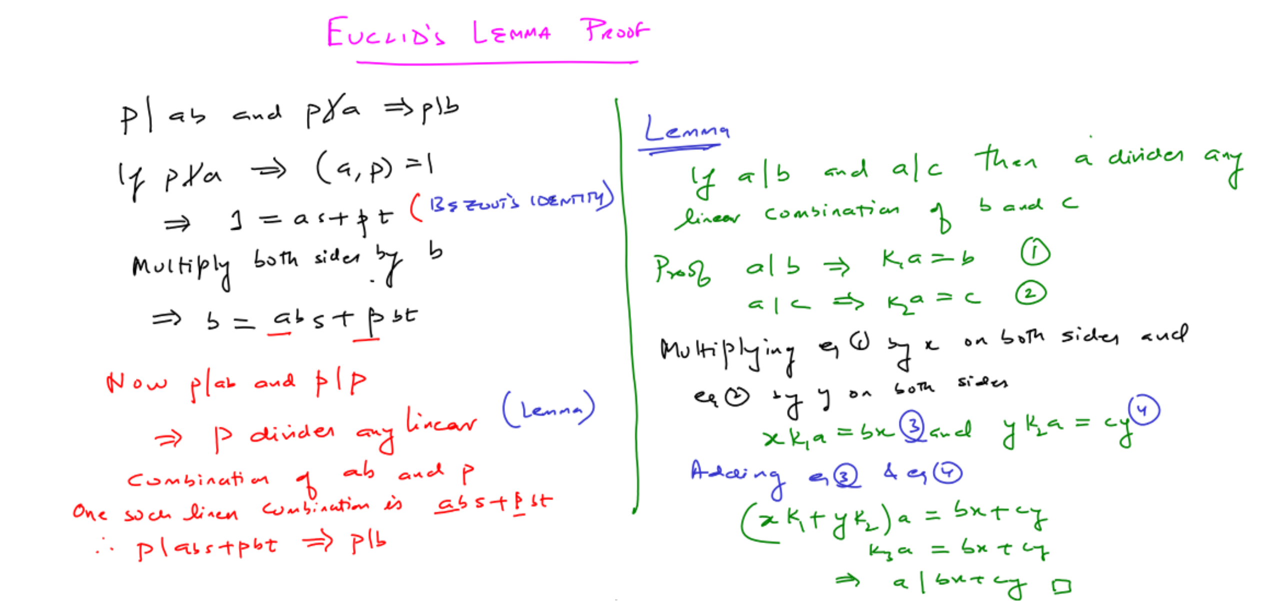
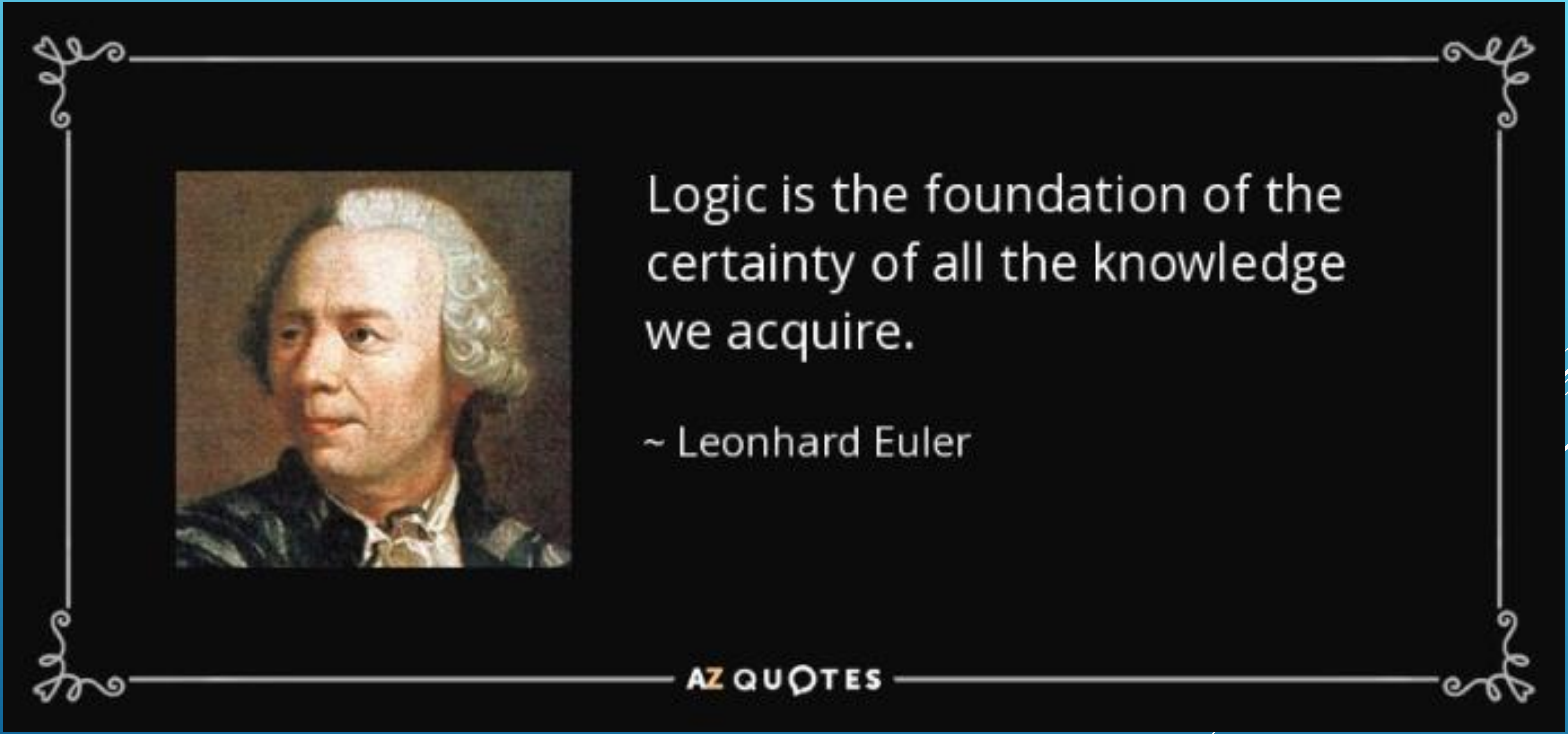
บทที่ 3 ระเบียบวิธีพิสูจน์



Euclid of Alexandria


Logic is the foundation of the certainty of all the knowledge we acquire.
~ Leonhard Euler
AZ QUOTES

1. การพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $p \rightarrow q$

2. การพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $p \leftrightarrow q$

3. การพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $p \rightarrow (q \vee r)$

4. การพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $(p \vee q) \rightarrow r$

5. การพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $p \rightarrow (q \wedge r)$

6. การพิสูจน์ด้วยวิธีขัดแย้ง

7. การพิสูจน์ข้อความการมีอยู่จริง

8. การพิสูจน์ข้อความซึ่งเป็นไปได้อย่างเดียว

9. การพิสูจน์อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

1. การพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $p \rightarrow q$

การพิสูจน์ข้อความในรูปแบบนี้สามารถทำการพิสูจน์ได้ 3 วิธี

1) โดยวิธีตรง (direct proof)

2) โดยวิธีการแย้งสลับที่ (contrapositive proof)

และ 3) โดยวิธีขัดแย้ง (contradiction proof)

การพิสูจน์โดยวิธีตรง : $p \rightarrow q$

การพิสูจน์วิธีนี้จะเริ่มโดยการสมมติว่า p มีค่าเป็นจริง จากนั้นก็เขียนลำดับของข้อความซึ่งได้มาจากข้อความที่มีมาก่อนอย่างถูกต้องตามหลักตรรกศาสตร์ แล้วจบลงด้วยผลสรุป (q)

<u>รูปแบบ</u>	สมมติให้	p	เป็นจริง
	แสดงให้ได้ว่า	q	เป็นจริง
		⋮	
	เพราะฉะนั้น	q	เป็นจริง
	ดังนั้น	$p \rightarrow q$	เป็นจริง

การพิสูจน์โดยแย้งสลับที่ : $p \to q \equiv {\sim}q \to {\sim}p$

เนื่องจาก $p \to q \equiv {\sim}q \to {\sim}p$ ดังนั้นในการพิสูจน์ข้อความ $p \to q$ เราสามารถแสดงให้ได้ว่า ${\sim}q \to {\sim}p$ เป็นจริงแทนก็ได้

<u>รูปแบบ</u>	สมมติให้	${\sim}q$	เป็นจริง
	แสดงให้ได้ว่า	${\sim}p$	เป็นจริง
		$\vdots$	
	เพราะฉะนั้น	${\sim}p$	เป็นจริง
	ดังนั้น	${\sim}q \to {\sim}p$	เป็นจริง

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

การพิสูจน์โดยวิธีข้อขัดแย้ง

จาก $p \rightarrow q \equiv (p \wedge \sim q \rightarrow c)$ เมื่อ c คือข้อความขัดแย้ง เนื่องจาก c เป็นเท็จ

ถ้า $p \wedge \sim q \rightarrow c$ เป็นจริง ทำให้ $p \wedge \sim q$ ต้องเป็นเท็จ ดังนั้นถ้าต้องการพิสูจน์ $p \rightarrow q$ เป็นจริง สามารถพิสูจน์ $p \wedge \sim q \rightarrow c$ แทนได้

เรียกการพิสูจน์นี้ว่า "การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง"

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.2.1 จะเรียกจำนวนจริง r ว่าเป็น **จำนวนตรรกยะ** (rational number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $r = \frac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ และเรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะว่าเป็น **จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.2.1 จะเรียกจำนวนจริง r ว่าเป็น **จำนวนตรรกยะ** (rational number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $r = \dfrac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ และเรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะว่าเป็น **จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.2.1 จะเรียกจำนวนจริง r ว่าเป็น **จำนวนตรรกยะ** (rational number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $r = \frac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ และเรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะว่าเป็น **จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

2. การพิสูจน์โดยวิธีตรง : $p \leftrightarrow q$

จากกฎการสมมูลในบทที่ 2 เราทราบว่า $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ดังนั้นการพิสูจน์ประพจน์ $p \leftrightarrow q$ ต้องแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 พิสูจน์ $p \rightarrow q$ ซึ่งเรียกขั้นนี้ว่า p เป็น *เงื่อนไขที่เพียงพอ (sufficiency)* สำหรับ q

กรณีที่ 2 พิสูจน์ $q \rightarrow p$ ซึ่งเรียกขั้นนี้ว่า p เป็น *เงื่อนไขที่จำเป็น (necessary)* สำหรับ q

จะเรียกว่า “**การพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้** (proof of biconditional statements)”

2. การพิสูจน์โดยวิธีตรง : $p \leftrightarrow q$

การพิสูจน์ข้อความ $p \leftrightarrow q$ อีกวิธีหนึ่งคือการสร้างข้อความที่สมมูลต่อเนื่องกันจากข้อความ p ไปยังข้อความ q ดังนี้

$$
\begin{array}{rcl}
p \leftrightarrow q_1 & \text{เขียนสั้นๆ ได้เป็น} & p \leftrightarrow q_1 \\
q_1 \leftrightarrow q_2 & \text{เขียนสั้นๆ ได้เป็น} & \leftrightarrow q_2 \\
q_2 \leftrightarrow q_3 & \text{เขียนสั้นๆ ได้เป็น} & \leftrightarrow q_3 \\
\vdots & & \vdots \\
q_n \leftrightarrow q & \text{เขียนสั้นๆ ได้เป็น} & \leftrightarrow q
\end{array}
$$

วิธีการพิสูจน์แบบนี้เรียกว่า Iff-String

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.2.1 จะเรียกจำนวนจริง r ว่าเป็น **จำนวนตรรกยะ** (rational number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $r = \dfrac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ และเรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะว่าเป็น **จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.2.1 จะเรียกจำนวนจริง r ว่าเป็น **จำนวนตรรกยะ** (rational number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $r = \dfrac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ และเรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะว่าเป็น **จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.2.1 จะเรียกจำนวนจริง r ว่าเป็น **จำนวนตรรกยะ** (rational number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $r = \dfrac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ และเรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะว่าเป็น **จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.2.1 จะเรียกจำนวนจริง r ว่าเป็น **จำนวนตรรกยะ** (rational number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $r = \dfrac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ และเรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะว่าเป็น **จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.2.1 จะเรียกจำนวนจริง r ว่าเป็น **จำนวนตรรกยะ** (rational number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $r = \dfrac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ และเรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะว่าเป็น **จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.2.1 จะเรียกจำนวนจริง r ว่าเป็น **จำนวนตรรกยะ** (rational number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $r = \dfrac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ และเรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะว่าเป็น **จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

3. การพิสูจน์โดยวิธีตรง : $p \rightarrow (q \vee r)$

จากกฎการสมมูลในบทที่ 2 เราทราบว่า $p \rightarrow (q \vee r) \equiv p \rightarrow (\sim q \rightarrow r)$

ดังนั้นการพิสูจน์ประพจน์ $p \rightarrow (q \vee r)$ มีขั้นตอนดังนี้

สมมติให้ p และ ~q เป็นจริง

$\vdots$

ดังนั้น r เป็นจริง

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.2.1 จะเรียกจำนวนจริง r ว่าเป็น **จำนวนตรรกยะ** (rational number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $r = \dfrac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ และเรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะว่าเป็น **จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.2.1 จะเรียกจำนวนจริง r ว่าเป็น **จำนวนตรรกยะ** (rational number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $r = \frac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ และเรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะว่าเป็น **จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.2.1 จะเรียกจำนวนจริง r ว่าเป็น **จำนวนตรรกยะ** (rational number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $r = \dfrac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ และเรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะว่าเป็น **จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

บทนิยาม 2.1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

จะเรียก n ว่า **จำนวนคู่** (even number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$

และจะเรียก n ว่า **จำนวนคี่** (odd number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

n เป็นจำนวนคี่ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

บทนิยาม 2.1.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $m \neq 0$ จะกล่าวว่า

m **หาร** n **ลงตัว** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = mq$ เขียนแทนด้วย $m|n$

และถ้า m หาร n ไม่ลงตัว เราเขียนแทนด้วย $m \nmid n$

บทนิยาม 2.2.1 จะเรียกจำนวนจริง r ว่าเป็น **จำนวนตรรกยะ** (rational number) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $r = \dfrac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ และเรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะว่าเป็น **จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

4. การพิสูจน์โดยวิธีตรง : $(p \vee q) \rightarrow r$

จากกฎการสมมูลในบทที่ 2 เราทราบว่า $(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

ดังนั้นการพิสูจน์ประพจน์ $(p \vee q) \rightarrow r$ มี 2 กรณีดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> พิสูจน์ $p \rightarrow r$

<u>กรณีที่ 2</u> พิสูจน์ $q \rightarrow r$

การพิสูจน์แบบนี้เรียกว่า “การพิสูจน์แบบแจกแจงกรณี”

5. การพิสูจน์โดยวิธีตรง : $p \rightarrow (q \wedge r)$

จากกฎการสมมูลในบทที่ 2 เราทราบว่า $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

ดังนั้นการพิสูจน์ประพจน์ $p \rightarrow (q \wedge r)$ มี 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 พิสูจน์ $p \rightarrow q$

กรณีที่ 2 พิสูจน์ $p \rightarrow r$