3 - n$ เป็นจำนวนคี่
 - 2.8 สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ที่ไม่ใช่ศูนย์ ถ้า $a \mid b^2$ แล้ว $a \mid b$
 - 2.9 $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \rightarrow x^2 < y^2$
 - 2.10 $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \rightarrow x^3 < y^3$
 - 2.11 $\forall a, b \in \mathbb{R}, [(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \rightarrow a + b \neq 0]$

3. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยเลือกวิธีพิสูจน์ที่เหมาะสม

3.1 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ a เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ a^3 เป็นจำนวนคู่

3.2 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ a^2 เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ a^3 เป็นจำนวนคู่

3.3 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ a เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ $a^2 + 1$ เป็นจำนวนคี่

3.4 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ $a^2 + 3$ เป็นจำนวนคู่

3.5 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ $a + 1$ เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ a^3 เป็นจำนวนคี่

3.6 สำหรับจำนวนเต็ม x, y ใด ๆ $xy = 1$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1$ และ $y = 1$

3.7 มีจำนวนจริง x และ y ใด ๆ $x < y$ ก็ต่อเมื่อ $x^3 < y^3$

3.8 $\forall x \in \mathbb{R} [x^3 = 1 \leftrightarrow x = 1]$

3.9 $\forall x \in \mathbb{R} [x < 0 \leftrightarrow \frac{1}{x} < 0]$

3.10 $\forall x, y \in \mathbb{R} [x^2 + y^2 = 0 \leftrightarrow (x = 0 \wedge y = 0)]$

3.11 $\forall x, y \in \mathbb{R}, [x^3 = y^3 \leftrightarrow x = y]$

4. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกันทุกคู่

$p_1 : n$ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 1

$p_2 : n^3$ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 1

$p_3 : n^3 + 4$ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 2

5. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกันทุกคู่

$p_1 : a$ เป็นจำนวนคี่

$p_2 : a + 3$ เป็นจำนวนคู่

$p_3 : a^4$ เป็นจำนวนคี่

6. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

6.1 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ถ้า $a^2 + 2a + 5$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่

6.2 ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $a^2 \neq 4a + 3$

6.3 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม ถ้า $x < 0$ แล้ว $x^{-1} < 0$

6.4 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงบวกใดก็ตาม จะได้ว่า $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$

6.5 สำหรับจำนวนจริง $x \geq 0$ ถ้า ทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ซึ่ง $x < \varepsilon$ แล้ว $x = 0$

6.6 $\forall a, b \in \mathbb{R} [(\forall \varepsilon > 0, a \leq b + \varepsilon) \rightarrow a \leq b]$

6.7 $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + xy + y^2 \geq 0$

$$6.8 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+, x + y > 2\sqrt{xy}$$

7. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

7.1 ทุก ๆ จำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x + y = 5$

7.2 ทุก ๆ จำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x + y = 0$

7.3 มีจำนวนจริง x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $xy = x$ สำหรับทุกจำนวนจริง y

7.4 มีจำนวนจริง x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $xy = y$ สำหรับทุกจำนวนจริง y

7.5 มีจำนวนตรรกยะ x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นซึ่งทำให้ xy เป็นจำนวนตรรกยะ สำหรับทุกจำนวนอตรรกยะ y

$$7.6 \quad \exists! x \in \mathbb{R}, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \sin x = \cos x$$

8. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นเท็จ

8.1 มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x = x + 1$

8.2 มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x^2 + x + 1 = 0$

8.3 $\exists x \in \mathbb{Z}, -1 < x < 0$

8.4 $\exists x \in \mathbb{Z}, 4x^2 = 1$

8.5 $\exists n \in \mathbb{N}, 3 \mid 2^n$

9. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$9.1 \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ } n$$

$$9.2 \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ } n$$

$$9.3 \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ } n$$

$$9.4 \quad 2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n^2 + n \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ } n$$

$$9.5 \quad 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ } n$$

$$9.6 \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ } n$$

$$9.7 \quad 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ } n$$

$$9.8 \quad (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \cdots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ } n$$

10. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$10.1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$$

$$10.2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, 2^n \leq 2^{n+1} - 2^{n-1} - 1$$

$$10.3 \quad \forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-n} \leq 2$$

$$10.4 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10, 2^{n-10}(1000) < 2^n - 2^{n-6}$$

$$10.5 \quad \text{ให้ } x \in \mathbb{R} \text{ ซึ่ง } x > -1 \text{ จงพิสูจน์ว่า } \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$$

11. จงหาจำนวนนับเริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริงพร้อมทั้งพิสูจน์

$$11.1 \quad 2^{n-1} \leq n!$$

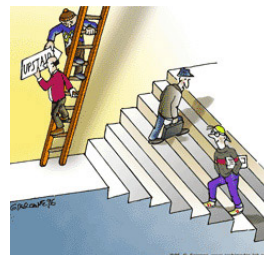
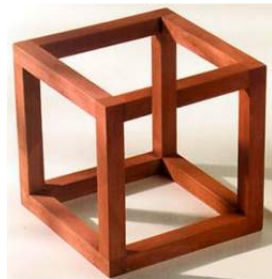
$$11.2 \quad 4^n > n^4$$

$$11.3 \quad (2n)! < 2^{2n}(n!)^2$$

$$11.4 \quad n^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

1.3 ปฏิทรรศน์

ปฏิทรรศน์ (paradox) คือประโยคหรือข้อความที่เกิดขัดแย้งในตัวเอง หรือความขัดแย้งกันแต่จริง หรือข้อความที่มีลักษณะย้อนแย้งในตัวเอง หมายถึงเหตุการณ์ของประโยคที่เป็นจริงชัดเจน แต่สุดท้ายนำไปสู่ความขัดแย้งในตัวเอง หรือสถานการณ์ที่อยู่นอกความคิดทั่วไป หรือปฏิทรรศน์ใช้กันในความหมายของข้อความที่ตรงกันข้าม หรือขัดแย้งกับความเชื่อที่คนทั่วไปมีหรือยอมรับว่าเป็น “สามัญสำนึก (common sense)”



ตัวอย่างรูปภาพที่เกิดปฏิทรรศน์

ต่อไปจะกล่าวถึงปฏิทรรศน์ที่มีชื่อเสียงในเรื่องทฤษฎีเซต นำเสนอโดยนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษชื่อว่า เบร์ตแรนด์ รัสเซลล์ (Bertrand Russell) ในปี ค.ศ. 1901 ในเวลาต่อมาเรียกว่า **ปฏิทรรศน์รัสเซลล์ (Russell's paradox)** เขาได้ยกตัวอย่างสถานการณ์ในหมู่บ้านเล็ก ๆ แห่งหนึ่งที่มีช่างตัดผมเพียงคนเดียว ช่างตัดผมคนนั้นกล่าวขึ้นมาว่า

“ผู้ชายทุกคนในหมู่บ้านถ้าไม่ตัดผมเอง ก็ต้องถูกช่างตัดผมเป็นคนตัดให้”

คำถามคือ **ใครเป็นคนตัดผมช่างตัดผม** พิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้

- ถ้าเขาตัดผมของตนเอง แสดงว่าเขาเป็นคนที่ไม่ได้ตัดผมของตนเอง
- ถ้าเขาไม่ได้ตัดผมของตนเอง แสดงว่าเขาถูกตนเองตัดผมให้

จะเห็นว่าเกิดข้อความขัดแย้งเพราะเขาเป็นทั้งช่างตัดผมขณะเดียวกันก็เป็นผู้ชายในหมู่บ้าน การพูดประโยคดังกล่าวจึงเกิดปฏิทรรศน์ขึ้น บางครั้งจะเรียกว่า **ปฏิทรรศน์ช่างตัดผม (the barber paradox)**

การนำเสนอปฏิทรรศน์ของรัสเซลล์ทำให้นักคณิตศาสตร์ต้องระมัดระวังมากขึ้น เมื่อจะนิยามหรือสร้างระบบสัจพจน์ใหม่ ๆ ในทางคณิตศาสตร์ เพื่อไม่ให้ขัดแย้งกันเองอันจะนำไปสู่การไม่ยอมรับทางคณิตศาสตร์

ในปี 1905 นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ จูลส์ ริชาร์ด (Jules Richard) ได้นำเสนอปฏิทรรศน์ในด้านประโยคทางตรรกศาสตร์ ตัวอย่างเช่น มีนักศึกษาผู้หนึ่งพูดขึ้นว่า

" นักศึกษาทุกคนพูดโกหก "

ประโยคนี้อธิบายได้ว่านักศึกษาคนนี้เป็น **ผู้ตจจริงหรือผู้ตจโกหก** พิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้

- ถ้านักศึกษาคนนี้เป็นผู้ตจจริง แสดงว่านักศึกษาคนนี้เป็นผู้ตจโกหก
- ถ้านักศึกษาคนนี้เป็นผู้ตจโกหก แสดงว่านักศึกษาคนนี้เป็นผู้ตจจริง

จะเห็นว่าเกิดข้อขัดแย้งเพราะนักศึกษาคนที่พูดประโยคนี้อ้างถึงนักศึกษาทุกคนอันหมายรวมตัวเขาเองเข้าไปด้วย เรียกปฏิทรรศน์นี้ว่า **ปฏิทรรศน์ของริชาร์ด (Richard's paradox)**

ปฏิทรรศน์มีอีกหลายรูปแบบซึ่งพบเจอในสาขาวิชาอื่น ๆ เช่น

1. กรณีที่มีการย้อนกลับไปแก้ไขเหตุการณ์ในอดีต ที่จะส่งผลให้เกิดเหตุการณ์ในปัจจุบัน เช่น การย้อนกลับไปฆ่าพ่อแม่ของตนเองก่อนที่จะเกิด ก็จะทำให้เกิดข้อขัดแย้งทางเวลาว่า ตัวของเราเกิดมาได้อย่างไร เมื่อพ่อแม่ถูกฆ่าไปแล้ว เรียกว่า ปฏิทรรศน์เวลา (time paradox) หรือปฏิทรรศน์คุณปู่ (grandfather paradox)
2. ปฏิทรรศน์ฝาแฝด (twin paradox) ซึ่งเป็นผลลัพธ์อันน่าฉงนที่สุดอันหนึ่งในทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์ ในสาขาวิทยาศาสตร์
3. ในวิชาเศรษฐศาสตร์ กล่าวถึงกรณีที่ทำไมน้ำจึงถูกกว่าเพชร ทั้ง ๆ ที่คนต้องการน้ำมากกว่า เรียกว่า diamond-water paradox
4. ปฏิทรรศน์ซีโน (Zeno's paradox) ในวิชาปรัชญา กล่าวถึงข้อสรุปที่ฟังดูแล้วขัดกันของซีโน จากตัวอย่างอันมีชื่อเสียงที่สุดของเขาก็คือ **อาคิลิสแข่งกับเต่า** กล่าวคือ " เต่าแข่งกับอาคิลิส โดยเต่าบอกให้อาคิลิสต่อให้สิบเมตร ซึ่งอาคิลิสก็ตกลง แต่ก่อนจะเริ่มแข่งกัน เต่าก็บอกกับอาคิลิสว่า ถ้าอาคิลิสจะเดินทันเต่าจะต้องเดินผ่านครึ่งทางให้ได้ซะก่อน อาคิลิสก็เห็นด้วยกับที่เต่าบอก "

แบบฝึกหัด 1.3

จงอธิบายปฏิทรรศน์ของแต่ละเหตุการณ์ต่อไปนี้

1. ยักษ์กินคนจับเหยื่อได้ และเล่นกับเหยื่อว่าถ้าเหยื่อสามารถหายใจของตนได้ เหยื่อจะถูกปล่อยไป เหยื่อผู้หน้าสงสารก็เลยทนายว่า "ท่านคิดว่าท่านจะกินข้า" สรุปว่าเหยื่อถูกปล่อยหรือถูกกินกันแน่
2. ชายคนหนึ่งสอบถามนาย A และ B นาย A พูดว่า "นาย B พูดแต่เรื่องโกหก" ส่วนนาย B ก็พูดว่า "นาย A พูดแต่ความจริง" แล้วใครพูดความจริง ใครพูดโกหกกันแน่
3. เผ่ากินคน จับเหยื่อได้และเสี่ยงทายกับเหยื่อว่าให้เล่าเรื่องมาเรื่องหนึ่ง ถ้าหัวหน้าเผ่าคิดว่าเรื่องนั้นเป็นเรื่องจริง ให้จับไปต้ม แต่ถ้าเป็นเรื่องโกหกให้จับไปย่าง เหยื่อจึงเล่าว่า "เขาจะถูกจับไปย่าง" หัวหน้าเผ่าคิดอยู่นานก็คิดไม่ออกว่าจะต้มหรือ ย่างดี จนในที่สุดก็เอาเหยื่อผู้นั้นไปแขวี่รอวันคิดเสร็จ และเหยื่อผู้นั้นก็ถูกแขงอยู่ตั้งแต่วันนั้นจนถึงปัจจุบัน เกิดอะไรขึ้นกับเหตุการณ์นี้
4. (Crocodile Dilemma) จระเข้ขโมยลูกของชายผู้หนึ่งไป แต่มันให้คำสัญญาว่า มันจะคืนลูกให้หากชายผู้นั้นทนายใจมันได้ถูกต้องว่ามันจะทำอะไร ชายผู้นั้นเดาใจมันว่า "เขาจะไม่ได้ลูกกลับคืนมา"
5. เต่าแข่งกับอาคีลีส โดยเต่าบอกให้อาคีลีสต่อให้สิบเมตร ซึ่งอาคีลีสก็ตกลง แต่ก่อนจะเริ่มแข่งกัน เต่าก็บอกกับอาคีลีสว่า ถ้าอาคีลีสจะเดินทันเต่าจะต้องเดินผ่านครึ่งทางให้ได้ซะก่อน อาคีลีสก็เห็นด้วยกับที่เต่าบอก อาคีลีสจะชนะเต่าได้หรือไม่

บทที่ 2

สัจพจน์ของทฤษฎีเซต

2.1 ประวัติและการเขียนเซต

ในทางคณิตศาสตร์ถือว่า “เซต (set)” เป็นมูลฐาน เพราะว่าทฤษฎีบทต่าง ๆ ล้วนมีเซตเข้ามาเกี่ยวข้องเป็นพื้นฐานเกือบทั้งหมด (กรรณิกา กวักเพฑูรย์. 2542. หน้า 79) ผู้ที่เริ่มใช้คำว่าเซตเป็นคนแรกคือ เกออร์ก คันทอร์ (Georg Cantor: 1845–1918) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ซึ่งขณะนั้นเขากำลังสนใจศึกษาเกี่ยวกับกับลู่เข้าของอนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier series)

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots$$

และอนุกรมของจำนวนจริงต่าง ๆ ทำให้เขาเห็นความสำคัญของการเปรียบเทียบขนาดของเซตอนันต์ในระบบจำนวนจริง คันทอร์ได้แนะนำการเปรียบเทียบขนาดที่เท่ากันไว้ว่า

"เซตสองเซตมีขนาดเท่ากัน ถ้าสมาชิกของเซตหนึ่งจับคู่กับแต่ละสมาชิกของเซตหนึ่งได้"

ในกรณีเซตจำกัดสองเซตจะเท่ากันก็ต่อเมื่อทั้งสองมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน จึงจะสามารถจับคู่กันแบบตัวต่อตัวได้พอดี แนวคิดนี้เป็นรากฐานทำให้เกิดการนับจำนวนได้อย่างไม่สิ้นสุด จนกระทั่งได้จำนวนที่เรียกว่า **จำนวนเชิงอนันต์ (transfinite number)** ต่อมาในปี 1873 ได้ตีพิมพ์ผลงานที่ได้แสดงว่า เราไม่สามารถจับคู่แบบตัวต่อตัวระหว่างจำนวนจริงกับจำนวนเต็มได้ ทำให้นักคณิตศาสตร์ตื่นตัวเรื่องราวเกี่ยวเซต

คันทอร์ได้อธิบายเซตอย่างง่าย ๆ เพื่อความเข้าใจเบื้องต้นว่า "เซตคือการรวมกันอยู่ของสิ่งที่มีสมบัติซึ่งมีสมบัติเดียวกัน" การพิสูจน์ทฤษฎีของเขาเกือบทั้งหมด เขาพิสูจน์จากสัจพจน์ 3 ข้อ คือ

1. The Axiom of Extensionality

เซตสองเซตเหมือนกัน (เซตที่เท่ากัน) เมื่อมันมีสมาชิกเป็นอันเดียวกัน

2. The Axiom of Abstraction

เมื่อกำหนดคุณสมบัติใด ๆ หนึ่งเซตประกอบด้วยคุณสมบัตินั้น ๆ เสมอ

3. The Axiom of Choice

สำหรับเซต A ใด ๆ มีฟังก์ชัน f ซึ่งสับเซต $B \neq \emptyset$ ใด ๆ ของ A แล้ว $f(B) \in B$

นักคณิตศาสตร์ได้นำทฤษฎีเซตของคันทอร์เป็นรากฐานในคณิตศาสตร์สาขาต่างๆ และถูกใช้อย่างแพร่หลายในเวลาต่อมา และมีการถกเถียงกันเกี่ยวกับข้อขัดแย้งกันเอง (paradox) มีอยู่ 2 ลักษณะ

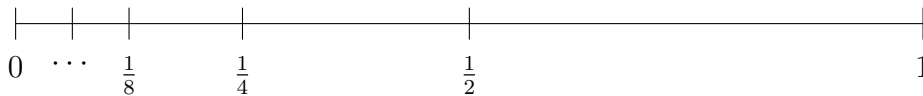
1. **ความเป็นอนันต์** การสร้างระบบจำนวนในรูปเซต สามารถนิยามจำนวนขึ้นได้เรื่อย ๆ จนได้จำนวนเชิงอนันต์ โดยเฉพาะการศึกษาการลู่เข้าของอนุกรมของจำนวนจริงซึ่งมีจำนวนขนาดใหญ่มากจนไม่สามารถแทนด้วยจำนวนจำกัดใด ๆ ได้ แต่เมื่อพิจารณาปัญหาที่มีชื่อเสียงของ ซีโน (Zeno of Elea : 490–430 ก่อนคริสตกาล) ที่กล่าวถึงการแข่งขันการวิ่งของอาคิลีสแข่งกับเต่าที่ว่า

" เต่าแข่งกับอาคิลีส โดยเต่าบอกให้อาคิลีสต่อให้สิบเมตร ซึ่งอาคิลีสก็ตกลง แต่ก่อนจะเริ่มแข่งกัน เต่าก็บอกกับอาคิลีสว่า ถ้าอาคิลีสจะเดินทันเต่าจะต้องเดินผ่านครึ่งทางให้ได้ซะก่อน อาคิลีสก็เห็นด้วยกับที่เต่าบอก "

อุปมาเหมือนกับการแบ่งช่วง $(0, 1)$ ออกเป็นจุด

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

แสดงได้ดังแผนภาพ



ทำให้ช่วงมีขนาดเล็กลงเรื่อย ๆ ถึงแม้ว่าแต่ละช่วงจะถูกแบ่งเล็กเท่าใดก็ตาม ขนาดช่วงเล็ก ๆ เหล่านั้นสามารถวัดขนาดได้และไม่เป็นศูนย์ ซึ่งทำให้ซีโนสรุปเป็นข้อแย้งกันเองแต่จริงที่เรียกว่า **ปฏิหารศน์ซีโน (Zeno's paradox)** ที่กล่าวว่า

" ผลรวมของช่วงที่มีความยาวจำกัดเป็นอนันต์ช่วง จะยังคงได้ช่วงที่มีความยาวจำกัด "

การแก้ปัญหาลักษณะนี้ได้มีการตกลงกันว่า เมื่อกล่าวถึงอนันต์ในทางคณิตศาสตร์จะมีอยู่ 2 ลักษณะ คือ การเป็นอนันต์ในลักษณะไม่มีที่สิ้นสุด (actual infinite) และการเป็นอนันต์ในลักษณะที่มีค่ามากเกินกว่าจำนวนจำกัดทุก ๆ ตัว (virtual infinite)

2. **การกำหนดนิยามเซตที่ไม่แจ่มชัด** จากที่คันทอร์กล่าวไว้ว่า เซตคือการรวมกันอยู่ของสิ่งซึ่งมีสมบัติซึ่งมีสมบัติเดียวกัน เช่นเมื่อสมมติว่า p เป็นสมบัติหนึ่ง ซึ่งถ้า x มีสมบัติ $p(x)$ นี้แล้ว

$$\{x : p(x)\} \quad \text{เป็นเซต}$$

แต่คันทอร์ก็พบปัญหาความขัดแย้งในตัวเอง (Cantor's paradox) เมื่อเขากำหนด

$$A = \{x : x = x\}$$

จะได้ว่า A คือเซตของทุก ๆ เซต ถ้า $\mathcal{P}(A)$ คือเซตกำลัง (power set) ของ A จะได้ว่า

$$X \in \mathcal{P}(A) \quad \longrightarrow \quad X \in A$$

ทำให้ได้ข้อสรุปว่า จำนวนสมาชิกของ $\mathcal{P}(A)$ น้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนสมาชิกของ A ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบทในทฤษฎีเซต และ ในปี 1902 รัสเซลล์ได้อธิบายว่าเกิดปฏิกิริยาที่ขัดแย้งกับสัจพจน์ข้อที่ 2 ของคันทอร์ เมื่อกำหนด p เป็นสมบัติของการไม่เป็นสมาชิกของตัวเอง หรือกล่าวว่าเซต ๆ หนึ่งนิยามโดยเซตทุกเซตที่ไม่ได้มีตัวเองเป็นสมาชิก จะพบปัญหาคือเซตนั้นมีตนเองเป็นสมาชิกหรือไม่ นั่นคือสามารถสร้างเซต

$$B = \{x : x \notin x\}$$

ลักษณะนี้ได้หรือไม่ มีคำถามตามมาว่า B เป็นสมาชิกของ B หรือไม่ การตอบคำถามนี้ทำให้เกิด

$$B \in B \rightarrow B \notin B \quad \text{และ} \quad B \notin B \rightarrow B \in B$$

ทำให้เกิดข้อขัดแย้งแต่สมมูลกัน ซึ่งรู้จักกันในชื่อ **ปฏิกิริยารัสเซลล์ (Russell's paradox)** ดังนั้นไม่สามารถสร้างเซตของเซตที่มีสมาชิกเป็นตัวเองได้นั่นเอง

จากข้อขัดแย้งลักษณะที่ 2 ทำให้นักคณิตศาสตร์ตื่นตัวที่จะหาวิธีแก้ไข ในที่สุดได้มีผู้พยายามนำการศึกษาระบบสัจพจน์มาใช้แทนทฤษฎีเซตทำให้ข้อขัดแย้งดังกล่าวไปได้ เรียกการศึกษาทฤษฎีเซตในลักษณะนี้ว่า **ระบบสัจพจน์ของทฤษฎีเซต (axiomatic set theory)** ที่ใช้กันแพร่หลายมี 2 ระบบคือ

1. ระบบของแซร์มิโล

แซร์มิโล (Ernst Zermelo : 1871–1953) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ได้ตั้งระบบสัจพจน์ของทฤษฎีเซตขึ้น โดยไม่อนุญาตให้การรวมกันอยู่ของเซตทั้งหมดอยู่ในระบบโดยการกำหนดว่า " การรวมของสิ่งจะเป็นเซตก็ต่อเมื่อ สิ่งต่างๆของการรวมกันอยู่นั้นเป็นสิ่งที่ถูกเลือก หรือถูกแบ่งมาจากการรวมกันอยู่หรือเซตที่มีอยู่ก่อนแล้วในระบบ เฉพาะสิ่งที่สอดคล้องกับสมบัติที่กำหนดขึ้นมาใหม่สมบัติหนึ่ง " นั่นคือจะกล่าวถึงเซตที่เป็นสับเซตของอีกเซตหนึ่งเสมอ ซึ่งเรียกว่าการกำหนด **เอกภพสัมพัทธ์ (universe)** ระบบแซร์มิโลเป็นที่นิยมอย่างกว้างขวาง อย่างไรก็ตามระบบนี้เกิดก่อนระบบตรรกศาสตร์เชิงสัจพจน์ ทำให้ยากต่อการเข้าใจในเวลาต่อมา เฟร็นเคิล (Fraenkel) และสโคเลน (Skolen) ได้เพิ่มเติมและดัดแปลงระบบแซร์มิโลในรูปภาษาตรรกศาสตร์ และได้รับความนิยมสูงสุดชื่อ " ระบบสัจพจน์ของแซร์มิโลและเฟร็นเคิล "

2. ระบบของนอยมันน์

จอห์น ฟอน นอยมันน์ (John von Neumann : 1903–1957) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวอเมริกันเชื้อสายฮังการี เป็นอีกคนที่พยายามกำหนดระบบสัจพจน์ของทฤษฎีเซตขึ้น ส่วนใหญ่ในระบบนอยมันน์สอดคล้องกับระบบของแซร์มิโล นอกจากส่วนที่กล่าวว่า " สิ่งที่มีลักษณะเดียวกับเซตแต่มีขนาดมหาศาล จะถูกเรียกในชื่อที่ต่างกันว่า พวก หมู หรือ กลุ่ม (class or family) เป็นต้น " นั่นคือนอยมันน์แก้ไขความขัดแย้งที่เกิดขึ้นในทฤษฎีเซตของคันทอร์

ด้วยการกำหนดให้มีบ้าง "พวก" หรือบาง "หมู่" ซึ่งมีขนาดใหญ่เกิดกว่าจะเป็นเซตได้ ดังนั้นการรวมกันของทุก ๆ เซตจึงไม่เป็นเซต แต่หากเป็น "พวกของทุก ๆ เซต" เป็นต้น ระบบนอยมันน์เป็นที่นิยมในกลุ่มคนที่สนใจศึกษาเกี่ยวกับเซตที่ขนาดใหญ่มหาศาล เช่น หมู่ของจำนวนเชิงอันดับที่ เป็นต้น

เนื่องจากขัดแย้งต่าง ๆ เกิดขึ้นเฉพาะกรณีเซตที่ขนาดใหญ่มหาศาลเท่านั้น ดังนั้นในสาขาใดที่ไม่เกี่ยวข้องกับจำนวนขนาดใหญ่ จึงยังคงยอมรับและศึกษาทฤษฎีเซตของคันทอร์ในรูปแบบเดิม หรือรูปแบบที่ไม่เกี่ยวกับระบบสัจพจน์ ซึ่งเรียกว่า **ทฤษฎีเซตไร้รูปสัจพจน์ (Naive set theory)** แต่ในวิชานี้เราจะศึกษาระบบของแซร์มิโล เนื่องจากต้องศึกษาเซตที่มีขนาดใหญ่โตมหาศาล

คันทอร์ได้ให้คำจำกัดความของเซตว่า คือกลุ่มของสิ่งซึ่งมีสมบัติบางประการคล้ายกัน และสิ่งของดังกล่าวนั้นเรียกว่า **สมาชิก (element)** ดังนั้นระบบสัจพจน์ของทฤษฎีเซตจึงกำหนดให้ "สมาชิก" และ "เป็นสมาชิก" เป็นนิยาม และเป็นความสัมพันธ์นิยาม ตามลำดับ

เมื่อกำหนดเซตใด ๆ ก็ตามมาให้ เราต้องบอกได้ว่า อะไรเป็นสมาชิกหรือไม่เป็นสมาชิกของเซตได้เสมอ นั่นคือ ประพจน์

..... เป็นสมาชิก

เป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง เมื่อเติมสมาชิก และเซตในช่องว่างตามลำดับ ถ้าประพจน์ดังกล่าวเป็นจริง

สำหรับสมาชิก x และเซต A เขียนแทนด้วย $x \in A$

ในทำนองเดียวกันเขียน $\neg(x \in A)$ เขียนแทนด้วย $x \notin A$ หมายถึง x ไม่เป็นสมาชิกของ A

ตัวอย่าง 2.1.1 จงตรวจสอบว่า 1 , $\{1\}$ และ $\{1, \{1\}\}$ เป็นสมาชิกของเซตต่อไปนี้หรือไม่

$$1. A = \{1\}$$

$$2. B = \{1, \{1\}\}$$

$$3. C = \{\{1\}\}$$

เซตที่มีแนวคิดของการนำสิ่งต่าง ๆ ที่มีลักษณะเดียวกัน การเขียนเซตจึงนิยมเขียนในรูปสมบัติที่กำหนดให้ ถ้า p เป็นสัญลักษณ์แทนสมบัตินี้ดังกล่าว แล้ว $p(x)$ หมายถึงข้อความซึ่ง x สอดคล้องกับ p โดยที่ x เป็นตัวแปรแทนสมาชิกของเซต ดังนั้นจะได้ประโยคเปิด

$$p(x) : x \text{ มีสมบัติ } p$$

เราสามารถเขียนสัญลักษณ์แทนเซตของสมาชิกที่สอดคล้องสมบัติ p ได้ด้วยสัญลักษณ์ดังนี้

$$\{x : p(x)\}$$

ตัวอย่าง 2.1.2 จงเขียนเซตต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์

1. เซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 10 และ 3 หารลงตัว
2. เซตของเลขฐานสิบสามหลักที่สร้างจากเลขโดด 1, 2 และ 3 โดยแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน
3. เซตประเทศสมาชิกประชาคมอาเซียน (AEC)
4. เซตของคู่อันดับที่เกิดจาก 1, 2 และ 3
5. เซตเลขฐานสองที่มี 3 หลัก

บางครั้งเราทราบสมาชิกทั้งหมดของเซตอาจเขียนด้วยการแจกแจงสมาชิกได้ตัวอย่าง

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

นั่นคือ $\{x : x \text{ เป็นจำนวนคี่บวกที่ไม่เกิน } 14\}$ สรุปได้ว่าการเขียนเซตประกอบด้วย 2 วิธีคือ

1. **วิธีแจกแจงสมาชิก (Tabular form)** การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก คือการเขียนเซตโดยเขียนสมาชิกลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา และใช้เครื่องหมายจุลภาค คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว ตัวอย่างเช่น $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$ และ $\{a, b, c\}$ เป็นต้น มีข้อตกลงในการเขียนดังนี้
 - (ก) ถ้าสมาชิกในเซตซ้ำกันจะเขียนสมาชิกตัวนั้นเพียงครั้งเดียว เช่น $\{1, 1, 2, 3\}$ เขียนแทนด้วย $\{1, 2, 3\}$
 - (ข) สมาชิกในเซตเดียวกันสามารถเขียนลำดับแบบใดก็ได้ซึ่งความหมายของเซตนั้นไม่เปลี่ยนแปลง เช่น $\{1, 2, 3\}$ เขียนเป็น $\{3, 1, 2\}$ หรือ $\{2, 1, 3\}$ ก็ได้ ถือว่าทั้ง 3 เซตเป็นเซตเดียวกัน

- (ค) สำหรับเซตที่มีสมาชิกจำนวนมากและบอกสมาชิกที่ตามมาได้แน่ชัด เขียน ... แทนด้วยสมาชิกลำดับถัดไปจนถึงตัวสุดท้าย ตัวอย่างเช่น

$$\{1, 2, 3, \dots, 10\} \text{ หมายถึง } \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

ทำนองเดียวกับสำหรับเซตที่มีสมาชิกไม่มีที่สิ้นสุด เช่น $\{1, 2, 3, \dots\}$ หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก 1, 2, 3 และลำดับถัดไปไม่มีที่สิ้นสุด

2. **วิธีบอกเงื่อนไขของสมาชิก (Set builder form)** การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกหมายถึงสมาชิก และส่วนที่สองคือเงื่อนไขของสมาชิก โดยมีเครื่องหมาย : คั่นระหว่างสองส่วนนั้น อ่านว่า "โดยที่"

$$A = \{ \text{สมาชิก} : \text{เงื่อนไขของสมาชิก} \}$$

ตัวอย่างเช่น $A = \{x : x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า } 5\}$ และเขียนแจกแจงสมาชิกได้เป็น $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ข้อสังเกต 2.1.3 การเขียนเซตแต่ละชนิดมีข้อสังเกตดังนี้

1. เซตที่เขียนโดยวิธีแจกแจงสมาชิกจะสามารถเขียนโดยวิธีบอกเงื่อนไขสมาชิกได้ แต่ในบางเซตที่เขียนโดยวิธีบอกมีเงื่อนไขสมาชิกไม่สามารถเขียนโดยวิธีแจกแจงสมาชิกได้ เช่น

$$\{x : x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะที่อยู่ระหว่าง } 0 \text{ ถึง } 1\}$$

2. การเขียนเซตแบบมีเงื่อนไขเขียนได้หลายรูปแบบขึ้นอยู่กับผู้เขียน ตัวอย่างเช่น

$\{x : x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า } 5\}$ หรือ $\{x : x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง } 0 \text{ ถึง } 6\}$ หมายถึงเซตเดียวกันคือ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

ตัวอย่าง 2.1.4 จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

1. $A = \{x : x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า } 10 \text{ ที่ } 3 \text{ หารไม่ลงตัว} \}$
2. $B = \{x : x \text{ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง } x^2 = 4\}$
3. $C = \{(x, y) : x, y \text{ เป็นจำนวนนับซึ่ง } x + y = 5\}$
4. $D = \{x : x \text{ เป็นจำนวนนับที่หารด้วย } 2 \text{ ลงตัว} \}$
5. $E = \{ \text{จังหวัด} : \text{จังหวัดในประเทศไทยที่มีพยางค์เดียว} \}$

ตัวอย่าง 2.1.5 จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบมีเงื่อนไข

1. $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

2. $B = \{10, 20, 30, 40\}$

3. $C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

4. $D = \{\text{ทิศเหนือ, ทิศใต้, ทิศตะวันออก, ทิศตะวันตก}\}$

ตัวอย่าง 2.1.6 จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบมีเงื่อนไข

1. $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$

2. $B = \{1, 11, 111, 1111, \dots\}$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงเขียนเซตต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์
 - 1.1 เซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 10
 - 1.2 เซตของจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง 1
 - 1.3 เซตของจำนวนตรรกยะที่มากกว่า 5
 - 1.4 เซตของจำนวนคู่ที่หารด้วย 3 ลงตัว
 - 1.5 เซตของสัญชาติไทย
 - 1.6 เซตของอักษรภาษาอังกฤษที่เป็นสระ
 - 1.7 เซตของจังหวัดในประเทศไทยที่ติดชายแดน
2. จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้
 - 2.1 $\{x : x \text{ เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า } 7\}$
 - 2.2 $\{x : x \text{ เป็นจำนวนคู่ที่หารด้วย } 3 \text{ ลงตัว}\}$
 - 2.3 $\{x^2 : x \text{ เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า } 3\}$
 - 2.4 $\{(x, y) : x, y \text{ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง } |x| + |y| = 1\}$
 - 2.5 $\{(x, y, z) : x, y, z \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง } x + y + z < 5\}$
 - 2.6 $\{x + y : x, y \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง } xy = 12\}$
 - 2.7 $\{(x, y) : x, y \text{ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง } xy = 36 + x\}$
3. จงเขียนเซตต่อไปนี้ในรูปแบบมีเงื่อนไข
 - 3.1 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
 - 3.2 $\{-2, 0, 2, 4, 6, 8\}$
 - 3.3 $\{1, 8, 27, 64\}$
 - 3.4 $\{14, 41, 23, 32\}$
 - 3.5 $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$
 - 3.6 $\{HH, HT, TH, TT\}$
 - 3.7 $\{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}$
 - 3.8 $\{0.1, 0.01, 0.001, \dots\}$
 - 3.9 $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \dots\right\}$
 - 3.10 $\{0.1, 0.12, 0.123, 0.1234, \dots\}$
 - 3.11 $\{1, 2, 6, 24, 120, \dots\}$

2.2 สัจพจน์การเท่ากัน

สัจพจน์ 2.2.1 The Existential Axiom

มีเซตอย่างน้อยหนึ่งเซต

สัจพจน์ 2.2.2 The Axiom of Extensionality

เซตสองเซตเท่ากันก็ต่อเมื่อเซตทั้งสองต่างมีสมาชิกเหมือนกัน หรือมีสมาชิกชุดเดียวกัน

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (x = y)]$$

จะกล่าวได้ว่าเซต A และ B มีสมาชิกชุดเดียวกัน หมายความว่าทุก ๆ สมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B และในทางกลับกันทุก ๆ สมาชิกของ B เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย $A = B$ จะได้ว่า

$$A = B \quad \leftrightarrow \quad \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A = B \quad \leftrightarrow \quad \forall x [(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)]$$

$$A \neq B \quad \leftrightarrow \quad \exists x [(x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)]$$

ตัวอย่าง 2.2.3 จงตรวจสอบว่าเซตต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่

1. $\{0, 1\}$ และ $\{1, 0\}$

3. $\{0, \{1\}, \{2\}\}$ และ $\{1, \{2\}, 0\}$

2. $\{0, \{1\}\}$ และ $\{1, 0\}$

4. $\{0, 1, \{0, 1\}\}$ และ $\{\{1, 0\}, 1, 0\}$

ตัวอย่าง 2.2.4 จงตรวจสอบว่าเซตต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่

1. $\{x \in \mathbb{N} : x < 3\}$ และ $\{|x| : x \in \mathbb{Z}, x^2 + 3x + 2 = 0\}$

2. $\{x \in \mathbb{R} : |x| = x^3\}$ และ $\{x \in \mathbb{R} : x^3 = x\}$

ทฤษฎีบท 2.2.5 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1. $A = A$ | กฎสะท้อน (Reflexive law) |
| 2. ถ้า $A = B$ แล้ว $B = A$ | กฎสมมาตร (Symmetric law) |
| 3. ถ้า $A = B$ และ $B = C$ แล้ว $A = C$ | กฎการถ่ายทอด (Transitive law) |

ทฤษฎีบท 2.2.6 ให้ $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นเซต เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $n \geq 2$ จะได้ว่า

ถ้า $(A_1 = A_2) \wedge (A_2 = A_3) \wedge \dots \wedge (A_{n-1} = A_n)$ แล้ว $A_1 = A_n$

สัจพจน์ 2.2.7 The Axiom of Specification

สำหรับแต่ละเซต A และคุณสมบัติ p จะมีเซต B ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกของเซต A ที่สอดคล้องกับสมบัติ p

$$\forall A \exists B [x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge p(x)]$$

ตัวอย่าง 2.2.8 ให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ จงสร้างเซต B โดยใช้สัจพจน์ 2.2.7 เมื่อกำหนดสมบัติดังต่อไปนี้

1. $p(x) : x$ เป็นจำนวนคู่

2. $p(x) : x$ เป็นจำนวนคี่

3. $p(x) : x^2 = x$

ทฤษฎีบท 2.2.9 ไม่มีเซต A ใด ๆ ที่สอดคล้อง

ทุก ๆ เซต x ซึ่ง $x \in A$

ทฤษฎีบท 2.2.10 มีเซตที่ไม่มีสมาชิกเพียงเซตเดียวเท่านั้น

บทนิยาม 2.2.11 เซตในทฤษฎีบท 2.2.10 เรียกว่า **เซตว่าง** (empty set หรือ null set) เขียนแทนด้วย $\emptyset$ หรือ $\{\}$

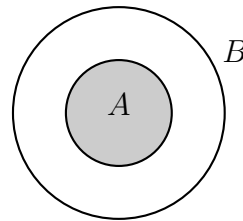
บทนิยาม 2.2.12 ให้ A และ B เป็นเซต แล้ว A เป็น **สับเซต** (subset) ของ B เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$ หรือเรียกว่า B เป็น **ซูเปอร์เซต** (super set) ของ A เขียนแทนด้วย $B \supseteq A$ ถ้าสมาชิกทุก ๆ ตัวใน A เป็นสมาชิกใน B ถ้า $A \subseteq B$ แต่ $A \neq B$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $A \subset B$ เรียกว่า A เป็น **สับเซตแท้** (proper subset) ของ B

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$

$$A \not\subseteq B \leftrightarrow \exists x [x \in A \wedge x \notin B]$$

$$A \subset B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

เขียน $A \subseteq B$ แทนด้วยแผนภาพดังนี้



ตัวอย่าง 2.2.13 จงตรวจสอบว่าเซตต่อไปนี้เป็นสับเซตของ $A = \{0, 1, \{1\}, \{0, 1\}\}$

1. $\{0, 1\}$
2. $\{1, \{1\}\}$
3. $\{\{1\}\}$
4. $\{\{0\}\}$

ตัวอย่าง 2.2.14 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ จงหาสับเซตของ A ทั้งหมด ที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1. มีสมาชิกตัวเดียว
2. มีสมาชิก 2 ตัว
3. มีสมาชิก 2 ตัวซึ่งผลคูณน้อยกว่า 6
4. มีสมาชิก 3 ตัวซึ่งผลบวกเท่ากับ 9

ตัวอย่าง 2.2.15 จงเติมความสัมพันธ์ $\in, \notin, \subseteq, \not\subseteq, \subset, \not\subset$ ในช่องว่างต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

$\{1, 2\}$		$\{1, 2, 3\}$
$\{\{1\}\}$		$\{1, 2\}$
$\{1\}$		$\{1, \{1\}, 2\}$
$\{1, 3\}$		$\{3, 1\}$
$\{1, \{2\}\}$		$\{1, 2\}$

ทฤษฎีบท 2.2.16 เซตว่างเป็นสับเซตของทุก ๆ เซต

ทฤษฎีบท 2.2.17 ให้ A, B และ C เป็นเซต จะได้ว่า

1. $A \subseteq A$ กฎการสะท้อน (Reflexive law)
2. ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$ กฎการถ่ายทอด (Transitive law)

ทฤษฎีบท 2.2.18 ให้ $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นเซต เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $n \geq 2$ จะได้ว่า

ถ้า $(A_1 \subseteq A_2) \wedge (A_2 \subseteq A_3) \wedge \dots \wedge (A_{n-1} \subseteq A_n)$ แล้ว $A_1 \subseteq A_n$

ทฤษฎีบท 2.2.19 ให้ A และ B เป็นเซต จะได้ว่า

$$A = B \text{ ก็ต่อเมื่อ } A \subseteq B \text{ และ } B \subseteq A$$

ทฤษฎีบท 2.2.20 สำหรับแต่ละเซต A ใด ๆ จะได้ว่า $A = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq \emptyset$

ตัวอย่าง 2.2.21 ให้ A, B และ C เป็นเซต จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } A \subseteq B \text{ และ } B \subseteq C \text{ และ } C \subseteq A \text{ แล้ว } A = B = C$$

ตัวอย่าง 2.2.22 จงยกตัวอย่างเซต A, B และ C ซึ่งสอดคล้อง $A \subseteq B$ และ $A \subseteq C$ และ $C \subseteq B$

ตัวอย่าง 2.2.23 ให้ A เป็นเซตของจำนวนคู่ทั้งหมด และ B เป็นเซตของจำนวนเต็มที่เกิดจากผลบวกของจำนวนคี่สองจำนวน จงแสดงว่า $A = B$

สัจพจน์ 2.2.24 The Axiom of Pairing for Sets

สำหรับเซต x และ y ใด ๆ จะมีเซตซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิกที่เป็น x และ y เท่านั้น

$$\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)$$

โดยสัจพจน์ 2.2.7 จะเขียนเซตได้เป็น $\{x, y\}$ เนื่องจากอันดับการเขียนสมาชิกเซตไม่เกิดความแตกต่างกัน และเซตดังกล่าวมีสมาชิก 2 ตัว บางครั้งจึงเรียกว่า เซตไม่เป็นคู่อันดับ (unordered pair) หรือเซตคู่ ในกรณีที่ $x = y$ จะได้ว่าเซตนั้นมีสมาชิกเพียงตัวเดียวคือ

$$\{y\} = \{x : x = y\}$$

เรียกเซตที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียวว่า **เซตเดี่ยว (singleton set)** หรือ **เซตหน่วย (unit set)**

ทฤษฎีบท 2.2.25 $\{x, y\}$ และ $\{x\}$ เป็นเซต

แบบฝึกหัด 2.2

1. ให้ $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < |x| < 4\}$. จงหาสมบัติของ A ทั้งหมด ที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้
 - 1.1 เป็นเซตเดียว
 - 1.2 มีสมาชิก 2 ตัว
 - 1.3 มีสมาชิก 3 ตัว และผลบวกเท่ากับ 0
 - 1.4 มีสมาชิก 2 ตัว ซึ่งผลคูณเป็นจำนวนบวก
 - 1.5 กำลังสองของสมาชิกมากกว่า 2
2. ให้ A และ B เป็นเซต จงแสดงว่ามีเซต P ซึ่ง $P = \{A, B\}$
3. ให้ $A = \{x : p(x)\}$ และ $B = \{x : q(x)\}$ จงแสดงว่า $A \subseteq B \leftrightarrow \forall x (p(x) \rightarrow q(x))$
4. ให้ $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นเซต เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $n \geq 2$ จงพิสูจน์ว่า

ถ้า $(A_1 \subseteq A_2) \wedge (A_2 \subseteq A_3) \wedge \dots \wedge (A_{n-1} \subseteq A_n) \wedge (A_n \subseteq A_1)$ แล้ว $A_1 = A_2 = \dots = A_n$
5. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จงแสดงว่า
 - 5.1 ถ้า $A = B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$
 - 5.2 ถ้า $A \subseteq B$ และ $B = C$ แล้ว $A \subseteq C$
 - 5.3 ถ้า $A \subset B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subset C$
 - 5.4 ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$
6. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จงแสดงว่า ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq \emptyset$ แล้ว $A = \emptyset$
7. จงแสดงว่าเซตว่างไม่มีสมบัติแท้
8. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จงตรวจสอบประพจน์ต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จพร้อมพิสูจน์
 - 8.1 ถ้า $A \subseteq B$ และ $A \subseteq C$ แล้ว $B \subseteq C$
 - 8.2 ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \not\subseteq C$ แล้ว $A \not\subseteq C$
9. จงแสดงว่า ถ้า $A \in B$ แล้ว $\{A\} \subseteq B$
10. ให้ $A = \{n : n = 2k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$ และ $B = \{m : m = 2p + 4, p \in \mathbb{Z}\}$ จงแสดงว่า $A = B$
11. ให้ $A = \{2n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$ และ $B = \{2n + 3 : n \in \mathbb{Z}\}$ จงแสดงว่า $A = B$
12. จงแสดงว่า $\{3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\} = \{3n + 4 : n \in \mathbb{Z}\}$
13. ให้ A เป็นเซตของจำนวนคี่ทั้งหมด และ B เป็นเซตของจำนวนเต็มที่เกิดจากผลบวกของจำนวนคี่และจำนวนคู่ จงแสดงว่า $A = B$

2.3 สัจพจน์เกี่ยวกับการดำเนินการ

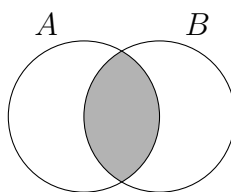
ทฤษฎีบท 2.3.1 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่ามีเซต C เพียงเซตเดียวที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$x \in C \quad \leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \in B)$$

บทนิยาม 2.3.2 เซต C ในทฤษฎีบท 2.3.1 เรียกว่า **อินเตอร์เซกชัน (intersection)** ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \cap B$ นั่นคือ

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} \quad \text{หรือ} \quad x \in A \cap B \quad \leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \in B)$$

เขียนแทนด้วยแผนภาพดังนี้



ตัวอย่าง 2.3.3 จงหาผลลัพธ์ของเซตต่อไปนี้

1. $\{1\} \cap \{1, 2\}$

2. $\{1\} \cap \{1, \{1\}\}$

3. $\{0, 1\} \cap \{0, 1, \{0, 1\}\}$

ทฤษฎีบท 2.3.4 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$

2. $A \cap A = A$

กฎนิจพล (Idempotent law)

3. $A \cap B = B \cap A$

กฎการสลับที่ (Commutative law)

4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative law)

ทฤษฎีบท 2.3.5 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \cap B \subseteq A$ และ $A \cap B \subseteq B$
2. $A \cap B = A$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$

ทฤษฎีบท 2.3.6 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \subseteq B \cap C$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $A \subseteq C$
2. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$

ทฤษฎีบท 2.3.7 ให้ A, B, C และ D เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. ถ้า $A \subseteq B$ และ $C \subseteq D$ แล้ว $A \cap C \subseteq B \cap D$
2. ถ้า $A = B$ และ $C = D$ แล้ว $A \cap C = B \cap D$

ตัวอย่าง 2.3.8 จงยกตัวอย่างค้านบทกลับของทฤษฎีบท 2.3.7

ทฤษฎีบท 2.3.9 ให้ $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$ เป็นเซต สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

1. ถ้า $A_1 \subseteq B_1 \wedge A_2 \subseteq B_2 \wedge \dots \wedge A_n \subseteq B_n$ แล้ว $(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \subseteq (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)$
2. ถ้า $A_1 = B_1 \wedge A_2 = B_2 \wedge \dots \wedge A_n = B_n$ แล้ว $(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)$

สัจพจน์ 2.3.10 The Axiom of Union

ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะมีเซต C ที่สอดคล้องสมบัติเงื่อนไข

$$x \in C \quad \leftrightarrow \quad (x \in A \vee x \in B)$$

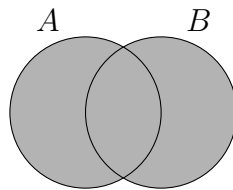
ทฤษฎีบท 2.3.11 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่ามีเซต C เพียงเซตเดียวที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$x \in C \quad \leftrightarrow \quad (x \in A \vee x \in B)$$

บทนิยาม 2.3.12 เซต C ในทฤษฎีบท 2.3.11 เรียกว่า **ยูเนียน (union)** ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \cup B$ นั่นคือ

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \quad \text{หรือ} \quad x \in A \cup B \quad \leftrightarrow \quad (x \in A \vee x \in B)$$

เขียนแทนด้วยแผนภาพดังนี้



ตัวอย่าง 2.3.13 จงหาผลลัพธ์ของเซตต่อไปนี้

1. $\{1\} \cup \{1, 2\}$

2. $\{1\} \cup \{\{1\}\}$

3. $\{0, 1\} \cup \{0, \{1\}\}$

ทฤษฎีบท 2.3.14 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \cup \emptyset = A$

2. $A \cup A = A$

กฏนิพจน์ (Idempotent law)

3. $A \cup B = B \cup A$

กฏการสลับที่ (Commutative law)

4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

กฏการเปลี่ยนหมู่ (Associative law)

ทฤษฎีบท 2.3.15 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \subseteq A \cup B$ และ $B \subseteq A \cup B$
2. $A \cup B = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$

ทฤษฎีบท 2.3.16 ให้ A, B, C และ D เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. ถ้า $A \subseteq B$ และ $C \subseteq D$ แล้ว $A \cup C \subseteq B \cup D$
2. ถ้า $A = B$ และ $C = D$ แล้ว $A \cup C = B \cup D$

ทฤษฎีบท 2.3.17 กฎการแจกแจง (Distributive law)

ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

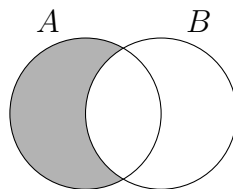
ทฤษฎีบท 2.3.18 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่ามีเซต C เพียงเซตเดียวที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$x \in C \quad \leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \notin B)$$

บทนิยาม 2.3.19 เซต C ในทฤษฎีบท 2.3.18 เรียกว่า **ผลต่าง (different)** ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A - B$ นั่นคือ

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} \quad \text{หรือ} \quad x \in A - B \quad \leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \notin B)$$

เขียนแทนด้วยแผนภาพดังนี้



ตัวอย่าง 2.3.20 จงหาผลลัพธ์ของเซตต่อไปนี้

1. $\{1\} - \{1, 2\}$
2. $\{1, \{1\}\} - \{1\}$
3. $\{1, 0\} - \{\{1\}, 0\}$

ทฤษฎีบท 2.3.21 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A - A = \emptyset$
2. $A - \emptyset = A$
3. $\emptyset - A = \emptyset$
4. $A - B \subseteq A$

ทฤษฎีบท 2.3.22 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A - B = \emptyset$
2. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $(A - C) \subseteq (B - C)$
3. ถ้า $A = B$ แล้ว $(A - C) = (B - C)$

ทฤษฎีบท 2.3.23 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A - (A \cap B) = (A - B) \cup (A - C)$
2. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

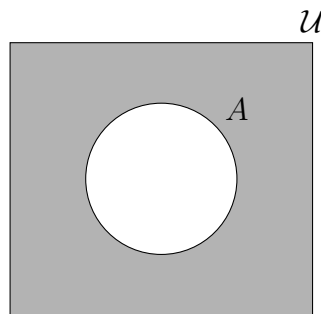
บทนิยาม 2.3.24 เอกภพสัมพัทธ์ (Universe) คือเซตที่ถูกกำหนดขึ้นโดยมีข้อตกลงว่าจะกล่าวถึงสิ่งที่เป็นสมาชิกของเซตนี้เท่านั้น และนิยมใช้ $\mathcal{U}$ แทนเอกภพสัมพัทธ์

บทนิยาม 2.3.25 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ A เป็นเซต แล้ว **ส่วนเติมเต็ม (complement)** ของ A เขียนแทนด้วย A^c นิยามโดย

$$A^c = \mathcal{U} - A = \{x : x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$$

นั่นคือ $x \in A^c \leftrightarrow (x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A)$

เขียนแทนด้วยแผนภาพดังนี้



ตัวอย่าง 2.3.26 กำหนดให้ $\mathcal{U} = \{1, 2, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ จงหาผลลัพธ์ของเซตต่อไปนี้

1. $\{1, 2\}^c$
2. $\{1, \{1\}\}^c \cap \{2\}$
3. $\{\{1\}\}^c - \{1, \{2\}\}^c$

ทฤษฎีบท 2.3.27 ให้ A เป็นเซต และ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จะได้ว่า

1. $(A^c)^c = A$
2. $\emptyset^c = \mathcal{U}$
3. $\mathcal{U}^c = \emptyset$
4. $A \cap A^c = \emptyset$
5. $A \cup A^c = \mathcal{U}$

ทฤษฎีบท 2.3.28 ให้ A และ B เป็นเซต และ U เป็นเอกภาพสัมพัทธ์ จะได้ว่า

1. $A - B = A \cap B^c$
2. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $B^c \subseteq A^c$

ทฤษฎีบท 2.3.29 กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's Law)

ให้ A และ B เป็นเซต และ U เป็นเอกภาพสัมพัทธ์ จะได้ว่า

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

แบบฝึกหัด 2.3

1. กำหนดให้ $U = \{0, \emptyset, \{\emptyset\}, \{0\}, \{0, \emptyset\}\}$ จงหาผลลัพธ์ของเซต

1.1 $\emptyset \cap \{\emptyset\}$

1.3 $\{\{\emptyset\}\} - \{\emptyset\}$

1.5 $\emptyset^c \cap \{0\}$

1.2 $\{0\}^c \cup \{\emptyset\}^c$

1.4 $\{0, \emptyset\} \cap \{\{0, \emptyset\}\}$

1.6 $(\{0\}^c - \{\emptyset\})^c$

2. ให้ A, B, C และ D เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

2.1 $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$

2.8 $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

2.2 $A \cap (A \cup B) = A$

2.9 $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

2.3 $A \cup (A \cap B) = A$

2.10 $(A - B) \cup (C - D) = (A - D) \cap (C - B)$

2.4 $(A - B) \cup A = A$

2.11 $A^c - B^c = B - A$

2.5 $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

2.12 $(A \cup B^c)^c = B - A$

2.6 $(A - B) \cup B = A \cup B$

2.13 $A^c - (C \cup B^c) = B - (A \cup C)$

2.7 $A - (A - B) = A \cap B$

2.14 $A \cap (B \cap C)^c = (A - B) \cup (A - C)$

3. ให้ A, B และ C เป็นเซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย 6, 9 และ 15 ลงตัวตามลำดับ จงเขียนสมบัติของเซต

3.1 $A \cap B \cap C$

3.2 $A \cap (B \cup C)$

3.3 $A \cup (B \cap C)$

4. ให้ A และ B เป็นเซต โดยที่ $A \subseteq A \cap B$ จงแสดงว่า

4.1 $A \subseteq B$

4.2 $A \cap B = A$

5. ให้ A และ B เป็นเซต โดยที่ $A \cup B \subseteq A$ จงแสดงว่า

5.1 $B \subseteq A$

5.2 $A \cup B = A$

6. ให้ A, B และ C เป็นเซต โดยที่ $A = B$ จงพิสูจน์ว่า

6.1 $A \cap B = A$

6.2 $A \cup B = A$

6.3 $C \cap A = C \cap B$

6.4 $C \cup A = C \cup B$

7. ให้ A, B และ C เป็นเซต จงพิสูจน์ว่า

7.1 $A \subseteq (B \cap C) \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$

7.2 $A \subseteq B \rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$

7.3 $A = B \rightarrow A \cap C = B \cap C$

7.4 $A \cap B = \emptyset \rightarrow A - B = A$

7.5 $A \subseteq B \rightarrow (A - B) \cap C = \emptyset$

8. ให้ $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$ เป็นเซต จงพิสูจน์ว่า สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

8.1 ถ้า $A_1 \subseteq B_1 \wedge A_2 \subseteq B_2 \wedge \dots \wedge A_n \subseteq B_n$ แล้ว $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \subseteq (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n)$

8.2 ถ้า $A_1 = B_1 \wedge A_2 = B_2 \wedge \dots \wedge A_n = B_n$ แล้ว $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n)$

9. ถ้าสับเซตแท้ทั้งหมดของ X คือ $\emptyset, \{\{1\}\}$ และ $\{2\}$ และ $Y = \{1, \{2\}\}$ จงหา $X \cap Y$

10. กำหนดให้ $A = \{a, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$ จงหาเซต

$$10.1 (A - \{b, c\}) \cup \{b\}$$

$$10.2 (A - \{a, \{b\}\}) - \{a\}$$

11. กำหนดให้ $A = \{x : x \text{ เป็นจำนวนนับที่หารด้วย 3 ลงตัว} \}$

$B = \{x : x \text{ เป็นจำนวนนับที่หารด้วย 4 ลงตัว} \}$

$C = \{x : x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } -100 \leq x \leq 100\}$

แล้ว $A \cap B \cap C$ มีจำนวนสมาชิกเท่าใด

12. ให้ X และ Y เป็นเซตในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathbb{Z}$ นิยาม

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\} \quad \text{และ} \quad XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$$

ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{2, 3, 4\}$ จงหาเซตต่อไปนี้

$$12.1 A + B$$

$$12.3 B + B$$

$$12.5 AB$$

$$12.7 AB + BA$$

$$12.2 A + A$$

$$12.4 A + (A + B)$$

$$12.6 AA$$

$$12.8 A(A + B)$$

2.4 สัจพจน์ของเซตกำลัง

สัจพจน์ 2.4.1 The Axiom of Power set

ให้ A เป็นเซต แล้วจะมีเซต C ที่สอดคล้อง

$$x \in C \quad \leftrightarrow \quad x \subseteq A$$

ทฤษฎีบท 2.4.2 ให้ A เป็นเซต แล้วจะได้ว่ามีเซต C เพียงเซตเดียวที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$x \in C \quad \leftrightarrow \quad x \subseteq A$$

บทนิยาม 2.4.3 เซต C ในทฤษฎีบท 2.4.2 เรียกว่า **เซตกำลัง (power set)** ของ A เขียนแทนด้วย $\mathcal{P}(A)$ นั่นคือ

$$\mathcal{P}(A) = \{x : x \subseteq A\} \quad \text{หรือ} \quad x \in \mathcal{P}(A) \quad \leftrightarrow \quad x \subseteq A$$

ตัวอย่าง 2.4.4 จงหาเซตกำลังของ

1. $A = \{1, 2\}$

2. $B = \{\emptyset\}$

3. $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

ทฤษฎีบท 2.4.5 ให้ A เป็นเซต จะได้ว่า

1. $A \in \mathcal{P}(A)$

2. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$

3. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

ตัวอย่าง 2.4.6 จงเขียน แผนภาพแฮสเซ (Hasse diagram) แสดงความสัมพันธ์ของสมาชิกในเซตกำลังของ $A = \{x, y, z\}$

ทฤษฎีบท 2.4.7 จำนวนสมาชิกของเซตกำลังของเซตที่มีสมาชิก n ตัว เท่ากับ 2^n ตัว

ตัวอย่าง 2.4.8 จงหาจำนวนสมาชิกของ $\mathcal{P}(A)$ เมื่อกำหนดให้

1. $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 100 \text{ และ } 3 \mid x\}$

2. $A = \{x^2 : x \in \mathbb{Z}, |x| < 100 \text{ และ } 5 \mid x\}$

ทฤษฎีบท 2.4.9 ให้ A และ B เป็นเซต จะได้ว่า

1. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
2. $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$
3. ถ้า $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)$ แล้ว $A \in B$

ตัวอย่าง 2.4.10 จงยกตัวอย่างค้านบทกลับของทฤษฎีบท 2.4.9 ข้อ 3

ทฤษฎีบท 2.4.11 ให้ A และ B เป็นเซต จะได้ว่า

1. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
2. $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

ตัวอย่าง 2.4.12 จงยกตัวอย่างค้านบทกลับของทฤษฎีบท 2.4.11 ข้อ 2

สัจพจน์ 2.4.13 The Axiom of Regularity

ทุก ๆ เซต x ที่ไม่ใช่เซตว่าง แล้วจะมีเซต y ที่เป็นสมาชิกของ x โดยที่ $x \cap y = \emptyset$ นั่นคือ

$$\forall x [\exists a (a \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y))]$$

ทฤษฎีบท 2.4.14 สำหรับเซต A ใด ๆ จะได้ว่า $A \notin A$

ทฤษฎีบท 2.4.15 สำหรับเซต A และ B ใด ๆ จะได้ว่า $A \notin B$ หรือ $B \notin A$

แบบฝึกหัด 2.3

1. ให้ A และ B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U จงพิสูจน์ว่า

$$1.1 \mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A)$$

$$1.2 \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

$$1.3 \text{ ถ้า } A \subseteq B \text{ แล้ว } \mathcal{P}(B^c) \subseteq \mathcal{P}(A^c)$$

2. จงแจกแจงสมาชิกของ $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

3. จงแจกแจงสมาชิกของ $\mathcal{P}(A)$ เมื่อกำหนดให้

$$3.1 A = \{a, b\}$$

$$3.2 A = \{4, 5, 6\}$$

$$3.3 A = \{0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$$

4. ให้ A และ B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U จงตรวจสอบข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ พร้อมทั้งพิสูจน์

$$4.1 \mathcal{P}(A^c) = \mathcal{P}(U) - \mathcal{P}(A)$$

$$4.2 \mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$$

$$4.3 \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

$$4.4 A - B = \emptyset \leftrightarrow \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \emptyset$$

$$4.5 \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A - B) = \emptyset$$

$$4.6 \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$$

$$4.7 \mathcal{P}(\{\emptyset\}) \cap \emptyset = \mathcal{P}(\emptyset)$$

$$4.8 \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cup B) = \emptyset$$

$$4.9 \text{ ถ้า } A - B = A \text{ แล้ว } \mathcal{P}(A \cap B) = \{\emptyset\}$$

$$4.10 \text{ ถ้า } A - B = B \text{ แล้ว } \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$$

$$4.11 \text{ ถ้า } A \cap B = \emptyset \text{ แล้ว } \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A)$$

5. ถ้าสับเซตแท้ทั้งหมดของ A คือ $\emptyset, \{\{\emptyset\}\}$ และ $\{1\}$ จงหาเซตของ $\mathcal{P}(A) - A$

6. ถ้า $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 0, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของ $(\mathcal{P}(A) - A) \cup (A - \mathcal{P}(A))$ เท่ากับเท่าใด

7. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ กำหนดให้

$$X = \{\underline{xy} : \underline{xy} \text{ เป็นเลขสองหลัก } x, y \in A \text{ และ } x + y = 4\}$$

จงหาจำนวนสับเซตทั้งหมดของ X

2.5 สัจพจน์ของเซตอนันต์

จากสัจพจน์ 2.2.2 (การเท่ากัน) สัจพจน์ 2.2.24 (เซตคู่) และสัจพจน์ 2.3.10 (ยูเนียน) ทำให้เกิดการสร้างเซตได้อย่างไม่มีที่สิ้นสุด เช่นเราทราบว่า มีเซตว่าง $\emptyset$ ดังนั้นจะเกิดเซต

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$$

ด้วยสัจพจน์ 2.4.1 (เซตกำลัง) เราก็อาจสร้างเซตได้ไม่มีที่สิ้นสุดเช่นกัน

$$\emptyset, P(\emptyset), P(P(\emptyset)), P(P(P(\emptyset))), \dots$$

ในหัวข้อก่อนหน้านี้ยังไม่ได้กล่าวถึงการนำเซตเหล่านั้นมารวมกันยังเป็นเซตหรือไม่ ดังนั้นสำหรับหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสัจพจน์ที่ทำให้การรวมกันของเซตเหล่านั้นยังคงเป็นเซตอยู่

บทนิยาม 2.5.1 สำหรับเซต x ใด ๆ จะเรียก $x \cup \{x\}$ ว่า **ตัวตามหลัง (successor)** ของ x เขียนแทนด้วย x^+ นั่นคือ

$$x^+ = x \cup \{x\}$$

และเรียก x ว่า **ตัวนำหน้า (presuccessor)** ของ x^+

ตัวอย่าง 2.5.2 จงหาตัวตามหลังต่อไปนี้

1. $\emptyset^+$
2. $\emptyset^{++}$
3. $P(\emptyset)^+$

บทนิยาม 2.5.3 ถ้า A เป็นเซตที่สอดคล้องเงื่อนไข 2 ข้อคือ

1. $\emptyset \in A$
2. สำหรับเซต x ใด ๆ ถ้า $x \in A$ แล้ว $x^+ \in A$

จะเรียก A ว่า **เซตของตัวตามหลัง (successor set)** หรือ **เซตอุปนัย (inductive set)**

หรือเขียนได้ว่า A เป็นเซตอุปนัย ก็ต่อเมื่อ $\emptyset \in A \wedge \forall x[x \in A \rightarrow x^+ \in A]$

ข้อสังเกต 2.5.4 จะเห็นได้ว่าเซตอุปนัยเป็นเซตที่มีสมาชิกอยู่เป็นจำนวนนับไม่ถ้วน

สัจพจน์ 2.5.5 มีเซตอุปนัย

ทฤษฎีบท 2.5.6 มีเซตอนันต์ที่เล็กที่สุด

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงหาเซตต่อไปนี้

1.1 $\emptyset^{+++}$

1.2 $(\emptyset^+ \cup \emptyset^{++})^+$

1.3 $\mathcal{P}(\emptyset)^{++}$

1.4 $(\mathcal{P}(\emptyset) \cup \mathcal{P}(\emptyset)^+)^+$

2. สำหรับเซต A และ B ใด ๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ พร้อมพิสูจน์

2.1 $(A \cup B)^+ = A^+ \cup B^+$

2.3 $(A - B)^+ = A^+ - B^+$

2.2 $(A \cap B)^+ = A^+ \cap B^+$

2.4 $(A^+)^+ = A$

3. ข้อความที่กล่าวว่า " ถ้า A เป็นเซตอุปนัย แล้ว $A \cup \{A\}$ เป็นเซตอุปนัย " เป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

4. กำหนดให้ $A = \{x \cup \{x\} : x \text{ เป็นเซต} \}$ แล้ว $A \cup \{\emptyset\}$ เป็นเซตอุปนัยหรือไม่ จงพิสูจน์

บทที่ 3

ความสัมพันธ์

3.1 เซตของคู่อันดับ

จากสัจพจน์ 2.2.24 (เซตคู่) คือเซตไม่มีอันดับนั้นคือ $\{x, y\}$ ไม่แตกต่างกับ $\{y, x\}$ แต่การกล่าวถึง x และ y บางครั้งอาจจะให้ความหมายที่ต่างกัน นักคณิตศาสตร์จึงพยายามให้คำจำกัดความของ "คู่อันดับ (ordered pair)" ในปี 1914 วิเนอร์ (Wiener) นักคณิตศาสตร์ชาวอเมริกันได้ให้คำจำกัดความของคู่อันดับเป็นคนแรก โดยใช้

$$(x, y) \text{ แทนคู่อันดับ หมายถึง } \{\{x\}, \emptyset, \{y\}\}$$

และต่อมาในปี 1921 กูราตอฟสกี (Kuratowski) ชาวโปแลนด์ ได้พัฒนาสัญลักษณ์ (x, y) ให้ง่ายขึ้น โดยนิยามเป็น

$$(x, y) \text{ แทนคู่อันดับ หมายถึง } \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

สัจพจน์ 3.1.1 The Axiom of Pairing for Elements

สำหรับ a และ b ใด ๆ จะมีเซตซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิกที่เป็น x และ y เท่านั้น

$$\forall a \forall b \exists y \forall x [x \in y \leftrightarrow (x = a \vee x = b)]$$

ทฤษฎีบท 3.1.2 สำหรับ a, b, c และ d ใด ๆ จะได้ว่า

$$\{a, b\} = \{c, d\} \quad \leftrightarrow \quad (a = b \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)$$

บทแทรก 3.1.3 สำหรับ a ใด ๆ จะได้ว่า $\{a, a\} = \{a\}$

บทแทรก 3.1.4 สำหรับ a และ b ใด ๆ จะได้ว่า $\{a\} = \{b\} \leftrightarrow a = b$

บทนิยาม 3.1.5 เรียกเซต $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ ว่า **คู่อันดับ (ordered pair)** ของ a และ b เขียนแทนด้วย (a, b) นั่นคือ

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

ทฤษฎีบท 3.1.6 สำหรับ a, b, c และ d ใด ๆ จะได้ว่า

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

ทฤษฎีบท 3.1.7 ให้ $a \in A$ และ $b \in B$ จะได้ว่า $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

ทฤษฎีบท 3.1.8 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่ามีเซต C เพียงเซตเดียวที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$x \in C \quad \leftrightarrow \quad \exists a \exists b [a \in A \wedge b \in B \wedge x = (a, b)]$$

บทนิยาม 3.1.9 เซต C ในทฤษฎีบท 3.1.8 เรียกว่า **ผลคูณคาร์ทีเซียน** (Cartesian product) ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ นั่นคือ

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

หรือกล่าวได้ว่า

$$\begin{aligned} x \in A \times B & \quad \leftrightarrow \quad \exists a \in A \exists b \in B [x = (a, b)] \\ (a, b) \in A \times B & \quad \leftrightarrow \quad a \in A \wedge b \in B \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.1.10 ให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{3, 4\}$ จงหา

1. $A \times B$

3. $A \times A$

2. $B \times A$

4. $B \times B$

ตัวอย่าง 3.1.11 ให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ และ $B = \{5, 6, 7, \dots, 20\}$

จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

1. $\{(x, y) \in A \times B : y = 2x + 1\}$

3. $\left\{(x, y) \in B \times A : y = \frac{x}{2} - 1\right\}$

2. $\{(x, y) \in A \times A : y + x = 6\}$

4. $\{(x, y) \in B \times B : yx = x + 15\}$

ตัวอย่าง 3.1.12 จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

1. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y = xy\}$

3. $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : yx + y = x + 11\}$

2. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : xy = x + 6\}$

4. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^2 + x^2 + 2 = 2x - 2y\}$

ทฤษฎีบท 3.1.13 สำหรับเซต A และ B ใดๆ จะได้ว่า

$$A \times B = \emptyset \quad \leftrightarrow \quad A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

ทฤษฎีบท 3.1.14 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ สมมติว่า $A \subseteq B$ แล้ว

1. $(A \times C) \subseteq (B \times C)$
2. $(C \times A) \subseteq (C \times B)$
3. $(A \times A) \subseteq (B \times B)$

ทฤษฎีบท 3.1.15 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ สมมติว่า $A \subseteq B$ แล้ว

1. $(A \times C) = (B \times C)$
2. $(C \times A) = (C \times B)$
3. $(A \times A) = (B \times B)$

ทฤษฎีบท 3.1.16 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ เมื่อ $C \neq \emptyset$ จะได้ว่า

$$1. (A \times C) \subseteq (B \times C) \quad \rightarrow \quad A \subseteq B$$

$$2. (C \times A) \subseteq (C \times B) \quad \rightarrow \quad A \subseteq B$$

$$3. (A \times C) = (B \times C) \quad \rightarrow \quad A = B$$

$$4. (C \times A) = (C \times B) \quad \rightarrow \quad A = B$$

ทฤษฎีบท 3.1.17 ให้ A, B, C และ D เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

$$1. A = B \quad \rightarrow \quad A \times B = B \times A$$

$$2. A \subseteq B \wedge C \subseteq D \quad \rightarrow \quad (A \times C) \subseteq (B \times D)$$

$$3. A = B \wedge C = D \quad \rightarrow \quad (A \times C) = (B \times D)$$

ทฤษฎีบท 3.1.18 ให้ A, B, C และ D เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า

$$1. A \times B = B \times A \quad \rightarrow \quad A = B$$

$$2. (A \times C) \subseteq (B \times D) \quad \rightarrow \quad A \subseteq B \wedge C \subseteq D$$

$$3. (A \times C) = (B \times D) \quad \rightarrow \quad A = B \wedge C = D$$

ทฤษฎีบท 3.1.19 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

บทแทรก 3.1.20 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง $B \cap C = \emptyset$ แล้ว $(A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset$

แบบฝึกหัด 3.1

1. ให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ และ $B = \{2, 4, 6, 8, \dots, 40\}$ จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้
 - 1.1 $\{(x, y) \in A \times B : y = 2x + 1\}$
 - 1.2 $\{(x, y) \in A \times A : y + x = 7\}$
 - 1.3 $\{(x, y) \in B \times A : y = \frac{x}{2} + 1\}$
 - 1.4 $\{(x, y) \in B \times B : yx = x + 36\}$
2. จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้
 - 2.1 $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y < 5\}$
 - 2.2 $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : xy = 3x + 12\}$
 - 2.3 $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : yx + y = x + 13\}$
 - 2.4 $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^2 + x^2 - 2x + 4y + 5 = 0\}$
3. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า
 - 3.1 $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
 - 3.2 $(B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$
 - 3.3 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
 - 3.4 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
4. สมมติว่า $a = b$ จงพิสูจน์ว่า $(a, b) = \{\{a\}\}$
5. จงพิสูจน์ว่า $\{a\} \times \{a\} = \{\{\{a\}\}\}$
6. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \notin A$ แล้ว $(a, b) \notin A \times B$
7. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง $A \subseteq B$ จงพิสูจน์ว่า
 - 7.1 $A \times B \subseteq B \times B$
 - 7.2 $B \times A \subseteq B \times B$
 - 7.3 $A \times A \subseteq B \times A$
 - 7.4 $A \times A \subseteq B \times B$
8. ให้ A และ B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U จงแสดงว่า

$$(A \times B)^c = (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$$
9. ให้ A, B, C และ D เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า
 - 9.1 $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \rightarrow C \times A \subseteq D \times B$
 - 9.2 $A = B \wedge C = D \rightarrow C \times A = D \times B$
10. ให้ A, B และ C เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U จงตรวจสอบว่าข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จพร้อมพิสูจน์
 - 10.1 $(A^c \times B^c)^c = (A \times B)$
 - 10.2 $A \times B = B \times A \rightarrow A = B$
 - 10.3 $A \times C = B \times C \rightarrow A = B$
 - 10.4 $A \times C = B \times C \rightarrow A = B$

3.2 ความสัมพันธ์

บทนิยาม 3.2.1 เรียกเซต r ว่า **ความสัมพันธ์ (relation)** ก็ต่อเมื่อ

$$\forall z[z \in r \rightarrow \exists x \exists y[z = (x, y)]]$$

ทฤษฎีบท 3.2.2 เซตว่างเป็นความสัมพันธ์

ข้อสังเกต 3.2.3 ในกรณีที่ $r \neq \emptyset$ เรากล่าวได้ว่า

r ว่าความสัมพันธ์ ก็ต่อเมื่อ r เป็นเซตของคู่อันดับ

ทฤษฎีบท 3.2.4 ผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ เป็นความสัมพันธ์

ทฤษฎีบท 3.2.5 สับเซตของความสัมพันธ์เป็นความสัมพันธ์

ทฤษฎีบท 3.2.6 ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์ จะได้ว่า

1. $r \cap s$ เป็นความสัมพันธ์
2. $r \cup s$ เป็นความสัมพันธ์
3. $r - s$ เป็นความสัมพันธ์

บทนิยาม 3.2.7 ให้ r เป็นความสัมพันธ์ แล้ว **โดเมน (domain)** ของ r เขียนแทนด้วย $\text{Dom}(r)$ นิยามโดย

$$\text{Dom}(r) = \{x : (x, y) \in r\}$$

และ **เรนจ์ (range)** ของ r เขียนแทนด้วย $\text{Ran}(r)$ นิยามโดย

$$\text{Ran}(r) = \{y : (x, y) \in r\}$$

ข้อสังเกต 3.2.8 สำหรับเซต A และ B ใด ๆ จะได้ว่า

1. $\text{Dom}(\emptyset) = \emptyset$ และ $\text{Ran}(\emptyset) = \emptyset$
2. $\text{Dom}(A \times B) = A$ และ $\text{Ran}(A \times B) = B$

ตัวอย่าง 3.2.9 จงหาโดเมนและเรนจ์ ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $r = \{(1, 2), (3, 4), (2, 3)\}$
2. $s = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y = 5\}$

ทฤษฎีบท 3.2.10 ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์ จะได้ว่า

1. $\text{Dom}(r \cap s) \subseteq \text{Dom}(r)$ และ $\text{Ran}(r \cap s) \subseteq \text{Ran}(r)$
2. $\text{Dom}(r) \subseteq \text{Dom}(r \cup s)$ และ $\text{Ran}(r) \subseteq \text{Ran}(r \cup s)$
3. $\text{Dom}(r - s) \subseteq \text{Dom}(r)$ และ $\text{Ran}(r - s) \subseteq \text{Ran}(r)$

ทฤษฎีบท 3.2.11 ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์ จะได้ว่า

1. $\text{Dom}(r \cap s) \subseteq \text{Dom}(r) \cap \text{Dom}(s)$ และ $\text{Ran}(r \cap s) \subseteq \text{Ran}(r) \cap \text{Ran}(s)$
2. $\text{Dom}(r) - \text{Dom}(s) \subseteq \text{Dom}(r - s)$ และ $\text{Ran}(r) - \text{Ran}(s) \subseteq \text{Ran}(r - s)$

ทฤษฎีบท 3.2.12 ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์ จะได้ว่า

1. $\text{Dom}(r \cup s) = \text{Dom}(r) \cup \text{Dom}(s)$
2. $\text{Ran}(r \cup s) = \text{Ran}(r) \cup \text{Ran}(s)$

บทนิยาม 3.2.13 ให้ r เป็นความสัมพันธ์ แล้ว **ความสัมพันธ์ผกผัน** (inverse relation) ของ r เขียนแทนด้วย r^{-1} นิยามโดย

$$r^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in r\}$$

ข้อสังเกต 3.2.14 สำหรับเซต A และ B ใด ๆ จะได้ว่า

1. $\emptyset^{-1} = \emptyset$
2. $(A \times B)^{-1} = B \times A$
3. $(A \times A)^{-1} = A \times A$

ตัวอย่าง 3.2.15 จงหาความสัมพันธ์ผกผันของ

1. $r = \{(1, 0), (0, 1), (1, 3)\}$
2. $s = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

ทฤษฎีบท 3.2.16 สำหรับความสัมพันธ์ r ใด ๆ จะได้ว่า $(r^{-1})^{-1} = r$

ทฤษฎีบท 3.2.17 ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์ จะได้ว่า

1. $(r \cup s)^{-1} = r^{-1} \cup s^{-1}$
2. $(r \cap s)^{-1} = r^{-1} \cap s^{-1}$
3. $(r - s)^{-1} = r^{-1} - s^{-1}$

ทฤษฎีบท 3.2.18 สำหรับความสัมพันธ์ r ใด ๆ จะได้ว่า

$$1. \text{Dom}(r^{-1}) = \text{Ran}(r)$$

$$2. \text{Ran}(r^{-1}) = \text{Dom}(r)$$

บทนิยาม 3.2.19 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ เรียก r ว่าความสัมพันธ์จาก A ไป B ถ้า

$$r \subseteq A \times B$$

ในกรณีที่ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A จะเรียกว่าความสัมพันธ์บน A

บทนิยาม 3.2.20 ให้ r เป็นความสัมพันธ์ ถ้า $(x, y) \in r$ เขียนแทนได้ด้วย $x r y$

บทนิยาม 3.2.21 ให้ i_A เป็นความสัมพันธ์บนเซต A และนิยามโดย

$$i_A = \{(a, a) : a \in A\}$$

เรียก i_A ว่า **ความสัมพันธ์เอกลักษณ์ (identity relation)**

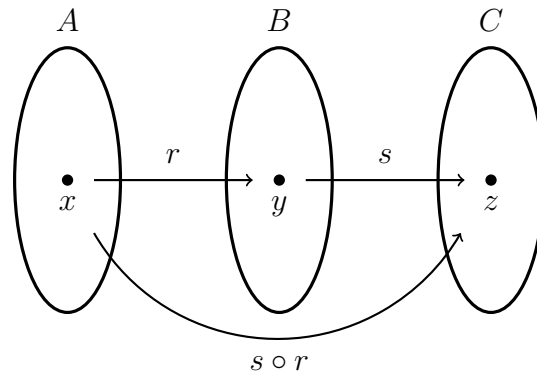
ตัวอย่าง 3.2.22 จงหาความสัมพันธ์จาก A ไป B ทั้งหมด
เมื่อกำหนดให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{3, 4\}$

ตัวอย่าง 3.2.23 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ จงแจกแจงสมาชิกของความสัมพันธ์บน A

1. ความสัมพันธ์ "เท่ากับ"
2. ความสัมพันธ์ "น้อยกว่า"
3. ความสัมพันธ์ "หารลงตัว"

บทนิยาม 3.2.24 ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C ความสัมพันธ์ r ประกอบกับ s (r composed with s) จะเขียนแทนด้วย $s \circ r$ คือความสัมพันธ์จาก A ไป C กำหนดโดย

$$s \circ r = \{(x, z) \in A \times C : \exists y \in B, (x, y) \in r \wedge (y, z) \in s\}$$



ตัวอย่าง 3.2.25 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 5, 6, 7\}$ และ $C = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C ดังนี้

$$r = \{(1, 3), (3, 3), (3, 5), (4, 7)\} \text{ และ } s = \{(3, 2), (5, 4), (6, 6), (7, 9)\}$$

จงหา $s \circ r$

ตัวอย่าง 3.2.26 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ โดย r และ s เป็นความสัมพันธ์บนเซต A ดังนี้

$$r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\} \text{ และ } s = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 1), (5, 3)\}$$

จงหาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $r \circ s$

3. $r \circ r$

5. $s^{-1} \circ r^{-1}$

2. $s \circ r$

4. $(s \circ r)^{-1}$

6. $r^{-1} \circ s^{-1}$

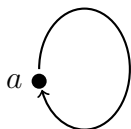
ทฤษฎีบท 3.2.27 ให้ r, s และ t เป็นความสัมพันธ์ จะได้ว่า

$$1. (r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$$

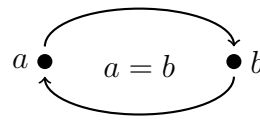
$$2. (r \circ s) \circ t = r \circ (s \circ t)$$

บทนิยาม 3.2.28 ให้ A เป็นเซตใดๆ และ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะกล่าวว่า r มีสมบัติ

- | | | |
|--------------------------------|------------|---|
| 1. สะท้อน (reflexive) | ก็ต่อเมื่อ | $\forall a \in A, \quad a r a$ |
| 2. สมมาตร (symmetric) | ก็ต่อเมื่อ | $\forall a, b \in A, \quad a r b \rightarrow b r a$ |
| 3. ปฏิสมมาตร (antisymmetric) | ก็ต่อเมื่อ | $\forall a, b \in A, \quad (a r b \wedge b r a) \rightarrow a = b$ |
| 4. ถ่ายทอด (transitive) | ก็ต่อเมื่อ | $\forall a, b, c \in A, \quad (a r b \wedge b r c) \rightarrow a r c$ |
| 5. เปรียบเทียบได้ (comparable) | ก็ต่อเมื่อ | $\forall a, b \in A, \quad a r b \vee b r a$ |



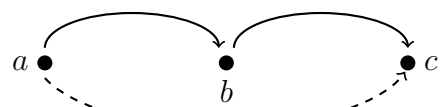
สมบัติสะท้อน



สมบัติปฏิสมมาตร



สมบัติสมมาตร



สมบัติถ่ายทอด

ตัวอย่าง 3.2.29 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้ มีสมบัติใดบ้าง

1. ความสัมพันธ์ "เท่ากับ"
2. ความสัมพันธ์ "น้อยกว่า"
3. ความสัมพันธ์ "น้อยกว่าหรือเท่ากับ"
4. ความสัมพันธ์ "หารลงตัว"

ทฤษฎีบท 3.2.30 ความสัมพันธ์เอกลักษณ์ i_A มีสมบัติสะท้อน

ทฤษฎีบท 3.2.31 ทุก ๆ x และ y จะได้ว่า $(x, y) \in i_A$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

ทฤษฎีบท 3.2.32 ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะได้ว่า

r มีสมบัติสะท้อน ก็ต่อเมื่อ $i_A \subseteq r$

ทฤษฎีบท 3.2.33 ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะได้ว่า

r^{-1} มีสมบัติสมมาตร ก็ต่อเมื่อ $r^{-1} = r$

ทฤษฎีบท 3.2.34 ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะได้ว่า

$$r \text{ มีสมบัติปฏิสมมาตร} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad r \cap r^{-1} \subseteq i_A$$

ทฤษฎีบท 3.2.35 ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะได้ว่า

$$r \text{ มีสมบัติเปรียบเทียบได้} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad r \cup r^{-1} \subseteq A \times A$$

ทฤษฎีบท 3.2.36 ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะได้ว่า

ถ้า r มีสมบัติเปรียบเทียบได้ แล้ว r มีสมบัติสะท้อน

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \ r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = 5 - |x|\}$$

$$1.2 \ r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : xy + 3x = 12\}$$

$$1.3 \ r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y = xy + 1\}$$

$$1.4 \ r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : y = \sin \pi x\}$$

$$1.5 \ r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sqrt{1 - \sin x}\}$$

$$1.6 \ r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sqrt{1 - x^2}\}$$

$$1.7 \ r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sin x + \cos x\}$$

$$1.8 \ r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 1 + \frac{x}{1 - x^2} \right\}$$

$$1.9 \ r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \frac{x - 3}{x + 3} \right\}$$

$$1.10 \ r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \frac{\ln(3 - x)}{\sqrt{x^2 - 4}} \right\}$$

2. ให้ r, s และ t เป็นความสัมพันธ์ จงพิสูจน์ว่า $r \cap (s \cup t)$ เป็นความสัมพันธ์

3. จงพิสูจน์ว่า $\text{Dom}((A \times A)^{-1}) = A$ ทุก ๆ เซต A

4. ให้ A ไม่ใช่เซตว่าง และ B เป็นเซต จงแสดงว่า $\text{Dom}((A \times B)^{-1}) = A$

5. ให้ r, s, t และ u เป็นความสัมพันธ์ จงพิสูจน์ว่า

$$5.1 \ (r \subseteq s \wedge t \subseteq u) \rightarrow t \circ r \subseteq u \circ s$$

$$5.2 \ (r \cup s) \circ t = (r \circ t) \cup (s \circ t)$$

$$5.3 \ (r \cap s) \circ t \subseteq (r \circ t) \cap (s \circ t)$$

6. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จงแสดงว่า

$$6.1 \ \text{ถ้า } A \cap B \neq \emptyset \text{ แล้ว } (A \times B) \circ (A \times B) = A \times B$$

$$6.2 \ \text{ถ้า } A \cap B = \emptyset \text{ แล้ว } (A \times B) \circ (A \times B) = \emptyset$$

$$6.3 \ \text{ถ้า } B \neq \emptyset \text{ แล้ว } (B \times C) \circ (A \times B) = A \times C$$

7. ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B จงพิสูจน์ว่า

$$7.1 \ r \cap s \text{ เป็นความสัมพันธ์จาก } A \text{ ไป } B$$

$$7.2 \ r \cup s \text{ เป็นความสัมพันธ์จาก } A \text{ ไป } B$$

$$7.3 \ r - s \text{ เป็นความสัมพันธ์จาก } A \text{ ไป } B$$

8. ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B จงพิสูจน์ว่า r^{-1} เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

9. จงแจกแจงความสัมพันธ์บน $A = \{0, \pm 1, \pm 2\}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งตรวจสอบสมบัติทั้ง 5 ชนิด

9.1 $r = \{(x, y) : y = x^2\}$

9.3 $t = \{(x, y) : y = \sqrt{|x|}\}$

9.2 $s = \{(x, y) : y \leq x\}$

9.4 $u = \{(x, y) : x < 1 \text{ และ } x^2 > 1\}$

10. ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์บน A และ $r \subseteq s$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า r มีสมบัติสะท้อน แล้ว s จะมีสมบัติสะท้อนด้วย

11. จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์บน $\mathbb{N}$ ต่อไปนี้มีสมบัติใดบ้างใน 5 ชนิด

11.1 $r = \{(x, y) : 2 \mid (x + y)\}$

11.2 $r = \{(x, y) : 2 \mid (x - y)\}$

11.3 $r = \{(x, y) : 2 \mid (x^2 - y^2)\}$

11.4 $r = \{(x, y) : 2 \mid (x^2 + y^2)\}$

3.3 ความสัมพันธ์สมมูล

บทนิยาม 3.3.1 ความสัมพันธ์ r บนเซต A จะเรียกว่า **ความสัมพันธ์สมมูล** (equivalent relation) ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด

ตัวอย่าง 3.3.2 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A

1. $r = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
2. $r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$
3. $r = \{(1, 1)\}$
4. $r = A \times A$
5. $r = \emptyset$

ตัวอย่าง 3.3.3 ความสัมพันธ์ r ที่นิยามโดย

$$x r y \text{ ก็ต่อเมื่อ } 3 \mid (y - x) \quad \text{สำหรับ } x, y \in \mathbb{Z}$$

จงแสดงว่า r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\mathbb{Z}$

ตัวอย่าง 3.3.4 ให้ $n \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $n > 1$ และความสัมพันธ์ r บน $\mathbb{Z}$ นิยามโดย

$$x r y \text{ ก็ต่อเมื่อ } n \mid (y - x)$$

จงแสดงว่า r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\mathbb{Z}$

บทนิยาม 3.3.5 ให้ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต $A \neq \emptyset$ และ $a \in A$ **ชั้นสมมูล (equivalence class)** ของ a มอดุโล r เขียนแทนด้วย $[a]_r$ หรือ $[a]$ หรือ $\bar{a}$ หมายถึงเซตของสมาชิกใน A ที่สัมพันธ์กับ a นั่นคือ

$$[a]_r = \{x \in A : x r a\}$$

และเซตของชั้นสมมูลเรียกว่า **เซต A มอดุโล r (A modulo r)** เขียนแทนด้วย A/r ดังนั้น

$$A/r = \{[a]_r : a \in A\}$$

ตัวอย่าง 3.3.6 จงหาเซต $\mathbb{Z}/r$ ของความสัมพันธ์ r บน $\mathbb{Z}$ นิยามโดย $x r y$ ก็ต่อเมื่อ $3|(x - y)$

ข้อสังเกต 3.3.7 สังเกตได้ว่าเซต $\mathbb{Z}$ ถูกแบ่งออกเป็นเซตย่อยได้ 3 เซตเท่านั้นคือ $[0]$, $[1]$ และ $[2]$ จะเห็นว่าแต่ละเซตย่อยไม่มีสมาชิกซ้ำกัน และเมื่อรวมสมาชิกทั้งหมดของเซตย่อยเหล่านั้นย่อมเท่ากับ $\mathbb{Z}$ ในทำนองเดียวกันจากตัวอย่าง 3.3.4 เมื่อ

$$[k] = \{nq + k : q \in \mathbb{Z}\} \quad \text{ทุก } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

จะได้ว่า

$$\mathbb{Z}/r = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}$$

เรียกเซตนี้ว่า **เซตของจำนวนเต็มมอดุโล n** เขียนแทนด้วย $\mathbb{Z}_n$

ทฤษฎีบท 3.3.8 ให้ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต $A \neq \emptyset$ แล้ว

1. $\forall a \in A, [a]_r \neq \emptyset$
2. $\forall a, b \in A, [a]_r \cap [b]_r \neq \emptyset \leftrightarrow a r b$
3. $\forall a, b \in A, [a]_r = [b]_r \leftrightarrow a r b$
4. $\forall a, b \in A, [a]_r \neq [b]_r \leftrightarrow [a]_r \cap [b]_r = \emptyset$

บทนิยาม 3.3.9 ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ Λ เป็นเซตดัชนี จะกล่าวว่า

$$\Pi = \{A_\alpha : \emptyset \neq A_\alpha \subseteq A \text{ และ } \alpha \in \Lambda\}$$

เป็น **ผลแบ่งกัน (partition)** ของ A ถ้า

$$(1) \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = A$$

$$(2) \forall \alpha, \beta \in \Lambda, A_\alpha = A_\beta \text{ หรือ } A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$$

ตัวอย่าง 3.3.10 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ จงยกตัวอย่างผลแบ่งกันของ A มาอย่างน้อย 2 เซต

ทฤษฎีบท 3.3.11 ให้ A เป็นเซตไม่ใช่เซตว่าง และ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A แล้ว A/r เป็นผลแบ่งกันหนึ่งของ A

บทนิยาม 3.3.12 ให้ Π เป็นผลแบ่งกันของเซต A นิยามความสัมพันธ์ A/Π บน A เรียกว่า A มอดุโล Π โดย

$$(x, y) \in A/\Pi \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \text{มี } B \in \Pi \text{ ซึ่ง } \{x, y\} \subseteq B$$

ตัวอย่าง 3.3.13 ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ และ $\Pi = \{\{a, b\}, \{c\}, \{c, d\}\}$ จงหา A/Π

ตัวอย่าง 3.3.14 กำหนดให้ $A = \mathbb{N}$ และ $\Pi = \{\{1, 3, 5, 7, \dots\}, \{2, 4, 6, 8, \dots\}\}$ จงหา A/Π

ทฤษฎีบท 3.3.15 ถ้า Π เป็นผลแบ่งกันของเซต $A \neq \emptyset$ แล้ว

$$A/\Pi \text{ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน } A$$

แบบฝึกหัด 3.3

1. ให้ $A \neq \emptyset$ และ r เป็นความสัมพันธ์บนเซต A จงแสดงว่า

r เป็นความสัมพันธ์สมมูล ก็ต่อเมื่อ r^{-1} เป็นความสัมพันธ์สมมูล

2. ให้ $A \neq \emptyset$ เป็นเซตใด ๆ ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์บน A จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

2.1 ถ้า $r \cup s$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล แล้ว $s \circ r = r \circ s$

2.2 ถ้า $r \cup s = r \circ s$ แล้ว $r \cup s$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล

3. กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์บน A ต่อไปนี้มีข้อใดเป็นความสัมพันธ์สมมูล

3.1 $r = \{(a, b), (b, a)\}$

3.3 $r = \{(a, a), (b, b)\}$

3.2 $r = \{(c, d), (c, c)\}$

3.4 $r = \{(d, c)\}$

4. จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์สมมูล

4.1 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y > x\}$

4.2 $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y = 2\}$

4.3 $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 4 \mid (x - y)\}$

4.4 $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 5 \mid (2x - 2y)\}$

4.5 ให้ S เป็นเซต และ $A, B \in \mathcal{P}(S)$ กำหนดให้ $A r B$ มีความหมายว่า $A \subseteq B$

5. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\Pi = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 6\}, \{7, 8\}\}$

และ $r = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (1, 2), (2, 1)\}$

จงหาสมาชิกของ

5.1 A/r

5.3 A/Π

5.5 $A/(A/r)$

5.2 $[3]_r$

5.4 $[3]_{A/\Pi}$

5.6 $A/(A/\Pi)$

6. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $r_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n \mid (y - x)\}$ นิยาม $[x]_n = [x]_{r_n}$ และ $\mathbb{Z}_n = \mathbb{N}/r_n$ จงหา

6.1 $[2]_3$

6.3 $[5]_4$

6.5 $\mathbb{Z}_4$

6.7 $[2]_{\mathbb{N}/\mathbb{Z}_3}$

6.2 $[3]_4$

6.4 $\mathbb{Z}_3$

6.6 $\mathbb{Z}_7$

6.8 $[3]_{\mathbb{N}/\mathbb{Z}_5}$

7. ให้ Π เป็นผลแบ่งกันของเซตหนึ่ง ให้ A, B และ C เป็นสมาชิกใน Π จงแสดงว่า ถ้า $B \cap C \neq \emptyset$ แล้ว $B = C$

บทที่ 4

ฟังก์ชัน

4.1 ฟังก์ชัน

บทนิยาม 4.1.1 ความสัมพันธ์ f จะเรียกว่า **ฟังก์ชัน (function)** ก็ต่อเมื่อ

$$\forall x \forall y \forall z [(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z]$$

ข้อสังเกต 4.1.2

$$\begin{aligned} f \text{ เป็นฟังก์ชัน} &\leftrightarrow \forall x \forall y \forall z [(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z] \\ f \text{ ไม่เป็นฟังก์ชัน} &\leftrightarrow \exists x \exists y \exists z [(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \wedge y \neq z] \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.1.3 จงตรวจสอบความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1. $r_1 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 5)\}$

4. $r_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : xy = x + y\}$

2. $r_2 = \{(1, 2), (1, 1)\}$

5. $r_5 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : y = |y| + |x|\}$

3. $r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < y\}$

6. $r_6 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 2x + y^2 = x^2 + 2y\}$

ตัวอย่าง 4.1.4 จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมพิสูจน์

1. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 3x + 2y = 6\}$

2. $g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2 + 1\}$

3. $h = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xy^2 = x + 1\}$

ทฤษฎีบท 4.1.5 เซตว่างเป็นฟังก์ชัน

บทนิยาม 4.1.6 ให้ f เป็นฟังก์ชัน ถ้า $(x, y) \in f$ เขียนแทนด้วย $y = f(x)$ นั่นคือ

$$(x, y) \in f \quad \leftrightarrow \quad y = f(x)$$

ตัวอย่าง 4.1.7 ให้ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ และ $g = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 2)\}$ จงหา

1. $f(1) + f(2)$
2. $g(3) - g(4)$
3. $f(4) \cdot g(2)$
4. $f(g(3)) - g(f(3))$

บทนิยาม 4.1.8 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน

1. ผลบวก (sum) ของ f และ g เขียนแทนด้วย $f + g$ นิยามโดย

$$f + g = \{(x, y) : y = f(x) + g(x) \text{ และ } x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\}$$

2. ผลคูณ (difference) ของ f และ g เขียนแทนด้วย $f - g$ นิยามโดย

$$f - g = \{(x, y) : y = f(x) - g(x) \text{ และ } x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\}$$

3. ผลคูณ (product) ของ f และ g เขียนแทนด้วย fg นิยามโดย

$$fg = \{(x, y) : y = f(x)g(x) \text{ และ } x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\}$$

4. ผลหาร (quotient) ของ f และ g เขียนแทนด้วย $\frac{f}{g}$ นิยามโดย

$$\frac{f}{g} = \left\{ (x, y) : y = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \text{ และ } g(x) \neq 0 \right\}$$

ตัวอย่าง 4.1.9 ให้ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ และ $g = \{(1, 3), (3, 5), (4, 1), (6, 0)\}$ จงหา

1. $f + g$
2. $f - g$
3. $g - f$
4. fg
5. $\frac{f}{g}$
6. $\frac{g}{f}$

ทฤษฎีบท 4.1.10 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $f + g$, $f - g$, fg และ $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชัน

จากบทนิยาม 4.1.8 จะได้ว่า

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{เมื่อ } g(x) \neq 0$$

ตัวอย่าง 4.1.11 กำหนดให้

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2} \quad \text{และ} \quad g(x) = \frac{1 - x}{2x^2}$$

จงหา

1. $(f + g)(x)$

3. $(fg)(x)$

2. $(f - g)(x)$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

ตัวอย่าง 4.1.12 ให้

$$f(x) = x + 1 \quad \text{และ} \quad g(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \quad \text{และ} \quad h(x) = \frac{x}{x + 1}$$

จงหา

1. $(fg)(x)$

3. $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$

2. $(fh)(x)$

4. $\left(\frac{h}{g}\right)(x)$

จากบทนิยาม 4.1.8 จะได้ว่า

$$\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x : g(x) = 0\}$$

ตัวอย่าง 4.1.13 ให้

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{และ} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

จงหา

1. $\text{Dom}(f + g)$

3. $\text{Dom}(fg)$

2. $\text{Dom}(f - g)$

4. $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right)$

เนื่องจาก f และ g เป็นเซตจะได้ว่า $f = g$ ก็ต่อเมื่อ $\forall x \forall y [(x, y) \in f \leftrightarrow (x, y) \in g]$

ทฤษฎีบท 4.1.14 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

$$f = g \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \text{ และ } f(x) = g(x) \text{ ทุก } x \in \text{Dom}(f)$$

ตัวอย่าง 4.1.15 ให้ $f(x) = x$ และ $g(x) = \frac{x^2}{x}$ จงแสดงว่า $f \neq g$

ตัวอย่าง 4.1.16 ให้ $f(x) = \frac{x}{|x|}$ และ $g(x) = \frac{|x|}{x}$ แล้ว $f = g$ หรือไม่เพราะเหตุใด

บทนิยาม 4.1.17 ฟังก์ชัน f จะเรียกว่า **ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** (injective หรือ one-to-one) ก็ต่อเมื่อ

$$\forall x_1 \forall x_2 [f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2]$$

ข้อสังเกต 4.1.18

$$\begin{aligned} f \text{ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง} &\leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 [f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2] \\ &\leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 [x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)] \\ f \text{ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง} &\leftrightarrow \exists x_1 \exists x_2 [f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2] \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.1.19 จงตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่พร้อมพิสูจน์ เมื่อ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ กำหนดโดย

1. $f(x) = 2x + 1$

3. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$

2. $f(x) = x^2$

4. $f(x) = x|x|$

บทนิยาม 4.1.20 ให้ f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เรียก f ว่าฟังก์ชันจาก A ไป B ถ้า

1. f เป็นฟังก์ชัน
2. $\text{Dom}(f) = A$
3. $\text{Ran}(f) \subseteq B$

ตัวอย่าง 4.1.21 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{4, 5, 6\}$ ฟังก์ชันในข้อใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

1. $f_1 = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$
2. $f_2 = \{(1, 2), (2, 5), (3, 6)\}$
3. $f_3 = \{(1, 4), (1, 5), (3, 6)\}$
4. $f_4 = \{(1, 4), (2, 5)\}$

ตัวอย่าง 4.1.22 จงเขียนฟังก์ชันจาก A ไป B ทั้งหมด เมื่อ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2\}$

ตัวอย่าง 4.1.23 ให้ $f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \frac{1}{x^2 + 1} \right\}$ จงแสดงว่า f ฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

บทนิยาม 4.1.24 ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ถ้า $\text{Ran}(f) = B$ จะเรียก f ว่า **ฟังก์ชันทั่วถึง (surjective)** หรือ ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

บทนิยาม 4.1.25 ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและฟังก์ชันทั่วถึง จะเรียกว่า f เป็น**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง (bijective)** หรือเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B

ตัวอย่าง 4.1.26 จงเขียนฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ทั้งหมด เมื่อ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2\}$

ตัวอย่าง 4.1.27 กำหนดให้

$$f = \{(x, y) : x + \sqrt{x} = y + \sqrt{y}\}$$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\mathbb{R}^+$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}^+$

ทฤษฎีบท 4.1.28 เซตว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\emptyset$ ไปทั่วถึง $\emptyset$

ทฤษฎีบท 4.1.29 ให้ A เป็นเซตใด ๆ แล้วความสัมพันธ์เอกลักษณ์ i_A เป็นฟังก์ชันจาก A ไป A

บทนิยาม 4.1.30 สำหรับเซต A ใด ๆ เรียก

$$i_A = \{(x, x) : x \in A\}$$

ว่า ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)

ทฤษฎีบท 4.1.31 ให้ A เป็นเซต แล้วฟังก์ชันเอกลักษณ์ i_A เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงตรวจสอบความสัมพันธ์ต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมพิสูจน์

$$1.1 \quad f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 3x - 1\}$$

$$1.2 \quad f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 2x^2 - 3\}$$

$$1.3 \quad f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : xy = y^2\}$$

$$1.4 \quad f_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y|x| = x|y|\}$$

$$1.5 \quad f_5 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : yx - y = 35 + x\}$$

$$1.6 \quad f_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 + 2 = 2x + 2y\}$$

2. จงตรวจสอบฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ พร้อมพิสูจน์

$$2.1 \quad f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : yx + y = x - 1\}$$

$$2.2 \quad f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 3x = xy - 2y\}$$

$$2.3 \quad f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1\}$$

$$2.4 \quad f_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x^2y + y = 1\}$$

3. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$

4. จงแสดงว่า $\emptyset$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $A = \emptyset$

5. จงเขียนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B ทั้งหมด เมื่อ $A = \{4, 5, 6\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

6. จงแสดงว่าลัทธิเซตของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

7. ให้ $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ และ $g(x) = \frac{x}{1 + x}$ แล้ว $f = g$ หรือไม่ พร้อมให้เหตุผล

8. ให้ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ กำหนดโดย
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{x+1}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

จงพิจารณาว่า f พร้อมทั้งให้เหตุผล

8.1 f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

8.2 f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงหรือไม่

9. ให้ $f, g : A \rightarrow B$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าจริงหรือไม่ พร้อมทั้งพิสูจน์

$$9.1 \quad f \cup g : A \rightarrow B$$

9.2 $f \cap g : A \rightarrow B$

9.3 ถ้า $f \cup g : A \rightarrow B$ แล้ว $f = g$

9.4 ถ้า $f \cap g : A \rightarrow B$ แล้ว $f = g$

9.5 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $f \cup g : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

9.6 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $f \cap g : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

9.7 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว $f \cup g : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

9.8 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว $f \cap g : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

10. ให้ $f = \{(1, 0), (2, 2), (3, 5), (4, 6)\}$ และ $g = \{(1, 1), (2, 1), (4, 3), (5, 0)\}$ จงหา

10.1 $f + g$

10.3 $f + f$

10.5 fg

10.7 $\frac{f}{g}$

10.2 $f - g$

10.4 $g - f$

10.6 gg

10.8 $\frac{g}{f}$

11. จงหา $\text{Dom}(f + g)$, $\text{Dom}(f - g)$, $\text{Dom}(fg)$ และ $\text{Dom}(\frac{f}{g})$ เมื่อกำหนดให้

11.1 $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = x + 1$

11.2 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ และ $g(x) = \frac{x}{x + 2}$

11.3 $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ และ $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

12. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน จงแสดงว่า $f + g = g + f$ และ $fg = gf$

13. ให้

$$f(x) = x, \quad g(x) = e^{\ln x}, \quad h(x) = \frac{x - 1}{x + 1} \quad \text{และ} \quad k(x) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

จงหา

13.1 $(f + g)(x)$

13.3 $(h - k)(x)$

13.5 $(\frac{f}{g})(x)$

13.2 $(fg)(x)$

13.4 $(hk)(x)$

13.6 $(\frac{h}{k})(x)$

14. ให้

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{และ} \quad g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{เมื่อ } x > 1 \\ 1 - x & \text{เมื่อ } x \leq 1 \end{cases}$$

จงหา

14.1 $(f + g)(x)$

14.2 $(f - g)(x)$

14.3 $(fg)(x)$

14.4 $(\frac{f}{g})(x)$

4.2 ฟังก์ชันผกผันและฟังก์ชันประกอบ

บทนิยาม 4.2.1 ให้ $f : A \rightarrow B$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันผกผันได้ (invertible) ก็ต่อเมื่อ

$$f^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in f\} \text{ เป็นฟังก์ชัน}$$

และเรียก f^{-1} ว่าฟังก์ชันผกผัน (inverse function) ของ f

ตัวอย่าง 4.2.2 ให้ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ และ $g = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$ จงตรวจสอบว่า f และ g เป็นฟังก์ชันผกผันได้หรือไม่

ทฤษฎีบท 4.2.3 ให้ $f : A \rightarrow B$ แล้วจะได้ว่า

$$f \text{ เป็นฟังก์ชันผกผันได้ ก็ต่อเมื่อ } f \text{ เป็นฟังก์ชัน 1-1}$$

ทฤษฎีบท 4.2.4 $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ $f^{-1} : B \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

ตัวอย่าง 4.2.5 จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันผกผันได้หรือไม่ พร้อมให้เหตุผล

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = x^2$

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = 2x + 1$

ตัวอย่าง 4.2.6 จงหา $f^{-1}(x)$ เมื่อกำหนดให้

1. $f(x) = 3x - 2$

3. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

2. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

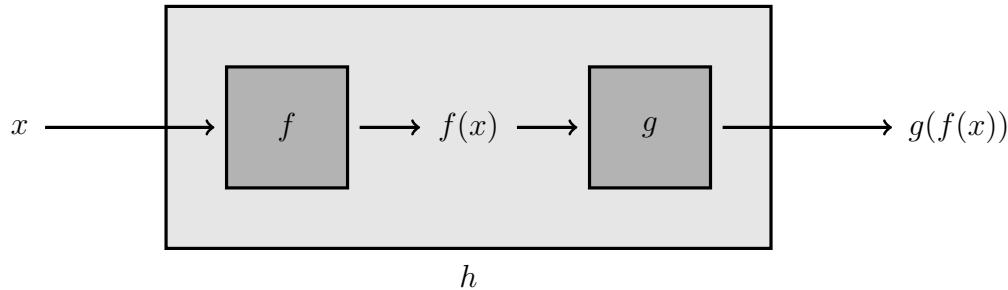
4. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

ตัวอย่าง 4.2.7 ให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย

$$f(x) = x|x|$$

จงแสดงว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง และหา $f^{-1}(x)$

ถ้าเปรียบเทียบฟังก์ชันคือเครื่องจักรชิ้นหนึ่งเรียกว่า f เมื่อใส่ x หรือ input เข้าไปในเครื่อง จะได้ $f(x)$ ออกมาตามหน้าที่ของเครื่องจักรชนิดนั้น จากแนวคิดนี้เมื่อประกอบเครื่องจักรอีกเครื่องที่เรียกว่า g อีกขึ้น โดยนำ $f(x)$ หรือ output จากเครื่องจักร f ใส่เข้าไปในเครื่องจักร g แล้วได้ผลเป็น $g(f(x))$ เรียกเครื่องจักรประกอบจากสองชิ้นนี้ว่า h ดังภาพ



จะเรียกฟังก์ชัน h ที่ได้จากแนวคิดนี้ว่า **ฟังก์ชันประกอบ (composite function)** ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2.8 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน

$$h = \{(x, z) : (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g\} \text{ เป็นฟังก์ชัน}$$

บทนิยาม 4.2.9 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ฟังก์ชัน h ในทฤษฎีบท 4.2.8 เรียกว่า **ฟังก์ชันประกอบ (composite function)** ของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ นั่นคือ

$$(x, z) \in g \circ f \quad \leftrightarrow \quad (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g$$

ตัวอย่าง 4.2.10 ให้ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (5, 4)\}$ และ $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 1)\}$ จงหา

1. $f \circ g$

3. $f \circ f$

2. $g \circ f$

4. $(f \circ g) + f$

ตัวอย่าง 4.2.11 ให้

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 4)\}$$

$$g = \{(1, 4), (2, 2), (3, 1), (4, 3)\}$$

$$h = \{(1, 3), (2, 1), (3, 4), (4, 2)\}$$

จงหา $(f \circ g) \circ h$ และ $f \circ (g \circ h)$

โดยบทนิยาม 4.2.9

$$\begin{aligned} (x, z) \in g \circ f &\leftrightarrow (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g \\ z = (g \circ f)(x) &\leftrightarrow f(x) = y \wedge g(y) = z \\ &\leftrightarrow g(f(x)) = z \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ตัวอย่าง 4.2.12 ให้ $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ และ $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$ จงหา $(f \circ g)(x)$ และ $(g \circ f)(x)$

ทฤษฎีบท 4.2.13 ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชัน แล้ว

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

ทฤษฎีบท 4.2.14 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง
3. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

ทฤษฎีบท 4.2.15 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. ถ้า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. ถ้า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง
3. ถ้า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ g เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

ทฤษฎีบท 4.2.16 ให้ $f : A \rightarrow B$ แล้ว

1. $f \circ i_A = f$
2. $i_B \circ f = f$

ทฤษฎีบท 4.2.17 ให้ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง จะได้ว่า

1. $f \circ f^{-1} = i_B$
2. $f^{-1} \circ f = i_A$

ทฤษฎีบท 4.2.18 ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชัน

1. ถ้า $f = g$ แล้ว $h \circ f = h \circ g$
2. ถ้า $f = g$ แล้ว $f \circ h = g \circ h$

ทฤษฎีบท 4.2.19 ให้ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ $Dom(f) = A$ และ $Ran(f) = B$

1. $g \circ f = f$ ก็ต่อเมื่อ $g = i_B$
2. $f \circ g = f$ ก็ต่อเมื่อ $g = i_A$

ตัวอย่าง 4.2.20 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ และ $A = \text{Dom}(f)$ จงแสดงว่า $f = f^{-1}$ และ $f \circ f = i_A$

ทฤษฎีบท 4.2.21 ให้ f เป็นฟังก์ชันผกผันได้ แล้ว

$$f^{-1} \text{ เป็นฟังก์ชันผกผันได้ และ } (f^{-1})^{-1} = f$$

ทฤษฎีบท 4.2.22 กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน 1-1 จะได้ว่า

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันผกผันได้หรือไม่ เมื่อโดเมนเป็นสับเซตของจำนวนจริง

1.1 $f(x) = 5 + 7x$

1.7 $f(x) = \frac{1+2x}{2+x}$

1.2 $f(x) = \sqrt{x+1}$

1.8 $f(x) = \frac{1}{1+2^x}$

1.3 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$

1.9 $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$

1.4 $f(x) = x^3|x|$

1.5 $f(x) = |x| + |x+1|$

1.10 $f(x) = x \sin x$

1.6 $f(x) = \tan x$

2. จงหาฟังก์ชันผกผัน $f^{-1}(x)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $f(x) = 11x + 22$

2.3 $f(x) = x^3 + 12x^2 + 6x$

2.5 $f(x) = e^x$

2.2 $f(x) = \sqrt{x}$

2.4 $f(x) = \tan x$

2.6 $f(x) = \frac{3+x}{2-x}$

3. ให้ $f = \{(0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 2)\}$ และ $g = \{(0, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 1)\}$ จงหา

3.1 $f \circ g$

3.2 $g \circ f$

3.3 $(f+g) \circ (f-g)$

4. ให้ $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 2x & \text{เมื่อ } x \leq 0 \end{cases}$ และ $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{เมื่อ } x > 1 \\ 1 - x^2 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \end{cases}$ จงหา

4.1 $(f \circ g)(x)$

4.2 $(g \circ f)(x)$

4.3 $(f \circ g) \circ f(1)$

4.4 $(f - g) \circ g(1)$

5. ให้ $f(2x+1) = 4x^2 + 4x + 5$ และ $g\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x$ จงหา $f(x)$, $g(x)$ และ $(f \circ g)(x)$

6. จงยกตัวอย่างฟังก์ชัน 1-1 f ที่สอดคล้อง $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ทุก ๆ x และ y

7. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน จงพิสูจน์ว่า

7.1 $\text{Dom}(g \circ f) \subseteq \text{Dom}(f)$

7.2 $\text{Ran}(g \circ f) \subseteq \text{Ran}(g)$

8. ให้ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ จงพิสูจน์ว่า $g \circ f: A \rightarrow C$

9. ให้ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง จงพิสูจน์ว่า $g \circ f: A \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

10. ให้ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน 1-1 จงพิสูจน์ว่า $g \circ f: A \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชัน 1-1

11. ให้ $f: A \rightarrow B$ และ $g: B \rightarrow C$ ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ g เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง จงพิสูจน์ว่า $(g \circ f)^{-1}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 C ไปทั่วถึง A

4.3 ภาพและภาพผกผัน

ทฤษฎีบท 4.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ $S \subseteq A$ ถ้า

$$g(x) = f(x) \quad \text{ทุก } x \in S$$

แล้ว g เป็นฟังก์ชันจาก S ไป B

บทนิยาม 4.3.2 ฟังก์ชัน g จากทฤษฎีบท 4.3.1 เรียกว่า **ฟังก์ชันจำกัด** (restriction function) ของ f บน S เขียนแทนด้วย $f|_S$ และ f เรียกว่า **ฟังก์ชันภาคขยาย** (extension function) ของ $f|_S$ นั่นคือ

$$f|_S = \{(x, y) : (x, y) \in f \text{ และ } x \in S\}$$

$$f|_S \text{ เป็นฟังก์ชันจำกัดของ } f \text{ บน } S \quad \leftrightarrow \quad f|_S(x) = f(x) \quad \text{ทุก } x \in S$$

ตัวอย่าง 4.3.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันบนจำนวนจริง จงหา $f|_S$

1. $f(x) = 2x + 1$ และ $S = \{-1, 0, 1\}$

3. $f(x) = \sqrt{x^2}$ และ $S = \mathbb{R}^+$

2. $f(x) = x^2$ และ $S = \mathbb{N}$

4. $f(x) = \cos x$ และ $S = [0, \pi]$

ทฤษฎีบท 4.3.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ $S \subseteq A$ แล้ว

$$f|_S \cup f|_{A-S} = f$$

ทฤษฎีบท 4.3.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ $S \subseteq A$

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว $f|_S$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก S ไป B

บทนิยาม 4.3.6 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $U \subseteq A$ นิยาม **ภาพ (image)** ของ U ภายใต้ f เขียนแทนด้วย $f(U)$ กำหนดโดย

$$f(U) = \{y \in B : \exists x \in U \text{ และ } f(x) = y\}$$

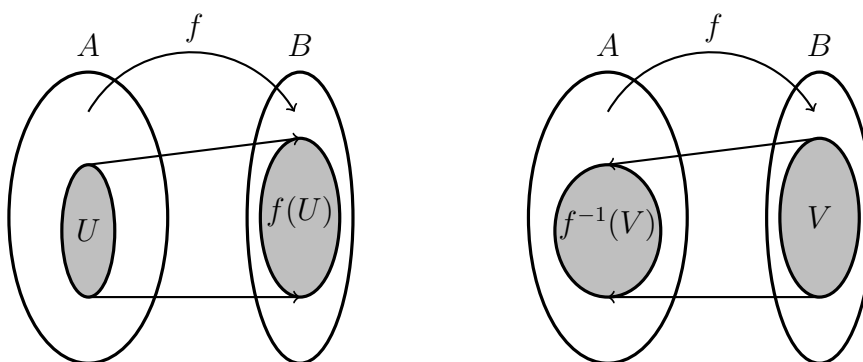
และ $V \subseteq B$ นิยาม **ภาพผกผัน (inverse image)** ของ V ภายใต้ f เขียนแทนด้วย $f^{-1}(V)$ กำหนดโดย

$$f^{-1}(V) = \{x \in A : f(x) \in V\}$$

จะได้ว่า

$$y \in f[U] \text{ ก็ต่อเมื่อ } \exists x \in U, y = f(x)$$

$$x \in f^{-1}[V] \text{ ก็ต่อเมื่อ } f(x) \in V$$



ตัวอย่าง 4.3.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันบน $\mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = 2x + 1$ จงหา $f(U)$ และ $f^{-1}(V)$

1. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

4. $V = (-6, \infty)$

2. $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

5. $U = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 1\}$

3. $U = [-3, 7]$

6. $V = \{x \in \mathbb{R} : 1 < |x| < 3\}$

ทฤษฎีบท 4.3.8 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $U \subseteq A$ และ $V \subseteq B$ แล้ว

1. $f(\emptyset) = \emptyset$ และ $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$
2. $f(U) \subseteq \text{Ran}(f)$ และ $f(A) = \text{Ran}(f)$
3. $f(U) \subseteq f(A) \subseteq B$
4. $f^{-1}(V) \subseteq \text{Dom}(f)$ และ $f^{-1}(B) = \text{Dom}(f)$

ทฤษฎีบท 4.3.9 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $X, Y \subseteq A$ และ $U, V \subseteq B$ แล้ว

1. ถ้า $X \subseteq Y$ แล้ว $f(X) \subseteq f(Y)$
2. ถ้า $X = Y$ แล้ว $f(X) = f(Y)$
3. ถ้า $U \subseteq V$ แล้ว $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$
4. ถ้า $U = V$ แล้ว $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$

ทฤษฎีบท 4.3.10 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $X, Y \subseteq A$ และ $U, V \subseteq B$ แล้ว

1. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
2. $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$
3. $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$
4. $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$

ทฤษฎีบท 4.3.11 ให้ $f : A \rightarrow B$

f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ก็ต่อเมื่อ $f(U \cap W) = f(U) \cap f(W)$ ทุก ๆ $U, W \subseteq A$

ทฤษฎีบท 4.3.12 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $V \subseteq B$ แล้ว $f^{-1}(B - V) = f^{-1}(B) - f^{-1}(V)$

ทฤษฎีบท 4.3.13 ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $U \subseteq A$ และ $V \subseteq B$ แล้ว

1. $U \subseteq f^{-1}(f(U))$
2. $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$

ทฤษฎีบท 4.3.14 ให้ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ $U \subseteq A$ แล้ว

$$f^{-1}(f(U)) = U$$

ทฤษฎีบท 4.3.15 ให้ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ $V \subseteq B$ แล้ว

$$f(f^{-1}(V)) = V$$

แบบฝึกหัด 4.3

1. ให้ $f(x) = x^2 + 1$ จงหา

1.1 $f(\{1, 2, 3\})$

1.3 $f^{-1}(\{-1, 0, 1, 2\})$

1.2 $f([-3, 3])$

1.4 $f^{-1}((-1, 5])$

2. ให้ $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } x > 1 \\ x + 1 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \end{cases}$ จงหา $f|_S$

2.1 $S = \{0, 1, 2\}$

2.2 $S = [-2, 5]$

2.3 $S = (7, \infty)$

2.4 $S = (-\infty, 2)$

3. ให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดย $f(x) = |x|$ จงหาภาพและภาพผกผันต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิสูจน์

3.1 $f([0, 1])$

3.3 $f^{-1}((-1, 1))$

3.2 $f((-1, 1))$

3.4 $f^{-1}([1, 3])$

4. ให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดย $f(x) = 1 - x^2$ จงหาภาพและภาพผกผันต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิสูจน์

4.1 $f([0, 2])$

4.3 $f^{-1}((-1, 2])$

4.2 $f([-2, 1])$

4.4 $f^{-1}((-2, 2))$

5. ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ และ $D \subseteq C$ จงแสดงว่า $(g \circ f)^{-1}(D) = f^{-1}(g^{-1}(D))$

6. ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $U \subseteq A$ และ $V \subseteq B$ จงพิสูจน์ว่า

$$f(U) \subseteq V \iff U \subseteq f^{-1}(V)$$

7. ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $U \subseteq A$ และ $V \subseteq B$ จงพิสูจน์ว่า

$$(f|_U)^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$$

8. ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $U, W \subseteq A$ จงพิสูจน์ว่า

8.1 f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ก็ต่อเมื่อ $f(A - U) \subseteq B - f(U)$

8.2 f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ $B - f(U) \subseteq f(A - U)$

8.3 f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ $B - f(U) = f(A - U)$

4.4 เซตดัชนี

พิจารณาตัวอย่าง $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ เมื่อ

$$A_1 = [0, 1]$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x > 1\}$$

$$A_2 = \{0.5, 1, 2\}$$

$$A_4 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 4\}$$

เรียก $\{1, 2, 3, 4\}$ ว่า **เซตดัชนี (index set)** หรือเขียนได้ว่า A_α เมื่อ $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ ของ

$$\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$$

ในกรณีที่ $\Lambda = \mathbb{N}$ เรียก $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$ ว่า **อันดับของเซต**

ตัวอย่าง 4.4.1 ให้เอกภาพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนนับ ให้ Λ เป็นเซตดัชนี และ

$$A_\alpha = \{1, 2, 3, \dots, \alpha\}$$

สำหรับแต่ละ $\alpha \in \Lambda$ จงหา A_α ทั้งหมด เมื่อ

$$1. \Lambda = \{1, 3, 5\}$$

$$2. \Lambda = \{1, 2, 3, 4\}$$

ตัวอย่าง 4.4.2 ให้เอกภาพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง ให้ Λ เป็นเซตดัชนี และ

$$A_x = (x - 1, x + 1)$$

สำหรับแต่ละ $x \in \Lambda$ จงหา A_α ทั้งหมด เมื่อ

$$1. \Lambda = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$3. \Lambda = \{0.5, 1.2, 4\}$$

$$2. \Lambda = \{-1, 0, 1\}$$

$$4. \Lambda = (1, 5)$$

บทนิยาม 4.4.3 ให้ Λ เป็นเซตตระกูล นิยามยูเนียนและอินเตอร์เซกชันใด ๆ ดังนี้

$$1. \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in \Lambda, x \in A_\alpha\}$$

$$2. \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in \Lambda, x \in A_\alpha\}$$

กรณี $\Lambda = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ เขียนเป็น $\bigcup_{i=1}^n A_i$ และ $\bigcap_{i=1}^n A_i$

และกรณี $\Lambda = \mathbb{N}$ เขียนเป็น $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ และ $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

ตัวอย่างเช่น $\bigcup_{i=1}^3 A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ และ $\bigcap_{i=1}^4 A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$

ตัวอย่าง 4.4.4 ให้เอกภาพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนนับ ให้ $A_i = \{1, 2, 3, \dots, i\}$ จงหา

$$1. \bigcup_{i=1}^{10} A_i \text{ และ } \bigcap_{i=1}^{10} A_i$$

$$2. \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ และ } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

ตัวอย่าง 4.4.5 จงหาเซตต่อไปนี้

$$1. \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ และ } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ เมื่อ } A_n = (n-1, n+1)$$

$$2. \bigcup_{x \in (0,1)} A_x \text{ และ } \bigcap_{x \in (0,1)} A_x \text{ เมื่อ } A_x = [1-x, 1+x]$$

ตัวอย่าง 4.4.6 กำหนดให้ $A_n = (1-n, 1+n)$ จงหาเซตต่อไปนี้

$$1. \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

$$2. \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

ตัวอย่าง 4.4.7 จงหา

$$1. \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$2. \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

ทฤษฎีบท 4.4.8 ให้ Λ เป็นเซตตรรกน และ A_α เป็นเซตซึ่ง $\alpha \in \Lambda$ แล้ว

$$1. \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha)^c$$

$$2. \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha)^c$$

ทฤษฎีบท 4.4.9 ให้ Λ เป็นเซตดัชนี และ A_α เป็นเซตซึ่ง $\alpha \in \Lambda$ และ B เป็นเซตใด ๆ

$$1. B \cap \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (B \cap A_\alpha)$$

$$3. B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (B \cup A_\alpha)$$

$$2. \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) \cap B = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha \cap B)$$

$$4. \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) \cup B = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha \cup B)$$

ทฤษฎีบท 4.4.10 ให้ Λ เป็นเซตดรรชนี และ A_α เป็นเซตซึ่ง $\alpha \in \Lambda$ และ B เป็นเซตใด ๆ

$$1. B \cup \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (B \cup A_\alpha)$$

$$3. B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (B \cap A_\alpha)$$

$$2. \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) \cup B = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha \cup B)$$

$$4. \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) \cap B = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha \cap B)$$

ทฤษฎีบท 4.4.11 ให้ I และ J เป็นเซตคอรрอนี และ A_i เป็นเซตซึ่ง $i \in I$ และ B_j เป็นเซตซึ่ง $j \in J$ เป็นเซตใด ๆ

$$1. \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j)$$

$$2. \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j)$$

พิจารณาเซต $\bar{A}$ ของฟังก์ชันทั้งหลายที่มีโดเมนคือเซตดรรชนี Λ และแต่ละ $\alpha \in \Lambda$ จะได้ $f(\alpha) \in A_\alpha$ หรือนั่นคือ

$$\bar{A} = \{f : f : \Lambda \rightarrow A_\alpha\}$$

หรือกล่าวได้ว่าจำนวนสมาชิกทั้งหลายใน $\bar{A}$ เป็นฟังก์ชันจาก Λ ไปยัง $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ ดังนั้น

$$\bar{A} = \left\{ f : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha : \forall \alpha \in \Lambda, f(\alpha) \in A_\alpha \right\}$$

ตัวอย่าง 4.4.12 พิจารณา $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ ให้ $A_\alpha = \{1, 2, \dots, \alpha\}$ และ $\alpha \in \Lambda$ จงหา $\bar{A}$ เมื่อ

1. $\Lambda = \{1\}$

2. $\Lambda = \{1, 2\}$

3. $\Lambda = \{1, 2, 3\}$

ทฤษฎีบท 4.4.13 ให้ $\Lambda = \{1, 2\}$ ฟังก์ชัน

$$g : \bar{A} \rightarrow A_1 \times A_2 \quad \text{นิยามโดย} \quad g(f) = (f(1), f(2))$$

เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

แบบฝึกหัด 4.4

1. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง จงหาเซตต่อไปนี้

$$1.1 \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

$$1.2 \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$1.3 \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right]$$

$$1.4 \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-1, \frac{1}{n}\right)$$

$$1.5 \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}, 1\right)$$

$$1.6 \bigcup_{x \in \mathbb{R}^+} (-x, x)$$

$$1.7 \bigcup_{x \in \mathbb{R}^+} (1 - x, 1 + x)$$

$$1.8 \bigcup_{y \in \mathbb{R}^+} \left(-\frac{y}{2}, \frac{y}{2}\right)$$

$$1.9 \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

$$1.10 \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$1.11 \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}, 1\right)$$

$$1.12 \bigcap_{x \in \mathbb{R}^+} (-x, x)$$

2. กำหนดให้ $\{A_i : i \in I\}$ และ $\{B_i : i \in I\}$ เป็นการรวมกันอยู่ของเซตในรูปตรรกนิและมีสมบัติ $A_i \subseteq B_i$ ทุก ๆ $i \in I$ จงพิสูจน์ว่า

$$2.1 \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$$

$$2.2 \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$$

3. กำหนดให้ $\{A_i : i \in I\}$ และ $\{B_j : j \in J\}$ เป็นการรวมกันอยู่ของเซตในรูปตรรกนิ
จงพิสูจน์ว่า

$$3.1 \bigcup_{i \in I} A_i - \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} (A_i - B_j) \right)$$

$$3.2 \bigcap_{i \in I} A_i - \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcap_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J} (A_i - B_j) \right)$$

$$3.3 \text{ ถ้าแต่ละ } i \in I \text{ มี } j \in J \text{ ซึ่ง } B_j \subseteq A_i \text{ แล้ว } \bigcap_{j \in J} B_j \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$$

บทที่ 5

การเรียงอันดับบางส่วน

5.1 เซตซึ่งเรียงอันดับบางส่วนได้

บทนิยาม 5.1.1 เรียกความสัมพันธ์ r บนเซต P ว่า การเรียงอันดับบางส่วน (partial ordering) ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติสะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด โดยทั่วไปนิยามเขียน $\preceq$ แทนอันดับที่ละส่วน และเรียกคู่อันดับ $(P, \preceq)$ ว่าเซตซึ่งเรียงอันดับบางส่วนได้ (partially ordered set) หรือโพเซต (poset)

สำหรับโพเซต $(P, \preceq)$ นิยามความสัมพันธ์ $\prec$ บน P โดยสำหรับ $a, b \in P$

$$a \prec b \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a \preceq b \quad \text{และ} \quad a \neq b$$

ตัวอย่าง 5.1.2 กำหนดให้ $P = \{1, 2, 3\}$ จงพิจารณาว่าข้อใดเป็นการเรียงอันดับบางส่วนบน P

1. ความสัมพันธ์เอกลักษณ์
2. ความสัมพันธ์เซตว่าง
3. ความสัมพันธ์ "น้อยกว่า"
4. ความสัมพันธ์ "น้อยกว่าหรือเท่ากับ"
5. ความสัมพันธ์ "หารลงตัว"

ตัวอย่างโพเซตอื่นๆ เช่น $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$ และ $(P(A), \subseteq)$ เมื่อ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง

ในกรณีที่เซต P เป็นเซตจำกัดที่ไม่เซตว่าง นิยมแทน $(P, \preceq)$ ด้วยแผนภาพแฮสเซ (Hasse diagram) ซึ่งประกอบไปด้วยจุดหรือวงกลมเล็กๆ แทนสมาชิกใน P และส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด a และจุด b เมื่อ $a \prec b$ และไม่มี $c \in P$ ซึ่ง $a \prec c \prec b$ โดยจุด b จะถูกเขียนไว้เหนือจุด a ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. $(\mathbb{N}, \leq)$

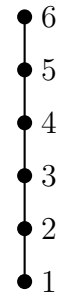
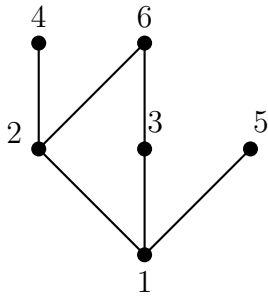
2. $(\mathbb{Z}, \leq)$

3. $(\mathbb{R}, \leq)$

ตัวอย่าง 5.1.3 ให้ $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ จงเขียนแผนภาพแฮสเชของโพเซตต่อไปนี้

1. $(P, |)$

2. $(P, \leq)$



ตัวอย่าง 5.1.4 จงเขียนแผนภาพแฮสเชของโพเซต $(P, |)$ เมื่อกำหนดให้

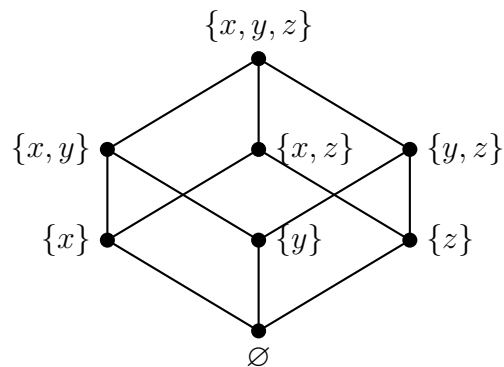
1. $P = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

3. $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

2. $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

4. $P = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$

ตัวอย่าง 5.1.5 จงเขียนแผนภาพแฮชเชอของโพเซต $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ เมื่อ $A = \{x, y, z\}$



ตัวอย่าง 5.1.6 จงเขียนแผนภาพแฮชเชอของโพเซต $(P, \subseteq)$ เมื่อกำหนดให้

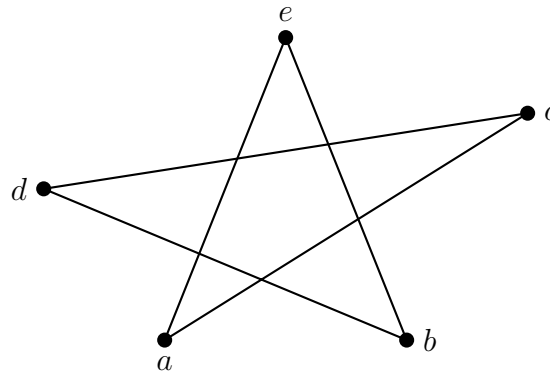
1. $P = \mathcal{P}(\{1, 2\})$

2. $P = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$

3. $P = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$

4. $P = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$

ตัวอย่าง 5.1.7 จากแผนภาพแฮชเชอของโพเซต จงหาโพเซตและอันดับบางส่วน



บทนิยาม 5.1.8 ให้ $(P, \preceq)$ เป็นโพเซต m และ n เป็นสมาชิกใน P จะกล่าวว่า

1. m เป็นสมาชิกตัวใหญ่เฉพาะกลุ่ม (maximal element) ของ P
 ก็ต่อเมื่อ ไม่มี $x \in P$ ซึ่ง $m < x$ นั่นคือ $\forall x \in P, m \preceq x \rightarrow m = x$
 M เป็นสมาชิกตัวใหญ่สุด (the greatest element) ก็ต่อเมื่อ $x \preceq M$ ทุก ๆ $x \in P$
2. n เป็นสมาชิกตัวเล็กเฉพาะกลุ่ม (minimal element) ของ P
 ก็ต่อเมื่อ ไม่มี $x \in P$ ซึ่ง $x < n$ นั่นคือ $\forall x \in P, x \preceq n \rightarrow n = x$
 N เป็นสมาชิกตัวเล็กสุด (the least element) ก็ต่อเมื่อ $N \preceq x$ ทุก ๆ $x \in P$

ตัวอย่าง 5.1.9 จงหา สมาชิกตัวใหญ่สุด สมาชิกใหญ่เฉพาะกลุ่ม สมาชิกตัวเล็กสุด และสมาชิกเล็กเฉพาะกลุ่ม ของโพเซต $(P, |)$ เมื่อ

1. $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. $P = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

2. $P = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$
4. $P = \{2, 3, \dots, 20\}$

ตัวอย่าง 5.1.10 จงหา สมาชิกตัวใหญ่สุด สมาชิกใหญ่เฉพาะกลุ่ม สมาชิกตัวเล็กสุด และสมาชิกเล็กเฉพาะกลุ่ม ของโพเซต $(P, \subseteq)$ เมื่อ

1. $P = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}\}$

2. $P = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$

3. $P = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

4. $P = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

ตัวอย่าง 5.1.11 จงหา สมาชิกตัวใหญ่สุด สมาชิกใหญ่เฉพาะกลุ่ม สมาชิกตัวเล็กสุด และสมาชิกเล็กเฉพาะกลุ่ม ของโพเซตต่อไปนี้

1. $(\mathbb{N}, \leq)$
2. $(\mathbb{Z}, \leq)$
3. $(\mathbb{R}, \leq)$
4. $(\mathbb{N}, |)$

ทฤษฎีบท 5.1.12 ถ้าโพเซตมีสมาชิกตัวใหญ่สุดจะได้มีได้เพียงตัวเดียว และถ้าโพเซตมีสมาชิกตัวเล็กสุดจะได้มีได้เพียงตัวเดียว

ทฤษฎีบท 5.1.13 กำหนดให้ $(P, \preceq)$ เป็นโพเซต จะได้ว่า

1. ถ้า $(P, \preceq)$ มีสมาชิกตัวใหญ่สุดเป็น M แล้ว M จะเป็นสมาชิกใหญ่เฉพาะกลุ่ม
2. ถ้า $(P, \preceq)$ มีสมาชิกตัวเล็กสุดเป็น N แล้ว N จะเป็นสมาชิกเล็กเฉพาะกลุ่ม

บทนิยาม 5.1.14 ให้ $(P, \preceq)$ เป็นโพเซต และ $B \subseteq P$

1. เรียกสมาชิก $a \in P$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข $a \preceq x$ ทุก ๆ $x \in B$ ว่า **ขอบเขตล่าง (lower bound)** ของ B และให้ $L(B)$ แทนเซตของขอบเขตล่างทั้งหมดของ B นั่นคือ

$$L(B) = \{a \in P : a \preceq x \text{ ทุก ๆ } x \in B\}$$

2. เรียกสมาชิก $b \in P$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข $x \preceq b$ ทุก ๆ $x \in B$ ว่า **ขอบเขตบน (upper bound)** ของ B และให้ $U(B)$ แทนเซตของขอบเขตบนทั้งหมดของ B นั่นคือ

$$U(B) = \{b \in P : x \preceq b \text{ ทุก ๆ } x \in B\}$$

ตัวอย่าง 5.1.15 พิจารณา $(\mathbb{N}, |)$ จงหา $L(B)$ และ $U(B)$ เมื่อกำหนดให้

1. $B = \{1, 2\}$

4. $B = \{3, 9, 12, 18\}$

2. $B = \{2, 3, 6, 12\}$

5. $B = \{30, 45, 75\}$

3. $B = \{3, 5, 9, 15\}$

6. $B = \{50, 125, 325\}$

ตัวอย่าง 5.1.16 พิจารณา $(\mathbb{R}, \leq)$ จงหา $L(B)$ และ $U(B)$ เมื่อกำหนดให้

1. $B = (0, 1)$

3. $B = [-2, 5] \cup (6, 9)$

2. $B = [0, 1]$

4. $B = \{1, 2, 3\}$

ตัวอย่าง 5.1.17 พิจารณา $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ โดยที่ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ จงหา $L(B)$ และ $U(B)$ เมื่อ

1. $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

3. $B = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

2. $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$

4. $B = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

ทฤษฎีบท 5.1.18 ให้ $(P, \preceq)$ เป็นโพเซต และ $\emptyset \neq B \subseteq P$ ถ้า $\preceq_B$ เป็นความสัมพันธ์บน B ซึ่งสอดคล้อง

$$\forall x, y \in B, x \preceq_B y \leftrightarrow x \preceq y$$

แล้ว $(B, \preceq_B)$ เป็นโพเซต เรียกว่า **สับโพเซต (subposet)** ของ $(P, \preceq)$ เขียนแทนด้วย $(B, \preceq)$

บทนิยาม 5.1.19 ให้ $(P, \preceq)$ เป็นโพเซต และ $\emptyset \neq B \subseteq P$ ถ้า $L(B)$ และ $U(B)$ ไม่ใช่เซตว่าง

1. ถ้า a เป็นสมาชิกตัวใหญ่สุดของ $(L(B), \preceq)$ เรียก a ว่า **ขอบเขตล่างมากที่สุด (greatest lower bound หรือ infimum)** ของ B เขียนแทนด้วย $\inf B$
2. ถ้า b เป็นสมาชิกตัวเล็กสุดของ $(U(B), \preceq)$ เรียก b ว่า **ขอบเขตบนน้อยสุด (least upper bound หรือ supremum)** ของ B เขียนแทนด้วย $\sup B$

ตัวอย่าง 5.1.20 จงหา $\inf B$ และ $\sup B$ ของตัวอย่าง 5.1.15–5.1.17

ทฤษฎีบท 5.1.21 ให้ $(P, \preceq)$ เป็นโพเซต และ $B \subseteq P$ ถ้า B มีขอบเขตล่างมากที่สุด แล้วมีขอบเขตล่างมากที่สุดเพียงตัวเดียว และถ้า B มีขอบเขตบนน้อยสุด แล้วมีขอบเขตบนน้อยสุดเพียงตัวเดียว

บทนิยาม 5.1.22 ให้ $(P, \preceq)$ เป็นโพเซต และ $\emptyset \neq B \subseteq P$ ถ้า $\preceq$ มีสมบัติเปรียบเทียบได้ (comparable) บน B จะเรียก $(B, \preceq)$ เป็น **เซตอันดับแบบเชิงเส้น** (linearly ordered set) หรือ **เซตที่เป็นอันดับโดยสิ้นเชิง** (totally ordered set) หรือ **โซ่** (chain) หรือ **สับเซตเชิงเส้น** (linear subset)

ตัวอย่าง 5.1.23 จงตรวจสอบว่าโพเซตต่อไปนี้ โซ่

1. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ เมื่อ $A = \{1, 2\}$

4. $(A, |)$ เมื่อ $A = \{1, 2, 4, 8\}$

2. $(C, \subseteq)$ เมื่อ $C = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

5. $(\mathbb{N}, |)$

3. $(A, |)$ เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 6\}$

6. $(\mathbb{N}, \leq)$ และ $(\mathbb{R}, \leq)$

บทนิยาม 5.1.24 จะกล่าวว่าความสัมพันธ์ r บนเซต A สอดคล้อง กฎไตรวิภาค (trichotomy law) ถ้าทุก ๆ $x, y \in A$ เป็นจริงเพียงอย่างเดียวนใน 3 ข้อต่อไปนี้

1. $x r y$

2. $x = y$

3. $y r x$

ทฤษฎีบท 5.1.25 ให้ $(P, \preceq)$ เป็นโพเซต จะได้ว่า

$$(P, \preceq) \text{ เป็นโซ่ ก็ต่อเมื่อ } \preceq \text{ สอดคล้องไตรวิภาค}$$

แบบฝึกหัด 5.1

- กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์บน A ต่อไปนี้มีข้อใดเป็นโพเซต
 - $r = \{(a, b), (b, a)\}$
 - $r = \{(c, d), (c, c)\}$
 - $r = \{(a, a), (b, b)\}$
 - $r = \{(d, c)\}$
- จงเขียนแผนภาพแฮชเชของโพเซต $(P, |)$ พร้อมทั้งหา สมาชิกตัวใหญ่สุด สมาชิกใหญ่เฉพาะกลุ่ม สมาชิกตัวเล็กสุด และสมาชิกเล็กเฉพาะกลุ่ม ของโพเซตเหล่านั้น
 - $P = \{1, 2, 4, 8\}$
 - $P = \{2, 8, 12, 15\}$
 - $P = \{3, 6, 9, 12, 15\}$
 - $P = \{2, 4, 8, 24, 60\}$
 - $P = \{3, 5, 6, 15, 18, 48\}$
 - $P = \{2, 3, 4, \dots, 30\}$
- จงเขียนแผนภาพแฮชเชของโพเซต $(P, \subseteq)$ พร้อมทั้งหา สมาชิกตัวใหญ่สุด สมาชิกใหญ่เฉพาะกลุ่ม สมาชิกตัวเล็กสุด และสมาชิกเล็กเฉพาะกลุ่ม ของโพเซตเหล่านั้น
 - $P = \{\emptyset, \{2\}, \{2, 3\}\}$
 - $P = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{2\}\}$
 - $P = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$
 - $P = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$
- พิจารณา $(\mathbb{N}, |)$ จงหา $L(B)$, $U(B)$, $\inf B$ และ $\sup B$ (ถ้ามี)
 - $B = \{4, 5, 10\}$
 - $B = \{6, 8, 12, 18\}$
 - $B = \{5, 10, 25, 45, 50\}$
 - $B = \{100, 150, 450\}$
- พิจารณา $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ จงหา $L(B)$, $U(B)$, $\inf B$ และ $\sup B$ (ถ้ามี)
 - $B = \{\emptyset\}$
 - $B = \{\{1\}, \{3\}\}$
 - $B = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}\}$
 - $B = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$
- พิจารณา $(\mathbb{R}, \leq)$ จงหา $L(B)$, $U(B)$, $\inf B$ และ $\sup B$ (ถ้ามี)
 - $B = (-1, 3)$
 - $B = (-3, 0]$
 - $B = (1, 2) \cup (3, 4)$
 - $B = (1, 3) \cup \{5\}$
 - $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$
 - $B = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$
- จงตรวจสอบว่าโพเซตใดต่อไปนี้เป็นโซ่
 - $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ เมื่อ $A = \{\emptyset\}$
 - $(C, \subseteq)$ เมื่อ $C = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 3\}\}$
 - $(E, |)$ เมื่อ $E =$ เซตของจำนวนคู่บวก
 - $(A, |)$ เมื่อ $A = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$
- ให้ A และ B เป็นสับเซตโพเซตของ $(\mathbb{R}, \leq)$ ซึ่งมีขอบเขตบนน้อยสุดและขอบเขตล่างมากที่สุด ถ้า $A \subseteq B$ จงพิสูจน์ $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$
- ใน $(\mathbb{R}, \leq)$ กำหนดให้ $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : x < \alpha\}$ เมื่อ $\alpha \in \mathbb{R}$ จงแสดงว่า $\sup(A_\alpha) = \alpha$

5.2 เซตที่เป็นอันดับดีแล้ว

บทนิยาม 5.2.1 เรียกโพเซต $(P, \preceq)$ ว่า **เซตที่เป็นอันดับดีแล้ว** (well-ordering set) ก็ต่อเมื่อทุกสับโพเซตที่ไม่ใช่เซตว่างมีสมาชิกตัวเล็กสุด

ตัวอย่าง 5.2.2 จงตรวจสอบโพเซตต่อไปนี้ว่าเป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้วหรือไม่

- | | |
|----------------------------------|-------------------------|
| 1. $(\{1, 2, 3\}, \leq)$ | 3. $(\mathbb{N}, \leq)$ |
| 2. $(\{-3, -1, 1, 5, 9\}, \leq)$ | 4. $(\mathbb{R}, \leq)$ |

ตัวอย่าง 5.2.3 จงตรวจสอบโพเซตต่อไปนี้ว่าเป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้วหรือไม่

- | | |
|--------------------------|------------------------|
| 1. $(\{1, 2, 3\},)$ | 3. $(\{3, 9, 27\},)$ |
| 2. $(\{1, 2, 4, 8\},)$ | 4. $(\mathbb{N},)$ |

ตัวอย่าง 5.2.4 จงตรวจสอบโพเซต $(P, \subseteq)$ ว่าเป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้วหรือไม่

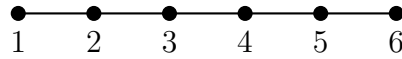
- | | |
|---|--|
| 1. $P = \{\emptyset\}$ | 3. $P = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ |
| 2. $P = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$ | 4. $P = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$ |

บทนิยาม 5.2.5 ให้ $(P, \preceq)$ เป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้ว และ $a, b \in P$ ถ้า

$$a \preceq b \quad \text{และ} \quad a \neq b$$

เรียก b ว่า**ตัวตามหลัง** (successor) ของ a หรือเรียก a ว่า**ตัวนำหน้า** (predecessor) ของ b

ตัวอย่างเช่น $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \leq)$ แสดงดังแผนภาพ



สรุปได้ดังตาราง

สมาชิก	ตัวนำหน้า	ตัวตามหลัง	ตัวนำหน้าตัวสุดท้าย	ตัวตามหลังตัวแรก
1	ไม่มี	2, 3, 4, 5, 6	ไม่มี	2
2	1	3, 4, 5, 6	1	3
3	1, 2	4, 5	2	4
4	1, 2, 3	5, 6	3	5
5	1, 2, 3, 4	6	4	6
6	1, 2, 3, 4, 5	ไม่มี	5	ไม่มี

ตัวอย่าง 5.2.6 พิจารณาเซตที่เป็นอันดับดีแล้ว $(\{1, 2, 4, 8, 16\}, |)$ จงเติมตารางต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

สมาชิก	ตัวนำหน้า	ตัวตามหลัง	ตัวนำหน้าตัวสุดท้าย	ตัวตามหลังตัวแรก
1				
2				
4				
8				
16				

ตัวอย่าง 5.2.7 พิจารณาเซตที่เป็นอันดับดีแล้ว $(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \subseteq)$ จงเติมตารางต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

สมาชิก	ตัวนำหน้า	ตัวตามหลัง	ตัวนำหน้าตัวสุดท้าย	ตัวตามหลังตัวแรก
$\emptyset$				
$\{1\}$				
$\{2\}$				
$\{1, 2\}$				

กำหนดให้ ω แทนเซตของจำนวนธรรมชาติ หมายถึง

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

ให้ $(P, \preceq)$ เป็นโพเซต จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. ให้ $P = \omega$ และนิยาม

$$\begin{aligned} x \preceq y \text{ ก็ต่อเมื่อ } & (x \text{ เป็นจำนวนคู่} \wedge y \text{ เป็นจำนวนคี่}) \\ & \vee (x \text{ เป็นจำนวนคี่} \wedge y \text{ เป็นจำนวนคู่} \wedge x < y) \\ & \vee (x \text{ เป็นจำนวนคี่} \wedge y \text{ เป็นจำนวนคี่} \wedge x < y) \end{aligned}$$

จงวาดแผนภาพแฮชเชอของ $(P, \preceq)$ และพิจารณาตัวนำหน้าตัวสุดท้าย และตัวตามหลังตัวแรก ของ 0 และ 1

2. ให้ $P = \omega \cup \{\omega\}$ และนิยาม

$$x \preceq y \text{ ก็ต่อเมื่อ } (x \in \omega \wedge y \in \omega \wedge x < y) \vee (x \in \omega \wedge y = \omega)$$

จงวาดแผนภาพแฮชเชอของ $(P, \preceq)$ และพิจารณาตัวนำหน้าตัวสุดท้าย และตัวตามหลังตัวแรก ของ 0 และ ω

ทฤษฎีบท 5.2.8 หลักการอุปนัยเชิงอนันต์ (Principle of Transfinite induction)

กำหนดให้ $(W, \preceq)$ เป็นเซตที่อันดับดีแล้ว และ $P(x)$ แทนข้อความซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จสำหรับแต่ละสมาชิก $x \in W$ ถ้าข้อความ

ถ้า $P(y)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ตัวนำหน้า y ของ x แล้ว $P(x)$ เป็นจริง

เป็นจริง แล้ว $P(x)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ $x \in W$

ประยุกต์หลักการอุปนัยเชิงอนันต์กับเซตที่เป็นอันดับดีแล้วของจำนวนธรรมชาติ $(\omega, \leq)$ จะได้ข้อความต่อไปนี้

$$[\forall n \in \omega, [\forall y \in \omega, y < n \rightarrow P(y) \text{ เป็นจริง}] \rightarrow P(n) \text{ เป็นจริง}] \rightarrow \forall n \in \omega, P(n) \text{ เป็นจริง} \dots \quad (\text{ก})$$

ทฤษฎีบท 5.2.9 ข้อความ (ก) สมมูลกับข้อความต่อไปนี้

$$[(P(0) \text{ เป็นจริง}) \wedge \forall n \in \omega, [P(n) \text{ เป็นจริง} \rightarrow P(n+1) \text{ เป็นจริง}] \rightarrow \forall n \in \omega, P(n) \text{ เป็นจริง}]$$

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงตรวจสอบโพเซตต่อไปนี้ว่าเป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้วหรือไม่

$$1.1 \ (\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}, \leq)$$

$$1.5 \ (\{1, 3, 6, 12, 24\}, |)$$

$$1.2 \ (\{\dots, -5, -4, -3, -1, 0\}, \leq)$$

$$1.6 \ (\{-1, 2, 4, 6, 12\}, |)$$

$$1.3 \ (\{-x : x \in \mathbb{N}\}, \leq)$$

$$1.7 \ (\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}\}, \subseteq)$$

$$1.4 \ (\mathbb{Q}, \leq)$$

$$1.8 \ (\{\emptyset, \{1, \emptyset\}, \{1\}\}, \subseteq)$$

2. โพเซต $(P, |)$ เป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้วหรือไม่

$$2.1 \ P = \{2^{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$2.3 \ P = \{3^n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$2.2 \ P = \{2^n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$$

$$2.4 \ P = \{n^3 : n \in \mathbb{N}\}$$

3. พิจารณาโพเซต $(\omega, \preceq)$ เมื่อนิยาม

$$m \preceq n \text{ ก็ต่อเมื่อ } \exists c \in \omega, n = cm$$

ว่าเป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้วหรือไม่

4. ให้ $P = \omega^+ \cup \{\omega^+\}$ เมื่อ $\omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$ และนิยาม $x \preceq y$ ก็ต่อเมื่อ

$$(x \in \omega \wedge y \in \omega \wedge x < y) \vee (x \in \omega \wedge y = \omega) \vee (x \in \omega \wedge y = \omega^+) \vee (x = \omega \wedge y = \omega^+)$$

จงวาดแผนภาพแฮชเชอของ $(P, \preceq)$ และพิจารณาตัวนำหน้าตัวสุดท้าย และตัวตามหลังตัวแรก ของ $0, \omega$ และ ω^+

5. ให้ (A, r) และ (B, s) เป็นโพเซต ถ้า $(A \times B, t)$ สอดคล้องเงื่อนไข

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in t \quad \leftrightarrow \quad [(x_1, y_1) \in s \vee (y_1 = y_2 \wedge (x_1, x_2) \in r)]$$

จงแสดงว่า $(A \times B, t)$ เป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้ว

6. ให้ $(Y, \preceq_Y)$ เป็นโพเซต และกำหนดให้ $f : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ถ้านิยาม

$$x \preceq_X y \text{ ก็ต่อเมื่อ } f(x) \preceq_Y f(y)$$

จงแสดงว่าถ้า $\preceq_Y$ เป็นอันดับดีแล้วบน Y แล้ว $\preceq_X$ จะเป็นอันดับดีแล้วบน X

5.3 สัจพจน์ของการเลือก

ในกรณีที่ $A \neq \emptyset$ เราสามารถเลือกสมาชิกตัวหนึ่งจากเซต A ได้เสมอ แต่เมื่อเราหยิบสมาชิกจาก A มากกว่าหนึ่งครั้งโดยเฉพาะกรณีหยิบเป็นจำนวนอนันต์ครั้ง เมื่อ A เป็นเซตอนันต์ ในประสบการณ์ของมนุษย์ยังไม่อาจยอมรับว่าทำได้หรือไม่ แม้ว่าเราจะหยิบได้ครั้งแล้วครั้งเล่าอย่างไม่รู้จบก็ตาม

ในกรณีที่ A เป็นเซตอนันต์ที่เป็นอันดับดีแล้ว ทุกสับเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง เราเลือกสมาชิกตัวเล็กสุดได้เสมอ และสับเซตมิได้เป็นจำนวนอนันต์เซตในกรณีนี้ทำให้เชื่อมั่นได้ว่าจะสามารถทำได้

กำหนดให้ $A \neq \emptyset$ เป็นโพเซต ถ้า A ไม่มีสมาชิกตัวใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มแล้วจะได้ว่ามีอันดับแบบอนันต์ที่เพิ่มขึ้น

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

ของสมาชิกใน A พิสูจน์ได้คือ เนื่องจาก A ไม่ใช่เซตว่างจึงสามารถเลือกสมาชิกมาหนึ่งตัว เรียกว่า x_1 ต่อไปสมมติโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่ามีอันดับสมาชิกใน A ดังนี้

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

และนิยามเซต

$$A_n = \{x \in A : x > x_n\}$$

เห็นได้ชัดว่า $A_n \neq \emptyset$ และไม่มีสมาชิกตัวใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม เราจึงเลือกหยิบสมาชิกใน A_n มาได้อย่างน้อยหนึ่งตัว เรียกว่า x_{n+1} ซึ่ง

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สามารถนิยามเซตได้ดังนี้

$$S_n = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$

ทำให้ได้ว่า

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

แล้ว S เป็นเซตของสมาชิกที่เป็นอันดับอนันต์แบบเพิ่มขึ้นตามต้องการ

วิธีการเลือกที่ผ่านมามีได้รับการยอมรับ แต่เป็นการเลือกที่ไม่แจ่มชัด ในปี 1904 แซร์มิโลได้ให้ความสำคัญกับการเลือกดังกล่าวจึงได้กำหนดเป็นหนึ่งในสัจพจน์ในทฤษฎีเซต ซึ่งเรียกว่า **สัจพจน์ของการเลือก (Axiom of choice)**

บทนิยาม 5.3.1 กำหนดให้ A เป็นเซต เรียกฟังก์ชัน

$$F : \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\} \rightarrow A$$

ว่า **ฟังก์ชันเลือก (Choice function)** ถ้าสำหรับแต่ละ $B \in \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$ จะได้ว่า $F(B) \in B$ และเรียก $F(B)$ ว่า **ตัวแทน (representative)** ของ B

ตัวอย่าง 5.3.2 จงหาฟังก์ชันการเลือกทั้งหมดของเซตต่อไปนี้

1. $A = \{1\}$

2. $A = \{1, 2\}$

3. $A = \{1, 2, 3\}$

สัจพจน์ 5.3.3 สัจพจน์ของการเลือก (Axiom of Choice)

มีฟังก์ชันเลือกสำหรับทุกเซต

ทฤษฎีบท 5.3.4 สัจพจน์ของการเลือกสมมูลกับข้อความต่อไปนี้

ถ้า A เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่ต่างกันที่ไม่ใช่เซตว่าง และเป็นเซตต่างสมาชิกกัน แล้วจะได้ว่ามีเซต C ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกตัวหนึ่งและตัวเดียวเท่านั้นจากแต่ละเซตใน A โดยเรียกเซต C นี้ว่า **เซตของการเลือก (choice set)**

ทฤษฎีบทที่มีชื่อเสียงเกี่ยวกับการเลือกคือ

1. ทฤษฎีบทการเรียงเป็นอันดับอย่างดี (Well Ordering Theorem) ที่กล่าวไว้ว่า
มีความสัมพันธ์การเป็นอันดับดีแล้วสำหรับเซตทุกเซต
2. บทตั้งของซอร์น (Zorn's Lemma) ที่กล่าวไว้ว่า
ถ้าแต่ละสับเซตเชิงเส้นของเซตของโพเซต P มีขอบเขตบนใน P แล้ว P จะมีสมาชิกตัว
ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม

สุดท้ายเราพิสูจน์ได้ว่า ทฤษฎีบททั้ง 2 สมมูลกับสัจพจน์ของการเลือก หรือกล่าวได้อีกนัยได้ว่า
ทั้ง 3 สิ่งที่ได้มีความเดียวกันในทางทฤษฎีเซต

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงหาฟังก์ชันการเลือกทั้งหมดของเซตต่อไปนี้

1.1 $A = \{a, b, c\}$

1.2 $A = \{1, 2, 3, 4\}$
2. เซตว่างมีฟังก์ชันเลือกหรือไม่ ถ้ามีคือฟังก์ชันใด
3. ให้ A มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัว จงแสดงว่ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง $f : A \rightarrow A$ ซึ่ง
 $f(x) \neq x$ สำหรับแต่ละ $x \in A$
4. กำหนดให้ $\mathbb{A}$ เป็นเซตที่ไม่ว่าง แต่ละคู่สมาชิกของ $\mathbb{A}$ เป็นเซตต่างสมาชิก จงแสดงว่ามี
ฟังก์ชัน f ซึ่ง $\text{Dom}(f) = \mathbb{A}$ และแต่ละ $A \in \mathbb{A}$ จะได้ว่า $f(A) \in A$
5. จงแสดงว่าบทตั้งของซอร์นสมมูลกับข้อความ

ถ้า A เป็นเซตอุปนัย และ $a \in A$ แล้ว A จะประกอบไปด้วยสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม
ที่มากกว่าหรือเท่ากับ a

บทที่ 6

จำนวนธรรมชาติ

จำนวนคืออะไร ไม่เคยมีใครเห็นจำนวนมาก่อนสิ่งที่รู้จักเช่น 2 และ 3 เป็นสัญลักษณ์ที่มนุษย์กำหนดขึ้นเพื่อใช้แทนจำนวนเท่านั้น เป็นเพียงสิ่งที่เราจินตนาการขึ้นมา เพื่อให้เราเข้าใจตรงกันเมื่อนึกถึงสิ่งเหล่านั้น

มนุษย์รู้จักการนับหรือใช้ระบบจำนวนมานานแล้ว และวิชาการต่าง ๆ ก็ถูกพัฒนาในทุกวันบนรากฐานของจำนวนทั้งสิ้น (ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ : 2536)

6.1 สัจพจน์เปอาโน

เราเริ่มต้นมองหาเซตที่เหมาะสมเพื่อนิยาม **จำนวนธรรมชาติ** คำว่า **เซตที่เหมาะสม** หมายถึงเซตที่สามารถเป็น **จำนวน** ได้อย่างสมบูรณ์ ในปี 1908 เซอร์มิโล ได้เสนอเซต

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots$$

แทนจำนวนธรรมชาติ $0, 1, 2, 3, \dots$ ตามลำดับ แต่น้อยม่นได้เสนอกลุ่มเซตอีกลักษณะหนึ่ง ที่มีสมบัติพิเศษสามารถประยุกต์ในการพัฒนาระบบจำนวนได้ทุกรูปแบบ จนกลายเป็นมาตรฐานของการแสดงสัญลักษณ์ของจำนวนธรรมชาติ โดยเริ่มต้นจากเซตที่ไม่มีอะไรเลยคือ $\emptyset$ เป็นที่ยอมรับกันว่าสัญลักษณ์ 0 และเซต $\{\emptyset\}$ แทนนามธรรมของการมีอยู่หนึ่ง ด้วยแนวคิดในทำนองเดียวกันจึงนิยามเซตแทนจำนวนธรรมชาติจำนวนแรกได้ดังนี้

$$0 := \emptyset$$

$$1 := \{\emptyset\}$$

$$2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

จากการนิยามจะได้สมบัติดังนี้

$$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \dots$$

และ

$$0 \subseteq 1 \subseteq 2 \subseteq 3 \subseteq \dots$$

เมื่อพิจารณานิยามของจำนวนธรรมชาติ

$$0 := \emptyset$$

$$1 := \{\emptyset\} = \emptyset^+ = 0^+$$

$$2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \emptyset^{++} = 1^+$$

$$3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \emptyset^{+++} = 2^+$$

ซึ่งสอดคล้องกับความหมายเชิงนามธรรมของจำนวนธรรมชาติแต่ละจำนวน

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

เป็นตัวแทนของกันและกันสืบเนื่องกันไปโดยมีต้นกำเนิดจาก 0 เมื่อพิจารณาบทนิยามของตัวตามหลัง และสัจพจน์ของเซตอุปนัย จะเห็นได้ว่าจำนวนธรรมชาติแต่ละจำนวนเป็นสมาชิกของเซตอุปนัยทุก ๆ เซต

บทนิยาม 6.1.1 เรียกเซตอันดับที่เล็กที่สุดในทฤษฎีบท 2.5.6 ว่า **เซตของจำนวนธรรมชาติ** (The set of natural numbers) เขียนแทนด้วย ω

จากบทนิยามจะได้ว่า

$$x \in \omega \quad \leftrightarrow \quad x \text{ เป็นจำนวนธรรมชาติ}$$

$$\leftrightarrow \quad x \text{ เป็นสมาชิกของเซตอุปนัยทุก ๆ เซต}$$

และทำให้สรุปได้ว่า ω เป็นเซตอุปนัยที่เล็กที่สุด (เห็นได้ชัดจากพิสูจน์ในทฤษฎีบท 2.5.6) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งเรียกว่า **หลักอุปนัย** ของ ω กล่าวคือ

เซตอุปนัยที่เป็นสับเซตของ ω จะมีเพียง ω เท่านั้น

โดยการนำไปใช้พิสูจน์โดยการเขียนเซต

$$S = \{n \in \omega : P(n)\}$$

ถ้าพิสูจน์ได้ว่า T เป็นเซตอุปนัยแล้วเราจะสรุปจากหลักอุปนัยของ ω ได้ว่า S คือ ω หลักการนี้เรียกว่า **การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์** (Mathematical induction)

มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านพยายามสร้างระบบสัจพจน์ของระบบจำนวนขึ้น โดยกำหนดสัจพจน์ด้วยสมบัติเบื้องต้นของจำนวนธรรมชาติ ระบบสัจพจน์ที่มีชื่อเสียงและเป็นที่ยอมรับคือ **สัจพจน์เปอาโน** (Peano's postulates) ซึ่งกำหนดโดยนักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลีที่ชื่อว่า จูเซปเป เปอาโน (Giuseppe Peano: 1858–1932) กล่าวถึงสิ่งที่กำหนดการมีจริงของจำนวนธรรมชาติ (natural number) ไว้ 5 ข้อดังนี้

(P1) มีจำนวนธรรมชาติที่เรียกว่า **ศูนย์ (zero)** เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

$$0 \in \omega$$

(P2) จำนวนธรรมชาติทุกจำนวนต้องมี **ตัวตามหลัง (successor)** ที่เป็นจำนวนธรรมชาติเพียงตัวเดียวเท่านั้น

$$\forall n \in \omega, n^+ \in \omega$$

(P3) ศูนย์ไม่เป็นตัวตามหลังของจำนวนธรรมชาติใด

$$\forall n \in \omega, n^+ \neq 0$$

(P4) ถ้าจำนวนธรรมชาติสองจำนวนมีตัวตามหลังตัวเดียวกัน แล้วจำนวนธรรมชาติทั้งสองย่อมเป็นจำนวนเดียวกัน

$$\forall n, m \in \omega, n^+ = m^+ \rightarrow n = m$$

(P5) ถ้าเซต S เป็นสับเซตของจำนวนธรรมชาติที่สอดคล้อง 2 เงื่อนไขต่อไปนี้

(1) 0 เป็นสมาชิกของ S

(2) ถ้า n เป็นสมาชิกของ S แล้วตัวตามหลังของ n เป็นสมาชิกของ S

เราจะได้ว่าเซต S เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติทั้งหมด

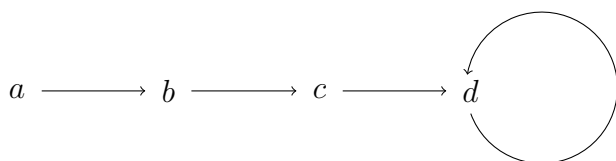
$$\forall S \subseteq \omega, [(0 \in S) \wedge (\forall n \in S, n^+ \in S)] \rightarrow (S = \omega)$$

ในที่นี้ **ศูนย์** เป็นจำนวนเริ่มต้นของจำนวนธรรมชาติ และ **ตัวตามหลัง** คือจำนวนที่ถัดจากตัวที่สนใจ เช่น 1 เป็นตัวตามหลังของ 0 ซึ่งเราจะเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

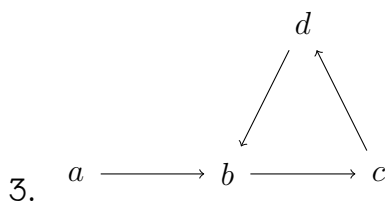
$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \dots$$

ตัวอย่าง 6.1.2 ให้ $S = \{a, b, c, d\}$ จงตรวจสอบว่าแผนภาพต่อไปนี้สอดคล้องสัจพจน์เปอาโนหรือไม่เพราะเหตุใด

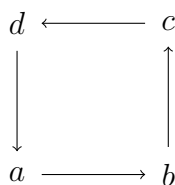
1. $a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d$



2.



3.



4.

ตัวอย่าง 6.1.3 ให้ $S = \{a, a', a'', a''', \dots\}$ จงตรวจสอบว่าแผนภาพต่อไปนี้สอดคล้องสัจพจน์เปอาโน หรือไม่เพราะเหตุใด

1. $a \longrightarrow a' \longrightarrow a'' \longrightarrow a''' \longrightarrow \dots$

2.
$$\begin{array}{ccccccc} & & a''' & & & & \\ & \swarrow & & \searrow & & & \\ a & \longrightarrow & a' & \longrightarrow & a'' & \longrightarrow & a''' \longrightarrow \dots \end{array}$$

ตัวอย่าง 6.1.4 ให้ $S = \{a, a', a'', a''', \dots\} \cup \{b, b', b'', b''', \dots\}$ จงตรวจสอบว่าแผนภาพต่อไปนี้สอดคล้องสัจพจน์เปอาโน หรือไม่เพราะเหตุใด

$$\begin{array}{ccccccccc} a & \longrightarrow & a' & \longrightarrow & a'' & \longrightarrow & a''' & \longrightarrow & \dots \\ b & \longrightarrow & b' & \longrightarrow & b'' & \longrightarrow & b''' & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

เราพิสูจน์ว่าสมบัติเบื้องต้นของจำนวนธรรมชาติ ที่กล่าวไว้ในสัจพจน์เปอาโน สามารถพิสูจน์ได้ในระบบทฤษฎีเซต นั่นคือ ω ในสัจพจน์เปอาโนเป็นเซตอุปนัยที่เล็กที่สุด

ในสัจพจน์เปอาโน (P5) จะถูกนำไปใช้พิสูจน์ข้อความต่าง ๆ เกี่ยวกับประพจน์ของจำนวนธรรมชาติซึ่งเรียกว่า **อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical induction)** กล่าวคือ ให้ $S \subseteq \omega$ ซึ่งสอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

1. $0 \in S$ และ

2. ถ้า $n \in S$ แล้ว $n^+ \in S$

แล้ว $S = \omega$

ทฤษฎีบท 6.1.5 สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ n จะได้ว่า $n \notin n$

ทฤษฎีบท 6.1.6 ถ้า m เป็นจำนวนธรรมชาติ แล้ว $m = 0$ หรือมีจำนวนธรรมชาติ p เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $m = p^+$

แบบฝึกหัด 6.1

1. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน
 - (ก) $\forall x, x \in a \in A \rightarrow x \in A$
 - (ข) $a \in A \rightarrow a \subseteq A$
2. จงพิสูจน์ว่า $\forall x, x \in a \in \omega \rightarrow x \in \omega$
3. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จงแสดงว่าถ้า $A = B$ แล้ว $A^+ = B^+$
4. จงแสดงว่า $A \in \omega$ แล้ว $A^+ \in \omega$
5. จงแสดงว่าไม่มีจำนวนธรรมชาติใดที่เป็นเซตของตัวเองตามหลัง

6.2 การดำเนินการบนจำนวนธรรมชาติ

บทนิยาม 6.2.1 ให้ m และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ แล้วนิยาม $m + k$ คือ ผลบวก (Sum) ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

$$(A1) \quad m + 0 = m \quad \text{และ}$$

$$(A2) \quad m + k^+ = (m + k)^+$$

ตัวดำเนินการ $+$ เรียกว่า การบวก (Addition) บน ω

ทฤษฎีบท 6.2.2 สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ n จะได้ว่า $n^+ = 1 + n$ โดยที่ $0^+ = 1$

ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาค่าต่อไปนี้

1. $2 + 2$

3. $4 + 3$

2. $2 + 3$

4. $5 + 4$

ทฤษฎีบท 6.2.4 สมบัติการสลับที่

กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า $m + n = n + m$

ทฤษฎีบท 6.2.5 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า $m + (n + k) = (m + n) + k$

ทฤษฎีบท 6.2.6 การมีเอกลักษณ์การบวก

สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ n จะได้ว่า $n + 0 = n = 0 + n$

ทฤษฎีบท 6.2.7 สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก

กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

$$m = n \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad m + k = n + k$$

ตัวอย่าง 6.2.8 กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า } m + n = m \quad \text{แล้ว } n = 0$$

ทฤษฎีบท 6.2.9 กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ ถ้า $m \leq n$ แล้วจะได้ว่าไม่มีจำนวนธรรมชาติ k เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $n = m + k$

บทนิยาม 6.2.10 กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติซึ่ง $m \leq n$ เรียก k ในทฤษฎีบท 6.2.9 ว่า **ผลต่าง (difference)** ของ m และ n เขียนแทนด้วย $n - m$ ดังนั้น

$$k = n - m \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad n = m + k$$

ทฤษฎีบท 6.2.11 กำหนดให้ m, n, r และ s เป็นจำนวนธรรมชาติ ถ้า $m \leq n$ และ $r \leq s$ แล้ว

$$n - m = r - s \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad m + s = n + r$$

บทนิยาม 6.2.12 ให้ m และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ แล้วนิยาม $m \cdot k$ คือ **ผลคูณ (Product)** ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

$$(M1) \quad m \cdot 0 = 0 \quad \text{และ}$$

$$(M2) \quad m \cdot k^+ = (m \cdot k) + m$$

ตัวดำเนินการ $\cdot$ เรียกว่า **การคูณ (Multiplication)** บน ω

ทฤษฎีบท 6.2.13 สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ n จะได้ว่า $n \cdot 0 = 0 = n \cdot 0$

ตัวอย่าง 6.2.14 จงหาค่าต่อไปนี้

1. $1 \cdot 2$

3. $3 \cdot 5$

2. $2 \cdot 3$

4. $8 \cdot 6$

ทฤษฎีบท 6.2.15 สมบัติการสลับที่

กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า $m \cdot n = n \cdot m$

ทฤษฎีบท 6.2.16 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า $m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$

ทฤษฎีบท 6.2.17 การมีเอกลักษณ์การบวก

สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ n จะได้ว่า $n \cdot 1 = n = 1 \cdot n$

ทฤษฎีบท 6.2.18 สมบัติการแจกแจง

กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า $m \cdot (n + k) = (m \cdot n) + (m \cdot k)$

ทฤษฎีบท 6.2.19 สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ

กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

1. ถ้า $m = n$ แล้ว $m \cdot k = n \cdot k$
2. ถ้า $m \cdot k = n \cdot k$ และ $k \neq 0$ แล้ว $m = n$

ทฤษฎีบท 6.2.20 กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } m \cdot n = 0 \text{ แล้ว } m = 0 \text{ หรือ } n = 0$$

ตัวอย่าง 6.2.21 กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า } m \cdot n = n \text{ และ } m \neq 0 \text{ แล้ว } n = 1$$

แบบฝึกหัด 6.2

1. ให้
- m
- และ
- k
- เป็นจำนวนธรรมชาติ จงพิสูจน์ว่า

1.1 $0 + m = m$

1.2 $k^+ + m = (k + m)^+$

2. ให้
- m
- และ
- k
- เป็นจำนวนธรรมชาติ จงพิสูจน์ว่า

2.1 $0 \cdot m = 0$ และ

2.2 $k^+ \cdot m = (k \cdot m) + m$

3. จงหาค่าต่อไปนี้โดยใช้นิยาม

3.1 $3 + 4$

3.2 $5 + 7$

3.3 $10 + 15$

3.4 $11 + 13$

4. จงหาค่าต่อไปนี้โดยใช้นิยาม

4.1 $2 \cdot 6$

4.2 $3 \cdot 7$

4.3 $5 \cdot 9$

4.4 $10 \cdot 3$

5. ให้
- $\otimes$
- เป็นตัวดำเนินการบน
- ω
- นิยามโดย

(ก) $m \otimes 0 = m^{++}$ และ

(ข) $m \otimes k^+ = m + (m \otimes k)$

จงหาค่าต่อไปนี้

5.1 $1 \otimes 3$

5.2 $3 \otimes 5$

5.3 $4 \otimes 7$

5.4 $7 \otimes 9$

6. ให้
- $\otimes$
- เป็นตัวดำเนินการบน
- ω
- นิยามโดย

$$2^0 = 1 \quad \text{และ} \quad 2^{k^+} = 2^k \cdot 2$$

จงแสดงว่า $2^{m+n} = 2^m \cdot 2^n$

7. กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จงแสดงว่าถ้า $m = n$ แล้วจะได้ว่าไม่มีจำนวนธรรมชาติ k ซึ่ง $m = n + k$
8. กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จงแสดงว่าถ้า $m = n + k$ แล้วจะได้ว่าไม่มีจำนวนธรรมชาติ k ซึ่ง $n = m + k$
9. กำหนดให้ m, n, p, q และ r เป็นจำนวนธรรมชาติซึ่ง $m = p + q$ และ $p = n + r$ จงแสดงว่ามีจำนวนธรรมชาติ t ที่ทำให้ $m = n + t$
10. กำหนดให้ m, p, y, q และ z เป็นจำนวนธรรมชาติซึ่ง $x = py$ และ $y = qz$ จงแสดงว่ามีจำนวนธรรมชาติ r ที่ทำให้ $x = rq$

6.3 การเป็นอันดับของจำนวนธรรมชาติ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\leq$ บนจำนวนธรรมชาติ ω ซึ่งเป็นเรียงอันดับบางส่วน (โพเซต) และศึกษาสมบัติที่เกิดขึ้นของความสัมพันธ์นี้

บทนิยาม 6.3.1 ให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ เรียก m ว่า **น้อยกว่า (less than) n** เขียนแทนด้วย $m < n$ หรือ $n > m$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนธรรมชาติ k ที่ไม่ใช่ศูนย์ ที่ทำให้ $n = m + k$ สัญลักษณ์ $m \leq n$ เรียกว่า **น้อยกว่าหรือเท่ากับ** หมายถึง $m < n$ หรือ $m = n$

ตัวอย่าง 6.3.2 จงแสดงว่า

1. $3 < 5$

2. $10 > 8$

ทฤษฎีบท 6.3.3 ถ้า n เป็นจำนวนธรรมชาติ แล้ว $0 \leq n$

ทฤษฎีบท 6.3.4 กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

1. ถ้า $m < n$ แล้ว $m^+ \leq n$

2. $m < n$ ก็ต่อเมื่อ $m^+ < n^+$

ทฤษฎีบท 6.3.5 กฎไตรวิภาค (Trichotomy Law)

ให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

$$m < n \quad \text{หรือ} \quad m > n \quad \text{หรือ} \quad m = n$$

ทฤษฎีบท 6.3.6 ความสัมพันธ์ $\leq$ เป็นอันดับดีแล้วบน ω **ทฤษฎีบท 6.3.7 สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ n จะไม่มีจำนวนธรรมชาติ m ซึ่ง $n < m < n^+$**

ทฤษฎีบท 6.3.8 ให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ

ถ้า $m < n$ แล้วจะมีจำนวนธรรมชาติ p ซึ่ง $n = m + p$

ทฤษฎีบท 6.3.9 ให้ m, n, p และ q เป็นจำนวนธรรมชาติ

ถ้า $m < n$ และ $q < p$ แล้ว $mq + np < mp + nq$

ทฤษฎีบท 6.3.10 ให้ m, n และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

1. $m < n$ ก็ต่อเมื่อ $m + k < n + k$
2. $m < n$ ก็ต่อเมื่อ $m \cdot k < n \cdot k$ เมื่อ $k \neq 0$
3. $m = n$ ก็ต่อเมื่อ $m \cdot k = n \cdot k$ เมื่อ $k \neq 0$

ทฤษฎีบท 6.3.11 หลักอาร์คิมิดีส (Archimedean Principle)

ให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ ถ้า $n \neq 0$ แล้วจะมีจำนวนธรรมชาติ k ซึ่ง $m < k \cdot n$

แบบฝึกหัด 6.3

1. ให้ m เป็นจำนวนธรรมชาติ จงแสดงว่า ถ้า $m < 1$ แล้ว $m = 0$
2. จงแสดงว่า ถ้า m เป็นจำนวนธรรมชาติ และ n เป็นจำนวนธรรมชาติที่ไม่ใช่ศูนย์ แล้วจะได้ว่ามีจำนวนธรรมชาติ q, r ที่ทำให้ $m = nq + r$ โดยที่ $r < n$
3. ให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จงแสดงว่า
 - 3.1 ถ้า $m < n + 1$ แล้ว $m \leq n$
 - 3.2 ถ้า $m < 1$ แล้ว $m = 0$
 - 3.3 ถ้า $m + n = 1$ แล้ว $m = 1$ หรือ $n = 1$
 - 3.4 ถ้า $m \cdot n = 1$ แล้ว $m = 1$ และ $n = 1$
4. ให้ m, n, p และ q เป็นจำนวนธรรมชาติ ถ้า $m < p$ และ $n < q$ จงพิสูจน์ว่า
 - 4.1 $m + n < p + q$
 - 4.2 $m \cdot n < p \cdot q$
 - 4.3 $mp + nq < mn + pq$
5. ให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จงแสดงว่า ถ้า $m > 1$ และ $n > 1$ แล้ว $m + n \leq mn$

บทที่ 7

ระบบจำนวน

7.1 จำนวนเต็ม

เมื่อนำจำนวนธรรมชาติสองจำนวนอาจเป็นจำนวนลบเช่น $1 - 2$ จึงกล่าวได้ว่าจำนวนเต็มเกิดจากผลลบของสองจำนวนธรรมชาติ และเขียนแทนด้วยคู่อันดับ $(1, 2)$ แต่จะเห็นได้ว่าผลลบอาจเกิดจากหลาย ๆ เช่น $(3, 4)$ และ $(7, 8)$ เป็นต้น ดังนั้นค่าของ $1 - 2 = -1$ อาจรวมอยู่ในเซต

$$\{(a, b) \in \omega \times \omega : a - b = -1\}$$

เขียนแทนด้วย $-1_{\mathbb{Z}}$ ซึ่งเป็นชั้นสมมูลของความสัมพันธ์ $\sim$ ใน $\omega \times \omega$ ซึ่งนิยามดังนี้

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a - b = c - d$$

หรือ

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a + d = b + c$$

ทฤษฎีบท 7.1.1 ความสัมพันธ์ $\sim$ ใน $\omega \times \omega$ ที่นิยามข้างต้น เป็นความสัมพันธ์สมมูล

บทนิยาม 7.1.2 เรียกแต่ละชั้นสมมูลของความสัมพันธ์ $\sim$ ว่า **จำนวนเต็ม (integer)** และเรียกเซตของชั้นสมมูล $\omega \times \omega / \sim$ ว่า **เซตของจำนวนเต็ม (the set of integers)** เขียนแทนด้วย $\mathbb{Z}$ ดังนั้น

$$\mathbb{Z} := \omega \times \omega / \sim$$

ตัวอย่างเช่น จำนวนเต็ม $-1_{\mathbb{Z}}$ คือชั้นสมมูล

$$-1_{\mathbb{Z}} = [(1, 2)] = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), \dots\}$$

และ จำนวนเต็ม $3_{\mathbb{Z}}$ คือชั้นสมมูล

$$3_{\mathbb{Z}} = [(3, 0)] = \{(3, 0), (4, 1), (5, 2), \dots\}$$

เป็นต้น ทำให้ได้ว่าเซตของจำนวนเต็มคือ

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2_{\mathbb{Z}}, -1_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}}, 2_{\mathbb{Z}}, \dots\}$$

ทฤษฎีบท 7.1.3 ให้ m, n, p, q และ m', n', p', q' เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } (m, n) \sim (m', n') \text{ และ } (p, q) \sim (p', q') \text{ แล้ว } (m + p, n + q) \sim (m' + p', n' + q')$$

บทนิยาม 7.1.4 จะเรียกฟังก์ชัน $+_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ สำหรับแต่ละคู่จำนวนเต็ม $a, b \in \mathbb{Z}$ ด้วยเซต

$$a +_{\mathbb{Z}} b := \{(x, y) : \exists(m, n) \in a \exists(p, q) \in b, (x, y) \sim (m + p, n + q)\}$$

ว่า **การบวก (addition) บน $\mathbb{Z}$** และเรียก $a +_{\mathbb{Z}} b$ ว่า **ผลบวก (sum) ของ a และ b**

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} 1_{\mathbb{Z}} +_{\mathbb{Z}} 2_{\mathbb{Z}} &= [(2, 1)] +_{\mathbb{Z}} [(2, 0)] \\ &= [(2 + 2, 1 + 0)] \\ &= [(4, 1)] \\ &= 3_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 7.1.5 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

1. $a +_{\mathbb{Z}} b = b +_{\mathbb{Z}} a$ สมบัติการสลับที่ (commutative)
2. $a +_{\mathbb{Z}} (b +_{\mathbb{Z}} c) = (a +_{\mathbb{Z}} b) +_{\mathbb{Z}} c$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative)

ทฤษฎีบท 7.1.6 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม และ $0_{\mathbb{Z}} = [(0, 0)]$ จะได้ว่า

1. $a +_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} = a = 0_{\mathbb{Z}} +_{\mathbb{Z}} a$ การมีเอกลักษณ์สำหรับการบวก (identity)
2. มี $b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a +_{\mathbb{Z}} b = 0_{\mathbb{Z}} = b +_{\mathbb{Z}} a$ การมีตัวผกผันสำหรับการบวก (additive inverse)

ตัวอย่าง 7.1.7 จงแสดงว่าสำหรับแต่ละจำนวนเต็มใด ๆ ตัวผกผันสำหรับการบวกของจำนวนเต็มตัวนั้นจะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น (ต่อไปจะเขียนตัวผกผันการบวกของ a ด้วย $-a$)

ทำให้นิยาม **การลบ (subtraction)** บนจำนวนเต็มได้ดังนี้

$$a - b := a +_{\mathbb{Z}} (-b)$$

ทฤษฎีบท 7.1.8 ให้ m, n, p, q และ m', n', p', q' เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

ถ้า $(m, n) \sim (m', n')$ และ $(p, q) \sim (p', q')$ แล้ว $(mp + nq, mq + np) \sim (m'p' + n'q', m'q' + n'p')$

บทนิยาม 7.1.9 จะเรียกฟังก์ชัน $\cdot_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ สำหรับแต่ละคู่จำนวนเต็ม $a, b \in \mathbb{Z}$ ด้วยเซต

$$a \cdot_{\mathbb{Z}} b := \{(x, y) : \exists(m, n) \in a \exists(p, q) \in b, (x, y) \sim (mp + nq, mq + np)\}$$

ว่า **การคูณ (multiplication)** บน $\mathbb{Z}$ และเรียก $a \cdot_{\mathbb{Z}} b$ ว่า **ผลคูณ (product)** ของ a และ b ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} 2_{\mathbb{Z}} \cdot_{\mathbb{Z}} -3_{\mathbb{Z}} &= [(2, 0)] \cdot_{\mathbb{Z}} [(1, 4)] \\ &= [(2 \cdot 1 + 0 \cdot 4, 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4)] \\ &= [(2 + 0, 0 + 8)] \\ &= [(2, 8)] \\ &= -6_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 7.1.10 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

1. $a \cdot_{\mathbb{Z}} b = b \cdot_{\mathbb{Z}} a$ สมบัติการสลับที่ (commutative)
2. $a \cdot_{\mathbb{Z}} (b \cdot_{\mathbb{Z}} c) = (a \cdot_{\mathbb{Z}} b) \cdot_{\mathbb{Z}} c$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative)

ทฤษฎีบท 7.1.11 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม และ $1_{\mathbb{Z}} = [(1, 0)]$ จะได้ว่า

1. $a \cdot_{\mathbb{Z}} 1_{\mathbb{Z}} = a = 1_{\mathbb{Z}} \cdot_{\mathbb{Z}} a$ การมีเอกลักษณ์สำหรับการคูณ (identity)
2. $a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}}$
3. $-a = (-1_{\mathbb{Z}}) \cdot_{\mathbb{Z}} a$

ทฤษฎีบท 7.1.12 ให้ m, n, p, q และ m', n', p', q' เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

ถ้า $(m, n) \sim (m', n')$ และ $(p, q) \sim (p', q')$ แล้ว $m + q < p + n$ และ $m' + q' < p' + n'$

ทฤษฎีบท 7.1.13 ความสัมพันธ์

$$\leq_{\mathbb{Z}} := \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (m, n) \in a \wedge (p, q) \in b \rightarrow m + q \leq p + n\}$$

เป็นอันดับเชิงเส้นบน $\mathbb{Z}$

บทนิยาม 7.1.14 เรียกอันดับ $<_{\mathbb{Z}}$ ว่า **น้อยกว่า (less than)** บน $\mathbb{Z}$ และกล่าวได้ว่าเป็นจำนวนเต็ม b เป็น **จำนวนเต็มบวก (positive integer)** ถ้า $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} b$

ข้อสังเกต $b <_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}$ ก็ต่อเมื่อ $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} -b$

ทำให้ได้กฎไตรวิภาคสำหรับจำนวนเต็ม กล่าวคือ สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

1. a เป็นจำนวนเต็มบวก
2. $a = 0_{\mathbb{Z}}$
3. $-a$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบท 7.1.15 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

1. $a \leq_{\mathbb{Z}} b$ ก็ต่อเมื่อ $a +_{\mathbb{Z}} c \leq_{\mathbb{Z}} b +_{\mathbb{Z}} c$
2. สำหรับ $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} b$ จะได้ว่า $a \leq_{\mathbb{Z}} b$ ก็ต่อเมื่อ $a \cdot_{\mathbb{Z}} c \leq_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} c$

ทฤษฎีบท 7.1.16 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

1. $a +_{\mathbb{Z}} c = b +_{\mathbb{Z}} c$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$
2. $a \cdot_{\mathbb{Z}} c = b \cdot_{\mathbb{Z}} c$ และ $c \neq 0_{\mathbb{Z}}$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$

แบบฝึกหัด 7.1

1. จงพิสูจน์ว่า $0_{\mathbb{Z}} \neq 1_{\mathbb{Z}}$

2. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$2.1 \quad -(-a) = a$$

$$2.2 \quad -(a \cdot_{\mathbb{Z}} b) = (-a) \cdot_{\mathbb{Z}} b = a \cdot_{\mathbb{Z}} (-b)$$

$$2.3 \quad -(a +_{\mathbb{Z}} b) = (-a) +_{\mathbb{Z}} (-b)$$

$$2.4 \quad (a - b) +_{\mathbb{Z}} (b - c) = a - c$$

$$2.5 \quad (-a) \cdot_{\mathbb{Z}} (-b) = a \cdot_{\mathbb{Z}} b$$

3. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่า $a \cdot_{\mathbb{Z}} (b +_{\mathbb{Z}} c) = (a \cdot_{\mathbb{Z}} b) +_{\mathbb{Z}} (a \cdot_{\mathbb{Z}} c)$

4. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$a \cdot_{\mathbb{Z}} b = 1 \text{ ก็ต่อเมื่อ } (a = 1 \text{ และ } b = 1) \text{ หรือ } (a = -1 \text{ และ } b = -1)$$

5. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$a \cdot_{\mathbb{Z}} b = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = 0 \text{ หรือ } b = 0$$

7.2 จำนวนตรรกยะ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการขยายจำนวนเต็มโดยสร้างเซตที่มีตัวผกผันสำหรับการคูณของจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ทั้งหมด สำหรับการบวก $+\mathbb{Z}$ และการคูณ $\cdot\mathbb{Z}$ บนจำนวนเต็ม จะเขียนโดยย่อคือ $+$ และ $\cdot$ ตามลำดับ ในกรณี $a \cdot b$ เขียนแทนด้วย ab เมื่อพิจารณา

$$ax = 1 \quad \text{เมื่อ} \quad a \neq 0$$

จำนวน x ที่ได้จะอยู่ในรูปเศษส่วนเช่น

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{1}, \frac{6}{2}, \dots$$

เป็นต้น เราพบว่าเศษส่วนของจำนวนเต็มที่แตกต่างกันอาจจะเขียนแทนจำนวนเดียวกันได้เช่น

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \dots$$

เมื่อพิจารณากรณีทั่วไป จะได้ว่า

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad ad = bc$$

เมื่อ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ ทำให้เรานิยามความสัมพันธ์บน $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ เมื่อ $\mathbb{Z}^*$ เป็นเซตของจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ทั้งหมด หรือ $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$

ทฤษฎีบท 7.2.1 ความสัมพันธ์ $\sim$ ใน $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ นิยามโดย

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad ad = bc$$

เป็นความสัมพันธ์สมมูล

บทนิยาม 7.2.2 เรียกแต่ละชั้นสมมูลของความสัมพันธ์ $\sim$ ว่า **จำนวนตรรกยะ** (rational number) และเรียกเซตของชั้นสมมูล $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim$ ว่า **เซตของจำนวนตรรกยะ** (the set of rational numbers) เขียนแทนด้วย $\mathbb{Q}$ ดังนั้น

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim$$

ตัวอย่างเช่น จำนวนตรรกยะ $1_{\mathbb{Q}} = [(1, 1)]$, $-\frac{1}{2}_{\mathbb{Q}} = [(-1, 2)]$ และ $0_{\mathbb{Q}} = [(0, 1)]$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 7.2.3 ให้ $m, m', p, p' \in \mathbb{Z}$ และ $n, n', q, q' \in \mathbb{Z}^*$ จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } (m, n) \sim (m', n') \text{ และ } (p, q) \sim (p', q') \text{ แล้ว } (mq + np, nq) \sim (m'q' + n'p', n'q')$$

บทนิยาม 7.2.4 จะเรียกฟังก์ชัน $+_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ สำหรับแต่ละคู่จำนวนตรรกยะ $a, b \in \mathbb{Q}$ ด้วยเซต

$$a +_{\mathbb{Q}} b := \{(x, y) : \exists (m, n) \in a \exists (p, q) \in b, (x, y) \sim (mq + np, nq)\}$$

ว่า **การบวก (addition)** บน $\mathbb{Q}$ และเรียก $a +_{\mathbb{Q}} b$ ว่า **ผลบวก (sum)** ของ a และ b

ตัวอย่าง 7.2.5 จงหาผลบวกต่อไปนี้

$$1. \ 1_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} 2_{\mathbb{Q}}$$

$$2. \ -1_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2}_{\mathbb{Q}}$$

ทฤษฎีบท 7.2.6 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้ว่า

1. $a +_{\mathbb{Q}} b = b +_{\mathbb{Q}} a$ สมบัติการสลับที่ (commutative)
2. $a +_{\mathbb{Q}} (b +_{\mathbb{Q}} c) = (a +_{\mathbb{Q}} b) +_{\mathbb{Q}} c$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative)

ทฤษฎีบท 7.2.7 ให้ a เป็นจำนวนตรรกยะ และ $0_{\mathbb{Q}} = [(0, 1)]$ จะได้ว่า

1. $a +_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} = a = 0_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} a$ การมีเอกลักษณ์สำหรับการบวก (identity)
2. มี $b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a +_{\mathbb{Q}} b = 0_{\mathbb{Q}} = b +_{\mathbb{Q}} a$ การมีตัวผกผันสำหรับการบวก (additive inverse)

ตัวอย่าง 7.2.8 จงแสดงว่าสำหรับแต่ละจำนวนตรรกยะใด ๆ ตัวผกผันสำหรับการบวกของจำนวนตรรกยะตัวนั้นจะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น (ต่อไปจะเขียนตัวผกผันการบวกของ a ด้วย $-a$)

ทำให้นิยาม **การลบ (subtraction)** บนจำนวนตรรกยะได้ดังนี้

$$a - b := a +_{\mathbb{Q}} (-b)$$

ทฤษฎีบท 7.2.9 ให้ $m, m', p, p' \in \mathbb{Z}$ และ $n, n', q, q' \in \mathbb{Z}^*$ จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } (m, n) \sim (m', n') \text{ และ } (p, q) \sim (p', q') \text{ แล้ว } (mp, nq) \sim (m'p', n'q')$$

บทนิยาม 7.2.10 จะเรียกฟังก์ชัน $\cdot_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ สำหรับแต่ละคู่จำนวนตรรกยะ $a, b \in \mathbb{Q}$ ด้วยเซต

$$a \cdot_{\mathbb{Q}} b := \{(x, y) : \exists(m, n) \in a \exists(p, q) \in b, (x, y) \sim (mp, nq)\}$$

ว่า **การคูณ (multiplication)** บน $\mathbb{Q}$ และเรียก $a \cdot_{\mathbb{Q}} b$ ว่า **ผลคูณ (product)** ของ a และ b

ตัวอย่าง 7.2.11 จงหาผลบวกต่อไปนี้

$$1. 1_{\mathbb{Q}} \cdot_{\mathbb{Q}} -2_{\mathbb{Q}}$$

$$2. \frac{1}{3}_{\mathbb{Q}} \cdot_{\mathbb{Q}} \frac{3}{5}_{\mathbb{Q}}$$

ทฤษฎีบท 7.2.12 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้ว่า

1. $a \cdot_{\mathbb{Q}} b = b \cdot_{\mathbb{Q}} a$ สมบัติการสลับที่ (commutative)
2. $a \cdot_{\mathbb{Q}} (b \cdot_{\mathbb{Q}} c) = (a \cdot_{\mathbb{Q}} b) \cdot_{\mathbb{Q}} c$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative)

ทฤษฎีบท 7.2.13 ให้ a เป็นจำนวนตรรกยะ และ $1_{\mathbb{Q}} = [(1, 1)]$ จะได้ว่า

1. $a \cdot_{\mathbb{Q}} 1_{\mathbb{Z}} = a = 1_{\mathbb{Q}} \cdot_{\mathbb{Q}} a$ การมีเอกลักษณ์สำหรับการคูณ (identity)
2. ถ้า $a \neq 0$ จะมี $b \in \mathbb{Q}$ ซึ่ง $a \cdot_{\mathbb{Q}} b = 1_{\mathbb{Z}} = b \cdot_{\mathbb{Q}} a$
3. $a \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}}$
4. $-a = (-1_{\mathbb{Q}}) \cdot_{\mathbb{Q}} a$

ตัวอย่าง 7.2.14 จงแสดงว่าสำหรับแต่ละจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่ศูนย์ ตัวผกผันสำหรับการคูณของจำนวนตรรกยะตัวนั้นจะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ต่อไปจะเขียนตัวผกผันการคูณของ r ด้วย r^{-1} ดังนั้น

$$r^{-1} = [(a, b)]^{-1} = [(b, a)]$$

สามารถนิยามการหารบน $\mathbb{Q}^*$ ได้ดังนี้

$$s \div r := s \cdot_{\mathbb{Q}} r^{-1}$$

หรือ

$$\begin{aligned} [(a, b)] \div [(c, d)] &= [(a, b)] \cdot_{\mathbb{Q}} [(c, d)]^{-1} \\ &= [(a, b)] \cdot_{\mathbb{Q}} [(d, c)] \\ &= [(ad, bc)] \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 7.2.15 ถ้า $(a, b) \sim (a', b')$ และ $(c, d) \sim (c', d')$

โดยที่ b, b', d และ d' เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$ad < cb \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a'd' < c'b'$$

ทฤษฎีบท 7.2.16 ความสัมพันธ์

$$\leq_{\mathbb{Q}} := \{(r, s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : (a, b) \in r \wedge (c, d) \in s \rightarrow ad \leq cb\}$$

เป็นอันดับเชิงเส้นบน $\mathbb{Q}$

บทนิยาม 7.2.17 เรียกอันดับ $<_{\mathbb{Q}}$ ว่า **น้อยกว่า (less than)** บน $\mathbb{Q}$ และกล่าวได้ว่าเป็นจำนวนตรรกยะ b เป็น **จำนวนบวก (positive)** ถ้า $0_{\mathbb{Q}} <_{\mathbb{Q}} b$

ข้อสังเกต $b <_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}$ ก็ต่อเมื่อ $0_{\mathbb{Q}} <_{\mathbb{Q}} -b$

ทำให้ได้กฎไตรวิภาคสำหรับจำนวนตรรกยะ กล่าวคือ สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

1. r เป็นจำนวนบวก
2. $r = 0_{\mathbb{Q}}$
3. $-r$ เป็นจำนวนบวก

ทฤษฎีบท 7.2.18 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้ว่า

1. $a \leq_{\mathbb{Q}} b$ ก็ต่อเมื่อ $a +_{\mathbb{Q}} c \leq_{\mathbb{Q}} b +_{\mathbb{Q}} c$
2. สำหรับ $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Q}} b$ จะได้ว่า $a \leq_{\mathbb{Q}} b$ ก็ต่อเมื่อ $a \cdot_{\mathbb{Q}} c \leq_{\mathbb{Q}} b \cdot_{\mathbb{Q}} c$

ทฤษฎีบท 7.2.19 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้ว่า

1. $a +_{\mathbb{Q}} c = b +_{\mathbb{Q}} c$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$
2. $a \cdot_{\mathbb{Q}} c = b \cdot_{\mathbb{Q}} c$ และ $c \neq 0_{\mathbb{Q}}$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$

แบบฝึกหัด 7.2

1. จงพิสูจน์ว่า $0_{\mathbb{Q}} \neq 1_{\mathbb{Q}}$
2. จงแสดงว่าผลคูณของจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่ศูนย์ทั้งคู่ย่อมไม่ใช่ศูนย์
3. ให้ r และ s เป็นจำนวนตรรกยะ จงแสดงว่า
 - 3.1 ถ้า $rs > 0$ และ $r > 0$ แล้ว $s > 0$
 - 3.2 ถ้า $rs > 0$ และ $r < 0$ แล้ว $s < 0$
 - 3.3 ถ้า $r > 0$ แล้ว $r^{-1} > 0$
 - 3.4 ถ้า $r < 0$ แล้ว $r^{-1} < 0$
 - 3.5 ถ้า $0 < r < s$ แล้ว $0 < s^{-1} < r^{-1}$
4. ให้ r และ s เป็นจำนวนตรรกยะ จงแสดงว่า ถ้า $rs = r$ และ $r \neq 0$ แล้ว $s = 1$
5. ให้ r และ s เป็นจำนวนตรรกยะ จงพิสูจน์ว่า

$$r \cdot_{\mathbb{Q}} s = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } r = 0 \text{ หรือ } s = 0$$

6. จงแสดงว่าไม่มีจำนวนตรรกยะ r ซึ่ง $r^2 = 2$ เมื่อ $r^2 = r \cdot_{\mathbb{Q}} r$

7.3 จำนวนจริง

ในสูตรของพีทาโกรัส $a^2 + b^2 = c^2$ เราได้พบว่าความยาวด้านมุมฉากไม่สามารถแทนด้วยจำนวนตรรกยะได้ เช่นเมื่อด้านประกอบมีความยาวด้านละ 1 หน่วย นั่นคือ

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

เราได้พิสูจน์ไว้ในแบบฝึกหัด 7.2 ข้อ 6 ว่าไม่มีจำนวนตรรกยะใดที่มีสมบัติเช่นนี้ ทำให้เราจำเป็นต้องมีระบบจำนวนที่ครอบคลุมถึงกรณีนี้ด้วย นั่นคือรวมจำนวนอตรรกยะเข้าไปด้วยนั่นเองจะเรียกว่าจำนวนจริง

วิธีการสร้างจำนวนจริงมีหลายรูปแบบ เช่น

1. การแทนจำนวนจริงแต่ละจำนวนในรูปทศนิยม นั่นคือให้แต่ละจำนวนจริงเป็นลำดับ หรือฟังก์ชันจาก ω ไปยัง $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
2. ให้เซตจำนวนจริงคือเซตป็นส่วน $C/\sim$ โดย C เป็นเซตของลำดับโคซี (Cauchy sequence) ของจำนวนตรรกยะที่มีค่าลิมิต นั่นคือ

$$\{x_n\} \in C \leftrightarrow \forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q} \exists k \in \omega \forall m > k \forall n > k, |x_m - x_n| < \varepsilon$$

และ $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลใน C ซึ่งกำหนดโดย

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \text{ ก็ต่อเมื่อ } \{x_n\} \text{ และ } \{y_n\} \text{ มีค่าลิมิตเดียวกัน}$$

3. ในแต่ละจำนวนจริงเป็นส่วนตัดเดเดคินด์ (Dedekind cut) เราจะกล่าวถึงการสร้างในหัวข้อนี้

บทนิยาม 7.3.1 ให้ x เป็นสับเซตของ $\mathbb{Q}$ ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

1. x ไม่เป็นเซตว่าง และ x ไม่ใช่ $\mathbb{Q}$ นั่นคือ $\emptyset \neq x \neq \mathbb{Q}$
2. x มี สมบัติปิดสมาชิกข้างน้อย (closed downward) นั่นคือ $\forall q, r \in \mathbb{Q}, q \in x \wedge r < q \rightarrow r \in x$
3. x ไม่มีสมาชิกตัวมากที่สุด นั่นคือ $\forall r \in x \exists q \in x, r < q$

แล้วจะเรียก x ว่า ส่วนตัดเดเดคินด์ (Dedekind cut) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า ส่วนตัด (cut)

บทนิยาม 7.3.2 เรียกแต่ละส่วนตัดว่า จำนวนจริง (real number) และ $\mathbb{R}$ แทน เซตของจำนวนจริง (the set of real numbers)

ทฤษฎีบท 7.3.3 ความสัมพันธ์

$$\leq_{\mathbb{R}} := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \subset y \text{ หรือ } x = y\}$$

เป็นอันดับเชิงเส้นบน $\mathbb{R}$

บทแทรก 7.3.4 กฎไตรวิภาคเป็นจริงบน $\mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 7.3.5 สำหรับแต่ละจำนวนตรรกยะ r จะได้ว่า $\{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$ เป็นจำนวนจริง

บทนิยาม 7.3.6 สำหรับแต่ละจำนวนตรรกยะ r จะเรียกจำนวนจริง $\{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$ ว่าจำนวนจริงตรรกยะ เขียนแทนด้วย $r_{\mathbb{R}}$ ดังนั้น

$$r_{\mathbb{R}} := \{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$$

สำหรับจำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะเรียกว่า **จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

ทฤษฎีบท 7.3.7 ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง แล้ว

$$\{q + r : q \in x \text{ และ } r \in y\} \quad \text{เป็นจำนวนจริง}$$

บทนิยาม 7.3.8 จะเรียกฟังก์ชัน $+_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ สำหรับแต่ละคู่จำนวนจริง $a, b \in \mathbb{R}$ ด้วยเซต

$$x +_{\mathbb{R}} y := \{q + r : q \in x \text{ และ } r \in y\}$$

ว่า การบวก (addition) บน $\mathbb{R}$ และเรียก $a +_{\mathbb{R}} b$ ว่า ผลบวก (sum) ของ x และ y

ทฤษฎีบท 7.3.9 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $a +_{\mathbb{R}} b = b +_{\mathbb{R}} a$ สมบัติการสลับที่ (commutative)
2. $a +_{\mathbb{R}} (b +_{\mathbb{R}} c) = (a +_{\mathbb{R}} b) +_{\mathbb{R}} c$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative)

ทฤษฎีบท 7.3.10 จำนวนจริงศูนย์ $0_{\mathbb{Q}} = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}$ เรียกสั้น ๆ ว่า **ศูนย์ (zero)** เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวก $+\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x +_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}} = x = 0_{\mathbb{R}} +_{\mathbb{R}} x$$

บทนิยาม 7.3.11 เรียกจำนวนจริง x ว่า**จำนวนบวก (positive)** ถ้า $0_{\mathbb{R}} <_{\mathbb{R}} x$ แต่ถ้า $x <_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$ เรียก x ว่า**จำนวนลบ (negative)**

ทฤษฎีบท 7.3.12 ให้ x เป็นจำนวนจริง และ p เป็นจำนวนตรรกยะที่เป็นจำนวนบวก แล้วจะมี $q \in x$ ซึ่ง $p + q \notin x$

ทฤษฎีบท 7.3.13 ให้ x เป็นจำนวนจริง แล้ว

$$\{r \in \mathbb{Q} : \exists s > r, -s \notin x\}$$

เป็นจำนวนจริงที่เป็นตัวผกผันสำหรับการบวกของ x และจะเขียนแทนด้วย $-x$ นั่นคือ

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists -x \in \mathbb{R}, x +_{\mathbb{R}} -x = 0_{\mathbb{R}} = -x +_{\mathbb{R}} x$$

บทแทรก 7.3.14 ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$x +_{\mathbb{R}} z = y +_{\mathbb{R}} z \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = z$$

บทนิยาม 7.3.15 ให้ x เป็นจำนวนจริง นิยาม

$$|x| := x \cup -x$$

และเรียกว่า **ค่าสัมบูรณ์ (absolute value)** ของ x

ทฤษฎีบท 7.3.16 ให้ x เป็นจำนวนจริง และ y เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนลบ แล้วเซต

$$0_{\mathbb{R}} \cup \{rs : 0 \leq r \in x \text{ และ } 0 \leq s \in y\}$$

เป็นจำนวนจริง

บทนิยาม 7.3.17 สำหรับแต่ละคู่จำนวนจริง x และ y จะนิยาม **ผลคูณ (product)** $x \cdot_{\mathbb{R}} y$ ดังต่อไปนี้

1. ถ้า x และ y ต่างไม่เป็นจำนวนลบ จะนิยาม

$$x \cdot_{\mathbb{R}} y := 0_{\mathbb{R}} \cup \{rs : 0 \leq r \in x \text{ และ } 0 \leq s \in y\}$$

2. ถ้า x และ y ต่างเป็นจำนวนลบ จะนิยาม

$$x \cdot_{\mathbb{R}} y := |x| \cdot_{\mathbb{R}} |y|$$

3. ในกรณีที่เหลือ จะนิยาม

$$x \cdot_{\mathbb{R}} y := -(|x| \cdot_{\mathbb{R}} |y|)$$

เรียกการดำเนินการ $\cdot_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ว่า **การคูณ(multiplication)** บน $\mathbb{R}$

จะได้ว่าการคูณ $\cdot_{\mathbb{R}}$ สอดคล้องสมบัติการสลับที่ เปลี่ยนกลุ่ม และการแจกแจงเหนือ $+_{\mathbb{R}}$

ทฤษฎีบท 7.3.18 ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $x \cdot_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}$
2. ถ้า $0_{\mathbb{R}} \leq_{\mathbb{R}} x$ และ $0_{\mathbb{R}} \leq_{\mathbb{R}} y$ แล้ว $0_{\mathbb{R}} \leq_{\mathbb{R}} x \cdot_{\mathbb{R}} y$

ทฤษฎีบท 7.3.19 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ แล้วจำนวนจริง $1_{\mathbb{R}} = \{r \in \mathbb{Q} : r < 1\}$ เป็นเอกลักษณ์สำหรับการคูณ $\cdot_{\mathbb{R}}$ นั่นคือ

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}} = x = 1_{\mathbb{R}} \cdot_{\mathbb{R}} x$$

ทฤษฎีบท 7.3.20 สำหรับจำนวนจริง x ที่ไม่ใช่ศูนย์ จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง $x \cdot_{\mathbb{R}} y = 1_{\mathbb{R}}$ เรียก y ว่าตัวผกผันสำหรับการคูณของ x เขียนแทนด้วย x^{-1} หรือกล่าวคือ

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \exists x^{-1} \in \mathbb{R}, x \cdot_{\mathbb{R}} x^{-1} = 1_{\mathbb{R}} = x^{-1} \cdot_{\mathbb{R}} x$$

แบบฝึกหัด 7.3

1. กำหนดให้ r เป็นจำนวนตรรกยะ จงแสดงว่า $\{t \in \mathbb{Q} : t > r\}$ ไม่เป็นส่วนตัดเดเดกินด์
2. กำหนดให้ r และ s เป็นจำนวนตรรกยะ x เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า
 - 2.1 ถ้า $r \in x$ และ $s \notin x$ แล้ว $s > r$
 - 2.2 ถ้า $s \notin x$ และ $r > s$ แล้ว $r \notin x$
3. จงพิสูจน์ว่า การคูณ $\cdot_{\mathbb{R}}$ สอดคล้องสมบัติการสลับที่ เปลี่ยนกลุ่ม และการแจกแจงเหนือ $+\mathbb{R}$
4. จงแสดงว่า $0_{\mathbb{R}} \neq 1_{\mathbb{R}}$
5. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า
 - 5.1 $-(-x) = x$
 - 5.2 $-(x \cdot_{\mathbb{R}} y) = (-x) \cdot_{\mathbb{R}} y = x \cdot_{\mathbb{R}} (-y)$
 - 5.3 $-(x +_{\mathbb{R}} y) = (-x) +_{\mathbb{R}} (-y)$
 - 5.4 ถ้า $x +_{\mathbb{R}} y = x$ แล้ว $y = 0_{\mathbb{R}}$
 - 5.5 $x <_{\mathbb{R}} y$ ก็ต่อเมื่อ $-y <_{\mathbb{R}} -x$
 - 5.6 ถ้า $x \neq 0_{\mathbb{R}}$ แล้ว $(x^{-1})^{-1} = x$
 - 5.7 ถ้า $x \neq 0_{\mathbb{R}}$ และ $y \neq 0_{\mathbb{R}}$ แล้ว $(x \cdot_{\mathbb{R}} y)^{-1} = y^{-1} \cdot_{\mathbb{R}} x^{-1}$
6. สำหรับแต่ละจำนวนจริง x จงแสดงว่า $|x|$ เป็นจำนวนจริง
7. สำหรับแต่ละจำนวนจริง x จงแสดงว่า $0_{\mathbb{R}} \leq_{\mathbb{R}} |x|$
8. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า

$$x \cdot_{\mathbb{R}} y = 0_{\mathbb{R}} \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = 0_{\mathbb{R}} \text{ หรือ } y = 0_{\mathbb{R}}$$

9. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า

$$x \cdot_{\mathbb{R}} y = x \cdot_{\mathbb{R}} z \text{ และ } x \neq 0_{\mathbb{R}} \text{ ก็ต่อเมื่อ } y = z$$

บทที่ 8

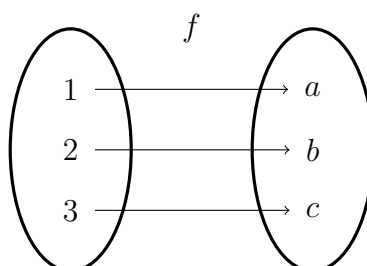
เซตจำกัดและเซตอนันต์

8.1 การเทียบเท่าของเซต

บทนิยาม 8.1.1 ให้ A และ B เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะกล่าวว่า A เทียบเท่า (equivalent) กับ B เขียนแทนด้วย $A \sim B$ ถ้ามีฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง หรือ

$$A \sim B \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \exists f: A \rightarrow B \quad \text{เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง}$$

ตัวอย่างเช่น $\{1, 2, 3\} \sim \{a, b, c\}$ โดยเลือกฟังก์ชัน f ดังแผนภาพ



ตัวอย่าง 8.1.2 จงแสดงว่าเซตแต่ละคู่ต่อไปนี้เทียบเท่ากัน

1. $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{2, 3, 5\}$

2. $A = \{-3, -2, -1, 0\}$ และ $B = \{2, 4, 6, 8\}$

ตัวอย่าง 8.1.3 จงแสดงว่า $A \sim B$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อ $f : A \rightarrow B$

1. $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ และ $B = \{2, 4, 6, \dots\}$ กำหนดให้ $f(x) = 2x$

2. $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ และ $B = \{1, 3, 5, \dots\}$ กำหนดให้ $f(x) = 2x - 1$

3. $A = \{2, 4, 6, \dots\}$ และ $B = \{1, 3, 5, \dots\}$ กำหนดให้ $f(x) = x - 1$

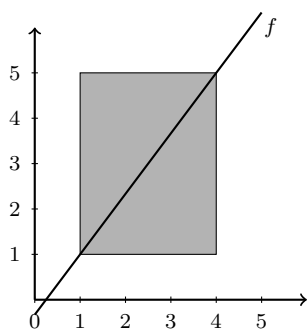
ทฤษฎีบท 8.1.4 $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

ตัวอย่าง 8.1.5 จงแสดงว่าเซตแต่ละคู่ต่อไปนี้เทียบเท่ากัน

1. $\mathbb{N}$ และ $\{2n : n \in \mathbb{Z}\}$

2. $\mathbb{Z}$ และ $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$

ตัวอย่าง 8.1.6 จงแสดงว่า $[1, 4] \sim [1, 5]$



ตัวอย่าง 8.1.7 จงแสดงว่าเซตแต่ละคู่ต่อไปนี้เทียบเท่ากัน

1. $A = [0, 1]$ และ $B = [1, 2]$

2. $A = (0, 1)$ และ $B = (-1, 1)$

ทฤษฎีบท 8.1.8 $(0, 1) \sim \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 8.1.9 ให้ A, B และ C เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง แล้ว

1. $A \sim A$
2. ถ้า $A \sim B$ แล้ว $B \sim A$
3. ถ้า $A \sim B$ และ $B \sim C$ แล้ว $A \sim C$

บทแทรก 8.1.10 สำหรับแต่ละเซต A ถ้า $A = B$ แล้ว $A \sim B$

ทฤษฎีบท 8.1.11 ให้ A, B และ C เป็นเซต จะได้ว่า

1. $A \sim A$ สมบัติสะท้อน (Reflexive)
2. ถ้า $A \sim B$ แล้ว $B \sim A$ สมบัติสมมาตร (Symmetric)
3. ถ้า $A \sim B$ และ $B \sim C$ แล้ว $A \sim C$ สมบัติถ่ายทอด (Transitive)

ทฤษฎีบท 8.1.12 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a < b$ จะได้ว่า

1. $(a, b) \sim (0, 1)$
2. $(a, b) \sim \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 8.1.13 ให้ A, B, C และ D เป็นเซต จะได้ว่า

1. $A \times B \sim B \times A$
2. ถ้า $A \times B$ แล้ว $A \times C \sim B \times C$
3. ถ้า $A \sim B$ และ $C \sim D$ แล้ว $A \times C \sim B \times D$

ตัวอย่าง 8.1.14 สำหรับเซต A ที่ไม่ใช่เซตว่าง จงแสดงว่า $A \times \{a\} \sim A$

แบบฝึกหัด 8.1

1. จงแสดงว่าเซตแต่ละคู่ต่อไปนี้เทียบเท่ากัน
 - 1.1 $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ และ $\{10, 20, 30, \dots, 1000\}$
 - 1.2 $\{1, 2, 3, \dots\}$ และ $\{a_1, a_3, a_5, \dots\}$
 - 1.3 $\{2, 4, 6, \dots\}$ และ $\{2, 2^3, 2^5, \dots\}$
 - 1.4 $\mathbb{N}$ และ $\{3n - 1 : n \in \mathbb{Z}\}$
 - 1.5 $\mathbb{Z}$ และ $\{n2^n : n \in \mathbb{N}\}$
2. ให้ A, B และ C เป็นเซต จงแสดงว่า
 - 2.1 ถ้า $A \sim B$ และ $A \cap C = B \cap C = \emptyset$ แล้ว $A \cup C \sim B \cup C$
 - 2.2 ถ้า $A = B$ แล้ว $A \sim B$
 - 2.3 ถ้า $A \sim B$ และ $B = C$ แล้ว $A \sim C$
 - 2.4 $A = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A \sim \emptyset$
3. จงแสดงว่า

3.1 $[0, 1] \sim [1, 3]$	3.3 $[0, 1] \sim (0, 1)$
3.2 $[-1, 1] \sim [2, 3]$	3.4 $[0, 1] \sim [2, 1)$
4. ให้ A, B และ C เป็นเซต จงพิสูจน์ว่า $A \times (B \times C) \sim (A \times B) \times C$
5. ให้ A เป็นเซตใด ๆ และ $B = \{b\}$ จงพิสูจน์ว่า $B \times A \sim A$

8.2 เซตจำกัด

บทนิยาม 8.2.1 จะกล่าวว่า A เป็นเซตจำกัด (finite set) ก็ต่อเมื่อ

A เป็นเซตว่าง หรือ $A \sim \{1, 2, \dots, k\}$ สำหรับบางจำนวนนับ k

บทนิยาม 8.2.2 ให้ A เป็นเซตจำกัด และ k เป็นจำนวนนับ

$A = \emptyset$ จะกล่าวว่า A มีสมาชิก 0 ตัว เขียนแทนด้วย $n(A) = 0$

$A \sim \{1, 2, 3, \dots, k\}$ จะกล่าวว่า A มีสมาชิก k ตัว เขียนแทนด้วย $n(A) = k$

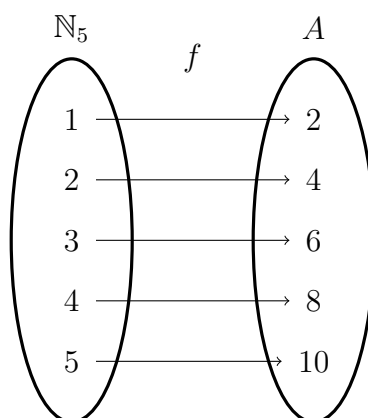
สำหรับ $k \in \mathbb{N}$ ถ้า A เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $n(A) = k$ อาจเขียนแทนเซต A ด้วย $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ในกรณีที่ $A = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ เห็นได้ชัดว่า $\{1, 2, \dots, k\} \sim \{1, 2, \dots, k\}$ (โดยเลือกฟังก์ชันเอกลักษณ์บน A) ดังนั้น A เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิก k ตัว จะเรียกเซตนี้ว่า **ส่วนตัด (section)** ของจำนวนนับ เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย $\mathbb{N}_k$ หรือ

$$\mathbb{N}_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$$

ทำให้ได้ว่า $A \sim \mathbb{N}_k$ เมื่อ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและ $n(A) = k$

ตัวอย่าง 8.2.3 กำหนดให้ $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

พิจารณาแผนภาพ



ทฤษฎีบท 8.2.4 ให้ $k \in \mathbb{N}$ และ A เป็นเซตใด ๆ โดยที่ $a \in A$ แล้วจะได้ว่า

A มีสมาชิก $k + 1$ ตัว ก็ต่อเมื่อ $A - \{a\}$ มีสมาชิก k ตัว

ทฤษฎีบท 8.2.5 ถ้า $A \sim N_n$ สำหรับบางจำนวนนับ n แล้วจะไม่มีฟังก์ชัน 1-1 จากสับเซตแท้ B ของ A ใดๆ ไปทั่วถึง N_n ยิ่งได้อีกว่า B เป็นเซตจำกัด และจำนวนสมาชิกของ B น้อยกว่า n ตัว

ข้อสังเกต โดยทฤษฎีบทนี้สรุปได้ว่าสับเซตของเซตจำกัดย่อมเป็นเซตจำกัดเสมอ

บทแทรก 8.2.6 ถ้า A เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า

ไม่มีฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไปทั่วถึงสับเซตแท้ใด ๆ ของ A

บทแทรก 8.2.7 จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด A มีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 8.2.8 ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. มีฟังก์ชันจาก $\{1, 2, \dots, n\}$ ไปทั่วถึง A
2. มีฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไป $\{1, 2, \dots, n\}$
3. A เป็นเซตจำกัด และมีสมาชิกอย่างมาก n ตัว

บทแทรก 8.2.9 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $A \cap B$ และ $A - B$ เป็นเซตจำกัด

ทฤษฎีบท 8.2.10 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $A \cup B$ เป็นเซตจำกัด โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้า $A \cap B = \emptyset$ แล้ว

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

บทแทรก 8.2.11 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

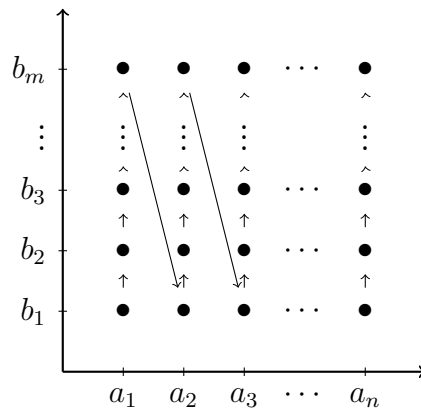
บทแทรก 8.2.12 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

บทแทรก 8.2.13 ให้ A, B และ C เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

ทฤษฎีบท 8.2.14 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $A \times B$ เป็นเซตจำกัด

บทพิสูจน์. ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด ให้ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ และ $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ พิจารณากราฟต่อไปนี้



กำหนดให้ $f : A \times B \rightarrow \mathbb{N}_{nm}$ โดย

$$f((a_i, b_j)) = (i-1)m + j \quad \text{ทุก } (a_i, b_j) \in A \times B$$

แสดงได้โดยง่ายว่า f เป็นไปได้อย่างแจ่มชัด ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ให้ $(a_i, b_j), (a_k, b_t) \in A \times B$ สมมติว่า $f((a_i, b_j)) = f((a_k, b_t))$ นั่นคือ $(i-1)m + j = (k-1)m + t$ สมมติว่า $i \neq k$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป $i < k$ นั่นคือ $i \leq k-1$ ทำให้สรุปได้ว่า

$$(i-1)m + j \leq (i-1)m + m = im \leq (k-1)m < (k-1)m + t$$

ทำให้ได้ว่า $f((a_i, b_j)) \neq f((a_k, b_t))$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐาน ทำให้ได้ว่า $i = k$ แล้ว

$$(i-1)m + j = (k-1)m + t = (i-1)m + t$$

จะได้ว่า $j = t$ นั่นคือ $(a_i, b_j) = (a_k, b_t)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1 โดยทฤษฎีบท 8.2.8 จะได้ว่า $A \times B$ เป็นเซตจำกัด □

แบบฝึกหัด 8.2

1. จงตรวจสอบว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตจำกัดหรือไม่
 - 1.1 $\{2, 4, 6, \dots, 100\}$
 - 1.2 $\mathbb{N} \cap \{\frac{n}{3} : n \in \mathbb{N}\}$
 - 1.3 $\{1, 5, 9, 13, 17\}$
 - 1.4 $\{n \in \mathbb{Z} : |n| \leq 10\}$
 - 1.5 $\{x : x = 2n + 3, n = 0, 1, 2, \dots, 10\}$
 - 1.6 $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$
2. ถ้า A เป็นเซตจำกัด จงแสดงว่า $A \times \{a\}$ เป็นเซตจำกัด
3. จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ A และ B เป็นเซตจำกัด
4. ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จงแสดงว่า $n(A \cup B) = n(A - B) + n(B)$
5. ให้ A และ B เป็นเซต จงแสดงว่า
 - 5.1 ถ้า $A \cup B$ เป็นเซตจำกัด แล้ว A และ B เป็นเซตจำกัด
 - 5.2 ถ้า $A - B$ เป็นเซตจำกัด แล้ว A เป็นเซตจำกัด
6. ให้ A และ B เป็นเซต และ $F = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$ จงแสดงว่า ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว F เป็นเซตจำกัด
7. ให้ A, B และ C เป็นเซตจำกัด จงพิสูจน์ว่า $A \times (B \times C)$ เป็นเซตจำกัด
8. ให้ $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ เมื่อ A_α เป็นเซตจำกัดทุกๆ $\alpha \in \Lambda$ จงพิสูจน์ว่า
 - 8.1 $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ เป็นเซตจำกัด
 - 8.2 $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ เป็นเซตจำกัด
 - 8.3 $\prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ เป็นเซตจำกัด
9. $A = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$ และ $B = \{3, 9, 12, \dots, 99\}$ จงหา
 - 9.1 $n(A)$
 - 9.2 $n(B)$
 - 9.3 $n(A \cap B)$
 - 9.4 $n(A \cup B)$
 - 9.5 $n(A - B)$
 - 9.6 $n(B - A)$

8.3 เซตอนันต์

บทนิยาม 8.3.1 เซตอนันต์ (infinite set) คือเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด

อาศัยกฎแย้งสลับที่จากบทแทรก 8.2.6 จะได้ว่า

ถ้ามีฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไปทั่วถึง สับเซตแท้บางเซตของ A แล้ว A เป็นเซตอนันต์
หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ถ้ามีสับเซตแท้ B ของ A ซึ่ง $B \sim A$ แล้ว A เป็นเซตอนันต์

ทฤษฎีบท 8.3.2 $\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์

โดยบทแทรก 8.2.6 ทำให้ได้ข้อสรุปดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.3.3 เซตที่มีสับเซตเป็นเซตอนันต์ย่อยเป็นเซตอนันต์

เนื่องจาก $\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์ และ $\mathbb{N}$ เป็นสับเซตของ $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ และ $\mathbb{R}$ ดังนั้น $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ และ $\mathbb{R}$ เป็นเซตอนันต์

ทฤษฎีบท 8.3.4 ให้ A เป็นเซต จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $f : \mathbb{N} \rightarrow A$
2. มีฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไปทั่วถึง สับเซตแท้บางเซตของ A
3. A เป็นเซตอนันต์

ตัวอย่าง 8.3.5 จงแสดงว่าเซตต่อไปนี้ เป็นเซตอนันต์

1. $(0, 1)$

2. $(1, 3)$

ทฤษฎีบท 8.3.6 ให้ A เป็นเซตอนันต์ ถ้า $A \sim B$ แล้ว B เป็นเซตอนันต์

แบบฝึกหัด 8.3

1. จงแสดงว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตอนันต์
 - 1.1 $\{1, 4, 7, 11, \dots\}$
 - 1.2 $\{1, 1.5, 2, 2.5, \dots\}$
 - 1.3 $(0, 5)$
 - 1.4 $[-3, 5]$
2. จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ A หรือ B เป็นเซตอนันต์
3. ให้ A และ B เป็นเซต จงพิสูจน์หรือยกตัวอย่างค้านข้อความต่อไปนี้
 - 3.1 $A \cap B$ เป็นเซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ A และ B เป็นเซตอนันต์
 - 3.2 $A \cap B$ เป็นเซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ A หรือ B เป็นเซตจำกัด
 - 3.3 $A - B$ เป็นเซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตจำกัด
 - 3.4 $A - B$ เป็นเซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตอนันต์
4. ให้ A เป็นเซตอนันต์ จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตอนันต์ ทุก ๆ เซต B
5. จงยกตัวอย่างค้านข้อความ ถ้า $A \cap B$ เป็นเซตอนันต์ แล้ว A และ B เป็นเซตอนันต์

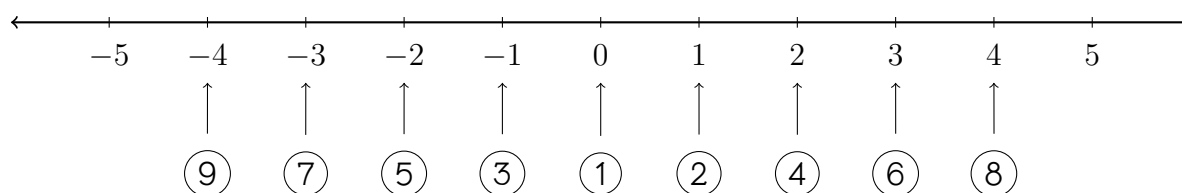
8.4 เซตนับได้

ในหัวข้อนี้จะกล่าวในการแยกแยะชนิดของเซตแต่ละชนิดออกจากกัน โดยดูความสามารถในการนับจำนวนสมาชิกของเซตนั้น ๆ

บทนิยาม 8.4.1 จะกล่าวว่าเซต A เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ (countably infinite set หรือ denumerable set) ถ้า $A \sim \mathbb{N}$

ข้อสังเกต เนื่องจาก $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ ดังนั้น $\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

ทฤษฎีบท 8.4.2 $\mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้



ทฤษฎีบท 8.4.3 ให้ A เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ และ $B \sim A$ แล้ว B เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

ตัวอย่าง 8.4.4 ให้ A เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ จงแสดงว่า $A \times \{a\}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

ตัวอย่าง 8.4.5 จงแสดงว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

1. $\{1, 4, 7, 11, \dots\}$

3. $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\right\}$

2. $\{0, 4, 8, 12, \dots\}$

4. $\{1, 3, 9, 27, \dots\}$

บทนิยาม 8.4.6 จะกล่าวว่าเซต A เป็นเซตนับได้ (countable set) ถ้า A เป็นเซตจำกัด หรือเป็นเซตอนันต์แบบนับได้

ตัวอย่าง 8.4.7 จงแสดงว่า $E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ เป็นเซตนับได้

ทฤษฎีบท 8.4.8 ให้ A เป็นเซตไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

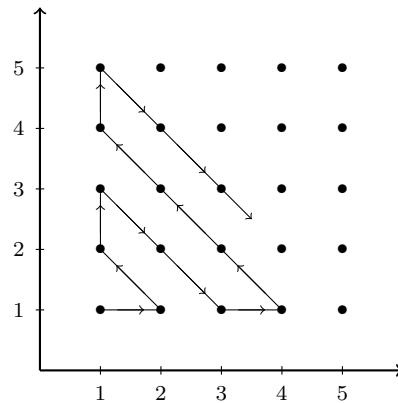
1. มีฟังก์ชันทั่วถึง $f : \mathbb{N} \rightarrow A$
2. มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $g : A \rightarrow \mathbb{N}$
3. A เป็นเซตนับได้

บทแทรก 8.4.9 สับเซตของเซตนับได้ย่อมเป็นเซตนับได้

ข้อสังเกต ถ้า A และ B เป็นเซตนับได้ แล้ว $A \cap B$ และ $A - B$ เป็นเซตนับได้ เพราะว่า $A \cap B \subseteq A$ และ $A - B \subseteq A$

บทแทรก 8.4.10 ถ้า A เป็นเซตซึ่งมีฟังก์ชันจากเซตนับได้ไปทั่วถึง A แล้ว A เป็นเซตนับได้

ต่อไปจะพิจารณาการนับสมาชิกของ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ดังกราฟต่อไปนี้



รูปที่ 15 แสดงการนับสมาชิกของเซต $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

จากกราฟสามารถสร้างฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ โดย $f((x, y)) = 2^{x-1}(2y - 1)$ ถ้าพิสูจน์ได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง จะสรุปได้ว่า $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ เป็นเซตนับได้ แต่การพิสูจน์ดังกล่าวมีความยุ่งยากและต้องตรวจสอบทั้ง 2 อย่าง ดังนั้นจะใช้ทฤษฎีบท 8.4.8 ในการพิสูจน์ดังทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบท 8.4.11 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ เป็นเซตนับได้

จากทฤษฎีบททำให้ได้ข้อสรุปว่า $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ ทำให้เพียงพอในการพิสูจน์เซตอนันต์แบบนับได้ โดยแสดงว่าเซตนั้นสมมูลกับสับเซตของ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

ทฤษฎีบท 8.4.12 ให้ A และ B เป็นเซตนับได้ แล้ว $A \cup B$ เป็นเซตนับได้

ทฤษฎีบท 8.4.13 ให้ A และ B เป็นเซตนับได้แล้ว $A \times B$ เป็นเซตนับได้

จากทฤษฎีบทนี้จะได้ว่า $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ เป็นเซตอันดับแบบนับได้ เนื่องจาก $\mathbb{Z}$ เป็นเซตอันดับแบบนับได้

ทฤษฎีบท 8.4.14 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ เป็นเซตอันดับแบบนับได้

ทฤษฎีบท 8.4.15 $\mathbb{Q}$ เป็นเซตอันดับแบบนับได้

จากทฤษฎีบทนี้ทำให้สรุปได้ว่า $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ เป็นเซตอันดับแบบนับได้

บทนิยาม 8.4.16 เซตนับไม่ได้ (uncountable set) คือเซตที่ไม่ใช่เซตนับได้

การพิสูจน์เซตนับไม่ได้มีความยุ่งยากและซับซ้อนเมื่อใช้บทนิยามดังกล่าว จำเป็นต้องอาศัยผลที่ได้จากทฤษฎีบทต่างๆที่ได้มาในหัวข้อก่อนนี้ ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. เซตนับไม่ได้เป็นเซตอนันต์ (โดยนิยามของเซตนับได้)
2. ถ้า $A \subseteq B$ และ A เป็นเซตนับไม่ได้ แล้ว B เป็นเซตนับไม่ได้ (โดยบทแทรก 8.4.9)
3. ถ้า $A \sim B$ จะได้ว่า A เป็นเซตนับไม่ได้ ก็ต่อเมื่อ B เป็นเซตนับไม่ได้ (โดยทฤษฎีบท 8.4.3)
4. ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า A เป็นเซตนับไม่ได้ ก็ต่อเมื่อ ไม่มีฟังก์ชันจาก $\mathbb{N}$ ไปทั่วถึง A (โดยทฤษฎีบท 8.4.8)

ทฤษฎีบท 8.4.17 เซตของสับเซตทั้งหมดของ $\mathbb{N}$ หรือ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ เป็นเซตนับไม่ได้

ทฤษฎีบท 8.4.18 $(0, 1)$ เป็นเซตนับไม่ได้

ทฤษฎีบท 8.4.19 $\mathbb{R}$ เป็นเซตนับไม่ได้

ทฤษฎีบท 8.4.20 $\mathbb{Q}^{\mathbb{C}}$ เป็นเซตนับไม่ได้

แบบฝึกหัด 8.4

1. จงแสดงว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตอนันต์แบบนับได้
 - 1.1 $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$
 - 1.2 $\{-1, -3, -5, \dots\}$
 - 1.3 $\{1, 4, 9, 15, \dots\}$
 - 1.4 $\{2, 7, 12, 17, \dots\}$
2. จงแสดงว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตนับไม่ได้
 - 2.1 $(0, 1)$
 - 2.2 $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$
 - 2.3 $(1, \infty)$
 - 2.4 $(-1, 1)$
3. เซตของจำนวนคี่เป็นเซตนับได้
4. สับเซตของเซตนับได้ย่อมเป็นเซตนับได้
5. เซตใดก็ตามมีสับเซตที่เป็นเซตนับไม่ได้ย่อมเป็นเซตนับไม่ได้
6. ถ้า A เป็นเซตจำกัด และ B เป็นเซตนับได้ จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตนับได้
7. ถ้า A เป็นเซตนับไม่ได้ จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตนับไม่ได้
8. ให้ A เป็นเซตอนันต์ และ B เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้
9. ให้ A และ B เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้
10. ให้ A และ B เป็นเซต ถ้า $A \sim B$ และ A เป็นเซตนับได้ แล้ว B เป็นเซตนับได้

บทที่ 9

จำนวนเชิงการนับ

9.1 จำนวนเชิงการนับ

ทฤษฎีบท 9.1.1 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า

$$n(A) = n(B) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad A \sim B$$

สัจพจน์ 9.1.2 สัจพจน์ของจำนวนเชิงการนับ (Axiom of Cardinality)

จะมีหมู่ของเซต A เพียงหมู่เดียวซึ่งสำหรับแต่ละเซต A จะมีเซต B ใน A เพียงเซตเดียวเท่านั้น
ที่ $A \sim B$

บทนิยาม 9.1.3 สำหรับเซต A ใด ๆ เรียกเซต B ในสัจพจน์ 9.1.2 ว่า **จำนวนเชิงการนับ**
(cardinal number) ของ A เขียนแทนด้วย $\#(A)$

ทฤษฎีบท 9.1.4 สำหรับเซต A และ B ใด ๆ จะได้ว่า

$$\#(A) = \#(B) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad A \sim B$$

ตัวอย่าง 9.1.5 จงหาจำนวนเชิงการนับของเซตต่อไปนี้

1. $A = \{1, 2, 3\}$

2. $A = \{x \in \mathbb{Z} : -3 \leq x < 7\}$

บทนิยาม 9.1.6 ให้ A เป็นเซตใด ๆ

- เรียก $\#(A)$ ว่า **จำนวนเชิงการนับแบบจำกัด** (finite cardinal number) ถ้า A เป็นเซตจำกัด
- เรียก $\#(A)$ ว่า **จำนวนเชิงการนับแบบอนันต์** (infinite cardinal number) ถ้า A เป็นเซตอนันต์

ข้อสังเกต ในกรณีที่ A เป็นเซตจำกัด จำนวนเชิงการนับ $\#(A)$ คือ $n(A)$

ตัวอย่าง 9.1.7 จงตรวจสอบชนิดของจำนวนเชิงการนับของเซตต่อไปนี้

1. $\{1, 2, 3\}$

3. $[0, 1]$

2. $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$

4. $\mathbb{Z}$

ทฤษฎีบท 9.1.8 กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนเชิงการนับ จะได้ว่า

- | | |
|---|----------------------------|
| 1. $a = a$ | สมบัติสะท้อน (reflexive) |
| 2. ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$ | สมบัตินิสมมาตร (symmetric) |
| 3. ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$ | สมบัติถ่ายทอด (transitive) |

บทนิยาม 9.1.9 ให้ A และ B เป็นเซต แล้ว

$\#(A)$ น้อยกว่า (less than) $\#(B)$ เขียนแทนด้วย $\#(A) < \#(B)$ ก็ต่อเมื่อ

1. มี $B_0 \subseteq B$ ซึ่ง $A \sim B_0$ และ
2. ไม่มีเซต $A_0 \subseteq A$ ซึ่ง $A_0 \sim B$

และเรียก $\#(B)$ is มากกว่า (greater than) $\#(A)$ เขียนแทนด้วย $\#(B) > \#(A)$ นั่นคือ

$$\#(B) > \#(A) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \#(A) < \#(B)$$

บทนิยาม 9.1.10 ให้ A และ B เป็นเซต แล้ว

$$\#(A) \leq \#(B) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \#(A) < \#(B) \quad \text{หรือ} \quad \#(A) = \#(B)$$

ทฤษฎีบท 9.1.11 กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเชิงการนับ จะได้ว่า

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1. $a \leq a$ | สมบัติสะท้อน (reflexive) |
| 2. ถ้า $a \leq b$ และ $b \leq a$ แล้ว $a = b$ | สมบัติปฏิสมมาตร (antisymmetric) |
| 3. ถ้า $a \leq b$ และ $b \leq c$ แล้ว $a \leq c$ | สมบัติถ่ายทอด (transitive) |

ทฤษฎีบท 9.1.12 สำหรับแต่ละเซต A จะได้ว่า $\#(\emptyset) \leq \#(A)$

ทฤษฎีบท 9.1.13 สำหรับแต่ละเซต A ถ้า A เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ แล้ว $\#(A) = \#(\mathbb{N})$

บทนิยาม 9.1.14 เรียก $\#(\mathbb{N})$ ว่า **อะเลฟศูนย์** (aleph null) เขียนแทนด้วย $\aleph_0$

ทฤษฎีบท 9.1.15 ให้ A เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. ถ้า A เป็นเซตจำกัด แล้ว $\#(A) < \aleph_0$
2. ถ้า A เป็นเซตอนันต์ แล้ว $\aleph_0 \leq \#(A)$

ทฤษฎีบท 9.1.16 $\#(\mathbb{N}) < \#(\mathbb{R})$

บทนิยาม 9.1.17 เรียก $\#(\mathbb{R})$ ว่า **อะเลฟหนึ่ง** (aleph one) เขียนแทนด้วย $\aleph_1$

สมมติฐานของภาวะความต่อเนื่อง (Continuum Hypothesis)

ไม่มีเซต B ซึ่ง $\aleph_0 < \#(B) < \aleph_1$

การวางนัยทั่วไปของสมมติฐานของภาวะความต่อเนื่อง (General Continuum Hypothesis)

ถ้า A เป็นเซตอนันต์ แล้วไม่มีเซต B ซึ่ง $\#(A) < \#(B) < \#(\mathcal{P}(A))$

แบบฝึกหัด 9.1

1. ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด โดยที่ $A \subseteq B$ และ $A \sim B$ จงแสดงว่า $n(A) < n(B)$
2. จงแสดงว่า มีเซต A และ B ซึ่ง $A \subseteq B$ แต่ $A \neq B$ สอดคล้อง $\#(A) = \#(B)$
3. ให้ A และ B เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ จงแสดงว่า $\#(A) = \#(B)$
4. ให้ A เป็นเซตจำกัด B เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ จงแสดงว่า $\#(A) < \#(B)$
5. จงแสดงว่า จำนวนเชิงการนับแบบจำกัดน้อยกว่าจำนวนเชิงการนับแบบอนันต์
6. เซตใดต่อไปนี้ที่มีขนาดเป็น $\aleph_0$ หรือ $\aleph_1$ พร้อมให้เหตุผลประกอบ

6.1 $\mathbb{Q}$

6.3 $\mathbb{Q}^c$

6.5 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

6.2 $\mathbb{Z}$

6.4 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

6.6 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

7. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จงตรวจสอบข้อความต่อไปนี้ว่าจริงหรือเท็จ

7.1 ถ้า $\#(A) < \#(B)$ และ $\#(B) < \#(C)$ แล้ว $\#(A) < \#(C)$

7.2 ถ้า $\#(A) \leq \#(B)$ และ $\#(A) \geq \#(B)$ แล้ว $\#(A) = \#(B)$

7.3 ถ้า $\#(A) \leq \#(B)$ และ $\#(A) = \#(C)$ แล้ว $\#(A) < \#(C)$

7.4 ถ้า $\#(A) < \#(B)$ และ $\#(B) = \#(C)$ แล้ว $\#(A) < \#(C)$

8. จงแสดงว่าจำนวนเชิงการนับสอดคล้อง กฎไตรวิภาค (Trichotomy Law) นั่นคือ สำหรับจำนวนเชิงการนับ a และ b จะสอดคล้องข้อใดข้อหนึ่งใน 3 ข้อต่อไปนี้

8.1 $a < b$

8.2 $a = b$

8.3 $a > b$

9.2 การดำเนินการของจำนวนเชิงการนับ

บทนิยาม 9.2.1 ให้ A และ B เป็นเซตโดยที่ $A \cap B = \emptyset$ ถ้า $\#(A) = a$ และ $\#(B) = b$ นิยาม

$$a + b = \#(A \cup B) \quad \text{และ} \quad a \cdot b = \#(A \times B)$$

ตัวอย่าง 9.2.2 จงหา $3 + 4$ และ $3 \cdot 4$

ทฤษฎีบท 9.2.3 สมบัติการสลับที่ (Commutative)

ให้ a และ b เป็นจำนวนเชิงการนับ แล้ว

$$1. a + b = b + a$$

$$2. a \cdot b = b \cdot a$$

ทฤษฎีบท 9.2.4 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative)

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเชิงการนับ แล้ว

$$1. a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$2. a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

ทฤษฎีบท 9.2.5 สมบัติการแจกแจง (Distributive)

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเชิงการนับ แล้ว

$$1. a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$2. (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

ทฤษฎีบท 9.2.6 ให้ a เป็นจำนวนเชิงการนับ แล้ว

$$1. a + 0 = a = 0 + a$$

$$2. a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$$

$$3. a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$$

ทฤษฎีบท 9.2.7 ให้ a และ b เป็นจำนวนเชิงการนับ แล้ว

$$a \cdot b = 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a = 0 \quad \text{หรือ} \quad b = 0$$

ทฤษฎีบท 9.2.8 ให้ a เป็นจำนวนเชิงการนับแบบอนันต์ แล้ว

1. $a + a = a$

2. $a \cdot a = a$

ทฤษฎีบท 9.2.9 ให้ a เป็นจำนวนเชิงการนับแบบจำกัด แล้ว $a + \aleph_0 = \aleph_0$

ทฤษฎีบท 9.2.10 $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

ทฤษฎีบท 9.2.11 ให้ a เป็นจำนวนเชิงการนับแบบจำกัด แล้ว

1. $a + \aleph_1 = \aleph_1$
2. $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1$
3. $\aleph_1 + \aleph_1 = \aleph_1$

แบบฝึกหัด 9.2

1. ให้ a และ b เป็นจำนวนเชิงการนับ จงแสดงว่า

$$a \leq b \text{ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเชิงการนับ } c \text{ ที่ทำให้ } b = a + c$$

2. ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนเชิงการนับ จงแสดงว่า

2.1 $a \cdot b = 1$ ก็ต่อเมื่อ $a = 1$ และ $b = 1$

2.2 $a = b$ ก็ต่อเมื่อ $a + c = b + c$

2.3 ถ้า $a = b$ แล้ว $a \cdot c = b \cdot c$

2.4 ถ้า $a = b$ และ $c = d$ แล้ว $a + c = b + d$

2.5 ถ้า $a = b$ และ $c = d$ แล้ว $a \cdot c = b \cdot d$

3. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ พร้อมให้เหตุผลประกอบ

$$\text{ถ้า } a \cdot c = b \cdot c \text{ แล้ว } a = b$$

เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเชิงการนับ

4. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเชิงการนับ จงแสดงว่า

4.1 ถ้า $a \leq b$ แล้ว $a + c \leq b + c$

4.2 ถ้า $a \leq b$ แล้ว $a \cdot c \leq b \cdot c$

5. ให้ a เป็นจำนวนเชิงการนับ และ b เป็นจำนวนเชิงการนับแบบอนันต์ จงแสดงว่า

5.1 ถ้า $a \leq b$ แล้ว $a + b = b$

5.2 ถ้า $a \leq b$ และ $a \neq 0$ แล้ว $a \cdot b = b$

9.3 จำนวนเชิงอันดับ

สัจพจน์ 9.3.1 Axiom of Ordinality Let (A, r) be a well-ordered set. Then there exists the ordinal number of (A, r) .

บทนิยาม 9.3.2 Ordinal number The ordinal number of a well-ordered set (A, r) , denoted by $ord(A, r)$ such that

$$ord(A, r) = ord(B, s) \quad \text{if and only if}$$

1. there is a bijective function $f : A \rightarrow B$
2. if $(a, b) \in r$, then $(f(a), f(b)) \in s$

ตัวอย่าง 9.3.3 Which of the ordinal number are equal ?

1. $(\{1, 2, 3\}, \leq)$
2. $(\{0, 1, 3, 4\}, \leq)$
3. $(\{1, 2, 4, 8\}, |)$
4. $(\{\emptyset, \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \mathbb{N}_3\}, \subseteq)$

บทนิยาม 9.3.4 Addition Let (A, r) and (B, s) be well-ordered sets with $A \cap B = \emptyset$. Let $\text{ord}(A, r) = a$ and $\text{ord}(B, s) = b$. Then

$$a + b = \text{ord}(A \cup B, t)$$

where $(x, y) \in t \leftrightarrow [(x, y) \in r \vee (x, y) \in s \vee (x \in A \wedge y \in B)]$

ตัวอย่าง 9.3.5 จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงอันดับที่ $(A, \leq)$ และ $(B, \leq)$ เมื่อ

1. $A = \{1, 3, 5, 7\}$ และ $B = \{2, 4, 6\}$

2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{5, 6, 7\}$

บทนิยาม 9.3.6 Multiplication Let (A, r) and (B, s) be well-ordered sets with $A \cap B = \emptyset$. Let $\text{ord}(A, r) = a$ and $\text{ord}(B, s) = b$. Then

$$a \cdot b = \text{ord}(A \times B, t)$$

where $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in t \leftrightarrow [(y_1, y_2) \in s \wedge (x_1, x_2) \in r]$

ตัวอย่าง 9.3.7 จงหาผลคูณของจำนวนเชิงอันดับที่ $(A, \leq)$ และ $(B, \leq)$ เมื่อ

1. $A = \{1, 3, 5, 7\}$ และ $B = \{2, 4, 6\}$

2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{5, 6, 7\}$

แบบฝึกหัด 9.3

1. ให้ a , b และ c เป็นจำนวนเชิงอันดับที่ 1 จงแสดงว่า

$$1.1 \quad a + b = b + a$$

$$1.4 \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$1.2 \quad a \cdot b = b \cdot a$$

$$1.5 \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$1.3 \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$1.6 \quad \text{ถ้า } a = b \text{ แล้ว } a + c = b + c$$

2. จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงอันดับที่ $(A, \leq)$ และ $(B, \leq)$ เมื่อ

$$2.1 \quad A = \{1, 2\} \text{ และ } B = \{3, 4\}$$

$$2.2 \quad A = \{1, 2, 5\} \text{ และ } B = \{3, 4, 6\}$$

$$2.3 \quad A = \{0, 1, 7\} \text{ และ } B = \{2, 5\}$$

บรรณานุกรม

- กรรณิกา กวัคเพฑูรย์. (2542). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. (2536). **ทฤษฎีเซต**. นครปฐม: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.
- พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2559). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. (2558). **ระบบจำนวน**. กรุงเทพฯ: วี.พรี้นท์(1991).
- ไพโรจน์ เยียระยง. (2559). **ตรรกศาสตร์และทฤษฎีเซต**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- มานะ เอกจริยวงศ์. (2542). **ทฤษฎีเซต**. ลพบุรี: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ มหาวิทยาลัย สถาบันราชภัฏเทพสตรี ลพบุรี.
- Arthur Benjamin. (2015). **Magic of math**. New York: Hachette book group, Inc.
- Brian Clegg. (2003). **A brief history of infinity**. UK: CPI group (UK) Ltd.
- Pual Glendinning. (2012). **Maths in minutes**. London, England: Quercus Editions Ltd.

ประวัติผู้เขียน



นายธัญยศ จำปาวาย

- ปริญญาเอก วิทยาศาสตร์ดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2557
Ph.D. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2014
- ปริญญาโท วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2552
M.Sc. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2009
- ปริญญาตรี วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์, เกียรตินิยมอันดับสอง),
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549
B.Sc. (Mathematics, 2nd class honours), Chulalongkorn University, 2006
- ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

Email: thanatyod_ja@ssru.ac.th

Office: 1145

Facebook: www.facebook.com/Jampawai

Block: www.eledu.ssru.ac.th/thanatyod_ja

ผลงานทางวิชาการ

1. เอกสารประกอบการสอนวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู, 2559
2. ตำราวิชาทฤษฎีจำนวน, 2559
3. หนังสือความจริงที่ต้องพิสูจน์, 2560