คณิตศาสตร์

# Quiz 1 (8:00) : ทฤษฎีจำนวน MAI1305

**หัวข้อ** อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

**เวลา** สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 2/2568

**ผู้สอน** ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

**ชื่อ-สกุล** ........................................................................................ **รหัสนักศึกษา**..................................... **หมู่เรียน**.............

---

1. **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ $n$ ใด ๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

2. **(5 คะแนน)** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $4 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$

# เฉลย Quiz 1 (8:00): ทฤษฎีจำนวน MAI1305

**หัวข้อ** อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
**เวลา** สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 2/2568
**ผู้สอน** ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ $n$ ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

***บทพิสูจน์*.** ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

**ขั้นฐาน** : เนื่องจาก $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 = \frac{24}{6} = \frac{1(2)(3)(4)}{4}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

**ขั้นอุปนัย** : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) \\
&\qquad = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) \\
&\qquad = (k+1)(k+2)(k+3)\left[\frac{k}{4} + 1\right] \\
&\qquad = (k+1)(k+2)(k+3)\left[\frac{k+4}{4}\right] \\
&\qquad = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}
\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

สำหรับทุกจำนวนนับ $n$ □

2. **(5 คะแนน)** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $4 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$

<u>**วิธีที่ 1**</u>

***บทพิสูจน์*** . ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม $q$ ซึ่ง $n = 2q$ หรือ $n = 2q+1$

กรณี $n = 2q$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= 2q(2q+1)(2q+2)(2q+3) \\ &= 2q(2q+1)2(q+1)(2q+3) \\ &= 4[q(2q+1)(q+1)(2q+3)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$

กรณี $n = 2q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= (2q+1)(2q+1+1)(2q+1+2)(2q+1+3) \\ &= (2q+1)(2q+2)(2q+3)(2q+4) \\ &= (2q+1)2(q+1)(2q+3)2(q+2) \\ &= 4[(2q+1)(q+1)(2q+3)(q+2)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$

$\square$

<u>**วิธีที่ 2**</u>

***บทพิสูจน์*** . ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม $q$ ซึ่ง

$$n = 4q \text{ หรือ } n = 4q+1 \text{ หรือ } n = 4q+2 \text{ หรือ } n = 4q+3$$

กรณี $n = 4q$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= 4q(4q+1)(4q+2)(4q+3) \\ &= 4[q(4q+1)(4q+2)(4q+3)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$

กรณี $n = 4q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= (4q+1)(4q+1+1)(4q+1+2)(4q+1+3) \\ &= (4q+1)(4q+2)(4q+3)(4q+4) \\ &= (4q+1)(4q+2)(4q+3)4(q+1) \\ &= 4[(4q+1)(4q+2)(4q+3)(q+1)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$

กรณี $n = 4q+2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= (4q+2)(4q+2+1)(4q+2+2)(4q+2+3) \\ &= (4q+2)(4q+3)(4q+4)(4q+5) \\ &= (4q+2)(4q+3)4(q+1)(4q+5) \\ &= 4[(4q+2)(4q+3)(q+1)(4q+5)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$

กรณี $n = 4q + 3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= (4q+3)(4q+3+1)(4q+3+2)(4q+3+3) \\ &= (4q+3)(4q+4)(4q+5)(4q+6) \\ &= (4q+3)4(q+1)(4q+5)(4q+6) \\ &= 4[(4q+3)(q+1)(4q+5)(4q+6)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$

$\square$

คณิตศาสตร์

# Quiz 1 (13:00) : ทฤษฎีจำนวน MAI1305

**หัวข้อ** อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

**เวลา** สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 2/2568

**ผู้สอน** ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

**ชื่อ-สกุล** ........................................................................................ **รหัสนักศึกษา**...................................... **หมู่เรียน**.............

---

1. **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ $n$ ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

2. **(5 คะแนน)** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $3 \mid n[(2n+1)(2n+2) - 3]$

# เฉลย Quiz 1 (13:00) : ทฤษฎีจำนวน MAI1305

**หัวข้อ** อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

**เวลา** สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 2/2568

**ผู้สอน** ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ $n$ ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

***บทพิสูจน์*** . ให้ $n\in\mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

**ขั้นฐาน** : เนื่องจาก $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}=\frac{3}{4}=1-\frac{4}{3}=1-\frac{2(1)}{2(1)+1}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

**ขั้นอุปนัย** : ให้ $k\in\mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\cdots+\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(k+1)^2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\cdots+\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}+\frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2} &= 1-\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2}\\
&= 1-\frac{1}{(k+1)^2}\left[1-\frac{2k+3}{(k+2)^2}\right]\\
&= 1-\frac{1}{(k+1)^2}\left[\frac{(k+2)^2-(2k+3)}{(k+2)^2}\right]\\
&= 1-\frac{1}{(k+1)^2}\left[\frac{(k^2+4k+4)-(2k+3)}{(k+2)^2}\right]\\
&= 1-\frac{1}{(k+1)^2}\left[\frac{k^2+2k+1}{(k+2)^2}\right]\\
&= 1-\frac{1}{(k+1)^2}\left[\frac{(k+1)^2}{(k+2)^2}\right]\\
&= 1-\frac{1}{(k+2)^2}
\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

สำหรับทุกจำนวนนับ $n$ □

2. **(5 คะแนน)** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $3 \mid n[(2n+1)(2n+2)-3]$

***บทพิสูจน์***. ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม $q$ ซึ่ง $n = 3q$ หรือ $n = 3q+1$ หรือ $n = 3q+2$

กรณี $n = 3q$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n[(2n+1)(2n+2)-3] &= 3q[(2\cdot 3q+1)(2\cdot 3q+2)-3] \\ &= 3[(6q+1)(6q+2)-3] \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid n[(2n+1)(2n+2)-3]$

กรณี $n = 3q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n[(2n+1)(2n+2)-3] &= (3q+1)[(2(3q+1)+1)(2(3q+1)+2)-3] \\ &= (3q+1)[(6q+2+1)(6q+2+2)-3] \\ &= (3q+1)[(6q+3)(6q+4)-3] \\ &= (3q+1)[3(2q+1)(6q+4)-3] \\ &= (3q+1)3[(2q+1)(6q+4)-1] \\ &= 3[(3q+1)[(2q+1)(6q+4)-1]] \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid n[(2n+1)(2n+2)-3]$

กรณี $n = 3q+2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n[(2n+1)(2n+2)-3] &= (3q+2)[(2(3q+2)+1)(2(3q+2)+2)-3] \\ &= (3q+2)[(6q+4+1)(6q+4+2)-3] \\ &= (3q+2)[(6q+5)(6q+6)-3] \\ &= (3q+2)[(6q+5)3(2q+2)-3] \\ &= (3q+2)3[(6q+5)(2q+2)-1] \\ &= 3[(3q+2)[(6q+5)(2q+2)-1]] \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid n[(2n+1)(2n+2)-3]$

$\square$