เมทริกซ์ผกผัน

โดย ผศ.ธนวัฒน์ ศรีศิริวัฒน์

3.1

เมทริกซ์เอกฐาน
และเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน

บทนิยามที่ 3.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ถ้าเมทริกซ์ B ที่ทำให้ $AB = BA = I_n$ แล้ว B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย A^{-1} ดังนั้น $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

เมทริกซ์ A หาอินเวอร์สได้จะกล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน (Nonsingular Matrix)

เมทริกซ์ A หาอินเวอร์สไม่ได้จะกล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix)

ทฤษฎีบทที่ 3.1 ถ้าเมทริกซ์ A หาเมทริกซ์ผกผันได้
แล้วเมทริกซ์ที่เป็นเมทริกซ์ผกผัน A จะมีเพียงเมทริกซ์เดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

จงแสดงว่า A เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}_{2\times 2}$ และ $B=\begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}_{2\times 2}$

จงแสดงว่า A เป็นเมทริกซ์ผกผันของ B

และ B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

ทฤษฎีบทที่ 3.2 ถ้าเมทริกซ์ A และ B มิติ $n \times n$ เป็นเมทริกซ์ที่หาเมทริกซ์ผกผันได้ แล้ว AB จะหาเมทริกซ์ผกผันได้ และ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ จงหาเมทริกซ์ผกผันของ A

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -5\end{bmatrix}_{3\times 3}$ และ $A=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 0\\ 13 & -7 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}_{3\times 3}$

จงแสดงว่า B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}_{2\times 2}$ และ $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & -4\end{bmatrix}_{2\times 2}$

จงแสดงว่า $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

3.2

เมทริกซ์ผูกพัน (Adjoint of Matrix)

บทนิยามที่ 3.2 กำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ และ C_{ij} คือ โคแฟคเตอร์ของ a_{ij}

โคแฟคเตอร์ของเมทริกซ์ A คือ $\left[C_{ij}\right]_{n\times n}=cof(A)$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ จงหา $cof(A)$

บทนิยามที่ 3.3 กำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ **เมทริกซ์ผูกผันของเมทริกซ์** A คือ เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของโคแฟคเตอร์เมทริกซ์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$adj(A)=(cof(A))^T=\left[C_{ij}\right]^T=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ จงหา $adj(A)$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ และ $B=\begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

จงหา $adj(A)$ และ $adj(B)$

ทฤษฎีบทที่ 3.3 ถ้าให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ แล้ว $A\left(adj(A)\right) = \left(adj(A)\right)A = (\det A)I_n$

<u>**พิสูจน์**</u> จาก

$$A(adj(A)) = \begin{array}{l} \\ \text{แถวที่ } i \leftarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \\ \downarrow \\ \text{หลักที่ } j \end{array}$$

ดังนั้นตำแหน่งที่ i, j ใด ๆ ของเมทริกซ์ A

$A(adj(A)) = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + ... + a_{in}C_{jn} = \det A = |A|$ เมื่อ $i = j$

$A(adj(A)) = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + ... + a_{in}C_{jn} = 0$ เมื่อ $i \neq j$

นั่นคือ $\quad A(adj(A)) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}_{n\times n}$

$$= |A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$= |A| I_n$$

ในทำนองเดียวกัน

จาก $\left(adj\left(A\right)\right)A = C_{1i}a_{1j} + C_{2i}a_{2j} + \ldots + C_{ni}a_{nj}$

$= a_{1j}C_{1i} + a_{2j}C_{2i} + \ldots + a_{nj}C_{ni}$

ตำแหน่งที่ i, j ใด ๆ ของเมทริกซ์ A

$\left(adj\left(A\right)\right)A = a_{1j}C_{1i} + a_{2j}C_{2i} + \ldots + a_{nj}C_{ni} = \det A = \left|A\right|$ เมื่อ $i = j$

$\left(adj\left(A\right)\right)A = a_{1j}C_{1i} + a_{2j}C_{2i} + \ldots + a_{nj}C_{ni} = 0$ เมื่อ $i \neq j$

ดังนั้น $\left(adj\left(A\right)\right)A = \left|A\right| I_n$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

จงหา $A\left(adj\left(A\right)\right) = \left(adj\left(A\right)\right)A = \left(\det A\right)I_n$

3.3

การหาเมทริกซ์ผกผัน (Inverse of Matrix)

ทฤษฎีบทที่ 3.4 กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}$ โดยที่ $\det A = ad-bc \neq 0$

จะได้ว่า $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}_{2\times 2}$ หรือ $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}_{2\times 2}$

<u>พิสูจน์</u> จะต้องพิสูจน์ว่า

$$
\begin{aligned}
AA^{-1} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2} \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}_{2\times 2} \\
&= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}_{2\times 2} \\
&= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ab-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{bmatrix}_{2\times 2} \\
&= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ab-bc & 0 \\ 0 & -bc+ad \end{bmatrix}_{2\times 2} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $AA^{-1} = I$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ จงหา A^{-1}

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ จงหา A^{-1}

บทนิยามที่ 3.4 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่หาเมทริกซ์ผกผันได้ และ $A^{-1} = A^T$ จะเรียก A ว่าเป็น**เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก** (Orthogonal Matrix)

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}_{2\times 2}$

จงแสดงว่าเมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.5</u> กำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ โดยที่ $n\geq 2$ และ $\det A\neq 0$

จะได้ว่า $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}adj(A)$ หรือ $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}adj(A)$

พิสูจน์ จาก $(adj(A))A = (\det A)I_n$

ถ้า $\det A \neq 0$ ดังนั้น

$$\frac{1}{\det A}(adj(A))A = I_n$$

$$\frac{1}{\det A}(adj(A))A^{-1} = I_n A^{-1}$$

$$\frac{1}{\det A}(adj(A))I_n = A^{-1}$$

สรุปได้ว่า $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}adj(A)$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ จงหา A^{-1}

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ จงหา A^{-1}

ทฤษฎีบทที่ 3.6 กำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ และ $c\neq 0$ เป็นสเกลาร์ใด ถ้า $\det A\neq 0$ จะได้ว่า

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$
2. $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$
3. cA เป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน $(cA)^{-1}=c^{-1}A^{-1}$

พิสูจน์ 1. จาก $\det A \neq 0$ จะได้ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A^{-1}

นั่นคือ $$A = \left(A^{-1}\right)^{-1}$$

2. จาก $\det A \neq 0$ จะได้ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

ดังนั้น
$$\left(AA^{-1}\right)^T = \left(I_n\right)^T$$
$$\left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(I_n\right)^T$$

จะได้ว่า $\left(A^{-1}\right)^T$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A^T

ดังนั้น $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

3. ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ และ $c\neq 0$ เป็นสเกลาร์ใด ถ้า $\det A\neq 0$

จะได้ $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$

และจะมี c^{-1} ที่เป็นจำนวนจริง เนื่องจาก $c\neq 0$

จาก $\left(c^{-1}A^{-1}\right)(cA) = \left(c^{-1}c\right)\left(A^{-1}A\right) = 1\left(I_n\right) = \left(I_n\right)$

และ $(cA)\left(c^{-1}A^{-1}\right) = \left(cc^{-1}\right)\left(AA^{-1}\right) = 1\left(I_n\right) = \left(I_n\right)$

จะได้ $c^{-1}A^{-1}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของ cA

ดังนั้น $(cA)^{-1}=c^{-1}A^{-1}$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}_{2\times 2}$

จงหา

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$
2. $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$
3. $(5A)^{-1}=5^{-1}A^{-1}=\frac{1}{5}A^{-1}$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $\left(4A^{T}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 2 & -4\end{bmatrix}_{2\times 2}$ จงหาเมทริกซ์ A

บทแทรกที่ 3.1 กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ถ้า $\det A \neq 0$ จะได้ว่า $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

พิสูจน์ จาก

$$
\begin{aligned}
AA^{-1} &= I_n \\
\det\left(AA^{-1}\right) &= \det I_n \\
\det A \det A^{-1} &= 1
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}
$$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ จงแสดงว่า $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

ทฤษฎีบทที่ 3.7 กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ และ $AB = 0$ จะได้ว่า

1. $A = 0$ หรือ $B = 0$
2. A และ B ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

พิสูจน์ 1. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n\times n$ เมื่อ $AB=0$ และ A หาเมทริกซ์ผกผันได้ คือ A^{-1}

จะได้

$$\begin{aligned} A^{-1}(AB) &= A^{-1}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

และจะได้

$$\begin{aligned} (A^{-1}A)B &= 0 \\ I_nB &= 0 \\ B &= 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ เมื่อ A หาเมทริกซ์ผกผันได้ จะได้ $B=0$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อกำหนดให้ B หาเมทริกซ์ผกผันได้ จะได้ $A=0$

ดังนั้น ถ้าเมทริกซ์หนึ่งหาเมทริกซ์ผกผันได้ อีกเมทริกซ์หนึ่งจะเป็นศูนย์

2. ถ้าหา A^{-1} ได้ จะได้ว่า $|A| \neq 0$ และถ้าหา A^{-1} ไม่ได้ จะได้ว่า $|A| = 0$

จาก $AB = 0$

$|AB| = 0$

นั่นคือ $|A| = 0$

หรือ $|B| = 0$

หรือ $|A| = |B| = 0$

ถ้า $|A| = |B| = 0$ ดังนั้น A และ B ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

หมายเหตุ ถ้าเมทริกซ์ A และ B ไม่เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และไม่เป็นเมทริกซ์ศูนย์ เป็นไปได้ที่ $AB = 0$

ตัวอย่าง

จงยกตัวอย่างเมทริกซ์ A และ B ที่ไม่เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และไม่เป็นเมทริกซ์ศูนย์แต่ $AB = 0$

ทฤษฎีบทที่ 3.8 กำหนดให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ และ A หาเมทริกซ์ผกผันได้ ถ้า $AB = AC$ แล้ว $B = C$

พิสูจน์ กำหนดให้ A หาเมทริกซ์ผกผันได้คือ A^{-1}

ถ้า

$$
\begin{aligned}
AB &= AC \\
A^{-1}(AB) &= A^{-1}(AC) \\
\left(A^{-1}A\right)B &= \left(A^{-1}A\right)C \\
I_nB &= I_nC \\
B &= C
\end{aligned}
$$

3.4

การหาเมทริกซ์ผกผันโดยใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว

แนวทางในการหา A^{-1} โดยการพิจารณาจาก $E_pE_{p-1}\dots E_2E_1A = I_n$ ดังนั้นจะได้ $A^{-1} = E_pE_{p-1}\dots E_2E_1$ นั่นคือ ถ้าดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานบนเมทริกซ์ A จนกระทั่งได้ I_n

แล้วจะได้ว่า ผลคูณของเมทริกซ์เบื้องต้นแบบแถวที่สมนัยกันกับการดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานที่กระทำบน A คือ A^{-1}

ดังนั้นในการหา A^{-1} ที่ใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานบนเมทริกซ์ $[A:I_n]$ ซึ่งทำให้

$$\begin{aligned}(E_pE_{p-1}\ldots E_2E_1)[A:I_n] &= \left[E_pE_{p-1}\ldots E_2E_1A:E_pE_{p-1}\ldots E_2E_1I_n\right]\\ &= \left[I_n:A^{-1}\right]\end{aligned}$$

ถ้า A ไม่สามารถเปลี่ยนเป็น I_n โดยการดำเนินการแบบแถวได้

แล้ว A จะเป็นเมทริกซ์เอกฐานหรือ $\det A = 0$ นั่นคือไม่สามารถหาอินเวอร์สได้

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n เริ่มต้นจาก $[A:I_n]$

และดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานจนทำให้ $[A:I_n]$ เปลี่ยนเป็น $[I_n:A^{-1}]$ ดังนั้น $B=A^{-1}$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

จงหา A^{-1} โดยใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

จงหา A^{-1} โดยใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว

ตัวอย่าง

จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้เมื่อ

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ และ $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{4\times 4}$

จงหา A^{-1} โดยใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$

จงหา A^{-1} โดยใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว

เอกสารอ้างอิง

นิศากร สังวาระนที. (2558). ตำรารายวิชาพีชคณิตเชิงเส้น. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.

จิราภา ลิ้มนพศิริพร. (2551). พีชคณิตศาสตร์เชิงเส้น. คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลาปากรณ์.