

บทที่ 8

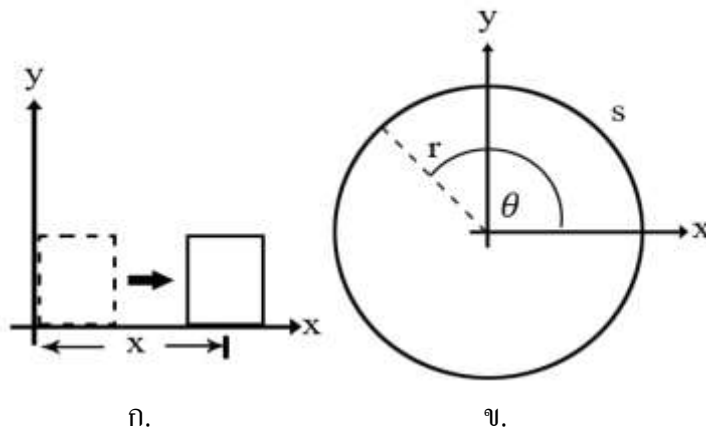
การหมุนของวัตถุแข็งเกร็ง

(Rotation of rigid body)

วัตถุแข็งเกร็ง คือลักษณะของวัตถุที่มีระยะห่างระหว่างวัตถุคงที่เสมอ มักจะมีสถานะของสสารที่เป็นของแข็ง วัตถุแข็งเกร็งจึงเป็นวัตถุที่มีรูปร่างคงตัว ตัวอย่างเช่น แท่งโลหะ แท่งไม้ สำหรับลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งจะมี 2 รูปแบบ คือ การเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติ ซึ่งเราพิจารณาว่าเป็นการเคลื่อนที่แบบการเลื่อนที่ และแบบที่สองจะเป็นการเคลื่อนที่แบบหมุน ซึ่งในบทนี้จะพิจารณาการเคลื่อนที่แบบที่สองคือ การเคลื่อนที่แบบหมุน โดยพิจารณาปริมาณต่างๆที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่แบบหมุน เช่น โมเมนต์ความเฉื่อย อัตราเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุม เป็นต้น

8.1 การหมุน (Rotation)

การหมุนของวัตถุแข็งเกร็ง คือ ลักษณะการเคลื่อนที่รอบจุดศูนย์กลางหรือรอบจุดใดจุดหนึ่งของวัตถุแข็งเกร็ง โดยเราเรียกจุดหรือแนวแกนที่วัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบว่า แกนหมุน หรือจุดหมุน ตัวอย่างของการหมุน เช่น การเคลื่อนที่ของล้อรถ การหมุนของลูกกอล์ฟ เป็นต้น



ก.

ข.

ภาพที่ 8.1 ก. การเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น

ข. การเคลื่อนที่แบบหมุน

ในการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น ดังภาพที่ 8.1 ก. มีปริมาณที่เกิดขึ้น ได้แก่ ระยะทาง ความเร็ว ความเร่ง ในขณะที่เดียวกันการเคลื่อนที่แบบหมุน ดังภาพที่ 8.1 ข. ก็มีปริมาณเหล่านี้เกิดขึ้นเช่นกัน

โดยปริมาณที่เกิดขึ้นมีลักษณะเหมือนกัน ดังนั้นเราสามารถเปรียบเทียบระหว่างปริมาณที่เกิดจากการเคลื่อนที่เชิงเส้นกับปริมาณที่เกิดจากการเคลื่อนที่แบบหมุนได้ดังตารางที่ 8.1

ตารางที่ 8.1 เปรียบเทียบปริมาณการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่กับการเคลื่อนที่แบบหมุน

การเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่	การเคลื่อนที่แบบหมุน
ตำแหน่ง : จะบอกด้วยระยะทางซึ่งวัดจากแกนอ้างอิงมุมจนถึงตำแหน่งที่วัตถุอยู่ หน่วยเป็นเมตร	มุม : จะบอกด้วยมุมซึ่งวัดจากแกนอ้างอิงมุมจนถึงตำแหน่งที่วัตถุอยู่ หน่วยเป็นเรเดียน
การกระจัดเชิงเส้น : การเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง หน่วยเป็นเมตร	การกระจัดเชิงมุม : การเปลี่ยนแปลงมุม หน่วยเป็นเรเดียน
ความเร็ว : การกระจัดที่เปลี่ยนไป หน่วยเป็นเมตรต่อวินาที	ความเร็วเชิงมุม : การกระจัดเชิงมุมที่เปลี่ยนไป หน่วยเป็นเรเดียนต่อวินาที
ความเร่ง : การเปลี่ยนแปลงความเร็ว หน่วยเป็นเมตรต่อวินาที ²	ความเร่งเชิงมุม : การเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุม หน่วยเป็นเรเดียนต่อวินาที ²

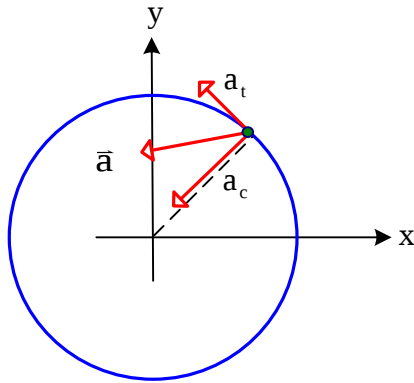
เนื่องจากลักษณะการเคลื่อนที่แบบหมุนกับการเคลื่อนที่เชิงเส้นมีปริมาณที่เกิดขึ้นเหมือนกัน เราสามารถนำสมการที่เกิดจากการเคลื่อนที่เชิงเส้นมาปรับใช้กับสมการการเคลื่อนที่แบบหมุนได้ โดยอาศัยปริมาณที่เหมือนกันเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่กับการเคลื่อนที่แบบหมุนในรูปของสมการทางฟิสิกส์จะได้ผลดังตารางที่ 8.2

ตารางที่ 8.2 การเปรียบเทียบสมการทางคณิตศาสตร์ระหว่างการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่กับการเคลื่อนที่แบบหมุน

ปริมาณการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่	ปริมาณการเคลื่อนที่แบบหมุน	สมการความสัมพันธ์
ตำแหน่ง : s หน่วยเป็นเมตร	มุม : θ	$s = r\theta$
การกระจัด : ds หน่วยเป็นเมตร	การกระจัดเชิงมุม : $d\theta$	$ds = r d\theta$
ความเร็ว : $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ หน่วยเป็นเมตรต่อวินาที	อัตราเร็วเชิงมุม : $\omega = \frac{d\theta}{dt}$	$v \equiv \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v_t = r\omega$
ความเร่ง : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ หน่วยเป็นเมตรต่อวินาที ²	ความเร่งเชิงมุม : $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	$a \equiv \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_t = \frac{dv_t}{dt}$ $= r \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_t = r\alpha$ $a_c = \frac{v_t^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r}$ $\Rightarrow a_c = \omega^2 r$

ตัวอย่างที่ 8.1 แผ่นซีดีแผ่นหนึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลาง 12 เซนติเมตร วางอยู่บนเครื่องเล่นแผ่นซีดีซึ่งหยุดนิ่ง เมื่อเปิดเครื่องเล่นซีดีทำให้แผ่น ซีดีหมุนด้วยความเร็ว 200 รอบต่อวินาที ภายในเวลา 1.2 วินาที จงหา

- (ก) ความเร่งเชิงมุมเฉลี่ยของซีดี
- (ข) ถ้าแผ่นซีดี มีความเร็วลดลงเหลือ 100 รอบต่อวินาที จงหาความเร่งเชิงเส้นของแผ่นซีดี



ภาพที่ 8.2 ลักษณะการหมุนของแผ่นซีดี

วิธีทำ เปลี่ยนความเร็วเชิงมุมจากหน่วย rpm (รอบต่อนาที) ให้เป็นหน่วย rad/s

$$\begin{aligned}\omega_f &= \left(200 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}}\right) \left(\frac{\text{min}}{60\text{s}}\right) \\ &= 20.95 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_i &= \left(100 \frac{\text{rad}}{\text{min}}\right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}}\right) \left(\frac{\text{min}}{60\text{s}}\right) \\ &= 10.47 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

ก. จากสมการ

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t} \\ &= \frac{20.95(\text{rad/s}) - 0(\text{rad/s})}{1.20\text{s}} \\ &= 17.45 \text{ (rad/s}^2\text{)}\end{aligned}$$

ข. จากความสัมพันธ์ระหว่างความเร่งเชิงมุมกับความเร่งในแนวเส้นสัมผัส

$$\begin{aligned}a_t &= r\alpha \\ &= (0.06\text{m})(17.45\text{rad/s}) \\ &= 1.05 \text{ เมตรต่อวินาที}^2\end{aligned}$$

ค. จากความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วเชิงมุมกับความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง

$$\begin{aligned} a_c &= \omega^2 r \\ &= (10.47 \text{ rad/s})^2 (0.06 \text{ m}) \\ &= 6.58 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

พิจารณาภาพที่ 8.2 จะได้ความเร่งเชิงเส้นของแผ่น CD คือ

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_c^2 + a_t^2} \\ &= \sqrt{(6.58 \text{ m/s}^2)^2 + (1.05 \text{ m/s}^2)^2} \\ &= 6.66 \text{ เมตรต่อวินาที}^2 \end{aligned}$$

8.2 สมการการเคลื่อนที่แบบหมุน (Rotational motion equation)

จากบทที่ผ่านมาเมื่อวัตถุมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวเราสามารถใช้อนุกรมคำนวณหาปริมาณที่เกิดจากการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวได้จากชุดสมการ

$$v = v_0 + at$$

$$v_{av} = \frac{v_0 + v}{2}$$

$$v = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_{0x} + at)$$

$$v_{av} = v_{0x} + \frac{1}{2}at$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$$

$$x - x_0 = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a}$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a(x - x_0)$$

เราสามารถนำชุดสมการการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวมาปรับใช้กับการเคลื่อนที่แบบหมุนโดยนำมาเปรียบเทียบเพื่อพิจารณาสัญลักษณ์ที่ใช้แทนการเคลื่อนที่เชิงเส้นและเชิงมุม เช่น v กับ ω ; x กับ θ มาเปรียบเทียบกับสมการการเคลื่อนที่เชิงเส้นเมื่อ a คงตัว เราจะได้สมการการเคลื่อนที่เชิงมุมของวัตถุเมื่อ α คงตัว ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + at \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ \theta - \theta_0 &= \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t \\ \theta - \theta_0 &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned} \right\} (8-1)$$

ตัวอย่างที่ 8.2 แผ่นซีดีแผ่นหนึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลาง 12 เซนติเมตร วางอยู่บนเครื่องเล่นแผ่นซีดีซึ่งหยุดนิ่ง เมื่อเปิดเครื่องเล่นซีดีทำให้แผ่น ซีดีหมุนด้วยความเร็ว 200 รอบต่อนาทีภายในเวลา 1.2 วินาที

ก. แผ่น CD หมุนได้กี่รอบจึงจะหยุดหมุน

ข. ระยะทางเชิงเส้นที่แผ่น CD เคลื่อนที่ได้ก่อนที่จะหยุดหมุน

วิธีทำ ก. จาก $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}at^2$

เมื่อ $\theta_0 = 0$; $\theta = ?$; $\omega_0 = 0$; $\omega = 20.95 \text{ rad/s}$; $\alpha = 17.45 \text{ rad/s}^2$; $t = 1.2 \text{ s}$

$$\begin{aligned} \theta &= 0 + 0 + \frac{1}{2}(17.45 \text{ rad/s}^2)(1.20 \text{ s})^2 \\ &= 12.56 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$= 12.56 \text{ rad} \left(\frac{\text{rev}}{2\pi \text{ rad}} \right)$$

$$= 1.99 \text{ rev}$$

$$\text{ข.} \quad S = r\theta$$

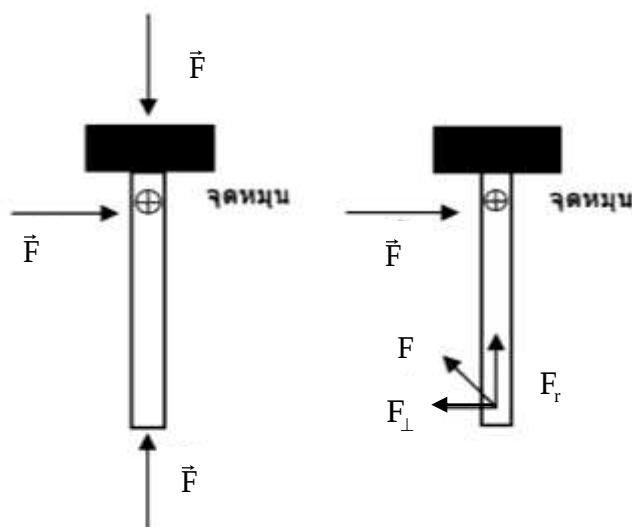
$$= (0.06\text{m})(12.56\text{rad})$$

$$= 0.75 \text{ เมตร}$$

การเคลื่อนที่เชิงเส้นสามารถอธิบายได้โดยการใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันทั้ง 3 ข้อ ในขณะเดียวกันเรายังสามารถนำกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันมาใช้อธิบายการเคลื่อนที่แบบหมุนได้ด้วย โดยเปรียบเทียบแรงในการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นซึ่งคือ ทอร์กในการเคลื่อนที่แบบหมุน

8.2.1 กฎข้อที่หนึ่งของนิวตันสำหรับการเคลื่อนที่แบบหมุน (Newton's first law of rotational motion)

เราสามารถเปรียบเทียบกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 1 ของนิวตันกับการเคลื่อนที่แบบหมุนได้ พิจารณาเมื่อมีทอร์กลัพธ์เท่ากับศูนย์มากระทำกับวัตถุในกรณีที่วัตถุกำลังหมุน ตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 1 ของนิวตัน วัตถุชนิดจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงมุมคงตัว หรือไม่มีความเร่งเชิงมุมเกิดขึ้นนั่นเอง



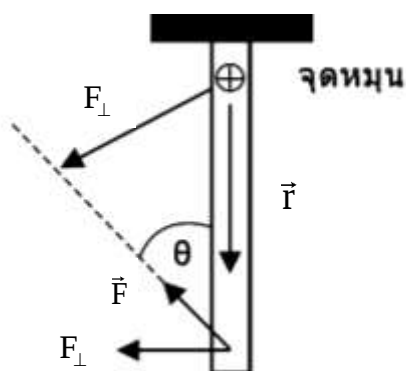
ภาพที่ 8.3 กรณีแนวแรงไม่ทำให้หมุน

ภาพที่ 8.4 กรณีเกิดจุดหมุน

พิจารณาภาพที่ 8.3 จะสังเกตเห็นว่าแนวแรงที่กระทำต่อไม้เมตรผ่านจุดหมุน กรณีนี้จะไม่เกิดการหมุน แต่ถ้าแนวแรงที่กระทำต่อวัตถุซึ่งไม่ผ่านจุดหมุน กรณีนี้จะทำให้วัตถุเกิดการหมุน นอกจากนี้แรงที่กระทำต่อวัตถุสามารถแยกออกเป็นองค์ประกอบย่อยเป็นแรงที่ตั้งฉากกับวัตถุและแรงที่ขนานกับ ดังภาพที่ 8.4 แรงที่มีผลต่อการหมุนคือแรงที่ตั้งฉากกับวัตถุเท่านั้น ซึ่งเรียกว่า ทอร์ก (Torque, τ) พิจารณาภาพที่ 8.5

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

เมื่อ τ คือ การคูณกันของเวกเตอร์ (Cross product) ระหว่างเวกเตอร์ตำแหน่งกับเวกเตอร์แรง มีหน่วยเป็นนิวตันเมตร



ภาพที่ 8.5 การเกิดทอร์ก

โดยขนาดของผลคูณแบบเวกเตอร์นี้มีค่าเท่ากับผลคูณระหว่างระยะทางที่ลากจากจุดหมุนมาตั้งฉาก (แขนหมุน) กับแนวแรง หรือผลคูณระหว่างแรงที่ตั้งฉากกับแขนหมุน

$$\begin{aligned} \tau &= F_{\perp} r \\ &= (F \sin \theta) r \\ &= r (F \sin \theta) \\ &= F r_{\perp} \end{aligned} \quad (8-2)$$

ตัวอย่างที่ 8.3 ออกแรงในแนวดิ่ง 100 นิวตัน เพื่อเปิดฝาระป๋องผลไม้โดยออกแรงห่างจากจุดหมุนเป็นระยะ 25 เซนติเมตร จงหา

ก. ขนาดของทอร์ก

ข. แรงที่ต้องใช้เปิดฝาระป๋องเมื่อออกแรงทำมุม 30° กับแนวดิ่ง

วิธีทำ ก. เนื่องจากแรงที่ออกตั้งฉากกับแขนหมุนจะได้ว่า

$$\tau = r \times F$$

$$\begin{aligned} \text{ขนาดของทอร์ก} \quad \tau &= rF\sin 90^\circ \\ &= (0.25\text{m})(100\text{N}) \\ &= 25 \text{ N} \end{aligned}$$

ดังนั้นขนาดของทอร์กมีค่าเท่ากับ 25 นิวตัน

ข. เมื่อแรงไม่ตั้งฉากกับแขนหมุนคือ F เมื่อแยกองค์ประกอบของแรงจะมีเพียงแรงเดียวเท่านั้นที่มีผลต่อการหมุน แรงนั้นคือ $F\cos 30^\circ$ จะได้ว่า

$$\tau = r \times F$$

$$\tau = rF\cos 30^\circ$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{25\text{Nm}}{0.25\text{m}(\cos 30^\circ)} \\ &= 115 \text{ N} \end{aligned}$$

ดังนั้นแรงที่ใช้เปิดฝาระป๋องมีขนาดเท่ากับ 115 นิวตัน

8.2.2 กฎข้อสองของนิวตันสำหรับการเคลื่อนที่แบบหมุน (Newton's second law of rotational motion)

เมื่อมีทอร์กลัพธ์ที่ไม่เท่ากับศูนย์มากระทำกับวัตถุจะทำให้วัตถุเกิดความเร่งเชิงมุมของวัตถุโดยความเร่งเชิงมุมจะเปลี่ยนแปลงตามค่าทอร์กที่มากระทำ แต่ไม่ขึ้นกับโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ พิจารณาสมการ

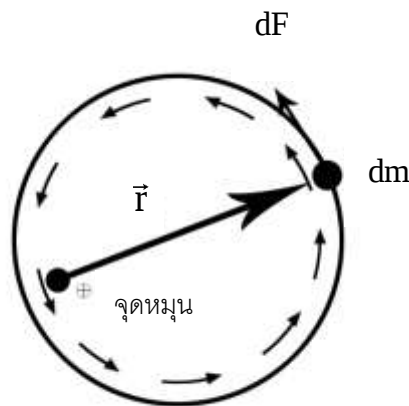
$$\begin{aligned}\Sigma \vec{F} &= m\vec{a} \\ \Sigma \vec{\tau} &= I\vec{\alpha}\end{aligned}\quad (8-3)$$

เมื่อ I คือโมเมนต์ความเฉื่อย

ดังนั้นสมการ (8-3) จึงเป็นกฎการเคลื่อนที่ข้อสองสำหรับการหมุน

8.2.3 โมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of inertia)

พิจารณาการเกิดโมเมนต์จากวัตถุที่แขวนอยู่ดังภาพที่ 8.6 ถ้าวัตถุมีความเร่งเชิงมุม α และที่มวลก้อนเล็ก ๆ dm ถูกกระทำด้วยแรง dF ซึ่งตั้งฉากกับแขนหมุนทำให้ dm มีความเร่งเชิงมุม α ด้วย



ภาพที่ 8.6 ลักษณะการหมุนของวัตถุมวลเล็กๆบนจานหมุน

และจากสมการ

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

จะได้ว่า

$$d\tau = r dF \quad (8-4)$$

แต่ dF คือแรงในแนวเส้นสัมผัส แทนด้วย F_t จะได้ความเร่งในแนวเส้นสัมผัส a_t ด้วย

$$d\tau = r dF_t$$

$$= r d(ma_t)$$

$$= ra_t dm$$

$$= \alpha r^2 dm$$

$$\int d\tau = \int \alpha r^2 dm$$

$$\tau = \alpha \int r^2 dm$$

เปรียบเทียบสมการที่ได้กับกฎข้อสองของการหมุนเมื่อ τ ที่ได้คือ ผลรวมของทอร์กทั้งหมดที่เกิดจากมวลย่อย ๆ dm จะได้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปทรงใด ๆ คือ

$$I = \int r^2 dm \quad (8-5)$$

โดยทั่วไปแล้วความเฉื่อยหรือความต้านทานการเคลื่อนที่ของวัตถุขึ้นอยู่กับมวล แต่ความเฉื่อยต่อการหมุนซึ่งก็คือโมเมนต์ความเฉื่อย จะขึ้นอยู่กับมวลและรูปร่างของวัตถุ

เราสามารถนำเรื่องของโมเมนต์ความเฉื่อยไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้มากมาย เช่น การยกวัตถุไม่ให้แกว่งจนหลุดมือควรจับอย่างไร การยึดติดของวัตถุ เข้ากับผนัง หรือในการทำงานของช่างก่อสร้างก็ล้วนแล้วแต่ใช้ความรู้ในเรื่องของโมเมนต์ความเฉื่อย

ตัวอย่างที่ 8.4 ดัมเบลประกอบด้วยมวลก้อนละ 10 กิโลกรัม เชื่อมด้วยมวลเบายาว 50 เซนติเมตร หมุนรอบแกนซึ่งตั้งฉากกับระนาบของกระดาษ จงหาขนาดของทอร์กที่ทำให้ดัมเบลหมุนด้วยความเร็ว 5 รอบต่อวินาที และหยุดภายในเวลา 3 วินาที

วิธีทำ ถือว่ามวล m ทั้งสองมีขนาดเล็กเมื่อเทียบกับระยะทางระหว่างมวลทั้งสอง ดังนั้น
ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยจากเงื่อนไขการอินทิเกรต ก็คือ ผลรวมของมวลทั้งหมด

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm \\ &= \sum m_i r_i^2 \end{aligned}$$

แทนค่าต่าง ๆ ในสมการ

$$\begin{aligned} I &= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \\ &= (10\text{kg})(0.25\text{m})^2 + (10\text{kg})(0.25\text{m})^2 \\ &= 1.25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แต่ } \alpha &= \frac{d\bar{\omega}}{dt} \\ &= \frac{\Delta\bar{\omega}}{\Delta t} = \frac{\bar{\omega}_f - \bar{\omega}_i}{\Delta t} \\ &= \frac{\left(5 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{\text{min}}{60\text{s}}\right)\left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}}\right)}{3\text{s}} \\ &= 0.175 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

จากกฎข้อสองของการหมุน

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$\begin{aligned} \text{ขนาดของทอร์ก } \tau &= I\alpha \\ &= (1.25\text{kg} \cdot \text{m}^2)(0.175\text{rad/s}^2) \\ &= 0.129 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

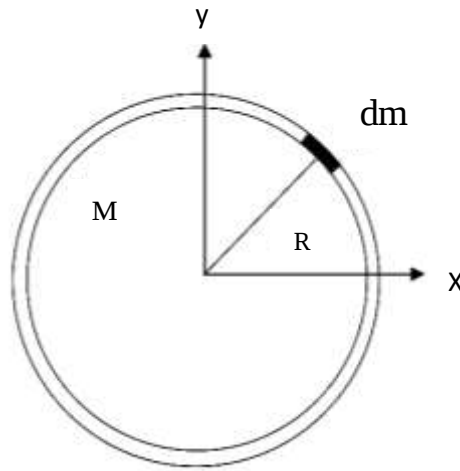
ดังนั้นขนาดของทอร์กเท่ากับ 0.129 นิวตันเมตร

ตัวอย่างที่ 8.5 จงแสดงวิธีการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อย

ก. ของวงแหวนบางสม่ำเสมอรัศมี R มวล M รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลดังภาพที่ 8.7

ข. ของแผ่นจานบางสม่ำเสมอรัศมี R มวล M รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลดังภาพที่ 8.8

วิธีทำ ก. แบ่งวงแหวนออกเป็นส่วนเล็ก ๆ มีมวล dm ห่างจากแกนหมุนรัศมี $r = R$ โมเมนต์ความเฉื่อยของมวล dm คือ



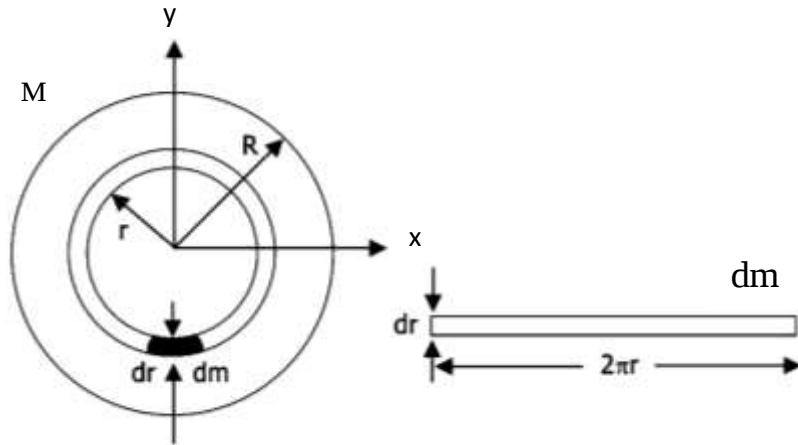
ภาพที่ 8.7 วงแหวนบางสม่ำเสมอ

$$\begin{aligned}
 I_{\text{ring}} &= \int r^2 dm \\
 &= \int R^2 dm \\
 &= R^2 \int dm \\
 &= MR^2
 \end{aligned}$$

เมื่อผลรวมทั้งหมดของมวล dm ที่แบ่งเป็นส่วนเล็ก ๆ มีค่าเท่ากับ M ดังนั้นจะได้ว่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวงแหวนบางรอบจุดศูนย์กลางมวลคือ

$$I_{\text{ring(cm)}} = MR^2 \quad (8-6)$$

ข. ในกรณีเป็นแผ่นจานเมื่อแบ่งแผ่นจานออกเป็นวงแหวนเล็ก ๆ รัศมี r หนา dr มีมวล dm จะสังเกตเห็นว่าค่าขอบของวงแหวนมีค่าไม่คงตัวจะเปลี่ยนตามระยะ r ดังนั้นค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นจานเกิดจากโมเมนต์ความเฉื่อยส่วนเล็ก ๆ ของวงแหวน dI ดังภาพที่ 8.8



ภาพที่ 8.8 แผ่นจานวงกลม

เมื่อนำมวล dm หนา dr มาขยายออก

$$d\ell = r^2 dm$$

เมื่อรวมวงแหวนส่วนเล็ก ๆ ทั้งหมดก็จะกลายเป็นแผ่นบาง

$$\int_0^{I_{\text{disk}}} dI = \int_0^R r^2 dm$$

$$I_{\text{disk}} = \int_0^R r^2 dm$$

แต่มวลส่วนเล็ก dm ขึ้นอยู่กับรัศมี สมมติเป็นแผ่นจานบางสม่ำเสมอ ดังนั้นการกระจายของมวลจะขึ้นอยู่กับพื้นที่

$$\frac{dm}{M} = \frac{2\pi r dr}{\pi R^2}$$

เนื่องจาก M ขึ้นอยู่กับพื้นที่

$$dm = \frac{2M}{R^2} r dr$$

$$\begin{aligned} \text{หาคำนวณหา } dm \text{ จาก } dm &= \sigma dA \\ &= \sigma (2\pi r) dr \end{aligned}$$

$$\text{แต่ } \sigma \text{ คือความหนาแน่นต่อพื้นที่จะได้ } \sigma = \frac{M}{A}$$

$$\begin{aligned} dm &= \frac{M}{A} (2\pi r) dr \\ &= \frac{M}{\pi R^2} (2\pi r) dr \\ &= \frac{2M}{R^2} r dr \end{aligned}$$

แทนค่า dm ลงในสมการ

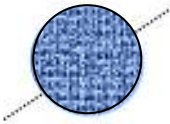
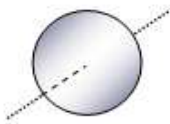
$$\begin{aligned} I_{\text{disk}} &= \int r^2 \frac{2M}{R^2} r dr \\ &= \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr \\ I_{\text{disk}} &= \frac{2M}{R^2} \left(\frac{R^4}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} MR^2 \end{aligned}$$

โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นจานกลมรอบจุดศูนย์กลางคือ

$$I_{\text{disk(cm)}} = \frac{1}{2} MR^2 \quad (8-7)$$

ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุขึ้นอยู่กับรูปร่างของวัตถุแสดงดังตารางที่ 8.3

ตารางที่ 8.3 โมเมนต์ความเฉื่อย

รูปร่างวัตถุ	แกนหมุน	รูป	โมเมนต์ความเฉื่อย I
ทรงกลมตัน มวล m รัศมี R	รอบแกนผ่านศูนย์กลาง		$I = \frac{2}{5} mR^2$
ทรงกลมกลวง มวล m รัศมี R	รอบแกนผ่านศูนย์กลาง		$I = \frac{2}{3} mR^2$
ทรงกระบอกตัน มวล m รัศมี R ยาว L	รอบแกนของทรงกระบอก		$I = \frac{1}{2} mR^2$
แผ่นกลมบางมวล m รัศมี R	รอบแกนผ่านศูนย์กลาง ตั้งฉากกับแผ่น		$I = \frac{1}{2} mR^2$
แผ่นกลมบางมวล m รัศมี R	รอบแกนผ่านศูนย์กลาง บนระนาบของแผ่น		$I = \frac{1}{4} mR^2$
แท่งวัตถุเล็กมวล m ยาว L	รอบแกนผ่านศูนย์กลาง มวล ตั้งฉากกับแท่ง		$I = \frac{1}{12} mR^2$

ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. [online]: เข้าถึง 5 กรกฎาคม

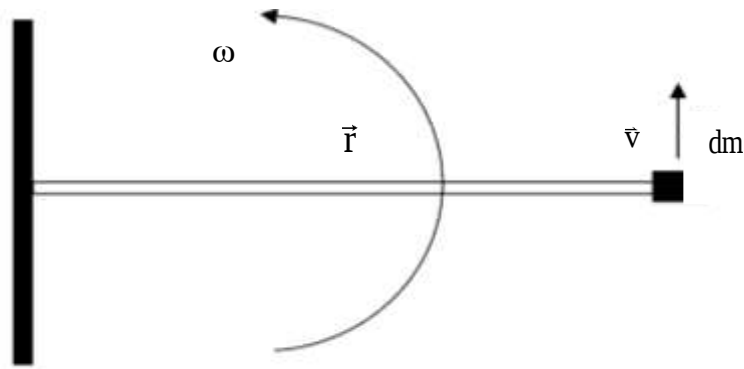
2559. จาก http://www.scimath.org/images/uploads/upload2/Untitled_9.png

8.3 พลังงานจลน์ในการหมุน (Rotational kinetic energy)

จากหัวข้อที่ผ่านมาเราได้ศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งและแรงที่กระทำสำหรับในหัวข้อนี้จะพูดถึงพลังงาน และกฎการอนุรักษ์พลังงาน เนื่องจากเมื่อใช้พลังงานคำนวณจะทำให้ง่ายและสะดวกกว่าการคำนวณเมื่อใช้แรงและทอร์ก แต่ปัญหาที่เกิดขึ้นคือพลังงานจลน์มีผลต่อการหมุนอย่างไร พิจารณาดังภาพที่ 8.9 เมื่อแบ่งมวล

ออกเป็นส่วนตัวเล็ก ๆ dm มีความเร็ว v และอยู่ห่างจากจุดหมุน r จากนิยามของพลังงานจลน์เชิงเส้นของมวลเล็ก ๆ

$$dE_k = \frac{1}{2} v^2 dm$$



ภาพที่ 8.9 พลังงานจลน์ในการหมุน

แต่ v คือความเร็วในแนวเส้นสัมผัส $v = r\omega$ จะได้

$$dE_k = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm$$

คิดทั้งหมด

$$\int dE_k = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm$$

เมื่อสมการทางซ้ายมือคือพลังงานจลน์ในการหมุนของวัตถุทั้งก้อน ส่วนสมการทางขวามือคือโมเมนต์ความเฉื่อย

พลังงานจลน์ในการหมุน

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (8-8)$$

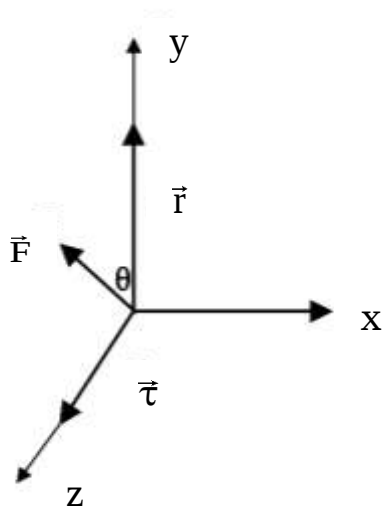
จะสังเกตเห็นว่าพลังงานจลน์เชิงเส้นจะมีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลคูณระหว่างความเฉื่อย (มวล) กับความเร็วกำลังสอง ในทำนองเดียวกันพลังงานจลน์ในการหมุนจะมีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลคูณระหว่างโมเมนต์ความเฉื่อยและความเร็วเชิงมุมยกกำลังสอง

8.4 ทอร์ก (Torque)

จากหัวข้อที่ผ่านมาเราารู้แล้วว่าขนาดของทอร์กคือผลคูณของแรงที่ไปตั้งฉาก ($F_{\perp}$) กับระยะแกนการหมุน (r) ดังสมการ (8-2)

$$\begin{aligned}\tau &= F_{\perp} r \\ &= (F \sin \theta) r\end{aligned}$$

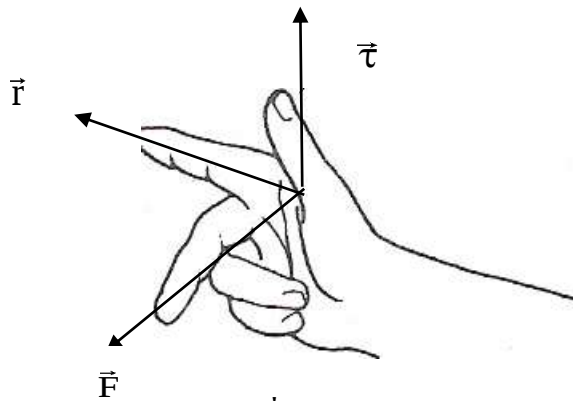
ต่อไปพิจารณาภาพที่ 8.10 ทิศของทอร์กจะมีทิศพุ่งออกจากระนาบของหน้ากระดาษ (ตามแกน z) ตามภาพเนื่องจากทิศของทอร์กจะขึ้นอยู่กับระนาบที่วัตถุหมุน ในกรณีนี้เมื่อวัตถุหมุนในระนาบ xy ดังนั้นเนื่องจากทอร์กเป็นเวกเตอร์และมีค่าคงที่ จึงมีทิศเพียงทิศเดียวเท่านั้นที่ตั้งฉากกับระนาบ xy นั่นคือแกน z แต่เนื่องจากทิศที่ตั้งฉากกับระนาบ xy มีสองทิศคือ $+z$ กับ $-z$ ดังนั้นเราสามารถใช้กฎมือขวาในการกำหนดทิศทางได้



ภาพที่ 8.10 ทิศทางของทอร์ก

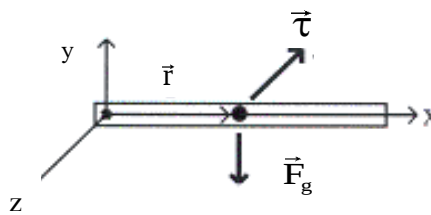
พิจารณากฎมือขวา จากภาพที่ 8.11 ซึ่งมีหลักการคือ

1. ให้นิ้วชี้ตามทิศของ $\vec{r}$
2. ให้นิ้วกลางไปตามทิศของแรง $\vec{F}$
3. นิ้วหัวแม่มือจะแสดงทิศของทอร์ก $\vec{\tau}$



ภาพที่ 8.11 กฎมือขวา

ตัวอย่างที่ 8.6 ไม้เมตรมวล 0.2 กิโลกรัมวางอยู่ในแนวราบปลายด้านหนึ่งชี้ไปทางทิศเหนือปลายอีกด้านหนึ่งตรึงติดอยู่กับที่ เมื่อปล่อยให้ไม้เมตรเคลื่อนที่ดังภาพที่ 8.12 จงหาทอร์กที่เกิดจากแรงโน้มถ่วง



ภาพที่ 8.12 สำหรับตัวอย่างที่ 8.6

วิธีทำ จากนิยามของทอร์ก

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = rF_g \sin\theta$$

$$= \frac{\ell}{2}(mg)$$

$$= \frac{1m}{2}(0.2\text{kg})(9.8\text{m/s}^2)$$

$$= 0.98 \text{ N}\cdot\text{m}$$

ดังนั้นขนาดของทอร์กเท่ากับ 0.98 นิวตันเมตร จากกฎมือขวาทอร์กจะมีทิศตามทิศ
ตะวันตก (แกน z)

8.5 โมเมนตัมเชิงมุมและทอร์ก (Angular momentum and Torque)

ในการคำนวณหาโมเมนตัมเชิงมุมเราสามารถนำหลักการเทียบกับการหาโมเมนตัม
เชิงเส้นได้ เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตันในการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น เรา
สามารถหาค่าโมเมนตัมที่เกิดจากการเคลื่อนที่ได้จากสมการ

$$\begin{aligned} \text{จากสมการ} \quad \sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d(m\vec{v})}{dt} \\ &= \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \vec{p} &= m\vec{v} \end{aligned}$$

ในขณะเดียวกันเราสามารถอาศัยกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน มาปรับใช้กับการ
เคลื่อนที่แบบหมุนของวัตถุแข็งเกร็งได้ พิจารณาจากสมการ

$$\begin{aligned} \sum \tau &= I\alpha \\ &= I \frac{d\omega}{dt} \\ &= \frac{d(I\omega)}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d\vec{L}}{dt} \\ \vec{L} &= I\vec{\omega} \end{aligned} \quad (8-11)$$

กฎข้อสองของนิวตันสำหรับการหมุน

$$\sum \tau = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็ง

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

ตัวอย่างที่ 8.7 จงหาโมเมนตัมเชิงมุมของดวงจันทร์เมื่อโคจรรอบโลก โดยกำหนดให้มวลของดวงจันทร์มีค่าเท่ากับ $m = 7.36 \times 10^{22} \text{ kg}$ และรัศมีวงโคจร $r = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$ และคาบในการเคลื่อนที่เท่ากับ 27.3 วัน หรือ $2.36 \times 10^6 \text{ s}$

วิธีทำ จากสมการของโมเมนตัมเชิงเส้น

$$\begin{aligned} p &= mv \\ p &= m \left(\frac{2\pi r}{T} \right) \\ &= (7.36 \times 10^{22} \text{ kg}) \left[\frac{2\pi (3.84 \times 10^8 \text{ m})}{2.36 \times 10^6 \text{ s}} \right] \\ &= 7.52 \times 10^{25} \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

จากสมการของโมเมนตัมเชิงมุม

จะได้

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L = rp$$

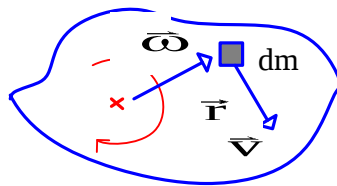
$$= (3.84 \times 10^8 \text{ m})(7.52 \times 10^{25} \text{ kg(m/s)})$$

$$= 2.89 \times 10^{34} \text{ kg(m}^2/\text{s)}$$

ดังนั้นโมเมนตัมเชิงมุมมีขนาดเท่ากับ 2.89×10^{34} กิโลกรัมเมตร² ต่อวินาที

ตัวอย่างที่ 8.8 จงหาค่าโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งโดยการประยุกต์ใช้นิยามของโมเมนตัมเชิงเส้น

วิธีทำ จากภาพที่ 8.13 พิจารณามวลก้อนเล็กๆ dm จากนั้นใช้นิยามของโมเมนตัมเชิงมุมและโมเมนตัมเชิงเส้น



ภาพที่ 8.13 สำหรับตัวอย่างที่ 8.8

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} dm$$

ให้จุดหมุนคงที่รัศมีจะตั้งฉากกับความเร็ว จากกฎมือขวาโมเมนตัมเชิงมุมจะมีทิศพุ่งเข้าตั้งฉากกับระนาบของกระดาษทิศเดียวกับความเร็วเชิงมุม และจากสมการ

$$d\vec{L} = r^2 v (dm) \hat{n}$$

$$= r(r\omega) \hat{n} dm$$

$$= r^2 \omega \hat{n} dm$$

$$= \omega r^2 dm$$

เมื่อคิดมวลทั้งก้อน

$$\int d\vec{L} = \int \vec{\omega} r^2 dm$$

$$\vec{L} = \vec{\omega} \int r^2 dm$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

8.6 กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม (Conservation of angular momentum)

กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นกล่าวว่า “ถ้า เมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำ “ในระบบเดี่ยว ผลรวมของโมเมนตัมเชิงเส้นจะมีค่าคงตัว”

พิจารณาจากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น และการประยุกต์ใช้กฎข้อสองสำหรับระบบอนุภาคเมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำ

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (8-13)$$

$$\vec{0} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{0} \quad (8-14)$$

ในทำนองเดียวกันอาศัยกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมและการประยุกต์ใช้กฎข้อสองของการหมุนเมื่อไม่มีทอร์กภายนอกมากระทำ

$$\sum \tau = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (8-15)$$

$$\vec{0} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

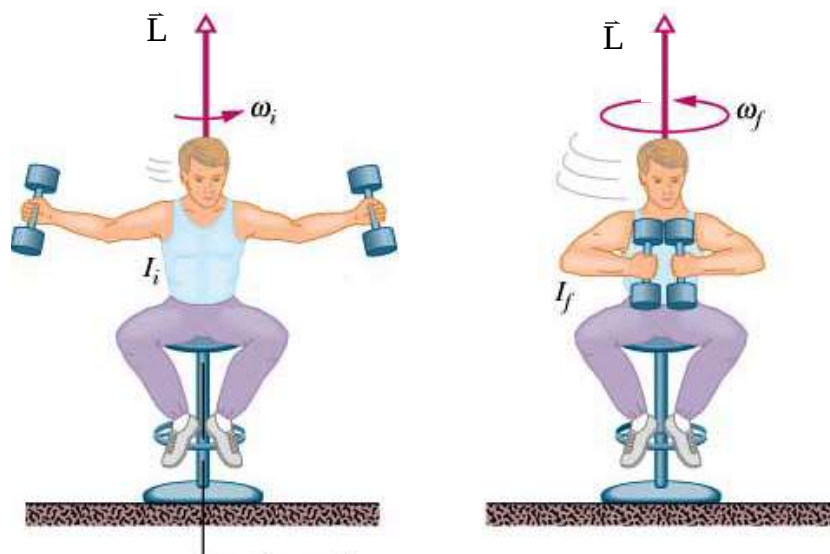
$$\Delta \vec{L} = \vec{0} \quad (8-16)$$

กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม “ในระบบโดดเดี่ยวผลรวมของโมเมนตัมเชิงมุมจะคงตัว” ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดคือ โต้ะหมุนและการเตะฟุตบอล

ตัวอย่างเช่น เมื่อยืนบนโต้ะหมุนที่กำลังหมุนอยู่ด้วยค่าโมเมนตัมเชิงมุมค่าหนึ่ง หากมีแรงภายนอกในทิศตั้งฉากกับระนาบทางจากแนวแรงถึงแกนหมุน หรือเราเรียกว่ามีทอร์กภายนอกมากระทำ จะมีผลทำให้โมเมนตัมเชิงมุมเกิดการเปลี่ยนแปลง อีกตัวอย่างหนึ่งก็คือ ลูกฟุตบอลที่กำลัง

กลิ้งหมุนไป ถ้าไม่มีทอร์คหรือคนมาเตะหรือกระทำต่อลูกฟุตบอล ลูกฟุตบอลจะหมุนไปด้วยโมเมนตัมเชิงมุมเท่าเดิม

ตัวอย่างที่ 8.9 นักศึกษาคนหนึ่งยืนบนโต๊ะหมุนและกางแขนทั้งสองข้างออก จากนั้นหดแขนเข้าแสดงดังภาพที่ 8.14 ทำให้ความเร็วเปลี่ยนจาก 10 รอบต่อวินาที เป็น 15 รอบต่อวินาที จงหาอัตราส่วนโมเมนต์ความเฉื่อยที่เปลี่ยนไปต่อโมเมนต์ความเฉื่อยเดิม



ภาพที่ 8.14 สำหรับตัวอย่างที่ 8.9

วิธีทำ จากโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็ง สำหรับโมเมนตัมเชิงมุมก่อนการเปลี่ยนแปลง

$$L_0 = I_0 \omega_0$$

โมเมนตัมเชิงมุมภายหลังการเปลี่ยนแปลง

$$L = I \omega$$

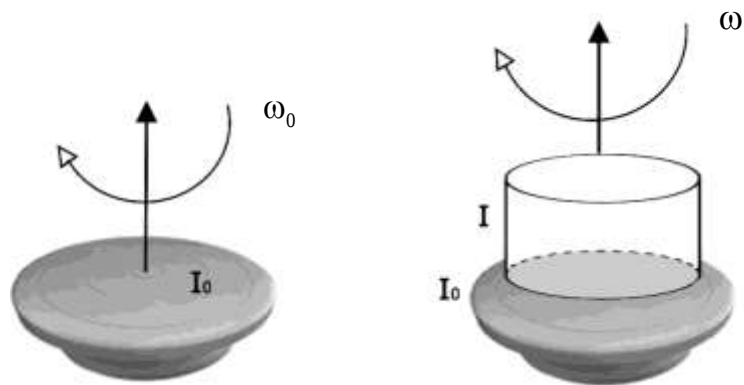
เมื่อไม่มีทอร์คภายนอกมากระทำจากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

$$L_0 = L$$

$$\begin{aligned}
 I_0 \omega_0 &= I \omega \\
 \frac{I}{I_0} &= \frac{\omega}{\omega_0} \\
 &= \frac{10 \text{rpm}}{15 \text{rpm}} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

จากคำตอบที่ได้แสดงว่าเมื่อความเร็วเชิงมุมเพิ่ม โมเมนต์ความเฉื่อยจะลดลงเพื่อให้โมเมนตัมเชิงมุมคงที่ตามกฎการอนุรักษ์พลังงาน

ตัวอย่างที่ 8.10 เป็นหมุนของช่างปั้นหม้อมีโมเมนต์ความเฉื่อย 0.4 กิโลกรัม·ตารางเมตร หมุนด้วยความเร็ว 100 รอบต่อนาที ถ้ามีดินเหนียวรูปทรงกระบอกมวล 4 กิโลกรัม รัศมี 20 เซนติเมตร เคลื่อนลงมาตามแนวดิ่งและตกลงตรงจุดศูนย์กลางของแป้นหมุนดังภาพที่ 8.16 จงหาอัตราการหมุนเมื่อก่อนดินเหนียวตกลงบนแป้นหมุน



ภาพที่ 8.16

วิธีทำ จากโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งจะได้

โมเมนตัมเชิงมุมเริ่มต้น

$$L_0 = I_0 \omega_0$$

โมเมนตัมเชิงมุมสุดท้าย

$$L = (I_0 + I)\omega$$

แต่ดินเหนียวเป็นรูปทรงกระบอกมีโมเมนต์ความเฉื่อยเป็น $I = \frac{1}{2}mr^2$

$$L = \left(I_0 + \frac{1}{2}mr^2 \right) \omega$$

เมื่อไม่มีทอร์กภายนอกมากระทำ จะได้ว่าโมเมนตัมเชิงมุมไม่มีการเปลี่ยนแปลง
อาศัยการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

$$I_0\omega_0 = \left(I_0 + \frac{1}{2}mr^2 \right) \omega$$

$$\omega = \frac{I_0\omega_0}{I_0 + \frac{1}{2}mr^2}$$

$$= \frac{(0.4\text{kg} \cdot \text{m}^2)(100\text{rpm})}{(0.4\text{kg} \cdot \text{m}^2) + \frac{1}{2}(4\text{kg})(0.1\text{m})^2}$$

$$= 95.2 \text{ rpm}$$

ดังนั้นอัตราการหมุนของแป้นคือ 95.2 รอบต่อนาที

บทสรุป

การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งซึ่งเป็นวัตถุที่มีมวลก้อนเล็กๆ หรืออนุภาคใดๆ อยู่ห่างกันเป็นระยะทางคงที่ตลอด จะประกอบไปด้วยการเคลื่อนที่ 2 แบบ คือ การเลื่อนที่ และการหมุน โดยเมื่อมีการหมุนจะเกิดปริมาณที่เทียบได้กับมวลคือ โมเมนต์ความเฉื่อยและปริมาณที่เทียบได้กับความเร็วเชิงเส้น คือความเร็วเชิงมุม เมื่อมีการเคลื่อนที่แบบหมุนจะเกิดปริมาณที่เรียกว่าโมเมนตัมเชิงมุมที่มีค่าเท่าโมเมนต์ความเฉื่อยคูณกับความเร็วเชิงมุมซึ่งเทียบได้กับการเคลื่อนที่เชิงเส้นที่เกิดโมเมนตัมคือความเร็วคูณกับมวล สำหรับสมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการเคลื่อนที่เป็นวงกลมนั้นสามารถใช้สมการของการเคลื่อนที่เชิงเส้นได้

แบบฝึกหัด

1. จงหาความเร่งของแผ่นทรงกลมสม่ำเสมอที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 10 เซนติเมตร หมุนรอบจุดศูนย์กลางด้วยความเร็ว 100 รอบต่อนาทีในเวลา 1 วินาที
2. สมชายออกแรงขนาด 200 นิวตัน จัดจานที่อยู่ห่างจากเขาเป็นระยะทาง 1 เมตร จงหาทอร์กที่เกิดขึ้น
3. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวงแหวนที่มีรัศมี 10 เซนติเมตร มวล 5 กิโลกรัม ที่กำลังหมุนรอบศูนย์กลาง
4. แผ่นจานทรงกลมสม่ำเสมอมีมวล 2 กิโลกรัม มีรัศมี 50 เซนติเมตร กำลังหมุนรอบจุดศูนย์กลาง จงหาโมเมนต์ความเฉื่อย
5. จงหาค่าโมเมนต์เชิงมุมของแผ่นจานทรงกลมที่มีมวล 2 กิโลกรัม มีรัศมี 50 เซนติเมตร หมุนด้วยความเร็ว 300 รอบต่อนาที
6. ชายคนหนึ่งยืนหมุนรอบตัวเอง โดยให้แขนกางออกทำให้เขามีความเร็วเป็น 20 รอบต่อวินาที หลังจากนั้นเขาหดแขนเข้าทำให้ความเร็วลดลงเป็น 10 รอบต่อวินาที จงหาอัตราส่วนของโมเมนต์ความเฉื่อยก่อนและหลังการหดแขนของเขา
7. ล้อกลิ้งกำลังหมุนอยู่กับที่ ด้วยความเร็ว 100 รอบต่อวินาที ทำให้เกิดโมเมนต์ความเฉื่อย 1 กิโลกรัมเมตร² จงหาพลังงานจลน์ที่เกิดจากการหมุน
8. ลูกมวล 2 กิโลกรัม กับเชือกที่เบาโดยให้ปลายอยู่ห่างจากจุดหมุน 1 เมตร หลังจากนั้นหมุนเชือกด้วยความเร็ว 100 รอบต่อวินาที จงหาพลังงานจลน์ของการหมุน

บรรณานุกรม

ก่องกัญจน์ ภัทราภาณจน์ และชนภาณจน์ ภัทราภาณจน์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2552).

ฟิสิกส์ 1 ตัวอย่างและโจทย์พร้อมคำเฉลย. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ก่องกัญจน์ ภัทราภาณจน์ และ ชนภาณจน์ ภัทราภาณจน์. (2550). **ฟิสิกส์ 2: ตัวอย่างและโจทย์พร้อม**

คำเฉลย. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2549). **ฟิสิกส์ 1.** กรุงเทพฯ:

สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เชิญโชค ศรีขวัญ และคณะ, มหาวิทยาลัยมหิดล. (2546). **ฟิสิกส์ทั่วไป 1.** กรุงเทพฯ: คณะ

วิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล.

ทวี นิยมอ้อย, มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์. (2541). **ฟิสิกส์พื้นฐานระดับมหาวิทยาลัย 1.**

กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

ทิพรรัตน์ วงษ์เจริญ. (2538). **ฟิสิกส์กลศาสตร์.** กรุงเทพฯ : แมก.

ปิยพงษ์ สิริคัง. (2540). **ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์ฟิสิกส์พื้นฐาน.** กรุงเทพฯ : แมคกรอฮิล.

บดินทร์ชาติ สุขบท. (2547). **ฟิสิกส์ 1.** กรุงเทพฯ: สกายบุ๊กส์.

วิจิต กฤษณะภักดี. (2538). **ฟิสิกส์เบื้องต้นและพื้นฐาน.** กรุงเทพฯ : โอเคียนสโตร์.

วีระชัย สิริพันธ์วรารณ์ และ วิฑูร ชื่นวชิรศิริ. (2550). **ฟิสิกส์เบื้องต้น: สำหรับวิทยาศาสตร์**

การแพทย์ พยาบาล และสาธารณสุข เล่ม 1. กรุงเทพฯ: เจริญดีมั่นคงการพิมพ์.

ปรเมษฐ์ ปัญญาเหล็ก, มหาวิทยาลัยศรีปทุม. (2553). **ปฏิบัติการฟิสิกส์ 1.** กรุงเทพฯ: โรง

พิมพ์มหาวิทยาลัยศรีปทุม.

สมพงษ์ ใจดี. (2541). **ฟิสิกส์มหาวิทยาลัย 1.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สมพงษ์ ใจดี. (2541). **ฟิสิกส์มหาวิทยาลัย 2.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สุชาติ สุภาพ, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี. (2558). **ฟิสิกส์ทั่วไป.** กรุงเทพฯ:

สำนักพิมพ์ทริปเพิ้ล เอ็ดดูเคชั่น.

อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ (2543). **ฟิสิกส์เล่ม 1.** กรุงเทพฯ. สมาคมวิทยาศาสตร์

แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์

อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ (2543). **ฟิสิกส์เล่ม 2.** กรุงเทพฯ. สมาคมวิทยาศาสตร์

แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์

Fraser, G. (2006). **The New Physics for the Twenty-First Century**. Cambridge:
Cambridge University Press.

Giambattista, A., Richardson, B.M., and Richardson, R.C. (2007). **College Physics 2nd**
ed. Boston: Mc Graw Hill.

Serway, R. A., and Jewett, J. W. (2014). **Physics for Scientists and Engineers with**
Modern Physics 9th ed. Belmont: Brooks/Cole-Thomson Learning.

Serway, R.A., Vuille, C., and Hughes, J. (2015). **College Physics 10th ed.** Stamford:
Cengage Learning.

Thornton, T.S., and Rex, A. (2013). **Modern Physics for Scientists and Engineers 4th**
ed. Boston: Brooks/Cole- Cengage Learning.

Young, H.D., and Freedman, R.A. (2016). **Sear's & Zemansky's University Physics**
with Modern Physics 14th ed. Essex: Pearson Education Limited.