บทที่ 1
ประวัติความเป็นมาวิชาเรขาคณิต

บทที่ 1 จะกล่าวถึงประวัติความเป็นมาของวิชาเรขาคณิตยุคโบราณโดยสังเขป เพื่อให้เข้าใจประวัติความเป็นมาของเรขาคณิตในยุคสมัยต่างๆ ความสำคัญของเรขาคณิตที่มีผลต่อการดำรงชีวิตในแต่ละยุคสมัย โดยจะแบ่งยุคสมัยของเรขาคณิตยุคโบราณออกเป็น 3 ยุคสมัย ได้แก่ 1.เรขาคณิตในสมัยบาบิโลน 2. เรขาคณิตในสมัยอียิปต์ และ 3. เรขาคณิตในสมัยกรีก

1. เรขาคณิตยุคโบราณ

ความรู้ทางด้านเรขาคณิตนั้นไม่ปรากฏหลักฐานที่ชัดเจนว่าเริ่มมีตั้งแต่สมัยใด แต่สังเกตได้จากโบราณสถานต่างๆ ที่ยังคงมีให้เห็นในปัจจุบัน มีการออกแบบโดยใช้รูปเรขาคณิตต่างๆ มากมาย เช่น เครื่องประดับ ที่อยู่อาศัย อาวุธ และจากแผ่นจารึกที่ปรากฏขึ้นตามแต่ละยุคสมัยต่างๆ ดังนี้

1.1 เรขาคณิตในสมัยบาบิโลน

หลักฐานทางด้านเรขาคณิตในสมัยบาบิโลนนั้นมีค่อนข้างน้อยมาก ยากต่อการค้นหาข้อมูล เนื่องด้วยในสมัยนั้นชาวบาบิโลนยังไม่มีเครื่องมือในการบันทึกข้อมูลที่ดีนัก ส่วนใหญ่จะบันทึกเรื่องราวข้อมูล ความรู้ต่างๆ ลงในแผ่นจารึก ดังรูป

รูปที่ 1 แผ่นจารึกโจทย์ปัญหาทางด้านเรขาคณิตในยุคสมัยบาบิโลน

(ที่มา Friberg, J. (2008). *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts*)

จากหลักฐานที่จารึกในแผ่นดินเหนียวทำให้เราทราบเกี่ยวกับการพัฒนาการทางด้านคณิตศาสตร์ของยุคสมัยบาบิโลน เรขาคณิตในยุคสมัยบาบิโลนนั้นยังไม่ได้รับการพัฒนาเท่าที่ควร ชาวบาบิโลนมีความก้าวหน้าในเรื่องของระบบจำนวนอย่างมาก เป็นที่รู้จักกันในเรื่องของการใช้ระบบฐานหกสิบ สำหรับความรู้ทางด้านเรขาคณิตที่ปรากฏนั้นจะมีลักษณะดังต่อไปนี้

1.1.1 ปัญหาเกี่ยวกับการหาความยาว และการหาพื้นที่ของรูปเหลี่ยมต่าง ๆ

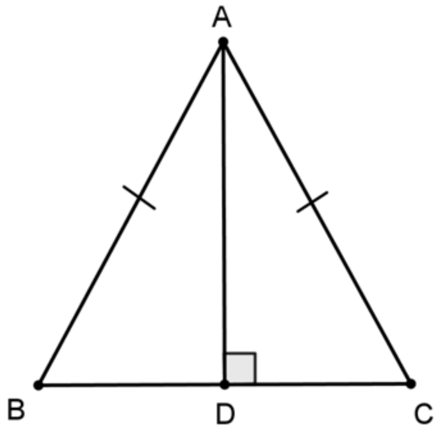
ชาวบาบิโลนมีความสามารถในการคำนวณหาพื้นที่ของทุ่งนา ลาน ที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยใช้ความยาวด้านกว้างคูณความยาวด้านยาว นอกจากนี้ยังรู้กฎในการหาพื้นที่รูปต่างๆ เช่น รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว รู้จักวิธีหาปริมาตรของปริซึมได้ นอกจากนั้นยังมีการบันทึกลักษณะของโจทย์ปัญหาทางเรขาคณิตที่ปรากฏในสมัยบาบิโลน ดังนี้

ตัวอย่างโจทย์

1. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง กำหนดให้ด้านยาวมีความยาว 4 หน่วย และความยาวเส้นทแยงมุมยาว 5 หน่วย ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้ยาวเท่าไร

2. กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแนบในรูปวงกลม โดยเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นเส้นผ่านจุดศูนย์กลางของรูปวงกลม จงหาพื้นที่หนึ่งในสี่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และพื้นที่หนึ่งในสี่ของรูปวงกลม

นอกจากนั้นชาวบาบิโลนยังสามารถที่จะบอกสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยเส้นที่แบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมแบ่งครึ่งฐาน ดังรูป



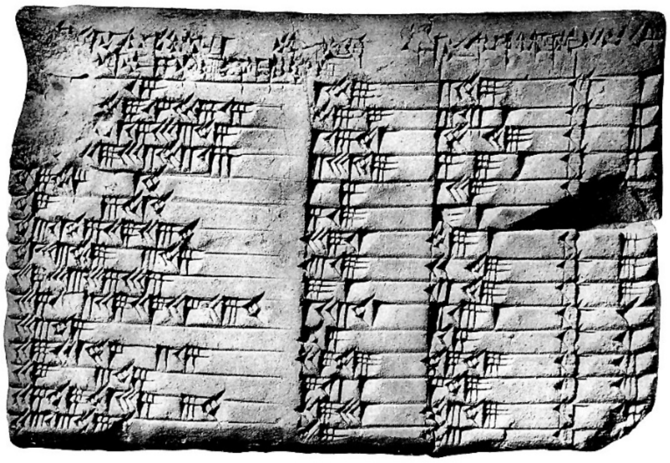
กำหนดให้ Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ถ้า $\overline{AD}$ แบ่งครึ่งมุม A แล้ว BD = CD

จากรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วข้างต้น จะเห็นได้ว่า ส่วนของเส้นตรง AD เป็นส่วนของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุม A และตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง BC แล้วส่งผลให้ ความยาวของส่วนของเส้นตรง BD เท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรง CD

1.1.2 ความสัมพันธ์ของความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จากจารึกที่ปรากฏ พบว่าชาวบาบิโลนได้มีการบันทึกความสัมพันธ์ของความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากไว้ โดยเรียกว่า “Plimpton 322” เป็นการบันทึกความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยบันทึกเป็นตัวเลขระบบฐานหกสิบลงในตาราง ดังรูป



รูปที่ 2 แผ่นจารึก Plimpton 322

(ที่มา The Plimpton 322 Tablet and the Babylonian Method of Generating Pythagorean Triples)

ได้มีการนำบันทึกที่ได้มาวิเคราะห์แล้วแปลออกเพื่อทำความเข้าใจ จากรูปข้างบนจะเห็นว่าตาราง Plimpton 322 จะมีแถวทั้งหมด 15 แถว และหลัก 4 หลัก ดังนี้

ตาราง 1 บันทึกความยาวด้านของ Plimpton 322

(1).9834	119	169	1
(1).9416	3367	11521	2*
(1).9188	4601	6649	3
(1).8862	12709	18541	4
(1).8150	65	97	5
(1).7852	319	481	6
(1).7200	2291	3541	7
(1).6928	799	1249	8*
(1).6427	541	769	9*
(1).5861	4961	8161	10
(1).5625	45	75	11
(1).4894	1679	2929	12
(1).4500	25921	289	13*
(1).4302	1771	3229	14
(1).3872	56	53	15*
(1).3692	175	337	16

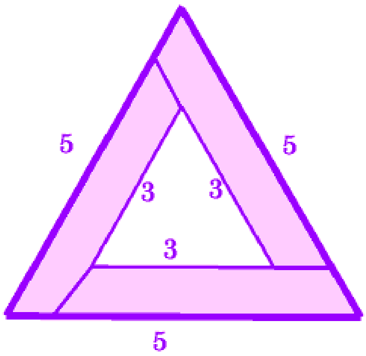
[1 59 00] 15	1 59	2 49	1
[1 56 56] 58 14 56 15	56 07	3 12 1	2
[1 55 07] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3
[1] 5[3] 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4
[1] 48 54 01 40	1 05	1 37	5
[1] 47 06 41 40	5 19	8 01	[6]
[1] 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7
[1] 41 33 59 03 45	13 19	20 49	8
[1] 38 33 36 36	9 01	12 49	9
[1] 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10
[1] 33 45	45	1 15	11
[1] 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12
[1] 27 [00] 03 45	7 12 01	4 49	13
[1] 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14
[1] 23 13 46 40	56	53	[15]

(ที่มา Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322)

จากตาราง 1 ข้างต้นเป็นชุดของความสัมพันธ์ของความยาวด้านที่ชาวบาบิโลนได้ทำการบันทึกซึ่งมีความสัมพันธ์กันได้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งชาวบาบิโลนได้ค้นพบความสัมพันธ์นี้ก่อนที่พีทาโกรัสจะคิดเป็นทฤษฎีบทพีทาโกรัส

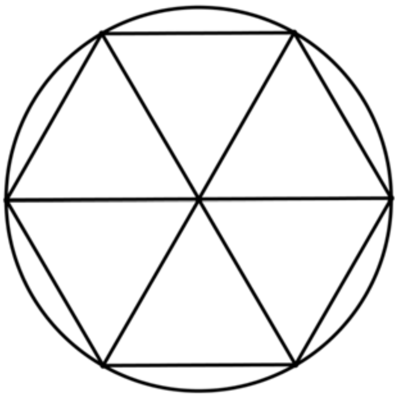
1.1.3 ความรู้เกี่ยวกับมุมภายในรูปสามเหลี่ยม และวงกลม

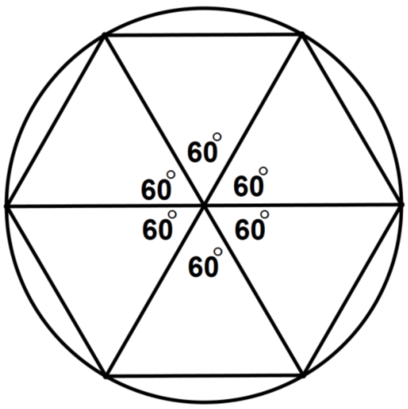
เนื่องจากชาวบาบิโลน ใช้ระบบตัวเลขฐานหกสิบในการคำนวณต่างๆ ทางด้านคณิตศาสตร์ ดังนั้นชาวบาบิโลนได้กำหนดขนาดมุมภายในแต่ละมุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าไว้เท่ากับ 60 องศา ดังรูป



รูปที่ 3 แผ่นจารึกรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าในยุคสมัยบาบิโลน

นอกจากการกำหนดมุมภายในแต่ละมุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแล้ว ชาวบาบิโลนยังสามารถแบ่งความยาวของเส้นรอบรูปวงกลมไว้เป็น 6 ส่วนที่แต่ละส่วนเท่ากัน และกำหนดขนาดของมุมภายในรูปวงกลมเท่ากับ 360 องศา โดยใช้หลักการนำรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าไปบรรจุในรูปวงกลม ที่ปรากฏในรูปวงกลม ดังรูป



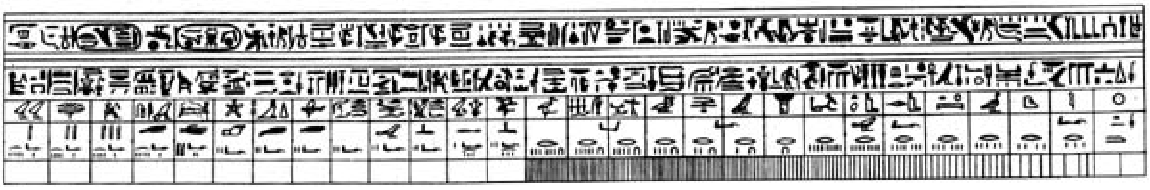


รูปที่ 4 การแบ่งความยาวเส้นรอบรูปวงกลมออกเป็น 6 ส่วนที่แต่ละส่วนเท่ากัน

นอกจากที่ชาวบาบิโลนได้คิดค้นการแบ่งรูปวงกลมออกเป็น 6 ส่วนที่แต่ละส่วนเท่ากัน และกำหนดให้รูปวงกลมมีขนาดของมุมภายในเท่ากับ 360 องศา แล้ว ชาวบาบิโลนยังมีการกำหนดค่าของ π เท่ากับ 3 ในการคำนวณหาความยาวเส้นรอบวงและพื้นที่ของรูปวงกลมในสมัยนั้น

1.2 เรขาคณิตในสมัยอียิปต์

ในสมัยอียิปต์นั้นความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และสถาปัตยกรรม มีความก้าวหน้าอย่างมาก โดยเฉพาะสถาปัตยกรรมที่โดดเด่น เช่น พีระมิด สฟิงซ์ เป็นต้น ในสมัยอียิปต์นั้นความรู้ทางด้านเรขาคณิตมีการพัฒนาอย่างมาก ชาวอียิปต์ให้ความสนใจกับการวัดความยาว การวัดขนาด การหาพื้นที่ และการหาปริมาตรเป็นอย่างมาก ชาวอียิปต์ได้มีการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวัด เรียกว่า “Egyptian Rulers” ดังรูป

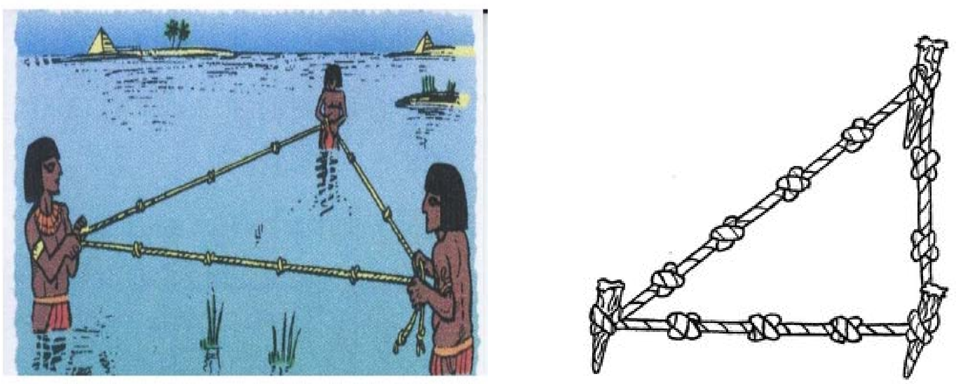


รูปที่ 5 ไม้บรรทัดอียิปต์ (Egyptian Rulers)

(ที่มา http://www.thefullwiki.org/Ancient_Egyptian_units_of_measurement)

นอกจากนั้นชาวอียิปต์ยังให้ความสนใจในการเปลี่ยนหน่วยการวัด แสดงให้เห็นว่าในสมัยอียิปต์นั้นมีการกำหนดระบบหน่วยการวัดเกิดขึ้นแล้ว ซึ่งจากหลักฐานที่ปรากฏพบว่าชาวอียิปต์มีการใช้หน่วยการวัดพื้นที่เป็นตารางฟุต

อีกทั้งชาวอียิปต์ยังรู้จักวิธีการใช้เชือก (Rope Stretcher) มาใช้ในการวัดความยาว และสามารถสร้างชุดความสัมพันธ์ของความยาวเชือกที่ทำให้ได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



รูปที่ 6 วิธีการใช้เชือก (Rope Stretcher) ของชาวอียิปต์

(ที่มา Serra, M. (1997, pp. 475-522). *Discovering geometry an inductive approach.*)

1.2.1 สถาปัตยกรรมทางด้านเรขาคณิตในสมัยอียิปต์

สถาปัตยกรรมทางด้านเรขาคณิตในสมัยอียิปต์นั้นได้รับการยอมรับว่าเป็นสถาปัตยกรรมที่สวยงาม และยิ่งใหญ่ ชาวอียิปต์โบราณได้สร้างและออกแบบโดยใช้พื้นฐานทางด้านเรขาคณิต และวิศวกรรม มาใช้ในการออกแบบ เช่น พีระมิด สฟิงซ์ และรูปปั้นเทพเจ้าต่างๆ มากมาย ดังรูป


รูปที่ 7 พีระมิด และสฟิงซ์ในประเทศอียิปต์
(ที่มา https://arunya082.wordpress.com/ย้อนรอยพีระมิดแห่งอียิ/ประวัติความเป็นมาของพี/)

1.2.2 การหาพื้นที่ และปริมาตรในสมัยอียิปต์

ชาวอียิปต์ได้ให้ความสำคัญ และสนใจเกี่ยวกับปัญหาทางด้านเรขาคณิตเป็นอย่างมาก ประกอบไปด้วยปัญหาการวัดความยาว การหาความยาว การหาพื้นที่ และการหาปริมาตร ของรูปเรขาคณิต ซึ่งมีปรากฏในแผ่นกระดาษปาปิรุส นักคณิตศาสตร์ชาวอียิปต์ได้ใช้กระดาษปาปิรุสในการบันทึกโจทย์ปัญหาทางด้านเรขาคณิตไว้มากมาย และบันทึกที่มีชื่อเสียงมากที่สุด คือ รินด์ปาปิรุส (Rhind Papyrus) และ มอสโคว์ปาปิรุส (Moscow Papyrus)

1.2.2.1 รินด์ปาปิรุส (The Rhind Mathematical Papyrus; RMP)

กระดาษรินด์ปาปิรุส เขียนโดยนักคณิตศาสตร์ชาวอียิปต์ชื่อ “เอมีส” (Ahmes) ในช่วง 2,000-1,800 ก่อนปีคริสตศักราช บางครั้งถูกเรียกว่า “**Ahmes Papyrus**” โดย เอมีส ได้ทำการบันทึกรวบรวมโจทย์ปัญหาทางด้านเลขคณิต พีชคณิต เรขาคณิต และการวัด ทั้งหมด 84 ปัญหา

ได้มีนักโบราณคดีชาวสก๊อตแลนด์ ชื่อ “อะเล็กซานเดอร์ เฮนรี่ รินด์” (Alexander Henry Rhind) ได้ทำการซื้อแผ่นบันทึกปาปิรุส มาจากเมืองลักเซอร์ (Luxor) ในประเทศอียิปต์ และได้กำหนดชื่อแผ่นจารึกนั้นว่า “Rhind Papyrus” และได้นำมาเรียบเรียงเขียนเป็นหนังสือทั้งหมด 3 เล่ม ได้แก่

เล่ม 1(Book 1) โจทย์ปัญหาทางด้านเลขคณิต 40 ปัญหา

เล่ม 2(Book 2) โจทย์ปัญหาทางด้านเรขาคณิตและการวัด 20 ปัญหา

เล่ม 3(Book 3) โจทย์ปัญหาเศษส่วน 24 ปัญหา

ในหนังสือเล่มที่ 2(Book 2) ได้ทำการบันทึกโจทย์ปัญหาและวิธีการหาคำตอบทางเรขาคณิต โดยแบ่งได้ออกเป็น 3 ส่วน คือ 1.การหาพื้นที่รูปเรขาคณิต 2. การหาปริมาตรรูปทรงเรขาคณิต และ 3. พีระมิด ตัวอย่างเช่น

Problem 41 RMP.

Computes the volume of a cylindrical granary of diameter 9 cubits and height 10 cubits

(จงคำนวณหาปริมาตรยุ้งทรงกระบอกที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 9 คิวบิท และสูง 10 คิวบิท)

Problem 44 RMP.

Computes the volume of a rectangular granary of length 10, breadth 10 and height 10.

(จงคำนวณหาปริมาตรยุ้งทรงสี่เหลี่ยม ที่มีความยาว 10 ความกว้าง 10 และความสูง 10)

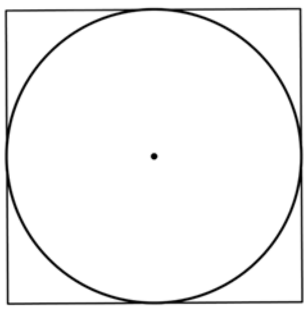
Problem 50 RMP.

Find the area of a round field of diameter 9 khet.

(จงหาพื้นที่รอบๆ สนามที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 9 เขต)

จะเห็นว่าจากตัวอย่างโจทย์ปัญหาที่กล่าวข้างต้น แสดงให้เห็นว่าชาวอียิปต์สามารถคำนวณหาพื้นที่ และปริมาตร ของรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติได้ ในที่นี้จะยกตัวอย่างสูตรที่ใช้ในการคำนวณ

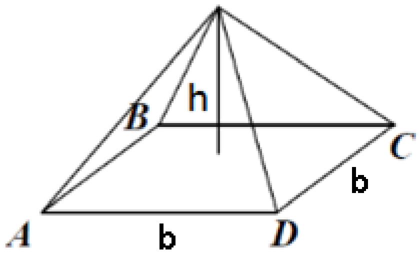
จากรูปที่กำหนดให้



สูตรการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ที่มีรูปวงกลมแนบใน

- ความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยม เท่ากับ $d - \frac{1}{9}d$ เมื่อ d แทนพื้นที่รูปวงกลม
- พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม เท่ากับ $\frac{64}{81}d^2$

กำหนดรูปพีระมิด



สูตรการหาปริมาตรของพีระมิด

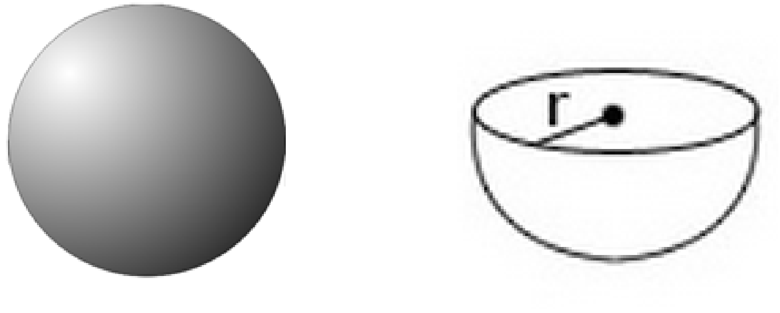
จะได้ $V = \frac{1}{3} \times b^2 \times h$

เมื่อ b คือ ความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

h คือ ความสูงของพีระมิด

1.2.2.2 **มอสโคว์ปาปิรุส** (The Moscow Mathematical Papyrus; MMP)

กระดาษมอสโคว์ปาปิรุส หรือกระดาษโกเรนนิเชฟ (The Golenishchev Mathematical Papyrus) เป็นแผ่นจารึกที่นักคณิตศาสตร์โบราณได้ทำการบันทึกและรวบรวมโจทย์ปัญหาทางด้านเรขาคณิตไว้ มีโจทย์ปัญหาทั้งหมด 25 ข้อ โดยแบ่งประเภทของคำถามออกเป็น 5 ประเภท ได้แก่ 1. Ship’s part problems 2. Aha problems 3. Pefsuproblems 4. Baku problems และ 5. Geometry problem ซึ่งปัญหาที่น่าสนใจที่พบในกระดาษมอสโคว์ปาปิรุส คือโจทย์ปัญหาข้อที่ 10 และข้อที่ 14 ดังนี้

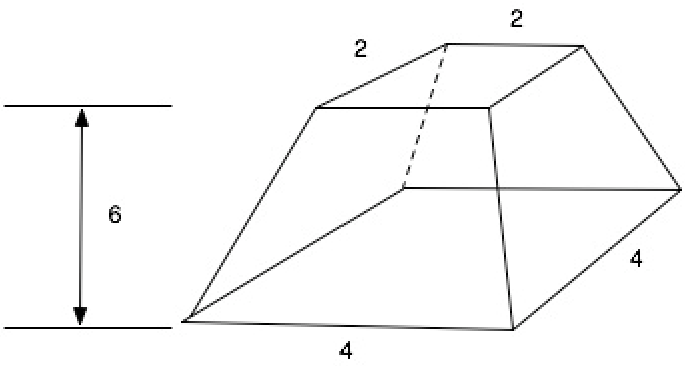


Problem 10 MMP. Computes the area of a hemisphere.

(จงคำนวณหาพื้นที่ผิวของครึ่งทรงกลม)

- สูตรที่ใช้ในการคำนวณ $2\pi r^2$

***ชาวอียิปต์ได้มีการกำหนดค่า $\pi = \frac{256}{81}$ มีค่าประมาณ 3.16049.......



Problem 14 MMP.

The base is a square of side 4 cubits, the top is a square of side 2 cubits and the height of the truncated pyramid is 6 cubits.

(กำหนดรูปพีระมิดยอดตัดที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้าน ด้านละ 4 คิวบิท มีส่วนตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้าน ด้านละ 2 คิวบิท และมีความสูง 6 คิวบิท จงหาปริมาตรของรูปพีระมิดยอดตัด)

- สูตรที่ใช้ในการคำนวณ $V = \frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$

1.3 เรขาคณิตในสมัยกรีก

ในยุคสมัยกรีก ความรู้ทางด้านเรขาคณิตนั้นได้รับการพัฒนาอย่างมาก จนถือว่าเป็นยุคทองของเรขาคณิตเลยก็ว่าได้ ชาวกรีกนั้นได้ให้ความสนใจกับเรขาคณิตอย่างมาก มีการนำความรู้ทางด้านพีชคณิตไปใช้ในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต มีการนำเรขาคณิตไปใช้ในด้านของศิลปะ จึงทำให้เกิดวิธีการสร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่ายขึ้นมา โดยการใช้วงเวียน และสันตรงเท่านั้น อีกทั้งคำว่า “Geometry” นั้นก็เป็นคำที่ชาวกรีกได้กำหนดขึ้นมา โดยคำว่า Geometry คือคำที่มีคำว่า Geo (โลก (Earth)) และคำว่า metron (การวัด (measurement)) ซึ่งหมายถึงศาสตร์วิชาที่ว่าด้วยเรื่องของการวัดขนาด วัดความยาว วัดพื้นที่ ใดๆ ของโลก นั่นเอง เช่น การวัดความยาวที่ดินที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าว่ามีความกว้างและความยาวเท่าไร การวัดพื้นที่ของวงกลม การวัดระยะทางจากที่หนึ่งไปยังอีกที่หนึ่ง เป็นต้น แต่ความหมายของเรขาคณิตในปัจจุบันมีความแตกต่างออกไปมากเพราะว่าวิชาเรขาคณิตได้รับการพัฒนามาอย่างต่อเนื่องและแตกสาขาออกไปหลายสาขา

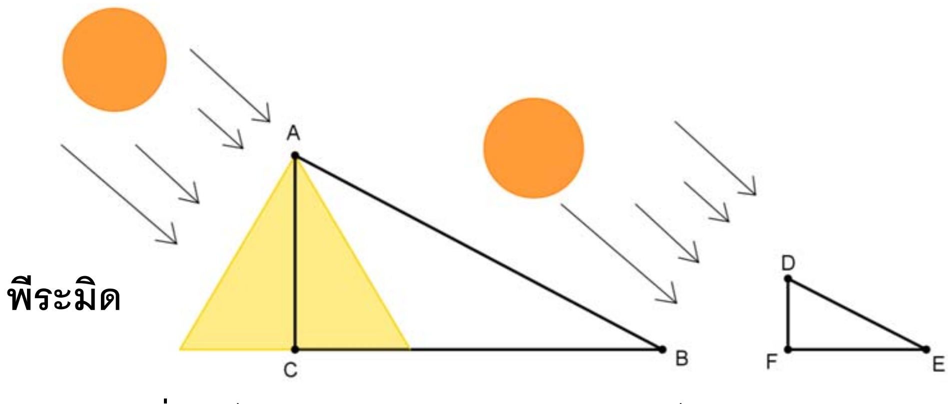
ในสมัยกรีกมีกลุ่มนักคณิตศาสตร์ที่มีผลงานทางด้านเรขาคณิต และมีชื่อเสียงมากมาย แนวคิดนั้นยังส่งผลต่อการเรียนเรขาคณิตในปัจจุบัน เช่น พีทาโกรัส ยุคลิด อาร์คีมิดีส เป็นต้น ซึ่งจะขอกล่าวถึงนักคณิตศาสตร์ที่มีอิทธิพลต่อด้านเรขาคณิต ดังต่อไปนี้

เธลิสแห่งมิเลตุส (Thales of Miletus)

เธลิสเป็นนักคณิตศาสตร์ยุคสมัยกรีก เกิดที่เมืองมิเลตุส ประเทศตุรกี เขาได้ศึกษาวิชาคำนวณทางด้านคณิตศาสตร์จากนักบวช เธลิสได้รับการยกย่องว่าเป็น “บิดาแห่งเรขาคณิต” เดิมทีเธลิสมีอาชีพเป็นพ่อค้า แต่เมื่อเลิกอาชีพพ่อค้า เธลิสได้หันมาทำการศึกษาค้นคว้าเรื่องปัญหาต่างๆ ทางด้านเรขาคณิต ปัญหาการวัดความสูงของพีระมิด ปัญหาการคำนวณระยะทางในการเดินเรือในทะเล เธลิสได้เขียนตำราเกี่ยวกับการหาทิศและการเดินเรือ ทฤษฎีเรขาคณิต ดาราศาสตร์ และตำราอื่นๆ อีกมากมาย

เมื่อ 585 ปีก่อนคริสตศักราช เธลิส ได้พยากรณ์รอบเวลาในการเกิดสุริยุปราคา (solar eclipse) ซึ่งจะเกิดขึ้นประมาณ 19 ปีต่อจากปีที่เขาได้ประกาศ ต่อมานักคณิตศาสตร์เชื่อว่าการที่เธลิสทำนายได้ถูกต้อง เพราะเธลิสเป็นผู้สังเกตและศึกษาการเปลี่ยนแปลงของท้องฟ้าอยู่ตลอดเวลา มีการจดบันทึกการเปลี่ยนแปลง การเคลื่อนที่ของดวงดาวบนท้องฟ้าทำให้ทราบการเคลื่อนที่ในตำแหน่งต่างๆ ของดวงดาวได้อย่างถูกต้อง

เธลิสได้มีโอกาสเดินทางไปประเทศอียิปต์ ขณะนั้นศิลปวิทยาการที่อียิปต์รุ่งเรือง โดยเฉพาะคณิตศาสตร์ในสาขาวิชาเรขาคณิต เธลิสได้อธิบายวิธีการคำนวณความสูงของพีระมิดที่อียิปต์โดยอาศัยการสังเกต เธลิสได้สังเกตเงาที่เกิดขึ้นว่ามีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีลักษณะคล้ายกัน ดังรูป



รูปที่ 8 วิธีการคิดคำนวณในการหาความสูงของพีระมิดของเธลิส

จากรูปจะเห็นกระบวนการคิดของเธลิส ซึ่งเธลิสได้สังเกตปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น พบว่า ณ เวลาที่ดวงอาทิตย์ขึ้นเวลาเดียวกัน เมื่อแสงอาทิตย์ส่องไปที่พีระมิดที่มีความสูง AC ก็จะเกิดเงาจากพีระมิดที่ทอดยาวไปได้ความยาว CB และที่ความสูง DF ก็จะมีเงาทอดยาวไป FE ซึ่งสังเกต

ว่าจะเกิดรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน คือ Δ ABC $\sim \Delta$ DEF และ $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ จะได้ความสูงของพีระมิดเท่ากับ $\frac{BC \times DF}{EF}$

ผลงานที่เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เธลิสได้สร้าง นั้นมีด้วยกัน 5 ทฤษฎีบท ดังนี้

1. วงกลมใดๆ ถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่าๆ กันโดยเส้นผ่านศูนย์กลาง
2. มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน
3. เส้นตรงสองเส้นตัดกันมุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นย่อมเท่ากัน
4. รูปสามเหลี่ยมสองรูปถ้ามีมุมเท่ากันสองมุมและด้านเท่ากันหนึ่งด้าน รูปสามเหลี่ยมทั้งสองคล้ายกัน
5. มุมที่เกิดจากจุดบนเส้นรอบวงกลมลากเส้นต่อกับจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางเป็นมุมฉาก

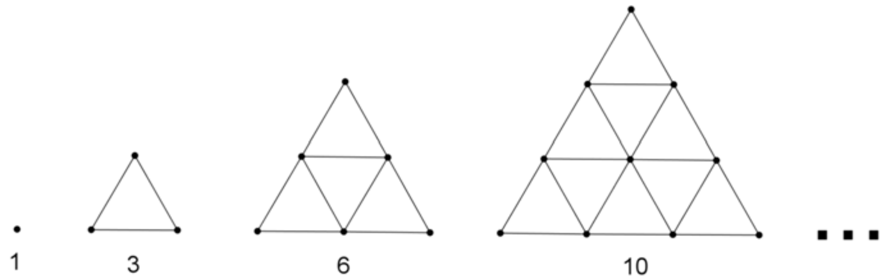
ที่กล่าวข้างต้นนั้นเป็นเพียงส่วนหนึ่งที่เป็นผลงานทางด้านคณิตศาสตร์ เกี่ยวกับเรขาคณิตของเธลิสเท่านั้น

พีทาโกรัส (Pythagoras)

พีทาโกรัสเกิดเมื่อประมาณ 582 ก่อนคริสตศักราชที่เมืองซามอส (Samos) ประเทศกรีก พีทาโกรัสเป็นผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงอย่างมากในสมัยนั้น พีทาโกรัสเป็นลูกศิษย์ของเธลิส ผลงานทางด้านเรขาคณิตที่มีชื่อเสียงมากที่สุดของพีทาโกรัส คือ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (Right Triangles) และพีทาโกรัสเป็นนักคณิตศาสตร์ที่มีอิทธิพลต่อชาวกรีกในยุคนั้นอย่างมาก จนได้มีการก่อตั้งโรงเรียนขึ้นมา คือโรงเรียนพีทาโกเรียน (Pythagoreans)

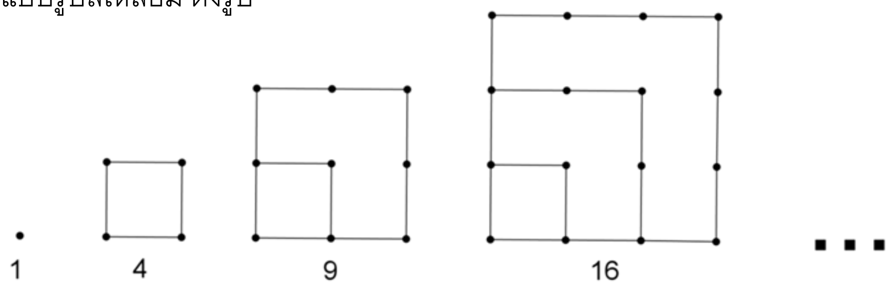
โรงเรียนของพีทาโกรัสจะสอนเน้นหนักไปในเรื่องของปรัชญาคณิตศาสตร์และดาราศาสตร์ เกี่ยวกับคณิตศาสตร์พีทาโกรัสได้กล่าวว่า "คณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานของทุกสิ่งทุกอย่างถ้าไม่มีคณิตศาสตร์แล้วทุกอย่างก็จะไม่เกิดขึ้น" ซึ่งก็เป็นสิ่งที่ถูกต้องในสมัยนั้น เพราะความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์เป็นตัวก่อกำเนิดความรู้ที่หลากหลาย และสถาปัตยกรรมที่หลากหลาย ซึ่งผลงานทางด้านคณิตศาสตร์ของพีทาโกรัสนั้นมีมากมายทั้งทางด้านเลขคณิต พีชคณิต และเรขาคณิต เช่น

จำนวนเชิงสามเหลี่ยม (Triangular Number) เป็นการนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนมาบูรณาการกับความรู้ทางด้านเรขาคณิต เป็นชุดลำดับของจำนวน ได้แก่ 1, 3, 6, 10, ... ซึ่งเกิดจากการสังเกตแบบรูปสามเหลี่ยมแล้วเขียนออกมาในรูปลำดับของจำนวน ดังรูป



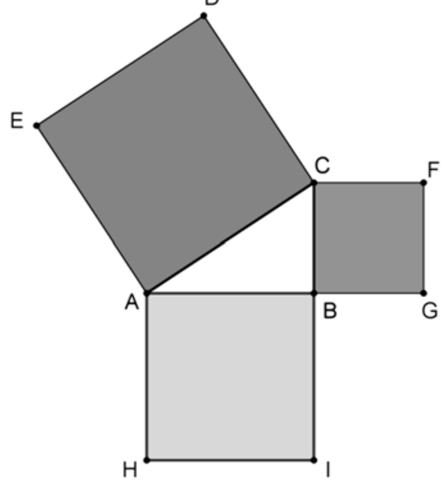
รูปที่ 9 แสดงความสัมพันธ์ของจำนวนเชิงสามเหลี่ยม

จำนวนเชิงสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Square Number) เป็นการนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนมาบูรณาการกับความรู้ทางด้านเรขาคณิตเช่นเดียวกัน เป็นชุดลำดับของจำนวนได้แก่ 1, 4, 9, 16, ... ซึ่งได้จากการสังเกตแบบรูปสี่เหลี่ยม ดังรูป



รูปที่ 10 แสดงความสัมพันธ์ของจำนวนเชิงสี่เหลี่ยม

ผลงานที่สร้างชื่อเสียงให้กับพีทาโกรัสเป็นอย่างมาก ยังคงนำมาใช้จนถึงปัจจุบัน คือทฤษฎีที่ว่าด้วย “รูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้าพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านๆด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านที่เหลือแล้วมุมที่ประกอบด้านที่เหลือนั้นจะเป็นมุมฉาก” หรือที่เรียกว่า “ทฤษฎีบทพีทาโกรัส”



กำหนด Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ
โดยที่ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ACDE อยู่บนด้าน AC
พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส BCFG อยู่บนด้าน BC
และพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABIH อยู่บนด้าน AB
จะต้องพิสูจน์ว่า $AC^2 = AB^2 + BC^2$

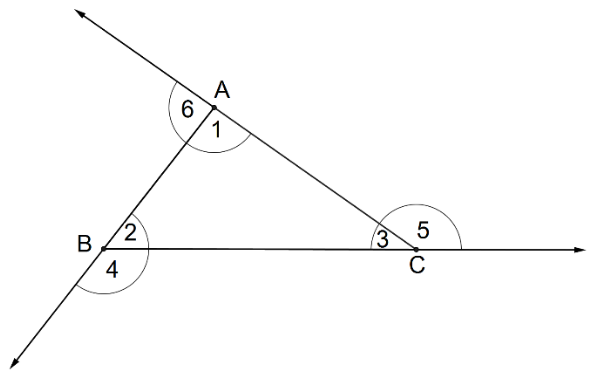
จากที่กล่าวข้างต้นนั้น เป็นเพียงตัวอย่างผลงานทางด้านเรขาคณิตที่พีทาโกรัส ได้สร้างขึ้น ซึ่งยังมีผลงานต่างๆ อีกมากมายที่ต้องทำการศึกษา เช่น ความสัมพันธ์ของขนาดมุมภายใน และขนาดของมุมภายนอกรูปสามเหลี่ยมโดยพีทาโกรัสได้กล่าวว่า “ขนาดของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้สองมุมฉาก และขนาดของมุมภายนอกรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้สี่มุมฉาก” ในที่นี้จะขอยกตัวอย่างการพิสูจน์เกี่ยวกับผลรวมขนาดของมุมภายนอกรูปสามเหลี่ยม ดังนี้

บทนิยาม มุมภายนอกรูปสามเหลี่ยม (exterior angle of triangles) คือ มุมที่อยู่ภายนอกรูปสามเหลี่ยม โดยแขนข้างหนึ่งเป็นด้านของรูปสามเหลี่ยม และแขนอีกข้างหนึ่งเป็นส่วนที่ต่อออกไปจากด้านคู่ประชิดของรูปสามเหลี่ยมนั้น

ทฤษฎีบท ผลรวมขนาดของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับสี่มุมฉาก

สิ่งที่กำหนดให้ 1. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ โดยมี $\hat{1}$ $\hat{2}$ และ $\hat{3}$ เป็นมุมภายใน

2. ให้ $\hat{4}$ $\hat{5}$ และ $\hat{6}$ เป็นมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม ABC ตามลำดับ



สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\hat{4} + \hat{5} + \hat{6}$ = 4 มุมฉาก

พิสูจน์ จาก $\hat{1} + \hat{6} = \hat{2} + \hat{4} = \hat{3} + \hat{5}$ = 2 มุมฉาก

(มุมประชิดบนเส้นตรงเดียวกันรวมกันได้สองมุมฉาก)

จะได้ $(\hat{1} + \hat{6}) + (\hat{2} + \hat{4}) + (\hat{3} + \hat{5})$ = 6 มุมฉาก

แต่ $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$ = 2 มุมฉาก (ผลรวมของมุมภายใน Δ เท่ากับสองมุมฉาก)

นั่นคือ $(\hat{4} + \hat{5} + \hat{6})$ + 2 มุมฉาก = 6 มุมฉาก

ดังนั้น $\hat{4} + \hat{5} + \hat{6}$ = 4 มุมฉาก **ซ.ต.พ.**

ยุคลิดแห่งอะเล็กซานเดรีย (Euclid’s of Alexandria)

ยุคลิดเป็นนักคณิตศาสตร์ที่สำคัญและเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย ยุคลิดเกิดที่เมืองอะเล็กซานเดรีย ประเทศอิยิปต์ เมื่อราว 365 ปีก่อนคริสตศักราช หลักฐานและเรื่องราวเกี่ยวกับยุคลิดยังคงสับสนเพราะมีผู้เขียนไว้หลายรูปแบบ เช่น ยุคลิดเป็นบุคคลที่เขียนหนังสือ The Elements หรือยุคลิดเป็นหัวหน้าทีมนักคณิตศาสตร์ที่อาศัยอยู่ที่อะเล็กซานเดรียและได้ช่วยกันเขียนหนังสือ The Elements อย่างไรก็ดีส่วนใหญ่ก็มั่นใจว่ายุคลิดมีตัวตนจริงและผลงาน The Elements ยังคงหลงเหลืออยู่จนถึงปัจจุบัน

อิลิเมนต์ (Element) เป็นผลงานทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญของยุคลิด ซึ่งเขาได้ทำการรวบรวมความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยเลขคณิต พีชคณิต และเรขาคณิต ไว้ทั้งหมด 13 เล่ม ได้แก่

เล่มที่ 1 รากฐานเรขาคณิต (ทฤษฎีรูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน และการหาพื้นที่)
เล่มที่ 2 พีชคณิตเชิงเรขาคณิต (การแปลง พื้นที่)
เล่มที่ 3 ทฤษฎีวงกลม (วงกลม คอร์ด และเส้นสัมผัสวงกลม)
เล่มที่ 4 การสร้างและการพิสูจน์รูปหลายเหลี่ยมที่ล้อมรอบด้วยรูปวงกลม
เล่มที่ 5 สัดส่วน
เล่มที่ 6 ความคล้ายกันทางเรขาคณิต (การประยุกต์ใช้สัดส่วน)
เล่มที่ 7 รากฐานทฤษฎีจำนวน
เล่มที่ 8 ทฤษฎีจำนวน (ต่อจากเล่ม 7)
เล่มที่ 9 การนำทฤษฎีจำนวนไปประยุกต์ใช้
เล่มที่ 10 จำนวนอตรรกยะ
เล่มที่ 11 รูปเรขาคณิตทรงตัน
เล่มที่ 12 ทฤษฎีรูปเรขาคณิตสามมิติ
เล่มที่ 13 รูปเรขาคณิตสามมิติของเพลโต

โดยตำราเล่มนี้จะกล่าวถึงเพียงอิลิเมนต์ในเล่มที่ 1 ซึ่งจะกล่าวในบทที่ 3 จากผลงานที่ปรากฏแสดงให้เห็นว่ายุคลิดเป็นนักคณิตศาสตร์ที่ความสามารถอย่างหลากหลายทั้งทางด้านเลขคณิต เรขาคณิต และพีชคณิต ซึ่งผลงานที่มีชื่อเสียงที่สำคัญอีกอย่างของยุคลิด และนำมาใช้ในปัจจุบัน นั้นก็คือกระบวนการหา ห.ร.ม. โดยวิธีขั้นตอนของยุคลิด เช่น

ต้องการหา ห.ร.ม. ของ 767 และ 2,714

วิธีทำ

1	767	2714	3
	<u>413</u>	<u>2301</u>	
6	354	413	1
	<u>354</u>	<u>354</u>	
	0	59	

2,714= 767(3) + 413

767 = 413(1) + 354

413 = 354(1) + 59

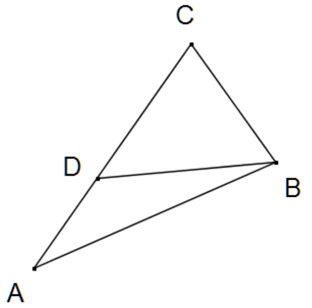
354 = 59(6) + 0

จะได้ว่า 59 เป็น ห.ร.ม. ของ 767 และ 2,714

เช่น

ทฤษฎีบท 18 รูปสามเหลี่ยมใดๆ ด้านที่ยาวกว่าย่อมอยู่ตรงข้ามมุมที่ใหญ่กว่า

กำหนดรูป



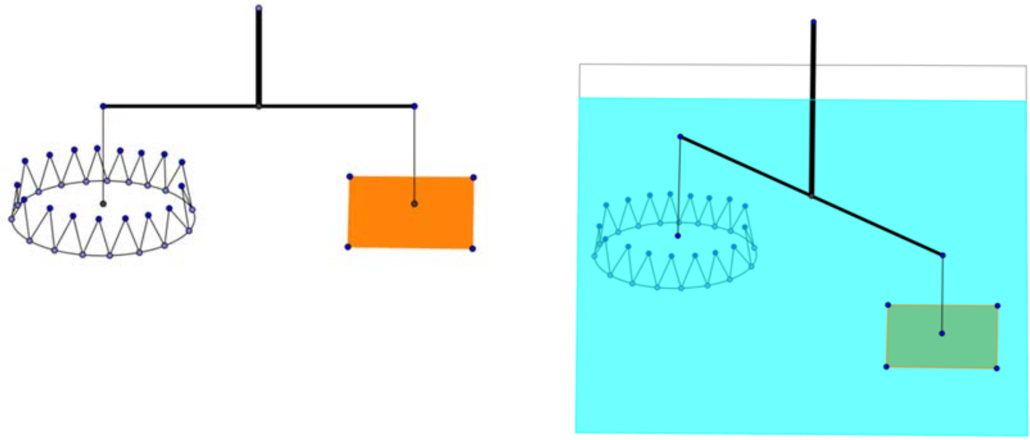
กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ใดๆ โดยที่ AC > BC

จะต้องพิสูจน์ว่า $A\hat{B}C > B\hat{A}C$

อาร์คิมีดิส (Archimedes)

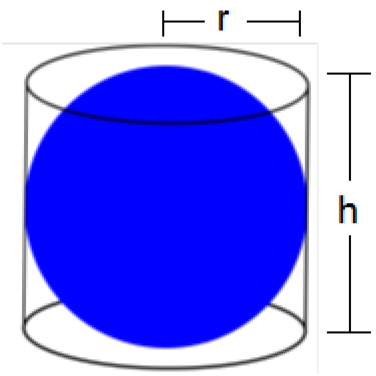
อาร์คิมีดิส เกิดที่เมืองไซราคิวส์ เกาะซิซิลี เมื่อประมาณ 287 ก่อนปีคริสตศักราช อาร์คิมีดิสมีความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก ได้เดินทางไปศึกษาวิชาคณิตศาสตร์กับซีนอน แห่งซามอส ซึ่งเป็นลูกศิษย์ของยุคลิดที่เมืองอะเล็กซานเดรีย หลังจากอาร์คิมีดิสได้สำเร็จการศึกษาได้ทำงานในตำแหน่งนักปราชญ์ที่ราชสำนัก พระเจ้าเฮียโรที่ 2 ได้ทราบถึงความสามารถของอาร์คิมีดิส จึงขอให้อาร์คิมีดิสช่วยทำการตรวจสอบมงกุฎทองคำที่ให้ช่างฝีมือสร้างขึ้นมาตามคำสั่ง พระเจ้าเฮียโรที่ 2 คิดว่าช่างทำมงกุฎมีการฉ้อโกงโดยมีการผสมเงินลงไปในมงกุฎ ในการตรวจสอบนั้นจะต้องไม่ทำให้มงกุฎเสียหาย ดังนั้นจะหลอมมงกุฎให้เป็นรูปปกติเพื่อคำนวณหาค่าความหนาแน่นไม่ได้ วันหนึ่งขณะอาบน้ำ เขาสังเกตว่าระดับน้ำในอ่างเพิ่มสูงขึ้นขณะเขาก้าวลงไป จึงคิดได้ว่าวิธีการนี้สามารถใช้ในการหาปริมาตรของมงกุฎได้ เพราะตามปกติแล้ว น้ำไม่สามารถถูกบีบอัดได้ดังนั้นมงกุฎที่จุ่มลงไปในน้ำย่อมต้องแทนที่ด้วยปริมาตรของน้ำที่เท่ากับปริมาตรของมงกุฎนั่นเอง เมื่อนำปริมาตรมาหารด้วยมวลของมงกุฎ ก็สามารถหาค่าความหนาแน่นของมงกุฎได้ ถ้ามีการผสมโลหะราคาถูกอื่นเข้าไป ค่าความหนาแน่นนี้จะต่ำกว่าค่าความหนาแน่นของ

ทองคำ อาร์คิมิดีสดีใจมากที่แก้ปัญหาได้ จึงตะโกนว่า "ยุเรก้า!" (กรีก: εὕρηκα! แปลว่า ฉันพบแล้ว) การทดสอบจัดทำขึ้นอย่างประสบผลสำเร็จ และพิสูจน์ได้ว่ามีการผสมเงินเข้าไปในมงกุฎจริงๆ ดังรูป



รูปที่ 11 แสดงวิธีการคิดของอาร์คิมีดีสในการตรวจสอบมงกุฎทองคำ

ผลงานทางด้านคณิตศาสตร์อีกชิ้นที่อาร์คิมีดิสมีความภาคภูมิใจอย่างมาก อาร์คิมีดิสสามารถคิดค้นการหาปริมาตรของทรงกลมที่บรรจุในทรงกระบอกได้ ดังรูป



อาร์คิมีดิสพบว่าปริมาตรของทรงกลมคิดเป็น 2 ใน 3 ของปริมาตรทรงกระบอก ซึ่งได้สูตร ดังนี้

ปริมาตรทรงกลม เท่ากับ $\frac{2}{3}$ ของปริมาตรทรงกระบอก

จะได้ $\frac{2}{3} \times (\pi r^2 h)$

แต่ $h = 2r$; ดังนั้น $\frac{2}{3} \times (\pi r^2 (2r)) = \frac{4}{3} \pi r^3$

ผลงานของอาร์คิมีดิสนั้นมีอย่างมากมายที่นอกเหนือจากผลงานทางด้านคณิตศาสตร์ เช่น การสร้างคานที่ใช้ในการยกหิน การใช้ระเบียบวิธีเกษียณในการประมาณค่า π การสร้างเกลียวที่ใช้ในการดูดน้ำ การสร้างเลนส์ขนาดใหญ่ที่ใช้ในการทำสงคราม เป็นต้น

สรุป

บทที่ 1 จะกล่าวถึงเรขาคณิตในยุคสมัยโบราณ เพื่อให้ทราบถึงการนำความรู้ทางด้านเรขาคณิตไปใช้แก้ปัญหาต่างๆ ในยุคสมัยนั้น ได้แก่ ยุคบาบิโลน ยุคอียิปต์ และยุคกรีก ในยุคสมัยแรกๆ ได้แก่ ยุคบาบิโลน และยุคอียิปต์ พบว่าในสมัยนั้นความรู้ทางด้านเรขาคณิตนั้นเป็นเรื่องที่ใกล้กับปัญหาในชีวิตประจำวันอย่างมาก มนุษย์ในสมัยนั้นนำความรู้ทางด้านเรขาคณิตมาใช้แก้ปัญหาในการคำนวณหาพื้นที่ คำนวณหาความยาว คำนวณระยะทางในการเดินเรือ และคำนวณหาปริมาตรของรูปเรขาคณิต ต่อมาเมื่อความรู้ทางด้านเรขาคณิตมีการพัฒนาขึ้นจึงได้มีการนำไปใช้ในการก่อสร้างทางด้านสถาปัตยกรรม ทางด้านศิลปะต่างๆ มากมาย จนมีการพัฒนามาเป็นการสร้างรูปเรขาคณิตสามมิติที่เป็นรูปหลายเหลี่ยมปกติ ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับการดำรงชีวิตในประจำวันอย่างมาก ในยุคสมัยอียิปต์นั้นได้มีการบันทึกโจทย์ปัญหาความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ไว้บนกระดาษปาปิรุส ได้แก่ รินด์ปาปิรุสจำนวน 84 ปัญหา และมอสโคว์ปาปิรุสจำนวน 25 ปัญหา ต่อมาในยุคสมัยกรีกนักคณิตศาสตร์ได้ช่วยกันพัฒนาความรู้ทางด้านเรขาคณิตอย่างต่อเนื่อง โดยมีการนำความรู้ทางด้านเลขคณิต และพีชคณิต มาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเรขาคณิต เช่น การคำนวณหาความสูงของพีระมิดโดยเธลิสได้ใช้ความรู้เกี่ยวกับความคล้ายมาใช้ในการแก้ปัญหา และพีทาโกรัสได้บูรณาความรู้ทางด้านเลขคณิตเข้ากับเรขาคณิตจนเกิดเป็นชุดของจำนวนที่มีความสัมพันธ์เชิงสามเหลี่ยม เชิงสี่เหลี่ยม และได้นำความรู้ทางด้านเรขาคณิตไปใช้ทางด้านศิลปะจนเกิดเป็นความรู้ทางด้านวิธีการสร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่าย ความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ในสมัยนั้นมีความก้าวหน้าอย่างมากมีการตั้งกลุ่มนักคณิตศาสตร์ต่างๆ มากมายประกอบไปด้วยกลุ่มนักคณิตศาสตร์ที่ยึดแนวคิดของพีทาโกรัส เรียกว่า “กลุ่มพีทาโกเรียน” และต่อมาในยุคถัดจากพีทาโกรัสก็มีกลุ่มนักคณิตศาสตร์ที่รวมกันเปิดโรงเรียนขึ้นมา โดยใช้ชื่อว่า อะคาเดมี่ (Academy) ในยุคนั้นยุคลิดแห่งอะเล็กซานเดรีย เป็นนักปราชญ์มีชื่อเสียงอย่างมาก ยุคลิดได้รวบรวมความรู้ต่างๆ ทางด้านเลขคณิต พีชคณิต และเรขาคณิต โดยสร้างเป็นหนังสือด้วยกันทั้งหมด 13 เล่ม เรียกกว่า “อิลิเมนต์” ซึ่งได้รับการเผยแพร่มาจนถึงปัจจุบัน

คำถามท้ายบทที่ 1

1) จงอธิบายเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างการนำความรู้ทางด้านเรขาคณิตไปใช้ในแต่ละยุคสมัย
2) จงวิเคราะห์เนื้อหาทางด้านเรขาคณิตที่ปรากฏในแต่ละยุคสมัย
3) จงเปรียบเทียบเนื้อหาทางด้านเรขาคณิตในแต่ละยุคสมัย
4) จงศึกษาผลงานทางด้านเรขาคณิตของนักคณิตศาสตร์ ทอเลมี และเพลโต
5) จงยกตัวอย่าง และอธิบายเรขาคณิตที่พบในชีวิตประจำวัน

เอกสารอ้างอิง

สิริวรรณ ตั้งจิตวัฒนะกุล (2538). *รากฐานเรขาคณิต*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

Bruins, E. M. (1949). On Plimpton 322. Pythagorean numbers in Babylonian mathematics, *KoninklijkeNederlandseAkademie van Wetenschappen, Proceedings* 52, 629-632.

Buck, R. C. (1980). Sherlock Holmes in Babylon, *American Mathematical Monthly*, 87, 335-345.

Gillings, R. J. (1966). Plimpton 322, *Centaurus*, 11, 303-306.

Friberg, J. (2008). A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts, *Notices of the AMS,* 55, 1076-1086.

Robson, E. (1997). Three Old Babylonian methods for dealing with ‘Pythagorean’ triangles, *Journal of Cuneiform Studies*, 49, 51-72.