



เฉลย Assignment 3
MAZ1302 แคลคูลัส ๑

หัวข้อ นิยามอนุพันธ์ กฎของอนุพันธ์ และกฎลูกโซ่ สัปดาห์ที่ 3 คะแนน 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธัญยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

1. จงหา $f'(x)$ โดยใช้ทนิยาม เมื่อ $f(x) = \sqrt{x+1}$
แนวคำตอบ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h+1) - (x+1)}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \# \end{aligned}$$

2. จงตรวจสอบว่า f มีอนุพันธ์ที่ $x = 0$ หรือไม่ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$

แนวคำตอบ พิจารณาลิมิต

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x}) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

สำหรับ $x \neq 0$ จะเห็นว่า

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

ถ้า $x > 0$ แล้ว

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

ถ้า $x < 0$ แล้ว

$$-x \geq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

ดังนั้น $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \#$

3. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จงพิสูจน์ว่า

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{โดยที่ } g(x) \neq 0$$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f}{g}(x+h) - \frac{f}{g}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x+h)} + \frac{f(x)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} [f(x+h) - f(x)] + f(x) \left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x)}{g(x)g(x+h)} [f(x+h) - f(x)] - f(x) \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h)g(x)} \right]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] - f(x) \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]}{g(x)g(x+h)} \\ &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \square \end{aligned}$$

4. กำหนดให้ $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \cdots (x-2562)$ จงหา $\frac{f'(1)}{f'(2)}$

แนวคำตอบ โดยการประยุกต์กฎการคูณของอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)'(x-2)(x-3) \cdots (x-2564) \\ &\quad + (x-1)(x-2)'(x-3) \cdots (x-2564) + \\ &\quad + (x-1)(x-2)(x-3)' \cdots (x-2564) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (x-1)(x-2)(x-3) \cdots (x-2564)' \\ f'(x) &= (1)(x-2)(x-3)(x-4) \cdots (x-2564) \\ &\quad + (x-1)(1)(x-3)(x-4) \cdots (x-2564) + \\ &\quad + (x-1)(x-2)(1)(x-4) \cdots (x-2564) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (x-1)(x-2)(x-3) \cdots (x-2563)(1) \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(1) &= (-1)(-2)(-3) \cdots (-2563) \\ f'(2) &= (1)(-1)(-2) \cdots (-2562) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{f'(1)}{f'(2)} = \frac{(-1)(-2)(-3) \cdots (-2563)}{(1)(-1)(-2) \cdots (-2562)} = -2563 \quad \#$$

5. จงหา $a > 0$ ที่ทำให้เส้นตรง $5x + y = 9$ ผังเส้นโค้ง $f(x) = 2x^2 + ax - 1$
แนวคำตอบ จะเห็นว่าเส้นตรง $5x + y = -9$ มีความชันเท่ากับ -5 และ $f'(x) = 4x + a$
 ดังนั้นเส้นสัมผัส $5x + y = 9$ สัมผัสเส้นโค้งนี้เมื่อ x สอดคล้องสมการ

$$-5 = f'(x) = 4x + a \quad \text{นั่นคือ} \quad x = \frac{-5-a}{4}$$

เนื่องจาก x สอดคล้องสมการในการหาจุดตัดของ $y = -5x - 9$ และ $y = 2x^2 + ax - 1$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} -5x - 9 &= 2x^2 + ax - 1 \\ -5\left(\frac{-5-a}{4}\right) - 9 &= 2\left(\frac{-5-a}{4}\right)^2 + a\left(\frac{-5-a}{4}\right) - 1 \\ \frac{25+5a}{4} &= 2\left(\frac{25+10a+a^2}{16}\right) + \left(\frac{-5a-a^2}{4}\right) + 8 \\ \frac{25+5a}{4} &= \left(\frac{25+10a+a^2}{8}\right) + \left(\frac{-5a-a^2}{4}\right) + 8 \\ 2(25+5a) &= (25+10a+a^2) + 2(-5a-a^2) + 64 \\ 50+10a &= 25+10a+a^2-10a-2a^2+64 \\ a^2+10a-39 &= 0 \\ (a+13)(a-3) &= 0 \\ a &= -13, 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = 3 \quad \#$

6. จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y = (x-1)^2(x^2-1)$ ที่มีเส้นสัมผัสขนานกับแกน X
แนวคำตอบ เนื่องจากเส้นสัมผัสขนานกับแกน X มีความชันเท่ากับ 0 นั่นคือ

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dy}{dx} = (x-1)^2(x^2-1)' + (x^2-1)[(x-1)^2]' \\ &= (x-1)^2(2x) + (x^2-1)2(x-1) \\ &= (x-1)^2(2x) + (x-1)(x+1)2(x-1) \\ &= (x-1)^2[2x+2(x+1)] \\ &= (x-1)^2(4x+2) \end{aligned}$$

จะได้ $x = 1, -\frac{1}{2}$ แล้ว

$$\begin{aligned} y(1) &= 0 \\ y\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}-1\right)^2 \left(\frac{1}{4}-1\right) = -\frac{27}{16} \end{aligned}$$

ดังนั้นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = (x-1)^2(x^2-1)$ ขนานกับแกน X ที่จุด $(1, 0)$ และ $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)$

7. ให้ $f(x) = g\left(\frac{1-u}{1+u}\right)$ และ $u(x) = \sqrt{x-1}$ โดยที่ $g'(0) = 4$ จงหา $\frac{df}{dx}$ เมื่อ $x = 2$

แนวคำตอบ ให้ $v = \frac{1-u}{1+u}$ จะได้ว่า $f(x) = g(v)$ โดยกฎลูกโซ่

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dv}g(v) \cdot \frac{d}{du}\left[\frac{1-u}{1+u}\right] \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x-1} \\ &= g'(v) \cdot \left[\frac{(1+u)\frac{d}{du}(1-u) - (1-u)\frac{d}{du}(1+u)}{(1+u)^2}\right] \cdot \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \\ &= g'(v) \cdot \left[\frac{(1+u)(-1) - (1-u)1}{(1+u)^2}\right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \\ &= g'(v) \cdot \left[\frac{-2}{(1+u)^2}\right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

เมื่อ $x = 2$ จะได้ว่า $u(2) = 1$, $v(1) = 0$ และ $u'(2) = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $\frac{df}{dx}$ เมื่อ $x = 2$ คือ

$$\frac{df}{dx} = g'(0) \cdot \left[\frac{-2}{(1+1)^2}\right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = 4 \left[-\frac{1}{2}\right] \cdot \frac{1}{2} = -1 \quad \#$$

8. กำหนดให้ $F(x) = f(xf(xf(x)))$ โดยที่ $f(1) = 2, f(2) = 3, f'(1) = 4, f'(2) = 5$ และ $f'(3) = 6$ จงหา $F'(1)$
แนวคำตอบ โดยกฎลูกโซ่

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(xf(xf(x))) \cdot [xf(xf(x))]' \\ &= f'(xf(xf(x))) \cdot [x[f(xf(x))]' + 1 \cdot f(xf(x))] \\ &= f'(xf(xf(x))) \cdot [x[f'(xf(x)) \cdot [xf(x)]'] + f(xf(x))] \\ &= f'(xf(xf(x))) \cdot [x[f'(xf(x)) \cdot [xf'(x) + 1 \cdot f(x)]] + f(xf(x))] \\ &= f'(xf(xf(x))) \cdot [x[f'(xf(x)) \cdot [xf'(x) + f(x)]] + f(xf(x))] \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} F'(1) &= f'(f(f(1))) \cdot [[f'(f(1)) \cdot [f'(1) + f(1)]] + f(f(1))] \\ &= f'(f(2)) \cdot [[f'(2) \cdot [4 + 2]] + f(2)] \\ &= f'(3) \cdot [5 \cdot 6 + 3] \\ &= 6 \cdot 33 \\ &= 198 \quad \# \end{aligned}$$